د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت

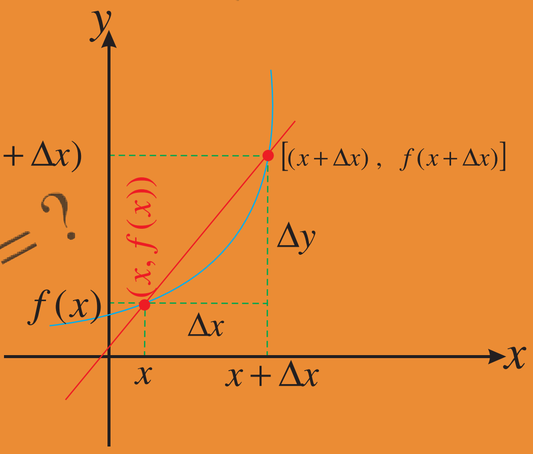
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

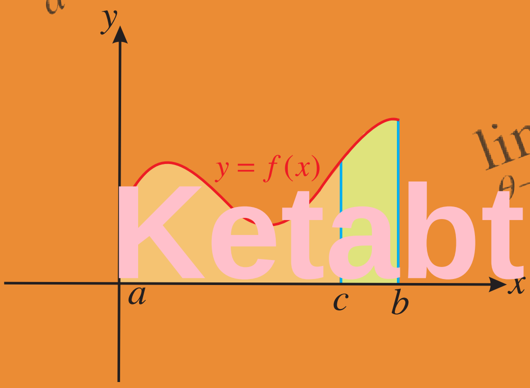
ریاضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

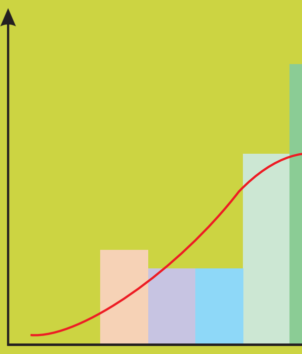




$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

ریاضي ۱۲ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰



Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف
لوی ریاست

ریاضي ۱۲ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکوالان:

- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- سرمؤلف میرنقیب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال رحیمه هدایت‌زی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې

د ژبې ایډیټ:

- محمدقدوس ذکوخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شېر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید «نوید» نسیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پېغام

گرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کيږي. ښکاره ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوې دي. د زده‌کړې په بهير کې د زده‌کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه گرځيدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده‌کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده‌کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده‌کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توگه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپيڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د څرگندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده‌کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملگرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک | مخونه

لومړی څپرکي لیمیټ ۱-۴۰
- د لیمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه
- د لیمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابعګانو لیمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty-\infty$ او $0\cdot\infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ
- د تابعګانو متمادیت
- د متمادي تابعګانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات ۴۱-۸۲
- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعګانو مشتق
- د مثلثاتي تابعګانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه ۸۳-۱۳۲
- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په ګټې اخیستنې سره
- د منحنيګانو رسمول
- د توابعو د ګرافونو مجانبونه
- د هوموګرافیک تابعګانو ګراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیټال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک | مخونه

څلورم څپرکی انتیګرال ۱۳۳-۱۷۲

- د ریمان مجموعه
- د انتیګرال مفهوم
- د غیرمعین انتیګرال خواص
- معین انتیګرال
- د معین انتیګرال خواص
- د مشتق او انتیګرال اساسي قضیې
- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه
- قسمي انتیګرالونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال ۱۷۳-۱۹۸

- د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق
- د معکوسو تابعګانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه
- د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات ۱۹۹-۲۲۲

- د یوې منحني د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو محصور شویو منحنیګانو ترمنځ د مساحت محاسبه
- د دوراني جسمونو د حجم محاسبه
- د قوس د اوږدوالی محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی احصائیه ۲۲۳-۲۶۰

- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جمله‌یي توزیع او د برنولي آزمایښت
- د پواسن د احتمال توزیع
- د نورمال توزیع
- د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
- نمونه اخیستل
- د نمونې د اوسط توزیع
- د مرکزي لیمیټ قضیه
- د نمونه‌یي توزیع نسبت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احتمالات ۲۶۱-۲۸۲

- پرېکړې او نښتې فضاګانې
- هم چانسه پېښې
- د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخپلواکه پېښو استقلالیت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

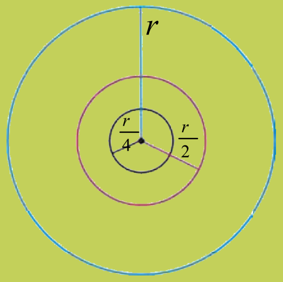
لومړی څپرکی

لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته نور هم خپلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

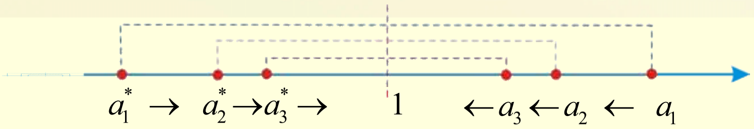
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت (ځای) وښیئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دباندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منځنی ټکی یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پراوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نږدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله: لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف n – ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

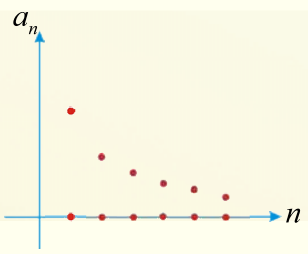
مثال: لاندي ورکړل شوي رديفونه د n د تر ټولو لويو قيمتونو لپاره کوم قيمت ته تقرب کوي يا نږدې کېږي، موضوع په ګرافيکي ډول تشريح کړئ، په داسې حال کې چې:

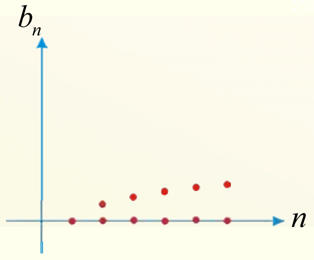
$$a_n = (\frac{2n+3}{n}) \ ... (i) \qquad b_n = (\frac{n-1}{n}) \ ... (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ ... (iii)$$

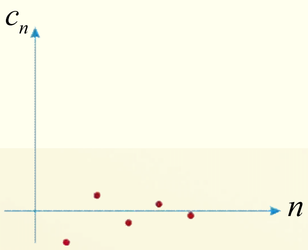
حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قيمتونو لپاره ګرافيکي ښودنه په لاندي ډول ده.

n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$

n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$







n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

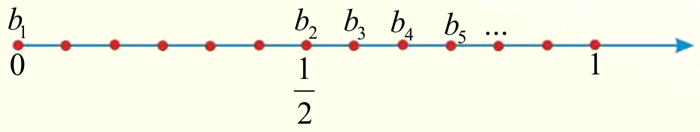
له پورتينو ګرافونو څخه ليدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قيمتونو په زياتېدو سره د ترادفونو قيمت يوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لويو قيمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قيمتونو له جدول څخه د لېميټ قيمت څرګندېږي، د لېميټ په شته والی کې رديف يوه ټاکلي عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لېميټ (limit) وايي. چې په lim سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددي لپاره د $b_n=\frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نيسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	…



او يـــــا کـــــه چيــــــري $\frac{1}{n}$, … , $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ .... I ، $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}, \dots , \frac{n+1}{n}$ .... II او $2,4,6, \dots , 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونيسو، ليدل کېږي چې که n د بې نهايت لورې ته نږدې شي، نو د I ترادف صفر ته نږدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نږدې کېږي د III ترادف د بې‌نهايت(∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta>0$) څخه کوچنی دی يا په لاندې ډول:

$$\forall\delta>0:|x-a|<\delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x=a \quad \text{يا} \quad x\to a \quad \text{يا} \quad |x-a|\to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x\to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ , \dots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x\to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ , \dots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x\to a \iff (x\to a^+\ ,\ x\to a^-)$$

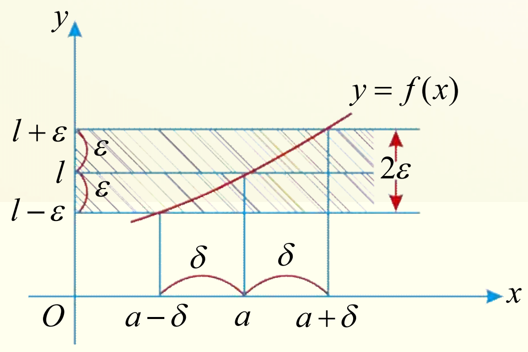
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نږدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \dots \to 9^+$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \dots \to 9^-$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګڼون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که د x (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي او کيڼ خوا لېميټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ وواياست چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.

فعاليت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته څېنې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لېمټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لېميټ لري که چيرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لېميټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لېميټ لري که چيرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نږدې شي د l لېميټ لري، يعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼي خوا لېميټونه تر څېړني لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼې خوا لېميټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \;:\; |x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \;\Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنی اړيکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړيکه لري، که δ ته قيمت ورکړو ε قيمت اخلي او که ε ته قيمت ورکړو δ قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېميټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېميټ لري، يعني: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښيئ چې د $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېميټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېمېټ خاصيتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلېمېټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لېمېټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لېمېټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}, \quad \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چیرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یوې بې نهایت کوچنې تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په حیث وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چیرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنې تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنې تابعګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

4- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنې تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لیمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنې تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنې تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لیمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبوو و:

1. د څو تابعګانو د مجموعې لیمیټ د نومورو هرې تابع د لیمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چیرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابعګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}[f(x_1)+f(x_2)]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: که $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$, $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنې تابعګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}[f(x_1)\pm f(x_2)]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهايت کوچنيو تابعګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهايت کوچنيو تابعګانو مجموعه او تفاضل بياهم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو يا څو تابعګانو د ضرب د حاصل لېميټ د نومړو تابعګانو د لېميټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{aligned}f(x_1)&=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل يې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهايت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابعګانو د نسبت لېميټ د هغو تابعګانو د لېميټونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفريق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنی مثبت عددونه($0<\varepsilon<1$)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې به لاس راځي، چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د ساندویچ قضیه: که چیرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلې انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a}h(x)=b=\lim_{x\to a}f(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a}u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1$$

قضیه: که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعګانې وي چې $f(x)<g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابعګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې $f(x)<g(x)$ دی، د $x>1$ لپاره لرو:

حل:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}6x^3-2x^2+5x+3$
2) $\lim_{x\to -1}x^7-2x-5$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$
5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$
6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نسبتي تابعګانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اریکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$
$$\infty - \infty$$
$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابعګانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- د ځینو تابعګانو لیمیټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ ... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول یې تر څیړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ **بڼه**:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅیړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad ,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad ,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پیداکړئ.

حل:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دریم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیداکړئ.

حل:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

یادونه: هغه تابعگانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عملیه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لیمیټ په لاس راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چیرې ($x\to\infty$) کړی وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- خرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- خرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- خرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټونو قیمتونو پیداکړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لیمیټ پیداکړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لیمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابعګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیداکړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لیمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري نو لیکلای شو، چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3}) = ?$

حل2:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3}) = (1-1)(\frac{1}{1^2+2-3}) = 0\cdot\frac{1}{3-3} = 0\cdot\frac{1}{0} = 0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ د $(0\cdot\infty)$ شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیداکړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بنه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- دکومې عملیې په مرسته کولای شو چې $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې: $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$

یادونه:

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاربږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دى چې $e = 2.71\ldots$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II-

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = e^x - 1 \quad \Rightarrow e^x = 1 + y \quad \Rightarrow x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \ , \ y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \ , \ y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u - 1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha = u - 1$ دی که چیرې $u \to 1$ نو $\alpha \to 0$ **ته نږدې کیږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومیږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^\infty$

څرنګه چې معلومېږي لېمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P=e^0=1$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$ 2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$ 4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

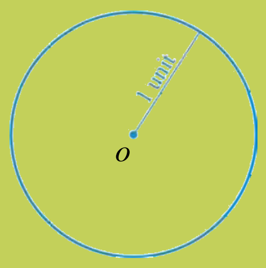
5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو لېميټ

Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.



- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرنۍ ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لېمټ مساوي په (1) دی، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

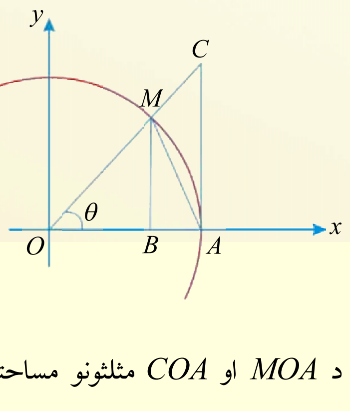
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{BM} = \frac{\overline{BM}}{2} \cdot r$$ = د MOA مثلث مساحت

$$\frac{1}{2}\theta r^2$$ = د $O\overset{\frown}{A}M$ قطاع مساحت

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot r$$ = د $\overset{\Delta}{COA}$ مساحت



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2} r\,\overline{BM} < \frac{1}{2}\theta r^2 < \frac{\overline{AC}}{2} \cdot r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to0} 1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاويې ساين د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاويې ساین او د هغې زاويې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاويه بې‌نهایت ته نږدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیداکړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot1 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$　2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$　3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$　5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$　6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$　8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$　9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابعگانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابعگانو گرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځيني يې په يوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې يا متمادي تابعگانې بلل کېږي او ځيني يې په يوه قلم نه شي رسمېدلای يعنې د رسم په وخت کې بايد د قلم څوکه يو ځل يا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په يوه برخه کې يې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابعگانې په نومونړی ټکي کې غير متصلې يا غير متمادي تابعگانې بلل کېږي.

فعاليت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعريف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل: څرنگه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د متماديت له شرطونو څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR \\ 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

څرنگه چې د متماديت درې واړه شرطونه په کې حقيقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅیړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده؛ له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

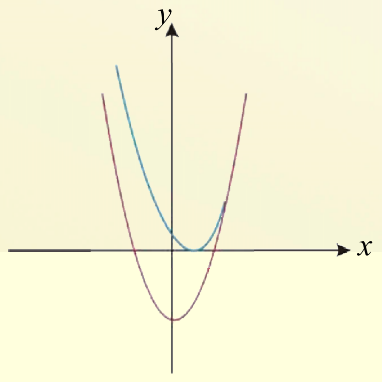
څرنگه چې ليدل کيږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

درېيم مثال: د $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & ; x<2 \\ x^2-3 & ; x\geq 2\end{cases}$ د تابع متماديت د $x=2$ په ټکي کې وڅیړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا لیمټونه څیړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پايله کې ويلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې ليدل کيږي.



څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 \; ; \; x\ge 1\\ 1-x \; ; \; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متماديت وڅیړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چیرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چیرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم ترکمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چیرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \quad ; \quad x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x = -1$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x = -2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x = 3$

e) $f(x) = |x-3| \quad ; \quad x = 3$

f) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 3 & ; \quad x = 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعګانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , g(x) \neq 0$$

فعالیت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعګانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعګانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابعګانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابعګانو تفریق $f(x) - g(x)$

3- د تابعګانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابعګانو تقسیم $\frac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلګه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع** د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعگانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابعگانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابعگانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلګه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وښیئ، چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Dg(x)=IR$	1) $Df(x)=IR$
2) $\lim_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$	2) $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$
3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$	3) $f(2)=x+1=3$
$\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$	$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیئ چې لاندې تابعګانې په ورکړ شویو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشریح کړئ، چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غیرمتمادي ده.

د څپرکي لنډيز

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کيدای شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوی. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ويل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لېميټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ يا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لېميټ ځانګړتياوې: که f او g دوې تابعګانې وي، C,L او M حقيقي عددونه وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې ليکلای شو:

1) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت کوچنی تابعګاني: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهايت کوچنی بللې کېږي، کـه چيرې $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

د سانډويچ قضيه: که چيرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x \to a} h(x) = b = \lim_{x \to a} f(x)$ وي، نو $\lim_{x \to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x) = \dfrac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

  1. د $m = n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m < n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m > n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$
- د هغو تابعګانو چې $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ بڼه ولري د لېميټ د پيداکولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغـــــه تابعګـــــانې چـــــې د 1^{∞} مـــــبهم شـــــکلونه لـــــري لـــــه دې فورمـــــول څخه $P = \lim_{x \to a}[v(u-1)]$ ، $\lim_{x \to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^{\infty}}{=} e^P$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

- د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:
  1. a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېميټ ولري.
  3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په نښهٔ کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2　　b) -2　　c) 1　　d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$　　b) $\frac{5}{3}$　　c) 0　　d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1　　b) 3　　c) 0　　d) هیڅ یو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1　　b) 0　　c) $\frac{3}{2}$　　d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$　　b) 2　　c) $\sqrt{2}$　　d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1　　b) $\frac{1}{2}$　　c) $\frac{1}{4}$　　d) 4

-7 لاندې لیمیټونه پیداکړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$　　2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$　　4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$　　6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$　　8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$　　10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to \infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

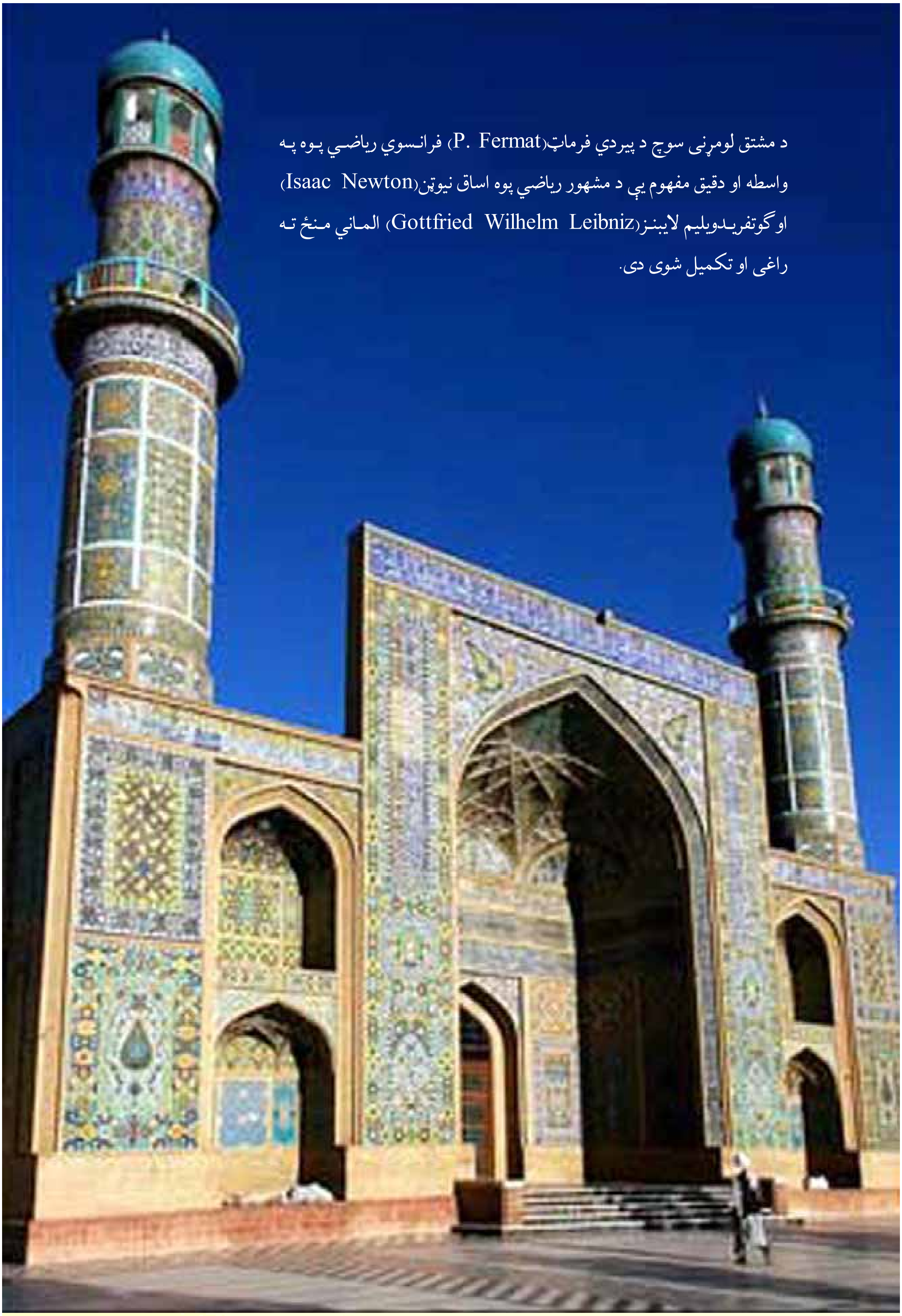
26) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم څپرکی
مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د یوه منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړي ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري، چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیدا کیږي؟

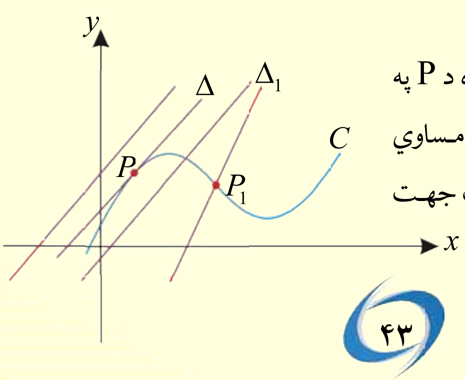
له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندیږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي، چې د p ټکي ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

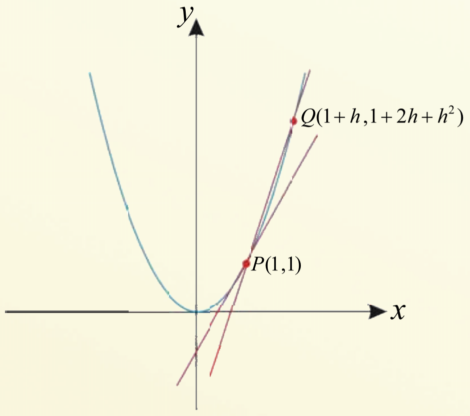
د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغې فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیداکولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي د P ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

نو دا $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیرېږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېمیټ دا عملیه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني میل په یوه اختیاري ټکي $P(x,y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختیاري مختصات $[x+h,(x+h)^2]$ وي که د PQ میل ته m او د P په ټکي کې د مماس میل په m_T سره وښیو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_{T} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ ,\ f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دویم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنی یا وسطي تعبیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعني $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه یادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد یا لیمیت څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کیږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی رابطې لېمېټ د t او t_0 په وخت کې داسې ليکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پايله کې وېلای شو چې د تابع او متحول د زياتوالی خارج قسمت ته متوسط تغيير وايي، يعني:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(s_2)-f(s_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغيرات د $[2,5]$ په انټروال کې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعريف په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعګانو د x د متحول لپاره د يو Δx او Δy تزايد په پام کې نيولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او ميل يې په غوښتل شوو ټکو کې پيدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغييرات د $[2,4]$ په انټروال کې پيدا کړئ.

د يوې تابع مشتق

مخامخ لیمیټ څه را ښيي آیا په بل ډول يې ليکلای شو؟

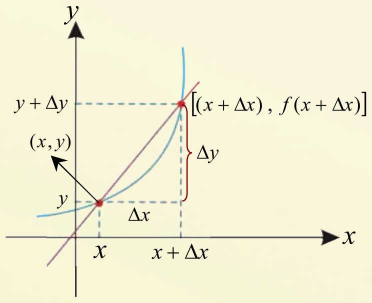
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فعاليت

- که چيرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زياتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لیمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد يا لیمیټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad / \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



تعريف: د تابع او د متحول د بدلون د لیمیټ نسبت ته کله چې د متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي؛ نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

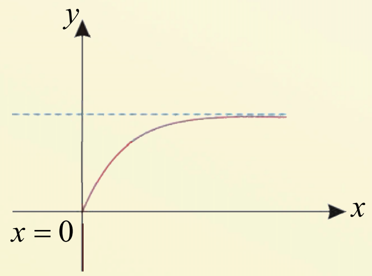
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې لیدل کېږي؛ یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نږدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي، چې مماس په یوه عمود $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ خط بدلیږي.



پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیداکړئ.

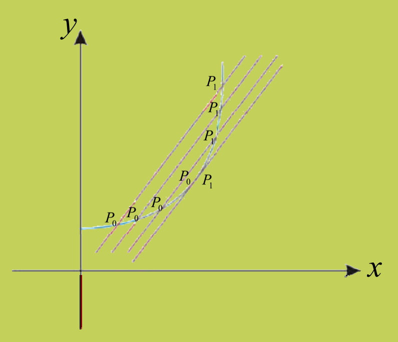
1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



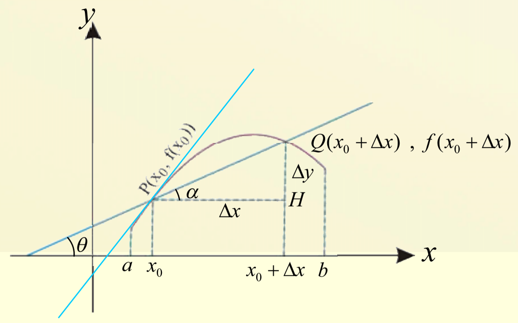
فعاليت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ متمادي وي ګراف رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\,,\, f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نږدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- لېميټ د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وڅېړئ.

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعنې:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$



تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan\alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow \; y = 6x - 5$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماسل میل قیمت د $x_0 = 2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

دریم مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړو:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ يعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تابع يې $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \frac{2}{x}$

2. په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \frac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

فعالیت

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون(تزاید) ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون(تزاید) نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوتو له دواړو خواوو لېمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړيکه يې وليکئ؟
- د پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ ځلې } n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \;\Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \;\Rightarrow\; f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5\cdot(\frac{1}{2})^4 = 5\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د حاصل جمع مشتق:

فعالیت

د u او v مشتق منوونکي تابعګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لېمیټ په هغه صورت کې پیداکړئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دي، نو: $y' = u' + v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دي، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابعګانو مشتقونه پیدا کړئ:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي دي، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د Δy د تزاید له پیداکولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېمیټ ونیسئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{aligned} u = x^3 &\Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 &\Rightarrow v' = 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y' &= u'v + v'u \\ y &= x^3(x^2-3) \\ y' &= 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' &= 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{aligned}$$

دویم مثال: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکټورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{aligned} u = 5x-1 &\Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x-1 &\Rightarrow v' = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y' &= u'v + v'u \\ y' &= 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' &= 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{aligned}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابعګانې مشتق منونکی وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړي او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لېمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبتوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot v\Delta}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بنه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د يوې تابع مشتق په يوه ټاکلې نقطه لکه په x_0 کې پیداکړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلې قیمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پیداکړو، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم د مشتق څخه لرو:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u&=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v&=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{aligned}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{1+0}$$

$$f(0)=-9$$

دریم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ u&=-3 \Rightarrow u'=0 \\ v&=2t-1 \Rightarrow v'=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- د ډیوي مربع جذري تابع مشتق:

فعالیت

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ د تابع تزاید پیدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لیمیټ په هغه صورت کې ونیسي، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

فعالیت

- که چیرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

دویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + x \quad \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \quad \Rightarrow v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\quad,\quad y=3x^{-3}\quad,\quad f(x)=x^2+3$$

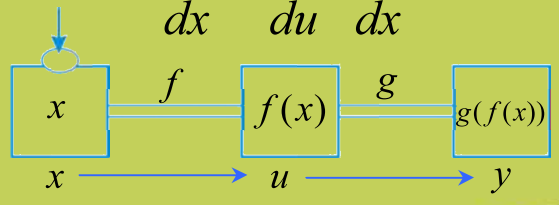
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابعګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g')\quad g\neq 0]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو تابعګانو مشتق(زنځیري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعالیت

که چیرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وویشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي؛ نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 　 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 　 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 　 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو؛ چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)}_{u}{}^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad=12x(4x^4-4x^2+1) \quad =12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} u=1-x^2 \Rightarrow u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو:

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'v+v'u$$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad=14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

I. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی؛ نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

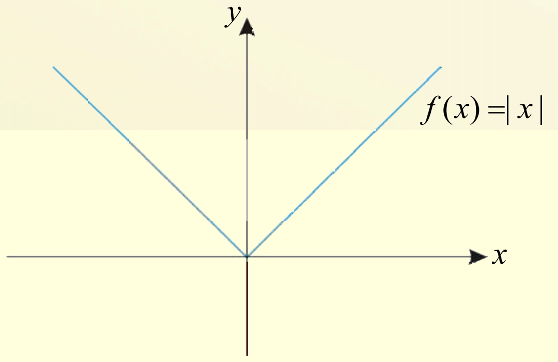
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده، خو برعکس یې ټیک نه ده، یعنې کیدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي یا پیوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د $x=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لیمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لیمیټونه یې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي، چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده.

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

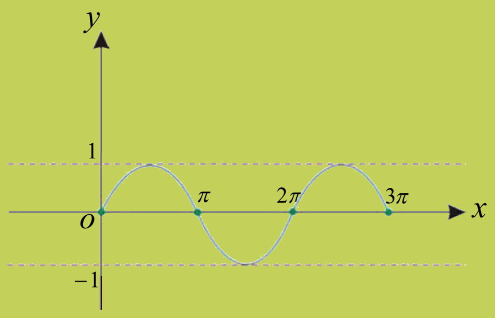
1) $y = (x^2 + 2)^2$ 2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$ 3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ 5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- وروسته د انکشاف له پورتني رابطې څخه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x\cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $f(x)=\sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-\cot x\cdot\csc x\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

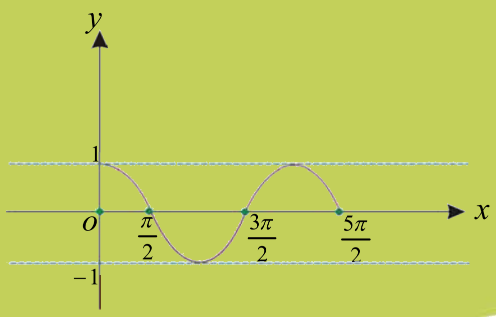
$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چیرې $y = \cos u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u - \cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیداکړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$

$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو لومړی مشتق پیداکړئ.

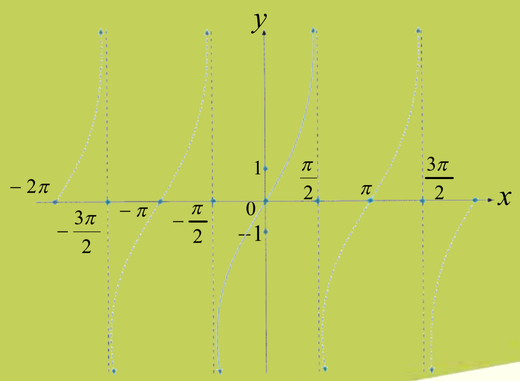
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \frac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي.



- د $y=\tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y=\tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y=\tan x$$

$$y'_{(x)}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y=\tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y=u^n$ وي نو مشتق یې $y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l}u=\tan^3 x\\ u'=\sec^2 x\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}y=\tan^3 x\\ y'=3\tan^2 x\sec^2 x\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع شکل د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$
$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$
$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د u, v, u' او v' قیمتونه د $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$
$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$

پوښتني

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y = \tan x \cot x$

$b)\ y = (x^2 + x - 1)\tan^2 x$

$c)\ y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ y = \tan x \sec x - \cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- د $y = 2x^2 - 4$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ او ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوه منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو، چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو پېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.

په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آساني پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوي وي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د $f(x,y)=0$ په شکل تعریف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډ ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned}
f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)_x\\
&=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\
f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)_y\\
&=1-\frac{x}{1}\cos\frac{x}{y}-0=1-x\cdot\cos\frac{x}{y}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1+\pi\cos\frac{\pi}{1}}=\frac{\cos\pi}{1+\pi\cos\pi}=\frac{-1}{1-\pi}$$

دویم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$
$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$
$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$
$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-2=x^2+6y^2-2$$
$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2-2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5-1} = \frac{2x}{6y^5-1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5-1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د مشتق د پیداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیداکوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پیداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا په بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x-0-0}{0-2y-0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه مشتق نیسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکی کې پیدا او پر منحنی د مماس معادله یې ولیکې.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منحنی پرمخ واقع دی؛ د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \ \Rightarrow\ y-1=-(x-1) \ \Rightarrow\ y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ ضمني تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د رابطې ضمني مشتق پیداکړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیداکړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیداکړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'_{(x)}$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''_{(x)}$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''_{(x)}$ … په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)}$ علامت ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

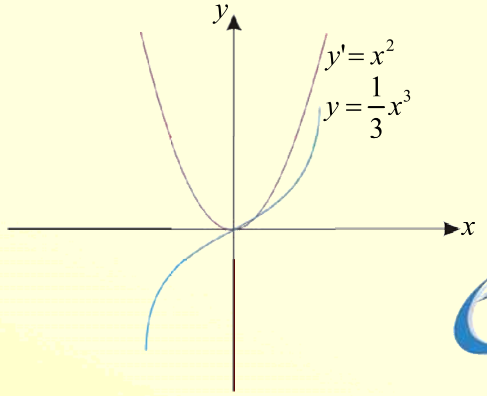
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ د تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه څلې مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چیرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n$ $\quad c_n\neq 0$ راکړې شوی وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{n(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{n(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{n(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}_{n(x)}=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^{k}_{n(x)}=0$

پوښتني

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق پیداکړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تـابع دوه اختیـاري ټکـي وي، نـو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکرئ، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_{\Delta}$$

د تماس په ټکي کې د یوه منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوی وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق قوانین:

1) $f(x)=C \Rightarrow f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\frac{u}{v}\ ,\ v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق:

1) $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n - ام ځلي مشتق یې $y^{(n)}=f^{(n)}_{(x)}$ دی.

د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحنی میل د $P(3,0)$ په ټکی کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکی کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

$a)\ y=5x-5$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیڅ یو

8- د $y=\sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیڅ یو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې مفصل حل کړئ.

1. د $f(x)=\frac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\frac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

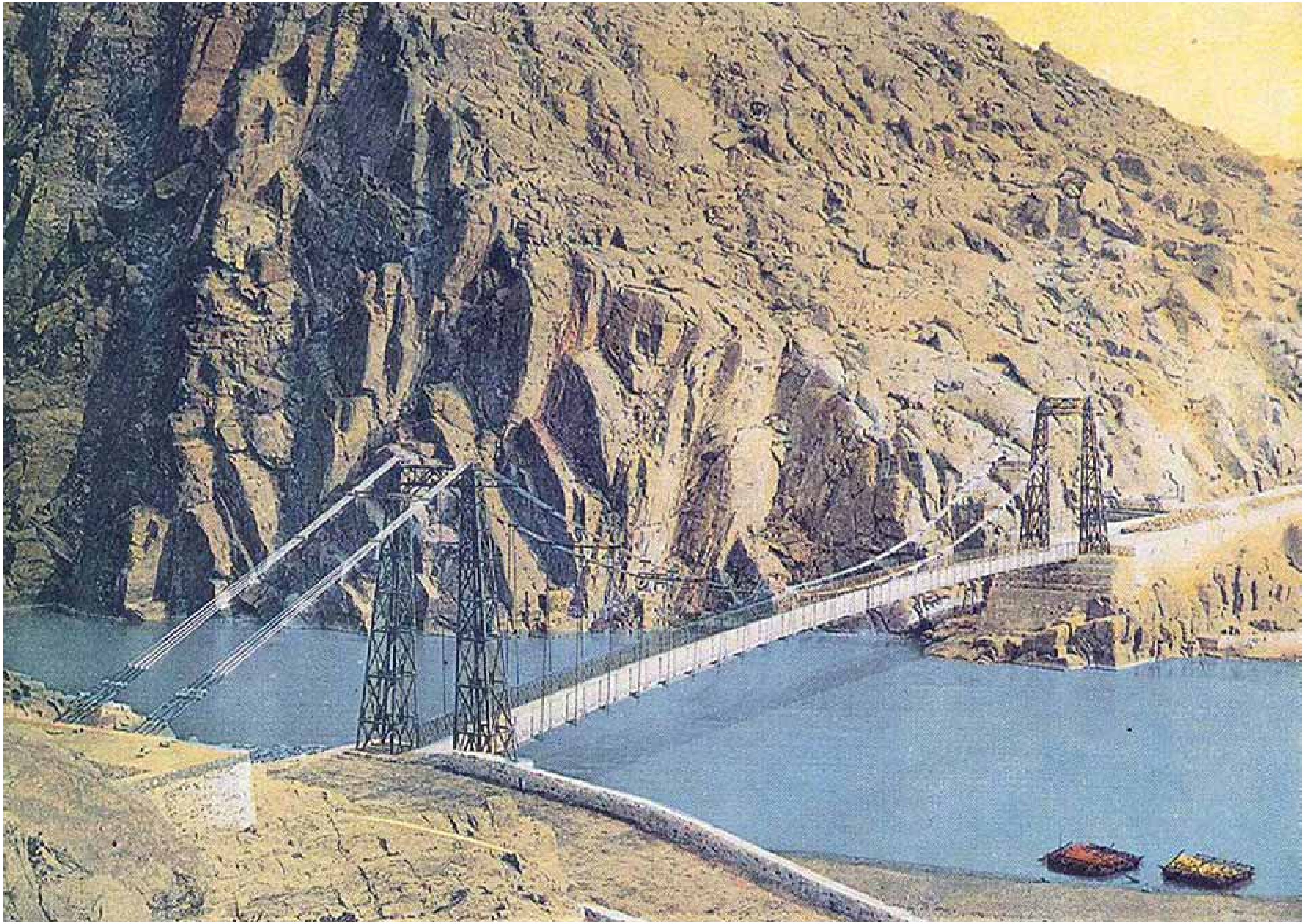
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

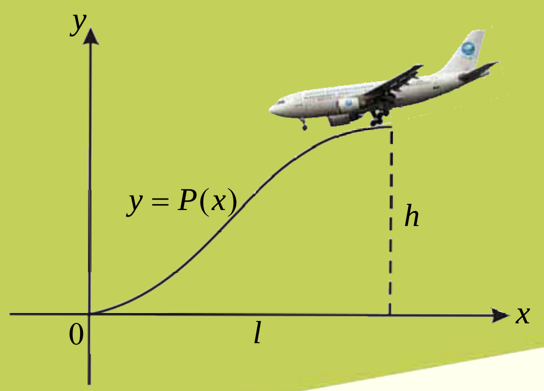
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

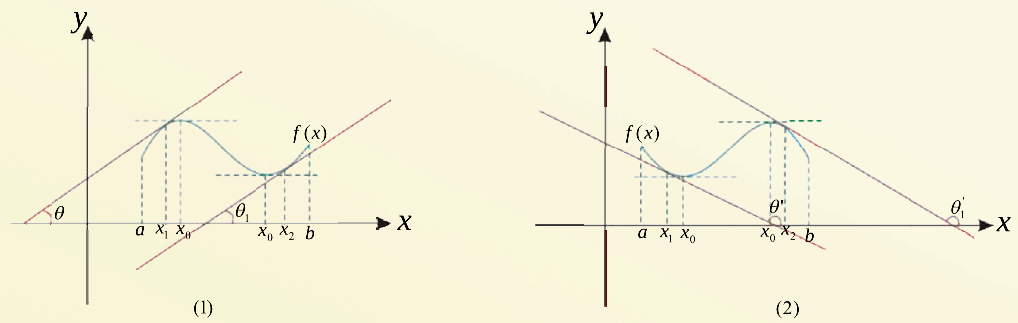


له مشتق څخه په ډیرو ځایونو کې لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیاکې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولوکې) کار اخیستل کیږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څیړنې لاندې نیسو.

I- د یوې تابع تحولات:

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دی؟
- په (1) شکل د (a,b) په انتروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جګ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيې چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وئ، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کيږي.

2- که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کيږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل: ځرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کيږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې $(+3)$ ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: ځرنگه چې د $f(x)$ تابع په هره انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1<x<1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x)=5x-4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$D_f \to IR$

$f(x)=5x-4$

$f'(x)=5>0$

څرنګه چې $f'(x)>0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

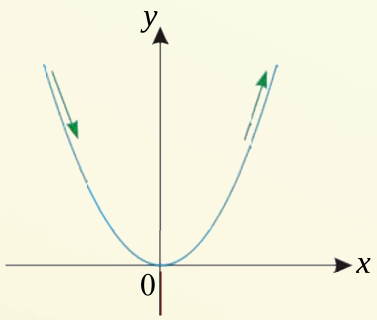
څلورم مثال: د $y=x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښيئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y'<0$ او که تابع متزایده وي $y'>0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$y=x^2 \Rightarrow y'=2x$

د تناقص شرط $y'<0 \Rightarrow 2x<0 \Rightarrow x<0$

د تزاید شرط $y'>0 \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow x>0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
y	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$1 \searrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$4 \nearrow$	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0,+\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښيئ؟

2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښيئ چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متزايده ده؟

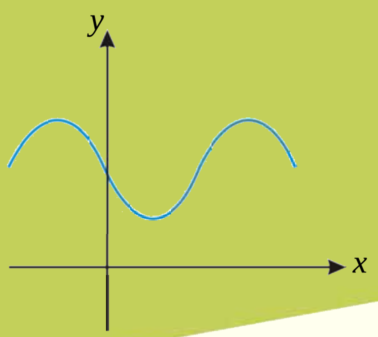
4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انټروال و ټاکئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

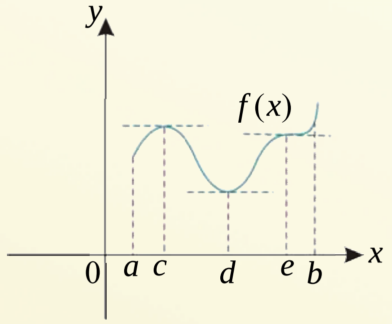
د يوې تابع بحراني (Extreme) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی
وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟



فعاليت

که په لاندېني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوېږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

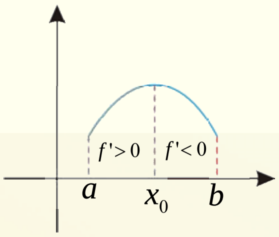
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي (maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري (minimum) وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني (Extreme) نقطو په نامه يادېږي.

تعریف:

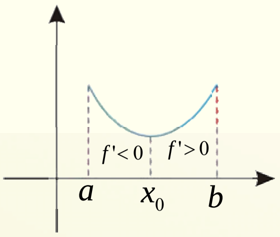
1- **ثابته تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.

2- **متزایده تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي(maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چیرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ راکړل شوی ده دا تابع خو د (Extreme) ټکی لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$f'(x)=0$

$3x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$

$x-2=0 \Rightarrow x_2=2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{54}$ Max	↘	−2	↘	−2 Min	↗	$+\infty$

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعی Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړی.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		−3		−2.73		−1		0.73		1	
$f'(x)$	−		−	0	+		+	0	−		−
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	Min	↗	0	↗	Max	↘	−2	↘

(c) ketabton.com: The Digital Library

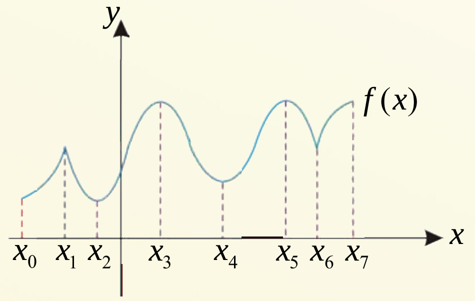
په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغير ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کيداى شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟

فعاليت

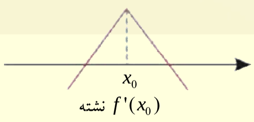
لاندينی شکل ته ځير شي:

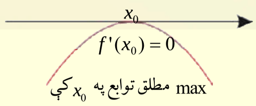


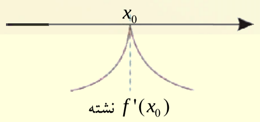
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په گوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

مطلق اعظمي *Maximum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کيږي، که چيرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.

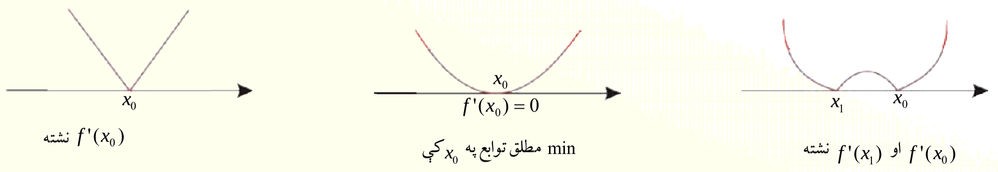






(c) ketabton.com: The Digital Library

مطلق اصغري *Minimum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کيږي، کـه چيـرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپـاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کـې $f(x_0)$ تـه مطلقـه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپـاره تـابع يـا اعظمـي او يـا اصـغري قيمتونـه اخلـي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.

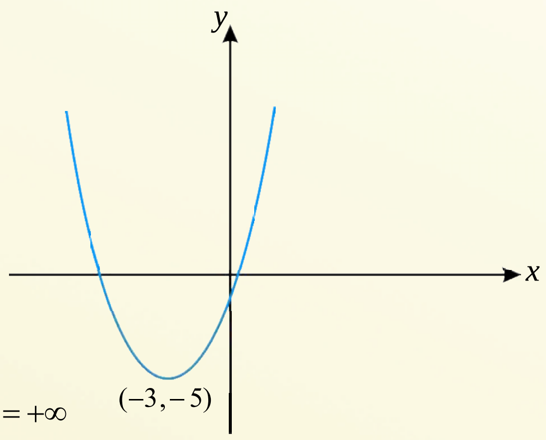


نشته $f'(x_0)$ — مطلق توابع په x_0 کې min — نشته $f'(x_1)$ او $f'(x_0)$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغری پیداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=x+3$$
$$f'(x)=0$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$
$$f(-3)=-5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2})=+\infty$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x^2+3\lim_{x\to\infty}x-1\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}=+\infty$$



x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{2}$ ↘	-5 ↗ (Min)	3 ↗	$\frac{15}{2}$ ↗	$+\infty$

په پایله کې د $x=-3$ په ټکي کې چې د تـابع قيمـت (-5) دی او تـابع پـه $(-3,-5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پیداکولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

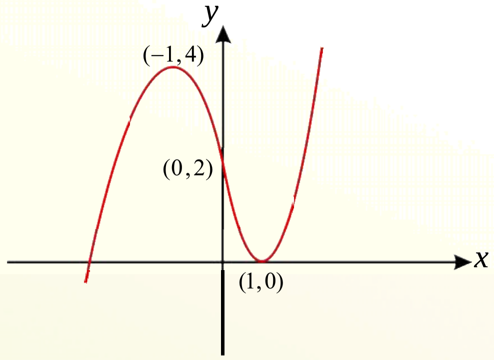
$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$

$f(0)=0-3\cdot0+2=2$

$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$

$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(2)=4$

$Max\ f(2)=4 \qquad Min\ f(1)=0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-\frac{5}{6} \nearrow$	$4 \searrow$ (Max)	$2 \searrow$	$0 \nearrow$ (Min)	$4 \nearrow$	$+\infty$

له جدو څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونوکې مطلقه متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د ګراف رسمولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محورراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیداکول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکؤو:

د y له محور سره د ګراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \quad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره د ګراف د پرېکړې د ټکو د پیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څیړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \ ، \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپېژندنې له پاره دتابع دویم مشتق پـه $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څیړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی څکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2} ، 2\frac{1}{4})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

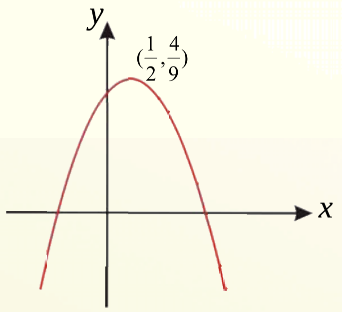
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څيړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2+x-x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2) = -\infty$$

د زياتې روښانتيا لپاره لاندې جدول ترتيب شوی، او دتابع ټول بدلونونه په هغوکې په‌ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$



پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

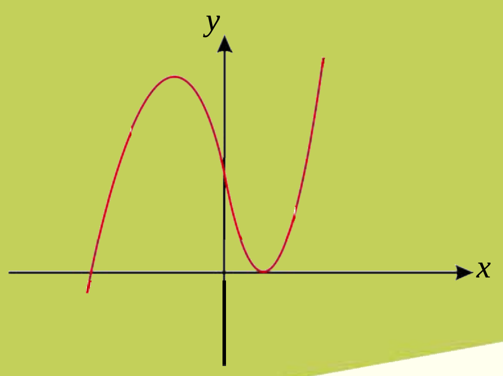
a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ c) $y = 3x^2 - 4x + 1$

2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

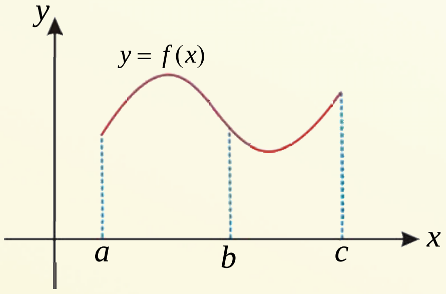
د انعطاف د نقطې ټاکل

هغه ټکي چې د يوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څرگند شوی؟



فعاليت

لاندينی شکل په پام کې ونيسي.



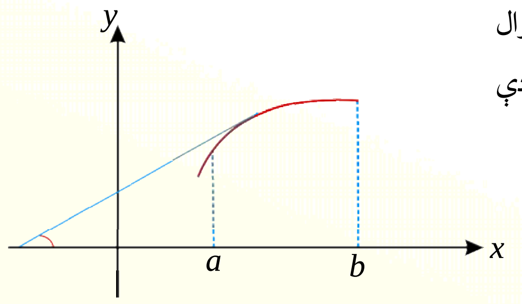
- د $y=f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انتروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د $y=f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انتروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د (a,b) په انتروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انتروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

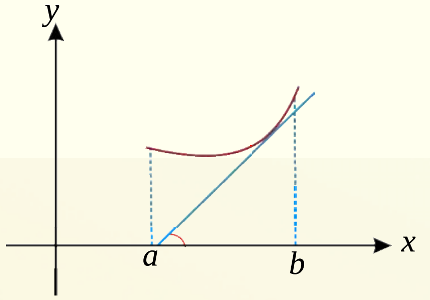
1. د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انتروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کيږي، که چيرې په دې انتروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې نږوتې یا مقعره بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني نه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت وي $y''>0$، منحني په دې انټروال کې مقعر بلل کیږي.



تعریف: هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا دې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او دې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅېړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

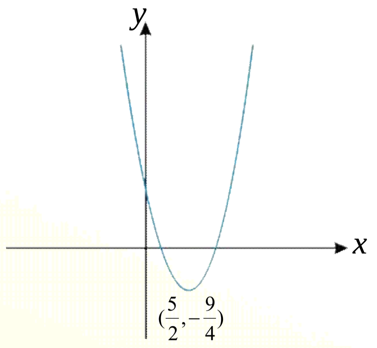
2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	4 $\searrow$	0 $\searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$



د ګراف، مقعريت او محدبيت د څېړلو لپاره د تابع دويم مشتق په لاس راورو:

$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$

$f''(x)=2>0$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پايله کې ويلای شو چې منحني ننوتې يا مقعر دی.

دويم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب يا مقعر وي.

حل:

$y=x^3+9x^2-6x+1$

$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$

$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$

$6x<-18 \Rightarrow x<-3$

$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$

$6x\geq -18$

$x>-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$ محدب	انعطاف	$\cup$ مقعر

څرنګه چې ليدل کيږي د تابع دويم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول ګراف په لومړی انټروال کې محدب او په دويم کې مقعر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$f''(x)=20x^3-30x$$

$$f''(x)=0$$

$$20x^3-30x=0$$

$$x(20x^2-30)=0$$

$$x_1=0$$

$$20x^2-30=0$$

$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کیږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$ ، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي، چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

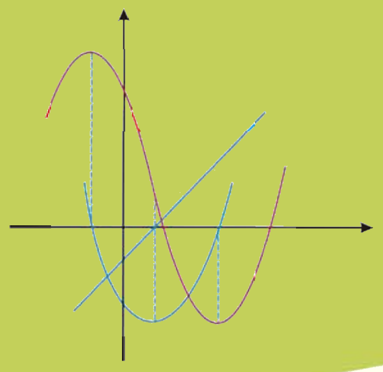
پوښتنې

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني‌گانو رسمول
د دويمې درجې تابعگانو گراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



فعالیت

- د $f(x)=x+1$ د تابع گراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له گراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره ټاکلې ده، يعنې:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x = \frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a > 0$ وي، نو: $a > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

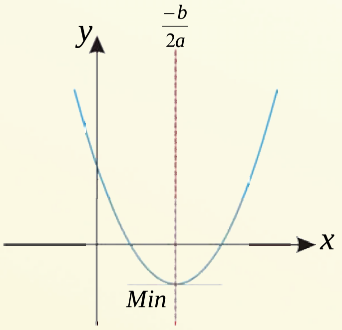
ب: که $a < 0$ وي، نو: $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a > 0$

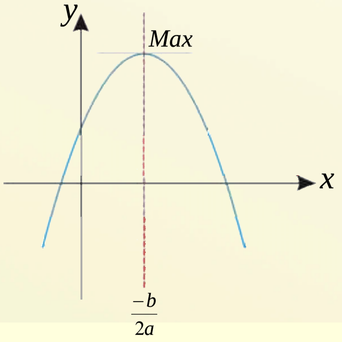
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$-\infty$



څرنګه چې $a > 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$-\infty$



څرنګه چې $a < 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تاکلې ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\} (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} (0,3)$$

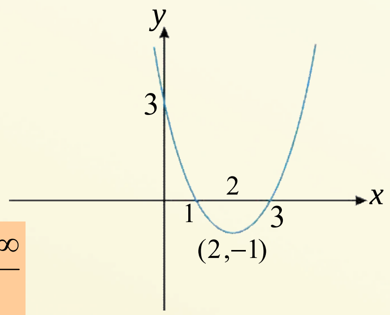
4- د تابع د extreme ټکو د پيداکولولپاره د لومړی مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$\left. f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
y	$-\infty \searrow$	$3 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$ (Min)	$0 \nearrow$	$+\infty$

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

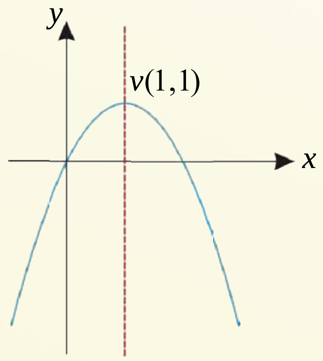
د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+		−		−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	1 (Max)	↘	0	↘ $-\infty$

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

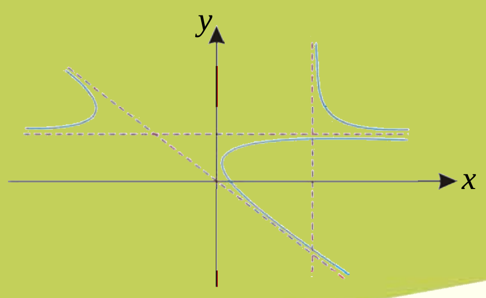
پوښتني

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

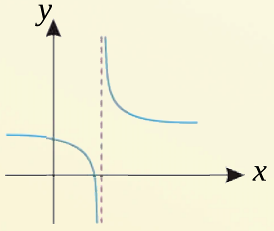
شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.



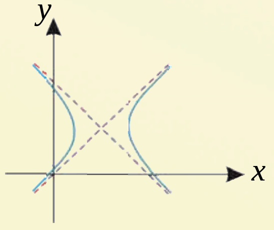
- مجانبونه څه دول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګان په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني لپاره د لاربنود حیثیت لري او د منحني کرښه غوڅه کړي، هغه تابعګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.



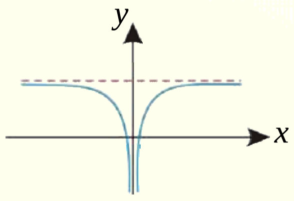
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعګانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده، چې که $x\to\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې کـه $x\to\infty$ وکړي، نـو $y\to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=c$ شي.

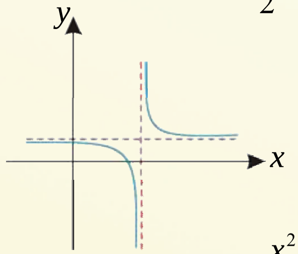
لومړی مثال: د $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right)=\frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y=\dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$ د تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}=x+2-\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ y=x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}\ \Rightarrow\ x=0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيداکولو لپاره د تابع ليميټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرج د $y=ax+b$ خطي معادله پيدا نـه شـوه، نو تـابع مايل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چيرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتيب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضـريبونو نسبت دی.

ج: که چيرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال يې شته.

د: که چيرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرج څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

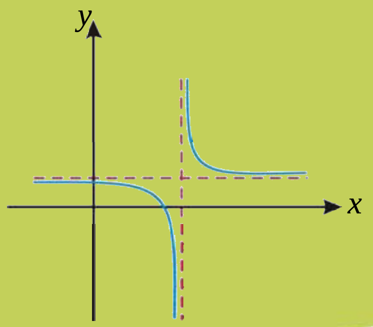
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوموګرافيک تابع ګانو ګراف

شکل تـه پاملرنـه وکـړئ دا شـکل د څـه ډول تـابع ګـراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



فعاليت

- هوموګرافيک تابع څه ډول تابع ده، په يوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y = \frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پيدا او بيا يې رسم کړئ.
- د تابع دګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پيدا کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

هغه تابعګانې چې د $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافيک تابعګانې بلل کېږي، داسې چې $c \neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y = \frac{a}{c}$

2- عمودي(قايم) مجانب يې: $cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$x-3=0$

$x=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. خرنگه چې د تابع مخرج د $x = 3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x = 3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعني د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domin = IR \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2}, 0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left. x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2\cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \right\} (0, \frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y = 2$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3} = 2$ یا $f(x) = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$

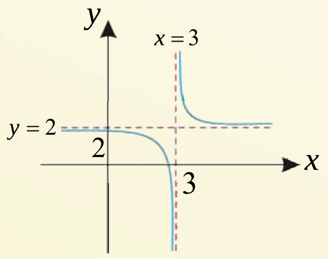
ب- عمودي مجانب: $x = 3 \Leftarrow x - 3 = 0$ یا $x = -\frac{d}{c} = -\frac{-3}{1} = 3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0\cdot(x-3)^2 - (-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	نه دی تعریف شوی	$+\infty$ ↘



دویم مثال: د $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR \setminus \{-1\}$ یعني تابع په $x = -1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودی مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

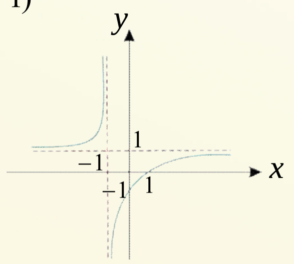
5- د تابع extreme نقطي پيدا کوو، جدول يې ترتيب او ګراف يې رسموو:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$ -1	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	1 ↗ نه دی تعریف شوی	↗ 1



دريم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه تر څېړنې لاندې نيسو ليدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قيمتونو لپاره معينه ده، يعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}2x-5=0\\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.

-3 **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

-4 د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

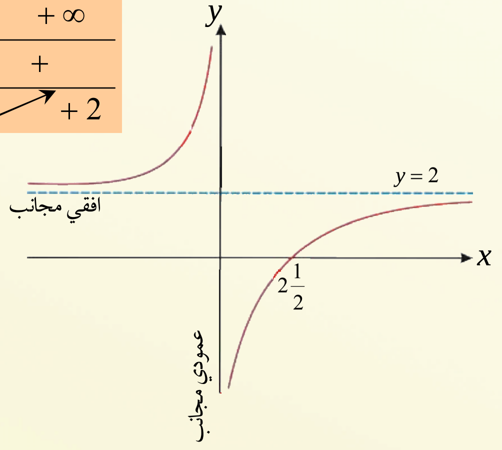
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

دګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	2	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0 ↗	$+2$

نه دی تعریف شوی



پوښتنې

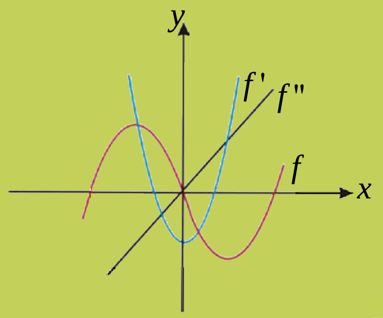
1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه رابښيي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نومړي تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نومړي تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

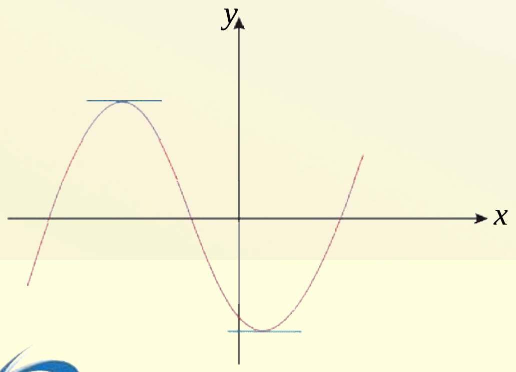
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو که چېرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چېرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله (د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحنی له کين لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه (Maximum) او يوه نسبي اصغري (Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$

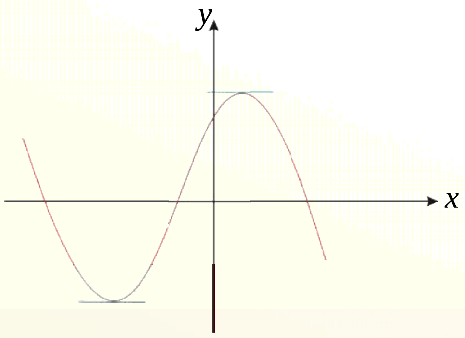


(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چیرې $\Delta f'>0$ نو منحني دکین لوري څخه ښۍ لوري ته یوه نسبي اصغری(Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Maximum) نقطه لري.

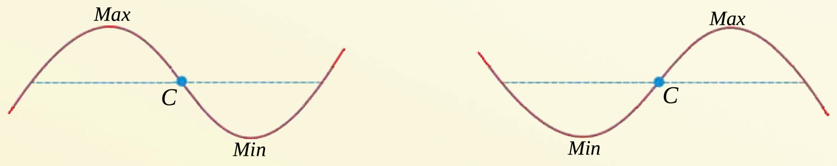
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↘		↗		↘ $+\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$



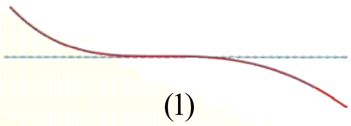
4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

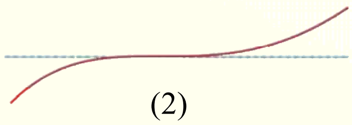
چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x=-\frac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.



(1)



(2)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیداکولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \;\Rightarrow\; x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

د محورونو سره تقاطع:

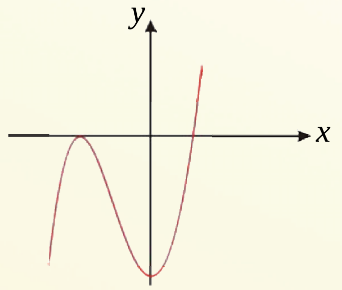
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+	
$f''(x)$	−	−	+	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 (max) ↘	−2 ↘	−4 (min) ↗	$+\infty$



دويم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پيداکوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+6x=0 \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0\ ,\ -3x+6=0 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ \ (2,4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\ ,\quad -x+3=0 \\ \qquad\qquad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

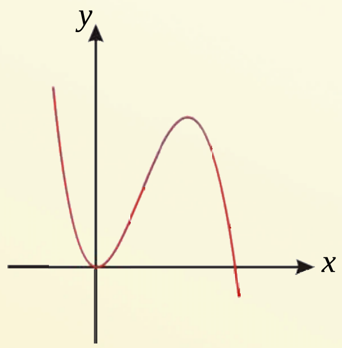
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2 \ \Rightarrow\ I(1,\,2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↗	4	↘	$-\infty$
			نسبي Min				نسبي Max		



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \Rightarrow f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتني

1. د لاندې تابعګانو د تحولاتو جدول ترتيب او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

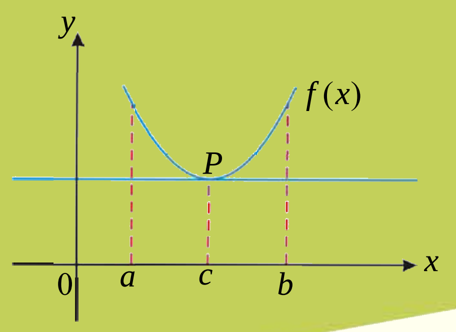
2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه

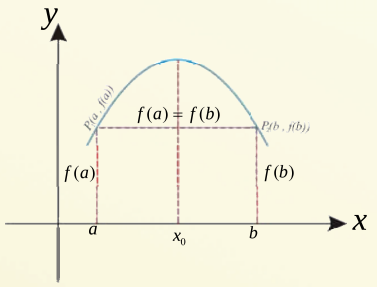
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.



فعالیت

- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازی وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چیرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وڅیړئ.



د پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:

قضیه: که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a<x<b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a<x<b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع پـه $[a,b]$ کـې يـو $x_0 \in [a,b]$
Maximum قيمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع يـو
اصغري Minimum قيمت لري.

ځرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کيږي.

لومړی مثال: د رول قضيه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $[a,b] = (\pi, 5\pi)$ فاصله کې تطبيق کړئ.

حل: ځرنګـه چـې $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ سره وي نـو د $f(x)$ تـابع د هـر x لپـاره د مـشتق وړ ده نـو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مـشتق منونکی ده چې د Rolle د قضيې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه يو x_0 موجود دی چې د هغه قيمت لپاره $(\cos x)' = 0$ شي. ځرنګـه چـې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو بايد $-\sin x = 0$ معـادلې لـږ تـر لـږه يـو حـل پـه $(\pi, 5\pi)$ کـې موجـود وي. $-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې حٔله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قيمتونه اخېستلای شي.

دويم مثال: د رول قضيه د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ تابع په $[a,b] = [-1,1]$ فاصله کې تطبيق کړې.

حل: ليدل کيږي چې تابع د پيل او پای پـه ټکـو کـې د مـشتق وړ نـه ده، ولـې د رول د قضيې د تطبيـق وړ ده ځکـه $f(-1) = f(1) = 0$ دی $f(0)$ تابع پـه $[-1,1]$ کـې متمـادي ده او پـه $[-1,1]$ کـې د x_0 يـو عـدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

د $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

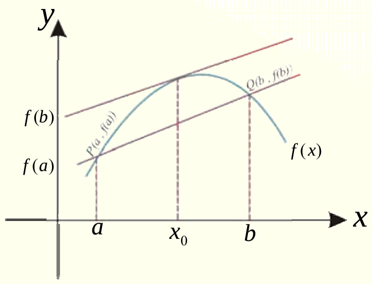
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوسط قیمت قضیه (لاگرانژ قضیه):

فعالیت

مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:



- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنی فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) د انتروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعني: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کیږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انتروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅېړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د هوپيتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعاليت

- د $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېميټ په هغه صورت کی پيداکړئ چي $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پيدا او د تابع له لېميټ سره يې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\frac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېميټ په هغه صورت کې پيداکړئ چي $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پيدا او د تابع له لېميټ سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دا قاعده بيانو:

د هوپيتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د (a,b) په انټروال کې تعريف او د مشتق وړ وي.

که چيرې $\frac{f(x)}{g(x)}$ د لېميټ نسبت د $x\to a$ قيمت کې د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل او يا $x\to\infty$ کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ونيسي په دې حالت کې د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره د $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پيداکوو او په هغه کې قيمتونه وضع کوو که بياهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نيولو ته ادامه ورکوو n... تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot2+1}{2\cdot2}=\frac{9}{4}$$

يا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لېمیټونه پیدا کړی.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتني

د لوپیتال د قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ ,\qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

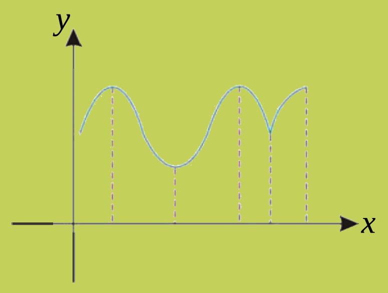
$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\ ,\qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکي د څه په نامه يادېږي.



1- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وويل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3- دکرې د حجم او سطحې تر منځ منځنی نسبت پیداکړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیداکړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نوکه د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$

$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$

$\text{مساحت} = x \cdot y$

$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$

$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیداکوو:

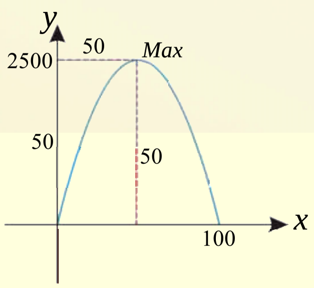
$S' = 100 - 2x$

$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$

$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پايله کې له شکل څخه هم ليدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطيل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه يې اصغري شي.

حل: که چيرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پايله کې ويلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)}=20000$

7- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2_{(A)}+y^2_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پايله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- يو مکعب مستطيل چې قاعده يې مربع ده، په پام کې نيسو، که د درېو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پيدا کړئ.

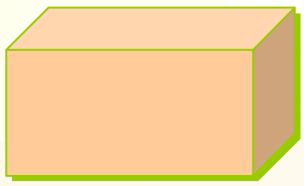
حل: که د مکعب مستطيل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته يې y وويل شي، نو:

$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطيل حجم عبارت دي له:

$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$

$V = 24x^2 - 2x^3$	$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$
$V'(x) = 48x - 6x^2$	$= 0 - 0 = 0$
$V'(x) = 0$	$V'(0) = 0$
$48x - 6x^2 = 0$	$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$
$x(48 - 6x) = 0$	$= 1536 - 1024 = 512$
$x_1 = 0$	$V(8) = 512$
$48 - 6x = 0$	$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$
$-6x = -48$	$V(12) = 0$
$x = 8$	



نو د مکعب مستطيل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پيدا او منحني يې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پيدا کړئ چې د جمعې حاصل يې 20 او د ضرب حاصل يې تر ټولو لوی ممکن قيمت ولري.

3- که د اوسپنې له يوې تختې څخه چې هره ضلعه يې $1m$ طول لري يو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بيا هغه قاط کړئ کوچنی مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(0,3)$ نقطې سره پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې پیوسته او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته موضعي اعظمي(Local Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته موضعي اصغري(Local Minimum) وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چیرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چیرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابعګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابعګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... n تر څو د ابهام شکل ختم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[0,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

a) $f'(x)=0$ b) $f'(x)<0$ c) $f'(x)>0$ d) $f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته:

a) Minimum وایي b) Infliction وایي c) Maximum وایي d) هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

a) دوه ټکي b) یو ټکی c) درې ټکي d) نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

a) د اعظمی ټکی دی b) دانعطاف ټکی دی c) اصغری ټکی دی d) هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

a) $(-\infty\,,+\infty)$ b) $(-\infty\,,0)$ c) $(0,-\infty)$ d) هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=-1$ d) $x=-2$

7- د هوموګرافیك تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a) $y=\dfrac{a}{c}$ b) $x=-\dfrac{d}{c}$ c) $y=\dfrac{c}{a}$ d) $y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقی مجانب عبارت دی له:

a) 4 b) 6 c) -6 d) -4

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f'(x)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انتروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2x}$

4. د لاندنیو تابعګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. د لاندې تابعګانو د مشتق تابع پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2x}$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د $x^2y+6y^3=x-3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

9. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

11. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

14. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

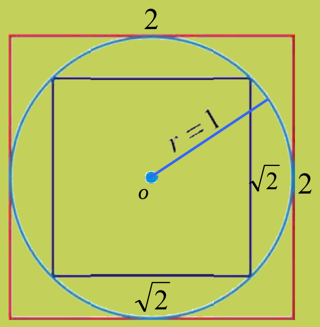
انتیگرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

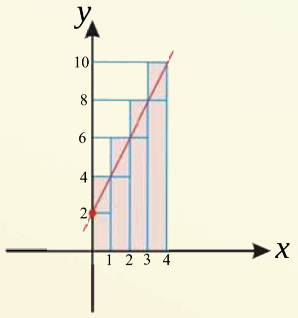
د ریمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې د دایرې شعاع یو واحد دی، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو سره څه اړیکه لري؟

فعالیت



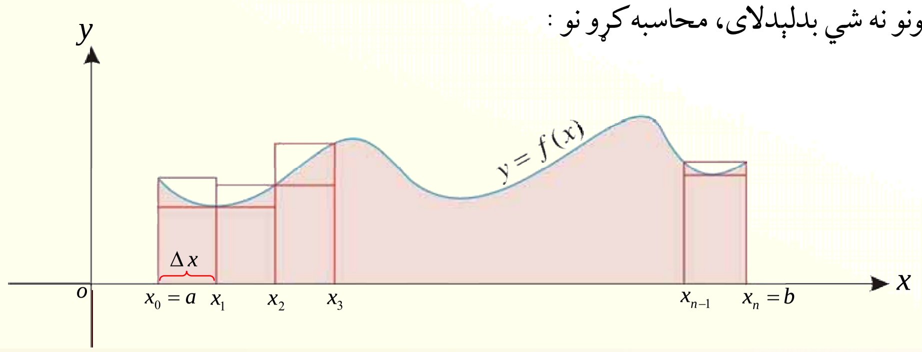
- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د $[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندینیو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي پیدا کړئ.
- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه، او د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندینۍ مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چیرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې ویش زیات کړو د پورتنیو او لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نږدې کیږي.

---

[1] - که چیرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چیرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمیر زیات شي په هم هغه اندازه د ګراف لاندنې مساحت د دقیق په لاس راځي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

تعريف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلي انټروال کې متمادي او تعريف شوی وي که چيرې د ناحيې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو نو:



د $[a,b]$ ترلې انټروال چې په n مستطيلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د n, ... ,$i = 1,2,3$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x ..., x_i = a + i\Delta x, \ ... \ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ ... \ ,[x_{i-1}, x_i], \ ... \ ,[x_{n-1}, x_n]$$

کـه پـه شـکل کـې د لانـدينيو مـستطيلونو مـساحت پـه $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيـو مـستطيلونو مـساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ ... \ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$

د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ ... \ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چيرې محصور شوی مساحت په A وښيو نو: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چيرې د رابطې له اطراف څخه ليميټ ونيسو نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو؛ چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموع او ددې مجموعې لېمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لېمیټ وایي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني، او x محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: که چیرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشو؛ نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \;,\; [x_1, x_2] \;,\; [x_2, x_3], \ldots\ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

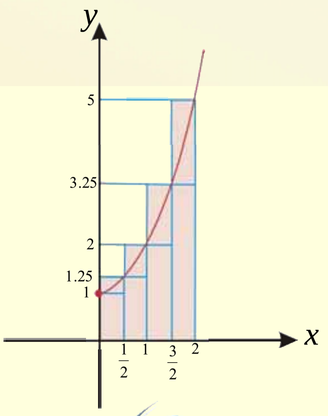
$$[0, \frac{1}{2}] \;,\; [\frac{1}{2}, 1] \;,\; [1, \frac{3}{2}] \;,\; [\frac{3}{2}, 2]$$

د تابع دګراف د رسمولو لپاره تابع ته قیمتونه ایږدو او د مستطیلونو طول لاس ته راځي:

$$f(x) = x^2 + 1 \;,\; f(0) = 1$$

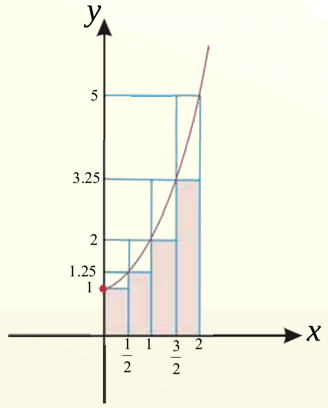
$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \;,\; f(1) = 2$$

$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \;,\; f(2) = 5$$

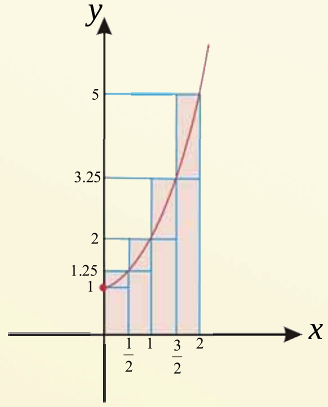


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ریمان د مجموعې لیمیټ په $[1,10]$ انټروال کې پیدا کړئ.

حل:

باید یه یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} (\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} (n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (n + \frac{9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{11n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

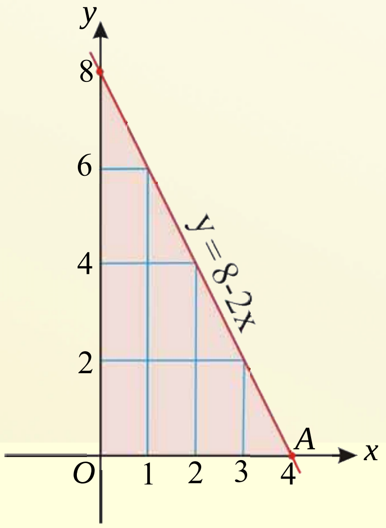
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له ویشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال مفهوم

Concept of Integral

خرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندیني او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لېمیټ ته انتیګرال وایي دا($\int$) د انتیګرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزېدلی حالت دی، لکه: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*

فعالیت

- که د $F(x)=2x^2-1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې(-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتني فعالیت د $F(x)=x^6+1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلی انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابعګانو سېټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کېدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l}\int \quad dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\, dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , \; g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایلې ته لاس راوړو:

څرنګه چې د تابعګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int \quad dx = \quad \int dx = \quad x + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل: $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چیرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړی.

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چیرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

مثال: **د** $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي په دې صورت کې د تابعګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوی دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int (2x^2+3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int (8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چیرې دتابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوی دی په:0

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي، په دې حالت کې د تابعګانو د ضرب د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int [f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int [(x+1)(x-2)]\,dx = \int (x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$= \int (x^2-x-2)\,dx$$
$$= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

حل ب: اوس د هرې تابع انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot \int g(x)\,dx = \int (x+1)\,dx \cdot \int (x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx - \int 2\,dx)$$
$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$
$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int [(x+1)(x-2)]\,dx = \int (x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$= \int (x^2-x-2)\,dx$$
$$= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابعگانو انتیگرالونه بېل بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int (x+1)\,dx\cdot\int (x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(\int x\,dx-\int 2\,dx)$$

$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پايله کې څرگنده شوه چې مساوات حقيقت نه لري.

پوښتني

د انتیگرال د خاصیتونو څخه په گټه اخیستنې سره لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17\,dx=?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}\,dx=?$

c) $\int 2x^4\,dx=?$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx=?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)\,dx=?$

f) $\int (2x+3)^6\,dx=?$

g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}\,dx=?$

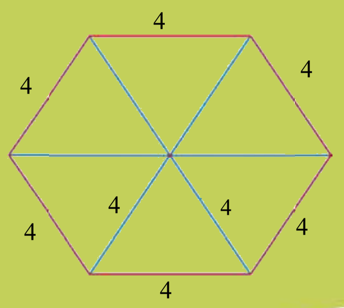
h) $\int (2+x)\,dx=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیگرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره يې پرتله کړئ.



- د $f(x)=2x$ د تابع گراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د گراف لاندینی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د گراف لاندیني مساحت دکومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لیمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نږدی شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدی شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیگرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

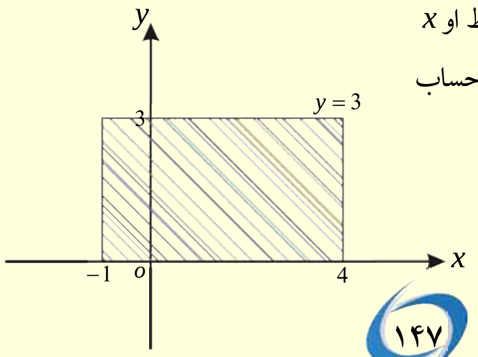
چې a ته د انتیگرال لاندینی سرحد او b ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ ټاکلي انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیداکوو او بیا د مطلوب انتیگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت راښيي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

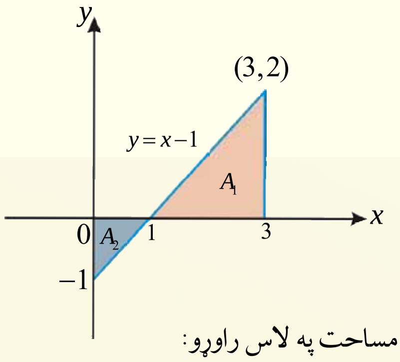
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$

د انتیگرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچنی مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

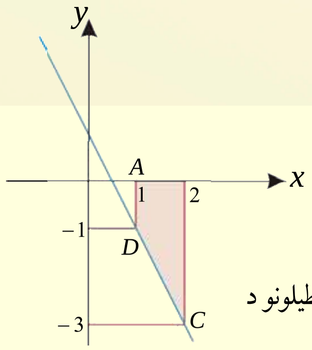
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیگرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3}(x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ مستقیم خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس راوړئ.



2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انتروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه

په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b c\,dx\\ &\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx\\ &\int_a^a f(x)\,dx\end{aligned}\right\}=?$$

فعالیت

- د $\sum_{=1}^{4} 3\ {}^{2}$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلي انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال

څخه لرو: $i=0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i)=C$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n)=C\left(\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\ldots+\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=C(b-a)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=C(b-a)\frac{n}{n}=C(b-a)\Rightarrow\int_a^b Cdx=C(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\int_3^4 dx$ ټاکلی انتیګرال حساب کړئ.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وی او یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b \ f(x)dx = \ \int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چیري د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i = 1,2,...,n$ په n مساوي برخو وویشو نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \ \int_a^b f(x)\ dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \ f(x)dx = \ \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\ dx$ ټاکلي انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a))$$

$$= -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د کښتني لوری انتیګرال او وروسته د ښي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4-که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو، چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: **څرنګه چې** $\Delta x = 0$ **دی، نو:**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5-که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

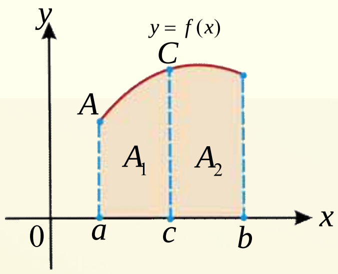
حل:

$$a)\ \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3[\frac{x^3}{3}]_0^1 = 4+1 = 5$$

$$b)\ \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه ترلې انټروال کې چې د a, b او c ټکی یکی شامل دي انتیګرال منونکي وي،

نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



ثبـــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تـابع انتیګـرال پـه نومـوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

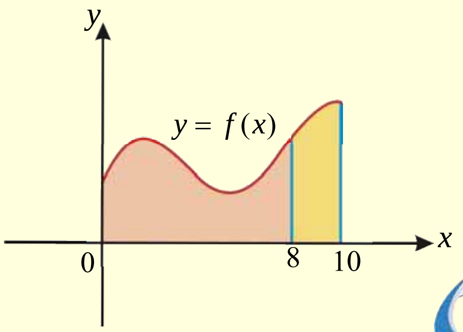
د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A = \int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$ ، $A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې: $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیگرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چیرې د $f(x) \le g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي؛ نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هـم منفي نـه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثـــال: کـه چیـرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نـو د $x > 1$ لپـاره وښایاســت چــې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le 1+\frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b^3-a^3)$$

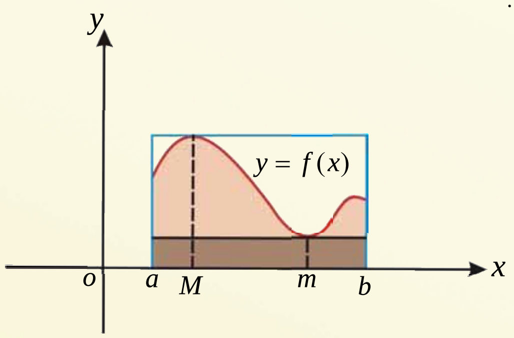
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ -1<2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

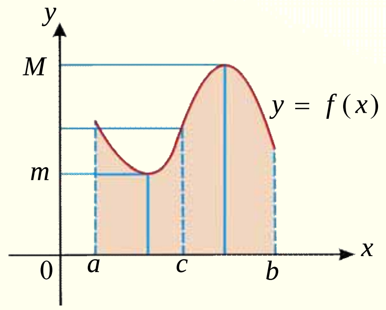
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c \in [a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \;\Rightarrow\; m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ وي، نو $m \le \quad \le M$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $f(c) = \quad$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي خرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3} - \frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

حل: خرنګه چې $f(x) = x^2$ تابع ده اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c) = c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې يې قيمت ايږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په   او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطيل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قيمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منحني لاندې مساحت په$[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معين انتيګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\ \int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\ \int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\ \int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\ \int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\ \int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\ \int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتيګرال قيمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پيدا کړئ، چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د c قيمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانیو ودرېږي په دې وخت کې وهل شوې فاصله پیدا کړئ.

$$S(t)=v_0 \cdot t$$

فعالیت

- د مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x)=x^2$ د تابع مشتق د $h=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي، چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړۍ اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دی انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x)=f(x)$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h}-F(x)\Big|_a^x}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر درېم خاصيت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قيمت د قضيې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c ، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پايله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ يا $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$

$u=g(x)=x^2+1$

$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$

د زنځيري قاعدې له مخې لرو: $F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چیرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: د مخکینـی قـضیې څخـه پـوهیږو چـې کـه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځایـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = \quad \Rightarrow f(x) = F(x) +$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) =$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = \quad , \quad 0 - F(a) = \quad \Rightarrow \quad = -F(a)$$

که د قیمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخیری رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کیـږي دغـه وروسـتی اړیکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتیګـرال تـرمنځ اړیکـه ښـیي، چـې د نیوټن"لایبنز" رابطې په نوم هم یادیږي.

یادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t}dt$

2. **که په** $f(t) = t$ **تابع کې** $F(0) = 2$ **وي، د** $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \dots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

11- په تعويضي طريقې سره انتيګرال نيونه

ـ آيا کولای شئ چې مخامخ انتيګرال د نامعين انتيګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په يوه متحول سره عوض کړئ او بيا هغه حساب کړئ او ووايئ چې په انتيګرال کې د وضع کولو دا طريقه په څه نوم يادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

فعاليت

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتيګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونيسئ او د dx قيمت پيدا کړئ.
- څرنګه چې نومړی انتيګرال يو معين انتيګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x=0$ او $x=4$ قيمتونه وضع او د انتيګرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتيګرال قيمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې وي، $u=g(x)$ او $F'(x)=f(x)$ سره تعويض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتيګرال قيمت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3 - 5x \;, \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \;\Rightarrow\; u = 3 - 5\cdot 1 = -2 \;\Rightarrow\; u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \;\Rightarrow\; u = 3 - 5\cdot 2 = 3 - 10 \;\Rightarrow\; u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5 \frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{728}{6}\right]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلي قیمت په لومړني انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د پورته ښخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع ښخه مشتق ونيسئ او د هغې ښخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعاليت ښخه لاندې پايله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعويض سره يوه بله تابع چې مستقل متحول يې x او متمادي مشتق ولري له زنځيري قاعدې ښخه په کاراخيستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ انتيگرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u = 1-4x^2 \;,\; du = -8x\,dx$$

$$x\,dx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}\right)du = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right)+C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دويم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u = x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u = x^4+2 \;,\; du = 4x^3dx \;,\; x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

12- قسمي انټيګرالونه

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. ايا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې لکه: تيږه، شګه او نورو کې ووينو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

د ميتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د ميتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- **آيا کولای شئ چې د** $\int x^2 \sin xdx$ انتيګرال په تعويضي طريقه وشمېرئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابعګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'v+v'u$ دی.

له پورتنۍ رابطې څخه $v'u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\;dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\;dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوې وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $\int x \sin x\, dx$ انتيګرال پيداکړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\, dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$
$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -x e^x\, dx$ انتيګرال حساب کړئ.

حل:

يادونه: $\int e^x\, dx = e^x + c$

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v' \cdot u\, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u'\, dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \quad = -e^0$$
$$= -1$$

پوښتني

لاندې انتيګرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta \cos\theta\, d\theta = ?$

c) $\int x^5 \cos(x^3)\, dx = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x\, dx = ?$

d) $\int_0^1 x e^x\, dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي او د ناحيې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال چې په n مستطيلو نو تقسيموو خرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د n, ... $i = 1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \ \dots \ , x_i = a + i\Delta x, \ \dots \ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ \dots \ , [x_{i-1}, x_i], \ \dots \ , [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندينيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انټيګرالونه: که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عدد وي د غيرمعين انتګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعين انټيګرالونو خواص(ځانګړتياوې):

$$\int dx = \int dx = x + C$$

$$\int a f(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\,dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معين انتيګرال: د $f(x)$ تابع د ريمان مجموعي لېميټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهايت تـه نـږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر تـه نـږدې کېږي، چې د $f(x)$ تـابع ټـاکلی انتيګـرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم يادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتيګرال لاندينی سرحد او b ته د انتيګرال پورتنی سرحد وايي.

د معين انتيګرال خواص(ځانګرتياوې):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\;\Rightarrow\;\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\;\Rightarrow\;f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چیرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. د زنځیرې قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق منونکي وي، او $u=g(x)$ همدارنګه $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیرې قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابعګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چیرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيگرال نيسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخيرى اړيکې ته د غير معين انتيگرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د u او v تابگانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوى وي لاندې فورمول، د معين انتيگرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کيږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$ b) $\int_{-4}^{4} [2x^2 - \frac{1}{8}x^4] dx$ c) $\int_{2}^{4} \frac{1}{x^2} dx$

d) $\int_{0}^{3} 4dx$ e) $\int_{1}^{3} \sqrt{x}\, dx$ f) $\int_{1}^{2} (x^2 - x^5)\, dx$

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ h) $\int_{-2}^{0} [\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}] dx$ i) $\int_{2}^{3} (x^3 + x^2) dx$

) $\int_{-2}^{2} [x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4] dx$) $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$ l) $\int_{1}^{2} x^2\, dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه حل کړئ.

a) $\int [\sin x + 8x^3] dx$ b) $\int [x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x] dx$

c) $\int x(1-2x^2)\, dx$ d) $\int \sin x\, dx$

e) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx$ f) $\int \frac{(1-x)^2}{1-x} dx$

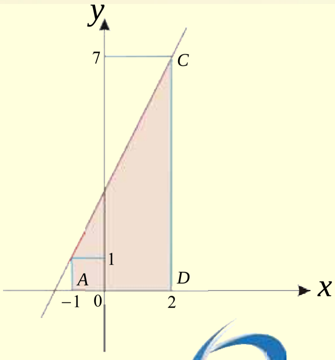
g) $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$ h) $\int \frac{3x^2 + 8x}{x} dx$

i) $\int (2x^2 + 3)\, dx$) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$

) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx$ l) $\int (3x^2 + 4x - 1)\, dx$

3- د لاندې محصور شوي سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2} (2x+3)\, dx$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندې انتيګرالونه د تعويضي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\ \int (3x+6)^3\,dx$

$e)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\ \int (x^3+2)^2\,3x^2dx$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\ \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$)\ \int_0^1 (1-x^2)^3x\,dx$

$)\ \int (4-3x)^7\,dx$

$l)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتيګرالونه د قسمي طريقې په مرسته پيدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

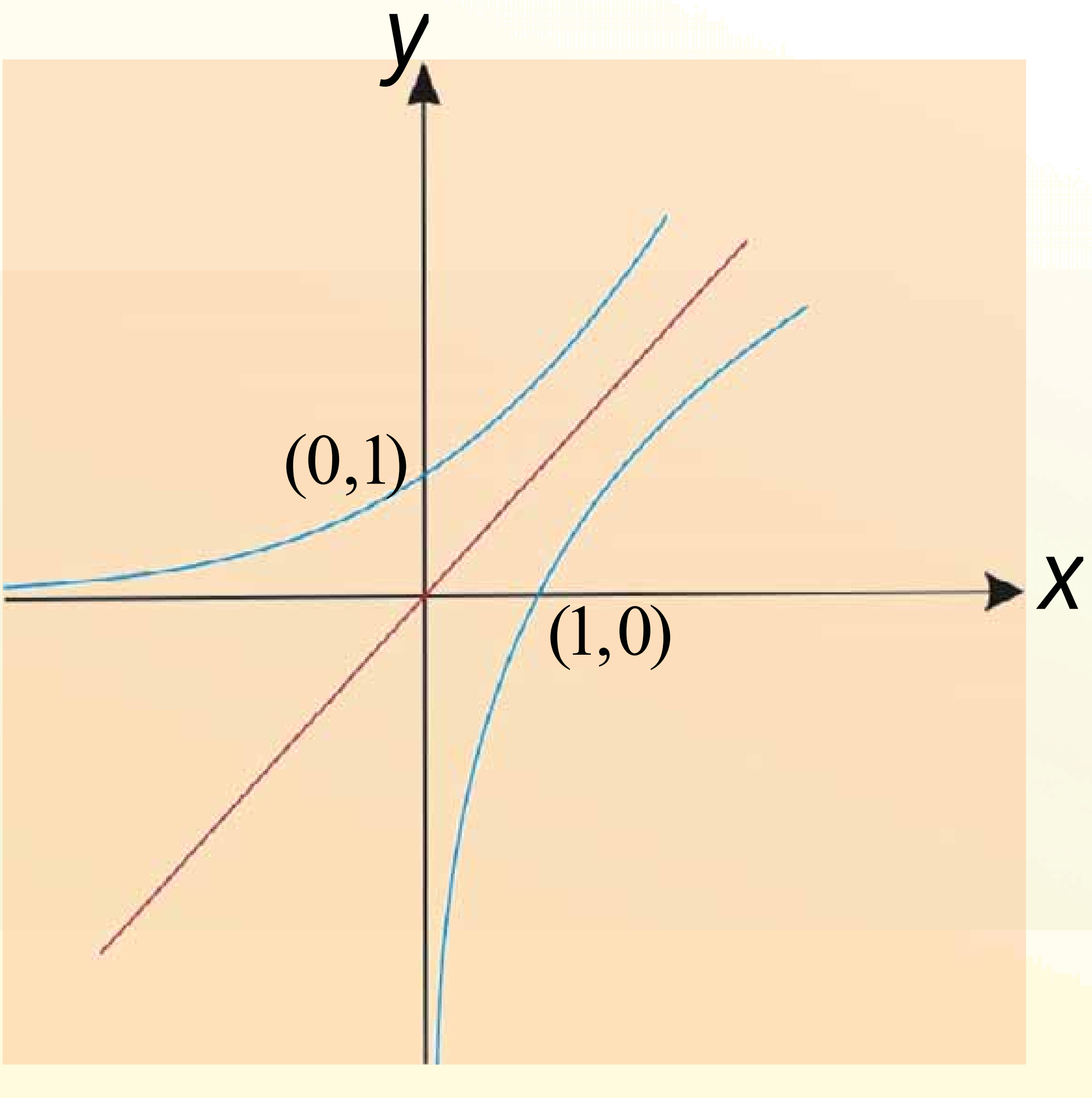
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال

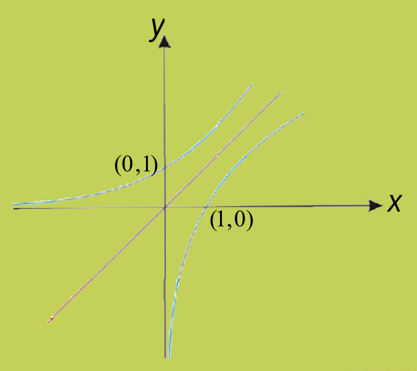


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابعګانو ګراف راښیي، نومونه یې واخلئ.



- لوګاریتم تعریف او خواص یې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ او $g(x) = a^x$ وي؛ نو $g'(x) = a^x \ln a$ او $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$y = g(x) = a^x$

$\ln y = \ln a^x = x \ln a$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$\dfrac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$

$\dfrac{y'}{y} = \ln a + 0$

$\dfrac{1}{y} y' = \ln a$

$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی خرنگه چې $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته نږدی کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي؛ نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعني:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځیري قاعدې له مخې:

$$f'(x)=(\log_a g(x))'=(\log_a g(x))'\cdot g'(x)=\frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot g'(x)$$

$$=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a=e$ وضع شي؛ نو لرو: $(\log_a g(x))'=(\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

پایله:

1- د Exponential تابعګانو مشتق د لوګاریتم په مرسته کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو.

که $y=e^x$ وي ددې تابع مشتق $y'=e^x$ دی ځکه که د $y=e^x$ رابطې څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، پـه لاس راځي:

$$y=e^x \quad\Rightarrow\quad \ln y=x\ln e=x$$

$$(\ln y)'=(x)' \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=1 \quad\Rightarrow\quad y'=y\cdot 1=e^x$$

2- که $y=e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y'=u'e^u$

3- که $y=a^u$ کله چې $a>0$ او $a\neq 1$ وي، نو: $y'=u'a^u\ln a$

4- د لوګاریتمي تابعګانو د مشتق پیداکولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه ګټه اخلو:

$$y=\log_a u\Rightarrow y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\log_e a} \quad\Rightarrow y'=\frac{(\ln u)'}{\ln a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\ln(x^2+1)$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: که $g(x)=x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x)=x^2+1$$

$$g'(x)=2x$$

$$(\ln g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x \quad\Rightarrow f'(x)=(\ln(x^2+1))'=\frac{2x}{x^2+1}$$

دويم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$f(x)=\ln(x^2-5x+4)$$
$$g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \left\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array} \right.$$

دريم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهيږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو ليکلای شو، چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$
$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهيږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو ليکلای شو، چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y=e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y=e^u$ وي نو $y'=u'e^u$

$$y=e^{(x^2+1)} \Rightarrow y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چیرې $y=a^u$ وي نو $y'=u'a^u\ln a$ سره دی، نو:

$$y=\sqrt[x]{2}=(2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y'=(\frac{1}{x})'\cdot 2^{\frac{1}{x}}\ln 2=\frac{-1}{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2$$

شپږم مثال: د $y=x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y=x^{2x}$$
$$\ln y=\ln x^{2x}$$
$$\ln y=2x\ln x$$
$$(\ln y)'=(2x\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y}=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y'=2(\ln x+1)\cdot y \Rightarrow y'=2(\ln x+1)\cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y=10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y=a^x \Rightarrow y'=a^x\ln a$ دی، نو:

$$y=10^x$$
$$y'=10^x\cdot\ln 10$$

اتم مثال: د $y=e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u=3x$ وضع شي، نو: $u'(x)=3$

$$y=e^u$$
$$y'=e^u\cdot u'=e^{3x}\cdot 3$$
$$y'=3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=\log(x^4+1)$ 2) $y=\log_3(\log_2 x)$ 3) $y=\log_{x^2-1}x^2+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y=\log(x^4+1) \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y=\log_3(\log_2 x) \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\,x\ln x}$$

3) $y=\log_{x^2-1} x^2+1=\dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

پوهېږو چې $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \;\Rightarrow\; y=\dfrac{u}{v}$ دی؛ نو لرو:

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

a) $f(x)=\ln\sin 3x$

b) $f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

d) $f(x)=\log_{10} 3x^2$

e) $f(x)=y=x^x$

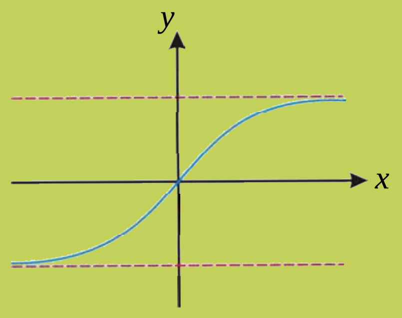
f) $y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوسو تابعگانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟



کـه چيـري f او g يـوه د بلـې دوې معکوسـې تابعگـانې وي، يعنـې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نـو:

$\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{dy}{dx}$ يا $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابعگانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} y&=f(x)\\ x&=g(y)\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y\quad\Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1\quad\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y=a^x\quad\Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابعگانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابعگانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ 4) $(arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

1) $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(\arcsin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(\arccos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(\arctan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیداکړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آيا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعالیت

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونو د جمعې حاصل، بېرته په لومړنيو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعريف يې کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

تعريف: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه يادېږي.

د يوه واقعي کسر د تجزيه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نيسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

($A,\ C, \ldots$ حقيقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: د مخرج پولينوم په لومړنيو ضربي عواملو تجزيه کوو، نو په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

ليدل کېږي، چې نومړی کسر له دريو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه يې A , C , ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{\quad}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+\quad(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+\quad x^2-3\quad x-10\quad+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+\quad+C)x^2+(A-3\quad-6C)x+(-2A-10\quad+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ليدل کېږي، چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره ليکو:

$$\begin{cases}A+\quad+C=4\\A-3\quad-6C=-1\\-2A-10\quad+5C=-39\end{cases}$$

د پورته سيستم له حل څخه وروسته $\quad=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم مثال: د $\dfrac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: لومړی نومړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنۍ طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{\quad}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+\quad(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+\quad)x+(2A-4\quad)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix}A+\quad=4\\2A-4\quad=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\quad,\quad\quad=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{\quad}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{\quad}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+\quad(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+\quad)x^2+(-2A-3\quad+C)x+(A+2\quad-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+\quad&=3\\-2A-3\quad+C&=-6\\A+2\quad-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+\quad}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولينوم ضربي عوامل عبارت دي له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درې جمله‌یي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+\ }{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+\ \ )(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+\ \ +2C)x+(\ \ +4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\ A+\ \ +2C=8\\ \ \ +4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=3\\ \ \ =1\\ C=2\end{array}\Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابعگانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بیلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \Rightarrow du = 0 \cdot dx$$

$$dv = a^x \Rightarrow v = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیگرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابعگانو انتیگرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x dx=\frac{1}{6}\int 6^x dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابعگانو انتیگرالونه محاسبه کړئ.

a) $\int 3^{x-1}dx$ b) $\int 2^{-x}dx$ c) $\int a^{x+b}dx$

d) $\int\frac{1}{a^x}dx$ e) $\int 2^x\cdot 3^x dx$ f) $\int\frac{2^x}{3^x}dx$

g) $\int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ h) $\int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ i) $\int(1+2^x)dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال ونیسو؟

د پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x \, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \ , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \ , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال:لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کیږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$u=x^2$

$du=2x\,dx \Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\ ,\ \ u=x^2=1 \\ x=2\ ,\ \ u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int\ln 2x^3dx$ $\qquad b)\ \int\ln\sqrt{x}dx$ $\qquad c)\ \int\log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2\frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعګانو انتیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

لومړی مثال: $\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+\quad(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+\quad)x-4A-2\quad}{(x-2)(x-4)}$$

$A+\quad=7$

$-4A-2\quad=-12$

$A=7-\quad$

$-4(7-\quad)-2\quad=-12$

$-28+4\quad-2\quad=-12$

$-28+2\quad=-12$

$2\quad=16\Rightarrow\quad=8$

$A=7-8=-1$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيگرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکټورو تجزيه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{\quad}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+\quad(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+\quad)x+3A-2\quad}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+\quad)x+3A-2\quad=-5x+9$$

$$A+\quad=-5\Rightarrow A=-5-\quad$$

$$3A-2\quad=-5x+9$$

د A او عددي قيمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-\quad)-2\quad=9$$

$$-15-5\quad=9$$

$$-5\quad=24$$

$$\quad=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتني

لاندې انتيگرالونه د قسمی کسرونو په طريقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچني کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چیرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ دکسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

- که د لومړې درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ د عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابعګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$ b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$ d) $y=\sqrt[x]{2}$

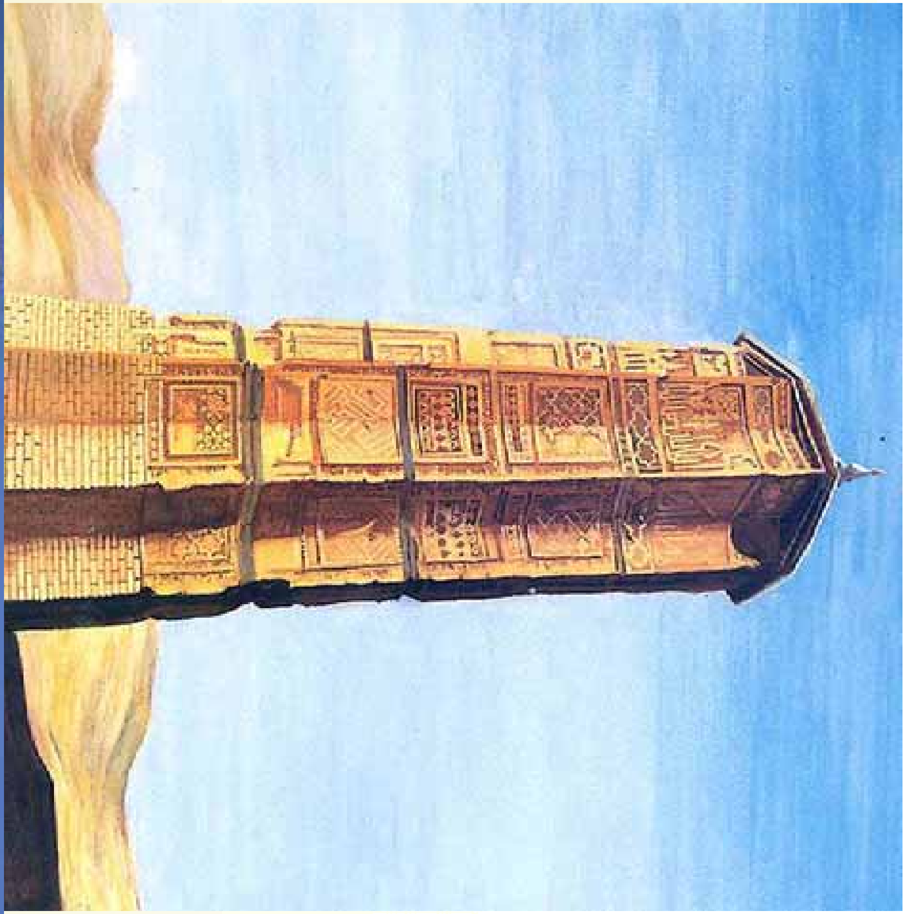
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

د انتیگرال تطبیقات

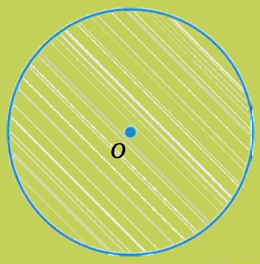
(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې منحنې د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحنې په واسطه تړل شوې دايره ده د مساحت فورمول يې وواياست.



فعاليت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او ګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحنې او د x د محور تر منځ محصور شوې مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

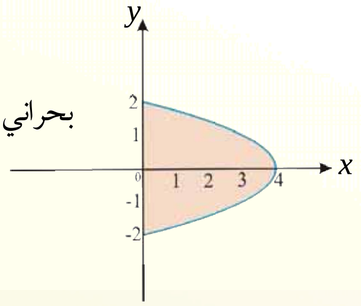
_ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحنې او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

_ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلې انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعني $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پرېکړې ټکي پیداکوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیداکولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او د محورو سره د پرېکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.



$$x=4-y^2 \Rightarrow x'=-2y=0$$
$$x'=0 \;\Rightarrow\; y=0$$
$y=0,\quad x=4-y^2 \Rightarrow x=4-0 \Rightarrow x=4 \;\Rightarrow\; (4,0)$ بحراني ټکی

$$x=0\;,\quad 4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4$$
$y=\pm 2 \;\Rightarrow\; (0,2)\;,\;(0,-2)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنګه چې د $x=4-y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=2[4y-\frac{y^3}{3}]_0^2$$

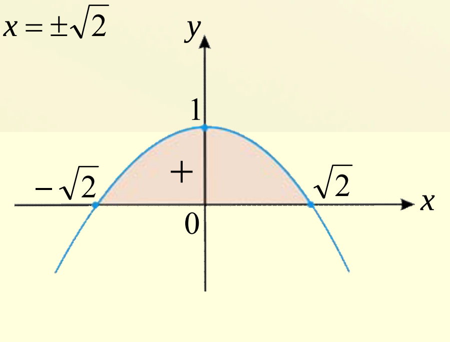
$$A=2\,[(4\cdot 2-\frac{2^3}{3})-0]=2\,(8-\frac{8}{3})=2\,(\frac{24-8}{3})=2\,(\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y=1-\frac{1}{2}x^2$ تابع منحنی د محصور شوی سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y=1-\frac{1}{2}x^2\;,\; y'=-x$$
$$y'=0 \;\Rightarrow\; x=0$$
$x=0,\; y=1-\frac{1}{2}x^2=1 \;\Rightarrow\; y=1-\frac{1}{2}0^2 \;\Rightarrow\; y=1 \;\Rightarrow\; (0,1)$ بحراني ټکی

$$y=0, 1-\frac{1}{2}x^2=0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}x^2=-1 \;\Rightarrow\; x^2=2,\; x=\pm\sqrt{2}$$
$$x_1=\sqrt{2}\quad,\quad x_2=-\sqrt{2}$$
$(\sqrt{2},0)\;,\;(-\sqrt{2},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دريم مثال: د $y=x^2-3$ تابع گراف د x له محور سره يوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پيدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$y=x^2-3 \Rightarrow y'=2x$

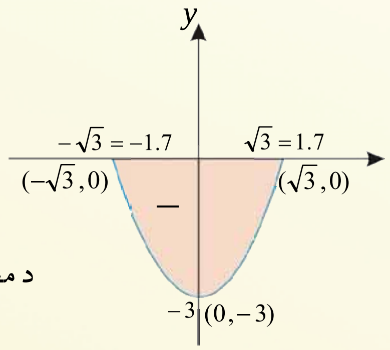
$y'=0 \Rightarrow x=0$

$x=0\ ,\ y=x^2-3 \Rightarrow y=0^2-3$

$\Rightarrow y=-3 \Rightarrow (0,-3)$ بحراني ټکی

$y=0\ ,\ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



ځرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پرېکړې ټکي متناظر قيمتونه لري نوگراف يې د x محور څخه لاندې دی او انټيگرال يې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټيگرال د سرحدونو نيمايي مساحت پيداکوو اوبه 2 کې يې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له محورونو سره د پرېکړې ټکي پيدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \,,\; x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \,,\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

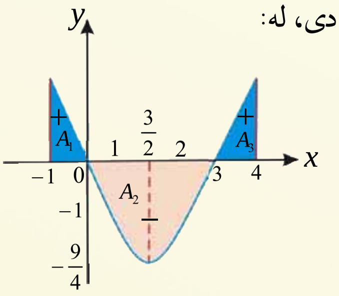
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \,,\quad (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي يې د x له محور سره عبارت دي، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني د x محور او $x = 2$ ، $x = -1$ کرښو تر منځ مساحت پیدا کړئ.

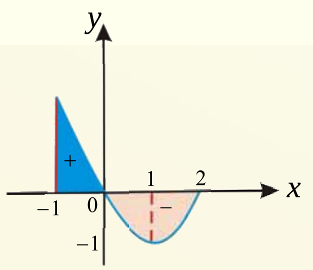
حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1 \; , \; y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$



څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحني یوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصله کې د x محور ښکته خواته پرته ده انټیګرال یې منفي دی:

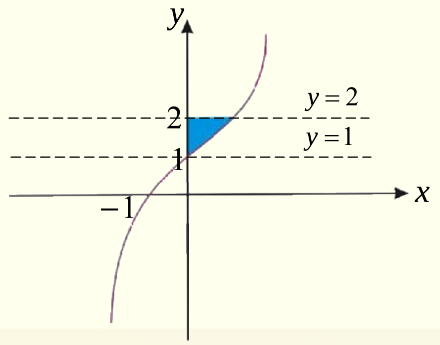
$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x) = \sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y = x^3 + 1$ تابع منحني او $y = 1$ ، $y = 2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



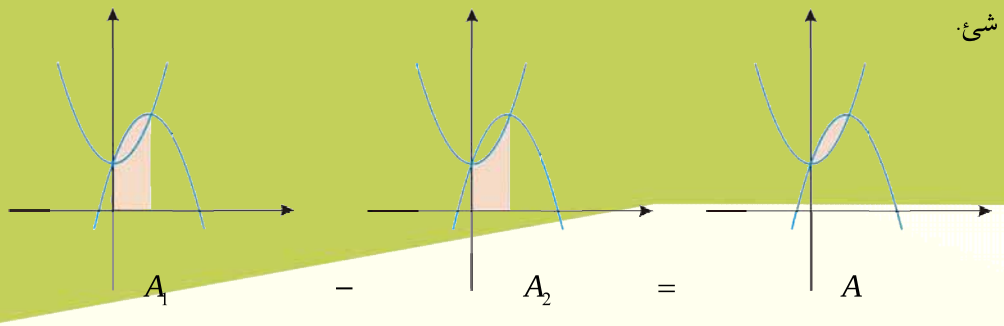
3- د $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x = 0$ او $x = 1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سموالي په اړه څه و یلای شئ.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعګانو د انټیګرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ که چیرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحنيګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندیني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ـ که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$f(x)=2x-x^2 \quad , \quad g(x)=x^2$

$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$

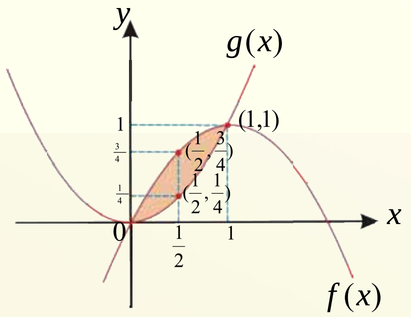
$2x-x^2-x^2=0$

$2x-2x^2=0$

$2x(1-x)=0$

$2x=0 \quad \Rightarrow x_1=0$

$1-x=0 \quad \Rightarrow x_2=1$



لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (۱،۱) او (۰،۰) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیداکوو.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

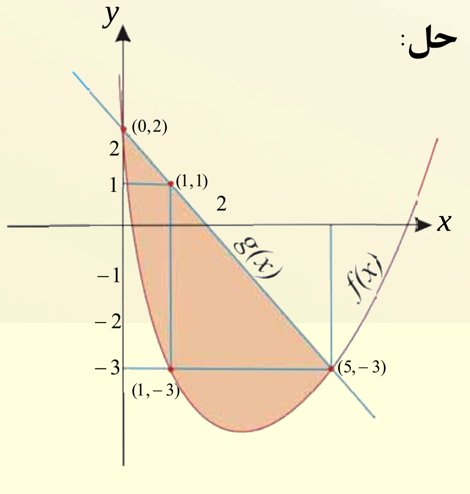
$$\left.\begin{aligned}f(x)&=x^2-6x+2\\ g(x)&=2-x\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$

$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$

$x_1=0 \quad , \quad x_2=5$

$\Rightarrow (0,2) \ , \ (5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي



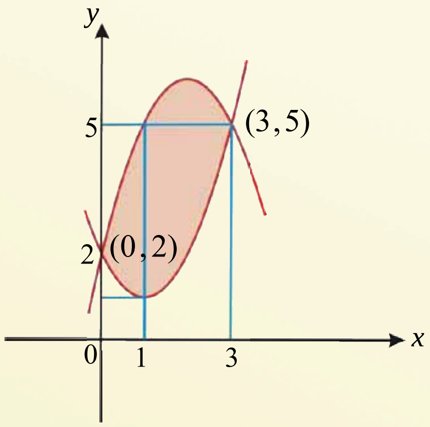
(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کربښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنی چې $g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5(2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5(-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5(-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l}f(x)=-x^2+4x+2\\ g(x)=x^2-2x+2\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0\ ,\ \ -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(0,2)$, $(3,5)$

د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $g(x)$ ګراف د $f(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

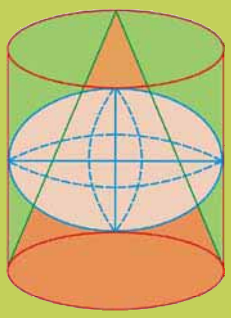
$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9$$
$$=9$$

پوښتني

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.



د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.

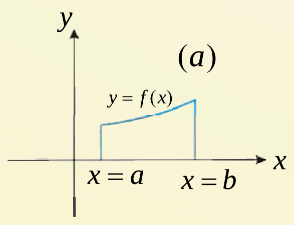
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

فعالیت

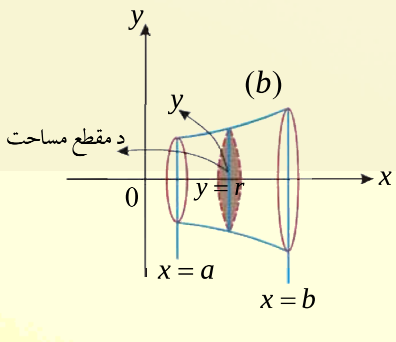
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم یې واخلئ.
- د نوموړی جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چیرې د $y=f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل



د $x=a$ او $x=b$ کرښو او منحني په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.

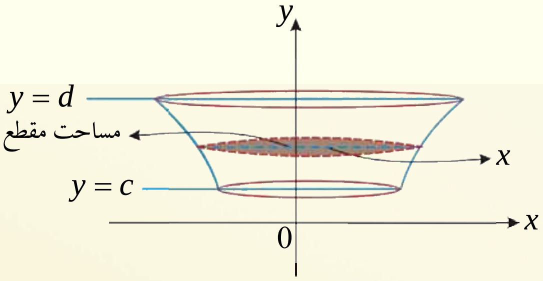


(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر ریمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع یې $\Delta y = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\,dy$$

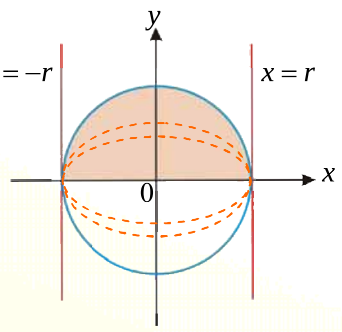
د دوراني جسمونو حجم د انتیګرال په مرسته په لاس راځي لکه:

1- د انتیګرال په مرسته د کرې حجم پیدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چیرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دایرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نیمې دایرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دایرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

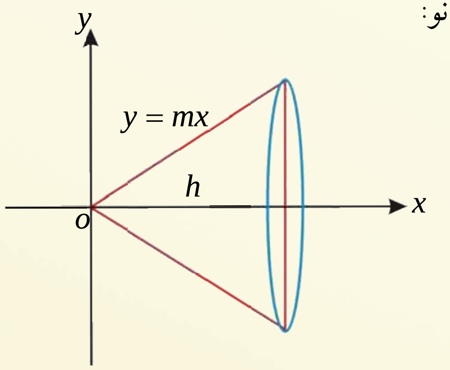
$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیداکړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:



$$V = \int_0^h \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کیږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره موازي ده، یعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نو د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3}\ r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

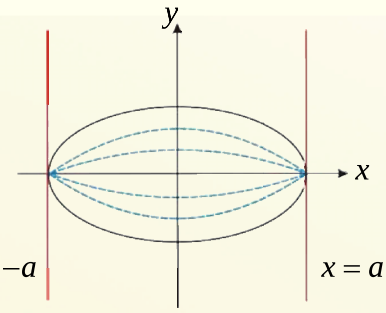
خرنگه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او x محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi\int_{0}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3})-0] = 2\pi[b^2a-\frac{b^2a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2a-b^2a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

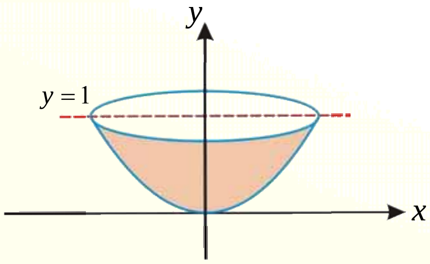
که چیرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

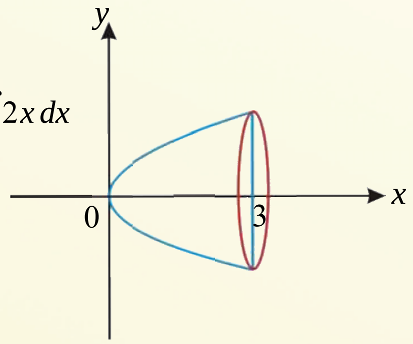


$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیداکړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi [\frac{x^2}{2}]_0^3$$

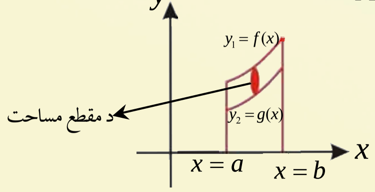
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړیږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

د استوانې ارتفاع $= \Delta x$

$A(x) =$ (د استوانې د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

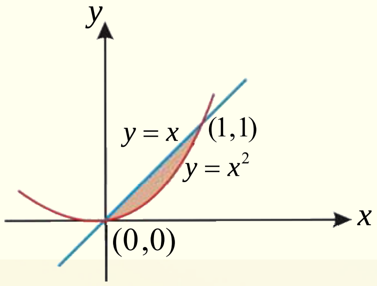
(c) ketabton.com: The Digital Library

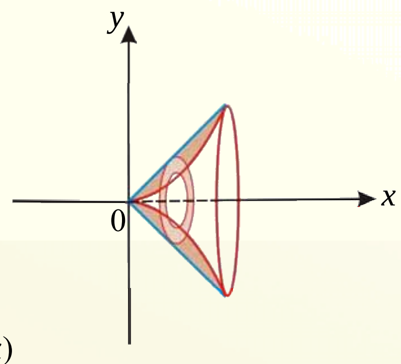
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^2$ منحني او $y = x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^2 = f(x) \\ y_2 &= x = g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1\ ,\ g(x) > f(x)$$

$$= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2)dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$= \pi[(\frac{1}{3} - 0) - (\frac{1}{5} - 0)] = \pi[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}]$$

$$V = \pi[\frac{5-3}{15}] = \pi[\frac{2}{15}] = \frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

1. د هغه جسم حجم چې د $y = \sin x$ تابع او د $x = 0$ او $x = \pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپیر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^3$ منحني او $y = 8$ ، $x = 0$ کرښو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپیر جوړېږي حساب کړئ؟

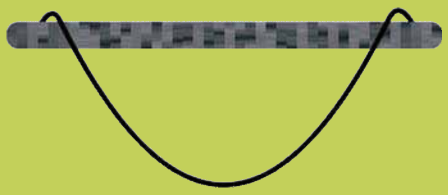
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږوالی محاسبه

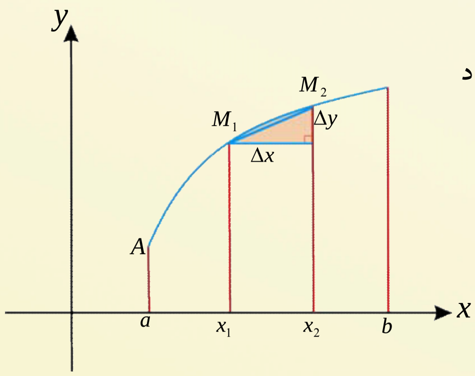
Accounting the Length of Arc

څرنګه کولای شو چی د مخامخ پري اوږدوالی پیداکړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال پـه پـام کې ونیسـئ او هغې تـه $\overset{\frown}{A}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دربو مساوي برخو ویشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـموو او د دوارو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښې فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وایې او د M_2 M_1 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو، چې د M_2 M_1 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_2 M_1 مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

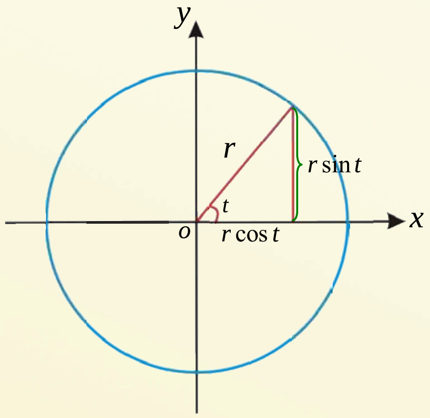
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چیرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[rt]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad du = \frac{9}{4}dx \qquad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)^3}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4} \cdot 4)^3} - 1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} - 1)$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو، چې:

$$= \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1}\ dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتني

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1 \le x \le 2$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی د $0 \le x \le 1$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y = f(x)$ منحني او د x د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د x د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنۍ برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چیرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع له منحني د دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهیږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کیږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالی محاسبه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول: $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$

(1 $$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(2 $$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy$$

د شپږم څپرکي پوښتني

1. د $y^2 - x - 5 = 0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y = x^2 - 2x$ او $y = 6x - x^2$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y = -x^2 + 4x - 3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ او $y = x^2 - 4x$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ منحني او $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ منحني د تابع له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحني او د $x^2 + y^2 = 2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y = \frac{1}{2}x + 1$ کرښې دوران او د x محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y = -x + 4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2 \le x \le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2 \le x \le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

احصائیه

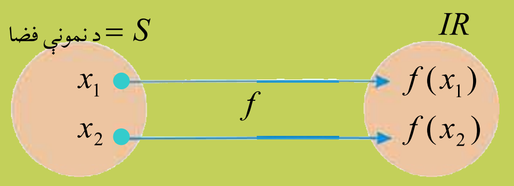
(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ټول افغانان یو.

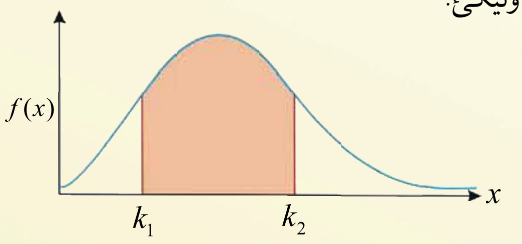
(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمایښت، نمونه‌یي فضا او ناڅاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تري ګټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2 \dots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او د $f(x)$ منحنی لاندینی محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښیئ.



- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $\left[E(x = x_i)\right] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ ، $\left[x_i - E(x_i)\right]^2$ او $\left[x_i - E(x_i)\right]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(گسسته) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښیو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چیرې x پیوسته ناځاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چیرې x ناځاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots\ldots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنگه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

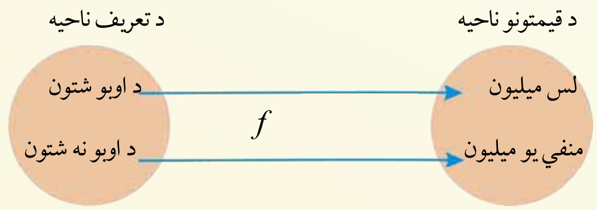
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو شخصي شركت غواړي د يوې غونډۍ پر سر د اوبو يوه څاه وکني، د اوبو څاه په يو ميليون افغانۍ تماميږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس ميليونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې بـه د څـاه د کېندلو يو ميليون افغانۍ مصرف په زيان ورکړي.

الف_ دا موضوع د يوې تابع په بڼه وښيئ.

ب_ که د دې احتمال چې کيندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال يې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*) ، وريانس او د x تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړي.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وريانس او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واريانس	انحراف معيار
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړي.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه مجزا توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

فعاليت

د لاندې آزمويښتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکې ده.
- د يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوې مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوې مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب د n آزمايښت څخه($m < n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريالیتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمايښت څخه په q وښودل شي نو د m کاميابي احتمال د آزمايښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزمويني د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی، چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چيرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلي آزمايښت څخه د m ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$

$$P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو،

د پورتنی فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جملهيي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{n\,p\,q}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چيرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې خومره احتمال شته چې پنځه تنه ښۀ شي او همدا شان پيدا کړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$
$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.0060466176\text{0}=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$
$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$
$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$
$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$
$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$
$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتنې

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پواسن د احتمال توزیع

که چیرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلاي شئ که چيرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د P قيمت صفر ته تقرب وکړي او د n قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي؛ نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کيږي.

1) $b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$

2) $\lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

3) $P(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

فعالیت

که $n=5$، $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قيمتونه په داسې حال کې چې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او له پاسنيو توابع قيمتونه سره يې پرتله کړئ، ويلاى شي چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دى؟

د پواسن فورمول کولاى شي، چې د m شکلونو د کاميابي احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لوى او د کاميابي احتمال P کوچنى وي، د تقريبي محاسبې لپاره وکارول کيږي.

دا فورمول عبارت دى له: $P(X=m)=\dfrac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دى.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين واپس را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنګه ليدل کېږي چې $n=200$ ډېر لوی او $P=0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda=n\,p=200\cdot 0.01=2$$

$$P(3)=\frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^{3}}{3!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}}\cdot 8}{6}=\frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$=\frac{0.13533\cdot 8}{6}=\frac{1.08268}{6}=0.1804$$

اوس که چيرې دا احتمال د دو جمله يي په فورمول محاسبه کړو، لرو چې:

$$P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}\;q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix}n=200\\ p=0.01\end{matrix}\right\}\Rightarrow q=0.99$$

$$P(3)=P(X=3)=\binom{200}{3}(0.01)^{3}(0.099)^{200-3}$$

$$=\frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^{3}(0.099)^{197}=0.1814$$

څرنګه چې ليدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معیار انحراف څومره دی؟

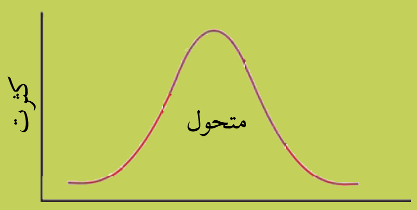
ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع

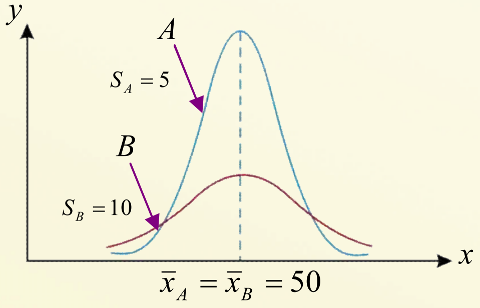
پوهېږو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر لـه زانګولی سره ده، په نورمال منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



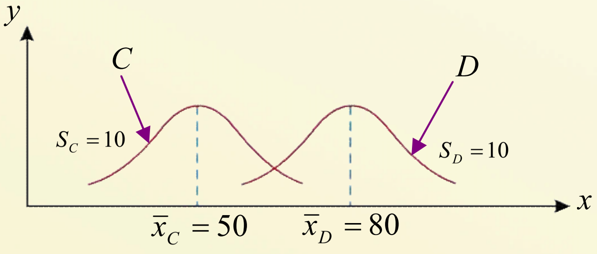
فعالیت

د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

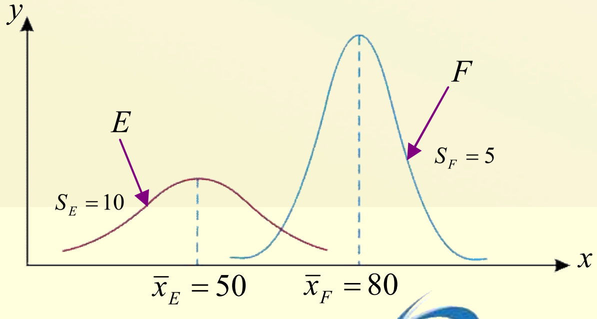
څو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطحو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزېدلي دي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

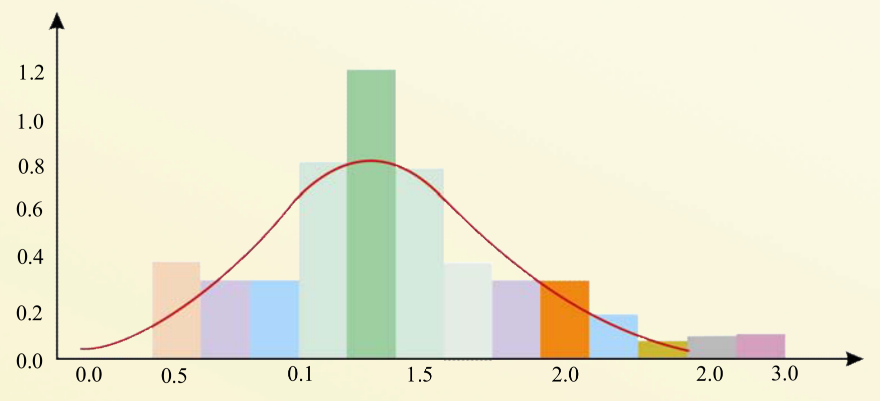
$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف، x پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعګانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګی مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، چې د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکسایډ میزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌یي شمېر له اندازه‌ګیرۍ سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

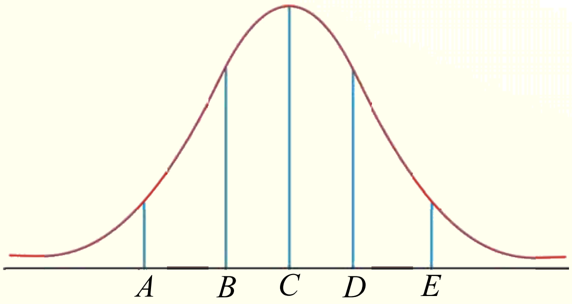
د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 دیټا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

لاندینی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیار انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.

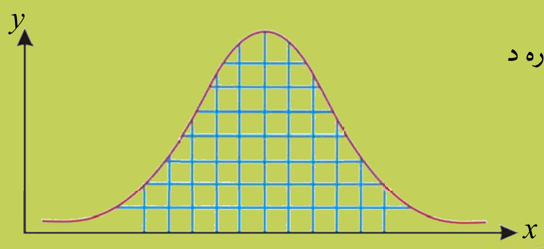


(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

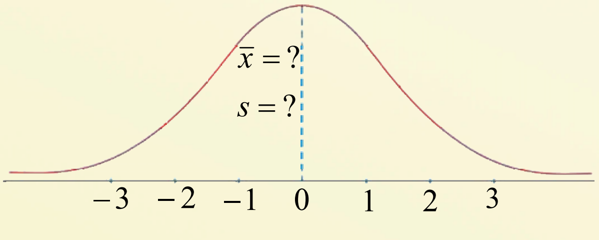
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y=f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.



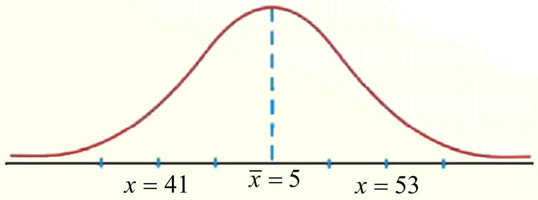
فعالیت

- که چیرې د x تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیار انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

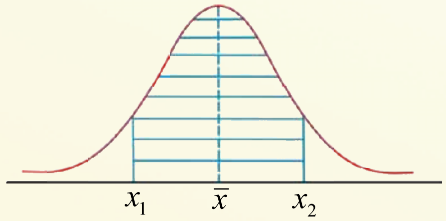
- که پـه لانـدې شـکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسـط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوی دی نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنۍ فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنۍ لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع‌ګانو د منحنۍ لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً دا کار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

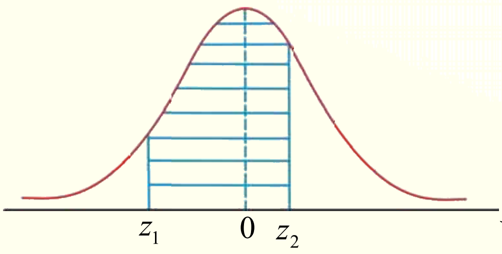
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنۍ ته د سټنډرډ نورمال منحنۍ په نامه یا د نورمال احتمال منحنۍ نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدارنګه د نورمال منحنۍ او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

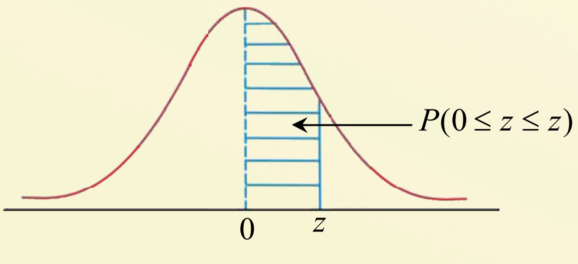
لاندې مساحت د يوه منحني يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لري او کولای شو چې د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښيو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$



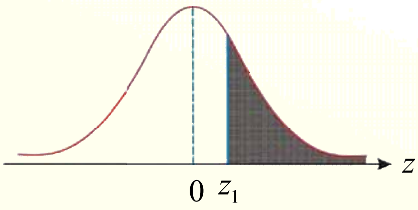
د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پايله کې کولای شو چې د نورمال د توزيع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزيع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قيمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضيح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزيع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پای راښيي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه ليکل شوی دی، راښيي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظيم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر څخه تر z پورې راښيي.



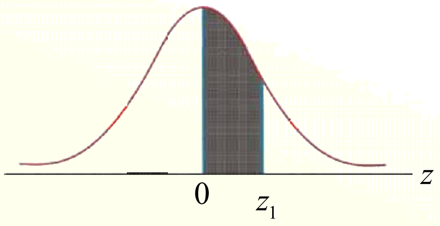
(c) ketabton.com: The Digital Library

جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

(c) ketabton.com: The Digital Library



جدول(2)

z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۴
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۶	۰/۱۰۶۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۶	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۲۸	۰/۱۶۶۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/۶	۰/۲۲۵۸	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲۶۱۲	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۹۶	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰۶	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸۶	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳۶۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۳	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴۶۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳۶۲۱
۱/۱	۰/۳۶۴۳	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۸۶	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۶۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹۶۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰۶۶	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳۶	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰۶	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰۶	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۴۱
۱/۶	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴۶۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۱۶	۰/۴۶۲۵	۰/۴۶۳۳
۱/۸	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۵۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۶۷۱	۰/۴۶۷۸	۰/۴۶۸۶	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹	۰/۴۷۰۶
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲۶	۰/۴۷۳۲	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵۶	۰/۴۷۶۱	۰/۴۷۶۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴۶	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸۶۱	۰/۴۸۶۴	۰/۴۸۶۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹۶	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰۶	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱۶
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۶
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴۶	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/۶	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵۶	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۲	۰/۴۹۶۳	۰/۴۹۶۴
۲/۷	۰/۴۹۶۵	۰/۴۹۶۶	۰/۴۹۶۷	۰/۴۹۶۸	۰/۴۹۶۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴
۲/۸	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۹۷۶	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۸	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۸۰	۰/۴۹۸۱
۲/۹	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۳	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۶	۰/۴۹۸۶
۳/۰	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳
۳/۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵
۳/۳	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۷
۳/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۸
۳/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸
۳/۶	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۷	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۹	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چیري $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پیداکړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسیږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کیږو چې د منحنې د لاندې اړوندې سطحې د $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

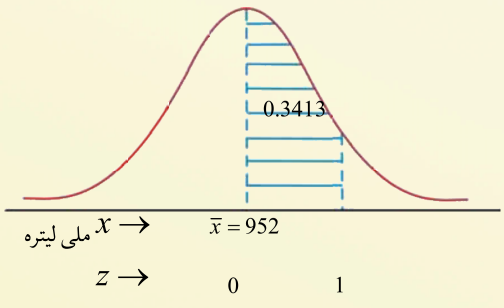
لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

حل: لومړی z د x له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلیږي. د لوست د پیل له جدول(2) څخه په گټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$P(0 \le z \le 1) = P(z_2) - P(z_1)$$
$$= P(1) - P(0)$$
$$= 0.3413 - 0$$
$$= 0.3413$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په گټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \dfrac{54-70}{8} = -2$

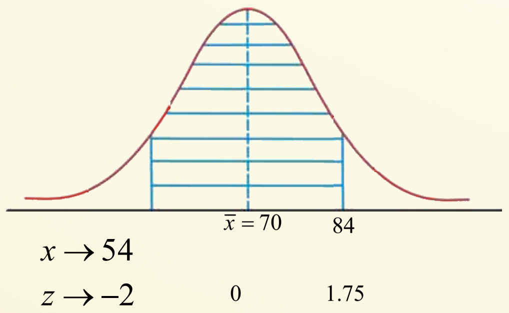
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \dfrac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی؛ نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوې مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



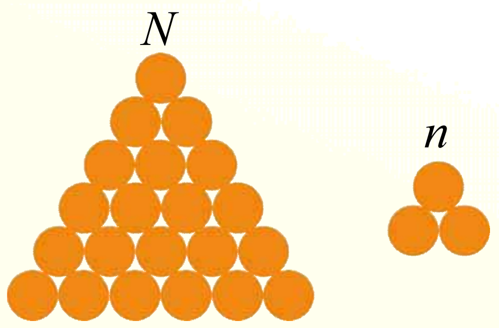
پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټره پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستل

په دې متل کې((موټی د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.



$N =$ **جامعه** $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- که چیرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوې؟ ولې؟
- د نمونه‌ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته ایا کولای شې یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شې چې د اوسط او معیار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورځخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- ایا د نمونه‌ګیرې او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتنې فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بیلې بیلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماتیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایې.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیرې ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایې.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1, x_2 \dots x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې تابع يې په دې ډول تعریف شوې وي.

$$f(x_1,x_2)\dots,x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\dots f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوې ناخاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړۍ پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې ټاکلو په لومړي پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې او د (1) عدد سپینه ګلوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولين دي. د $p=\frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i=1,2,3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i}(1-\frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخیسته ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 و x_3 ناخاپه متحولين يو له بل څخه بېل دی نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1,x_2,x_3) = P(x_1 = x_1 \;,\; x_2 = x_2 \;,\; x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وايي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه يې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثال بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې د يوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانیولې ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې د اوسط توزيع

دولت غواړي وپوهيږي چې د يوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس بايد ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کميت تخمين کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعاليت

- د لاندې data د دريو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پايله راښيي:

نوم	داود	سليمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزيع يې وليکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معيار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نيولو) ارايه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښيئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزيع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د توزيع جدول) وليکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزيع جدول مستطيلي ګرام رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, \dots. x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونهیي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونهیي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړې.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

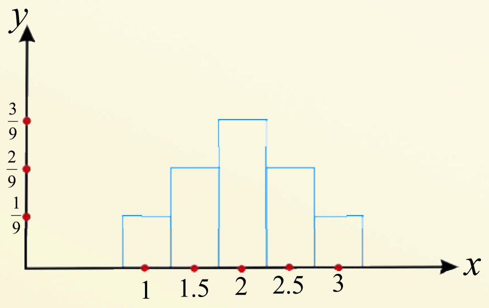
ج: لاندې جدول ټولې دوه‌گوني ممکنو نمونو د څای نیول، د سره او هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کیږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمیږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ليدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې يوه ټولنه د 6,4,2 او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزيع، اوسط او واريانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه ګوني ناخاپه نمونه د ځاى په نيولو سره وټاکئ او د نمونې توزيع اوسط يعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف يې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او واريانس حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولني کمیت ته د ټولني پارامتر او د نموني کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

فعالیت

- که د لویې ټولني حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، د کوچنی ټولني حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) چې N د ټولني عناصر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیار انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولني حجم له کوچنی ټولني سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوی وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چیرې N د یوې لویې ټولني د μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نموني اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نږدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړي، برابر له (1) سره دی.

مثال: د يوه لوی ټولګی شخه چې د زدهکوونکو د رياضي مضمون نمبرو نورمال توزيع د 71 اوسط او معيار انحراف يې 9 دی. يوه 9 تايي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 شخه زيات وي حساب کړئ. همدارنګه که چيرې په تصادفي ډول يو زدهکوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې يې له 80 شخه زياتې وي محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزيع د μ په اوسط او معيار انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(\bar{x} > 80) = P(z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}} = P(z > 3)$$

$$= 1 - P(z) \leq 3 = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

همدارنګه د $n = 1$ لپاره لرو:

$$P(\bar{x} > 80) = P(z = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta} > \frac{80-71}{9} = P(z > 1)$$

$$= 1 - P(z) \leq 1 = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قيمت له (2) جدول شخه په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناخاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په یوه ښارکې n کسان غواړي د B یوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که داکسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

فعالیت

- که چیرې x د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چیرې $x=n\hat{P}$ $\Rightarrow$ $\hat{P}=\frac{x}{n}$ وي د x قیمت په تعویض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ ولیکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولینو د $x_1,x_2,....,x_n$ له مجموع څخه تشکیل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چیرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمایښتونو مجموعه، P د هر آزمایښت بریالیتوب احتمال وي په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول وریانس وي.

د دوه جمله‌يي د توزیع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناخاپه متحولینو اوسط $(Expected\ Value)$ او وریانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزیع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د کاليو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، يوه ساده ناخاپه نمونه $n=6$ گونه ټاکو که چيرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

حل: د x ناخاپه متحول د دوه جمله‌يي توزيع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جمله‌يي توزيع جدول څخه په گټه اخيستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناخاپه متحول د $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کيږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، يوه نمونه د $n=200$ گونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلی وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

- ناخاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د یوې تابع په عنوان په احصائیه او احتمالاتو کې تر ې نه ګټه اخېستل کېږي.
- د یوه مجزا ناخاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې هغه عددونه دي چې ناخاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قیمتونو ناحیه سره د تعریف د ناحیې د عناصرو اړونده احتمالونه ګڼون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه کې هغه عددونه ګډون ولري چې د x ناخاپه متحول یې ځانته غوره کوي او د قیمتونو ناحیه یې د $f(x)$ ټول تصویرونه موجود دي.
- د یوه پیوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعریف ناحیه یې د x ټول پیوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او دقیمتونو ناحیه یې $F(x)$ ټول تصویرونه وي.
- د x مجزا ناخاپه متحول اوسط Expected value او وریانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزیع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزیع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزیع اوسط او معیاري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{npq}$, $\bar{x}=np$
- د پواسن د احتمال توزیع یو مجزا احتمال توزیع ده چې فورمول یې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له یوې نورمالې جامعې څخه د n خلیې(تایي) ناخاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزیع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta^2_{\bar{x}}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزیع سره ده.
- د نورمال توزیع: د نورمال توزیع شکل له زنګولې سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزیع کې مرکزي شاخصونه یو له بل سره برابر دي او د پیوسته ناخاپه متحولونو د ناحیې تعریف محدود دی چې د احتمال توزیع یې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معیاري انحراف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چیرې x د دوه جملهيي توزیع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، P دکامیابی احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیه د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = np$ او $V(x) = npq$

همدارنګه د دوه جملهيي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\hat{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x - \mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه یې د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونه‌ګیري، منظمه نمونه‌ګیري، ګروپي نمونه‌ګیري، خوشه‌يي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناخاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چیرې x د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چیرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پایې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالی وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمیده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیار انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چیرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چیرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چیرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښيئ:
    - د x د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیار انحراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چیرې $P = 0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د A کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د A کاندید طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويم نـل څخه پـه وار سره اوبه په څمکه تویېږي ويـلای شـئ چې لـه دې نلونـو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د تويېدو توپير په څه کې دی؟

فعاليت

- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومې دي؟
- آیا د ونې څخه د یو پېخي منې د لوېدلو وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثـانيو، دقيقـو او يـا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لويدلو نمونه يي فضا وليکې.
- د رمل داني د اچولو تجربي نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتنی فعاليت له سرته رسولو څخه لاندي پايله په لاس راځي:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضا عبارت له هغه ټاکلي او يا نـا ټاکلي سـټ يـا مجموعې څخه ده، چې د ځينـې عناصرو يې د شمېر وړ، او ځينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د پرېکړې يـا ګسـسته(شـليدلي) نمونه يي فضا يا متصل په نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتي(پيوسته) يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه نښتی(پيوسته) او کومه يوه پرېکړې(ګسسته) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي ګرېډ پورې.

هـ: د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوي، نو پرېکړې يا ګسسته فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تشکيل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نبنتي يا پيوسته فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستي دي.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-يي فضا چې کيدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې دکار د مودې قيمت شي، په دې ډول د داسې ناځاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقيقي عدد کيدای شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غير متمادی، نبنتي يا پيوسته نمونه يې فضا ده؛ يعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنې نمونه يې فضاکې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

يادونه:

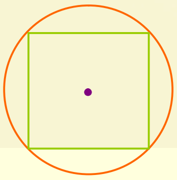
1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر يې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نو څکه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصل يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتني

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سک په دننه چې ورانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياست چې دا څنګه يوه نمونه يې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناځاپي يا تصادفي ډول د دايرې په دننه کې يو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکې د مربع په دننه کې وي.



3- يو طبيعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پيداکړې چې عدد د 4 مضرب وي.

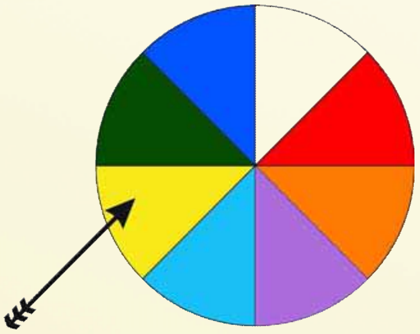
(c) ketabton.com: The Digital Library

هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنگه ناحيه او شين رنگه ناحيه کې د غشي لگېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لگېدو چانس دکچه په اړه د نارنجي او سپينو رنگونو سره په پرتله باندې څه ويلای شي؟
- د غشي د لگېدو د چانس کچې په تور رنگ څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يي فضا يې وليکئ.
- لومړنۍ ناځاپه پېښې لست کړې او د هر يو احتمال پيدا کړې دي؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شي؟

د پورتنی فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس په يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي. لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2\ ,...e_n\}$ يوه نمونه يې فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2...n$ لپاره يوه ناځاپه لومړنۍ پېښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1$, $i=1\ ,\ 2\ ,\ ...n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+...+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

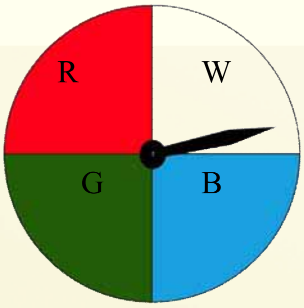
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دي.

لرو چې: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د دریدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د دریدلو احتمال به څومره وي؟



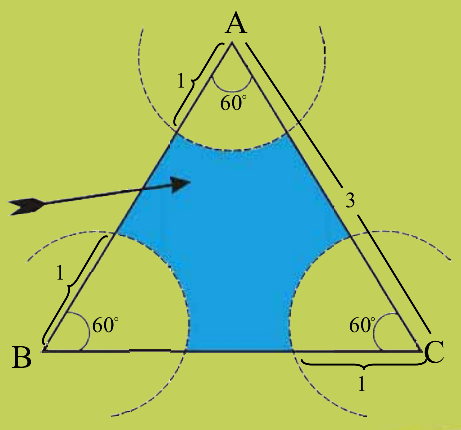
2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیداکړئ، چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیداکړئ.

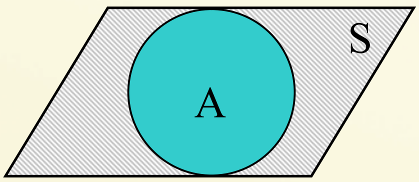
د نښتي يا پيوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحده ده، يو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکي د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لوې وي، څو دی؟



فعاليت

- آيا ويلای شي چې د يوې ټوټه کرښې، د يوې مستوي د يوې برخې او يا د فضا د حجم څو ټکي يو پر بل پسې موجود دي؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لويې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړيکه لري؟



- آيا کولای شئ دا مسئله په فضا د يوه جسم حجم د يوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عموميت ورکړئ؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله لاسته راځي.

پيوسته(متمادي) نمونه‌يي فضا د نامعينو ټکو مجموعه ده، چې شکل يې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او يا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پيدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او يا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

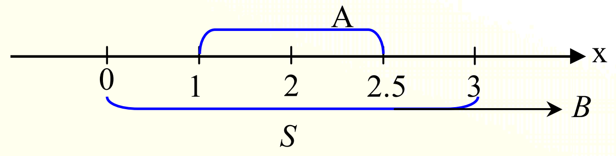
معمولاً د اعداد له محور څخه په ګټه اخيستنې سره د x يو متحول، د يوه مساحت د يوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y او په همدې ترتيب د حجمونو لپاره له دريو متحولونو لکه x، y او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x يو ټکي په ناڅاپي يا اتفاقي ډول ټاکو پيدا کړئ ددې احتمال چې $1 < x < 2.5$ وي؟

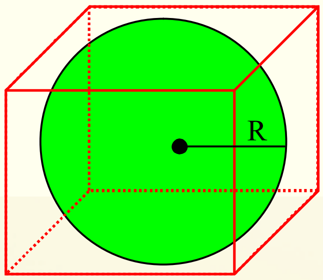
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د حقيقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نيولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A) = \frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالي}} = \frac{2.5-1}{3-0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



دويم مثال: په ناڅاپه ډول يو ټکی د يوه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې 2 واحده وي ټاکو پيدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکي د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r = \frac{a}{2}$ کيداى شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه يي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A) = \frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

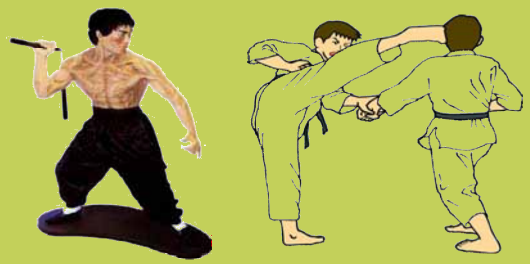
1- د حقيقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0 \le A \le 3$ او $-2 \le B \le 0$ وي، ددې احتمال پيدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې يو ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دايرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ، چې نوموړي ټکي نظر د دايرې محيط ته د دايرې مرکز ته نږدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشروط احتمال

له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده‌کوونکي د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کاراته بازان وي. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ، چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کاراته بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالي شوي؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده‌کوونکو څخه یې 70% نارینه زده‌کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده‌کوونکو لپاره احتمال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کوونکي ټاکل د ښوونځی له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکی د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

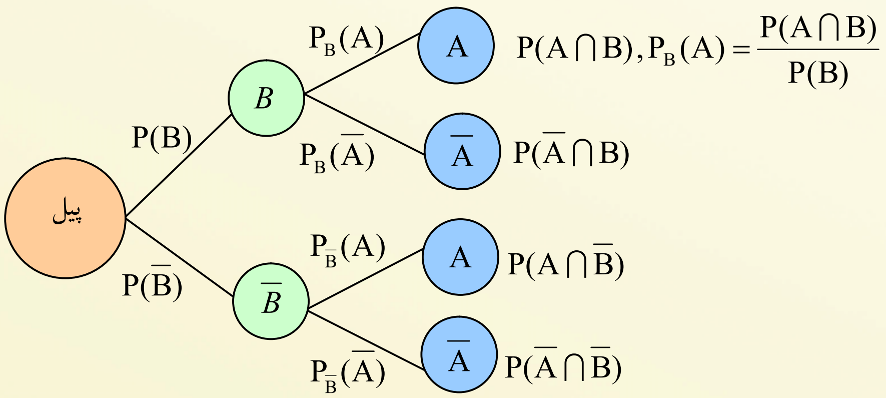
د لاندې احتمالات وېش له حاصل خخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونه‌یي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌یي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال خخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌یي فضا A او B د نمونه‌یي فضا دوې ناخاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پیښې احتمال نظر د B ناخاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کیږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول خخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

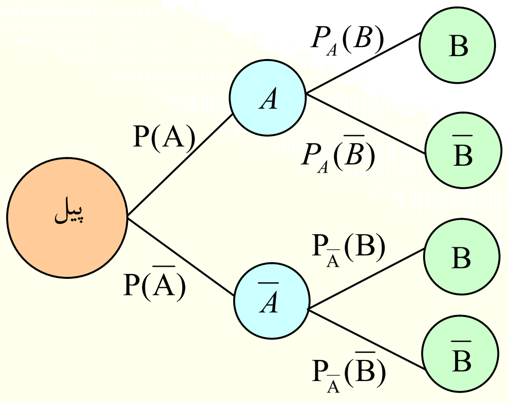
1- د مسیر د لومړي قاعدې خخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

مسیر له دویمې قاعدې د خخه په ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap \bar{B})=P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

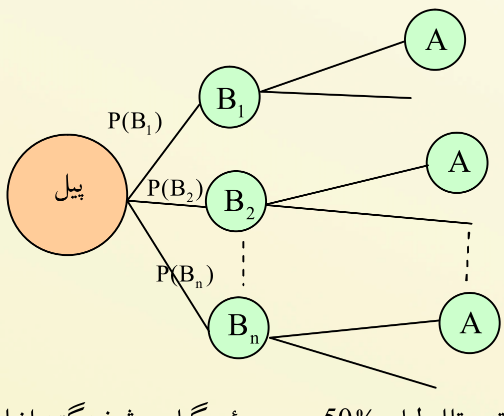
(c) ketabton.com: The Digital Library



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)}$

3- که چيرې نوموړی حالت د Ω نمونه يي فضا ناڅاپي پيښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختياري ويش لپاره عموميت ورکړو د ونې په ډول د ديګرام د په پام کې نيولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$



لومړی مثال: يو زده کوونکي ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګاډي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسيږي. په منځنی ډول نوموړی 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضريږي که چېرې پيښې:

A: د ګاډي په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسيدل

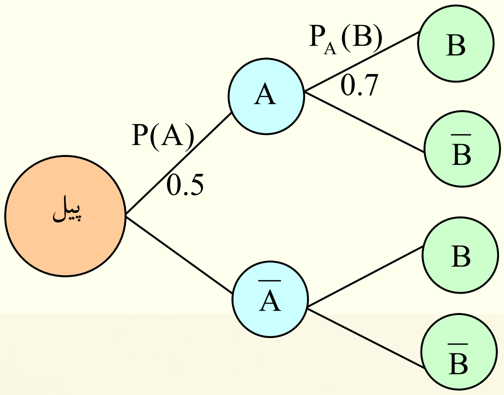
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته یعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

حل: د نومړي احتمال د پیداکولو لپاره د ونهییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

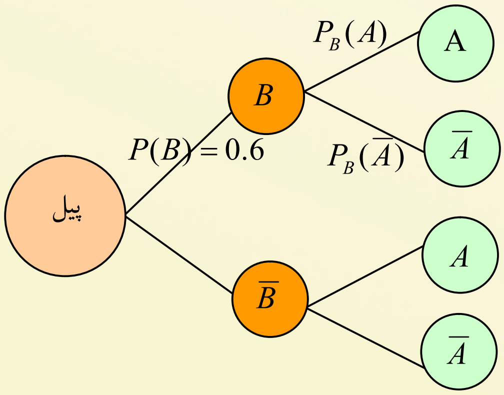
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

نو په دې اساس د ګاډي په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په شوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



پوښتنې

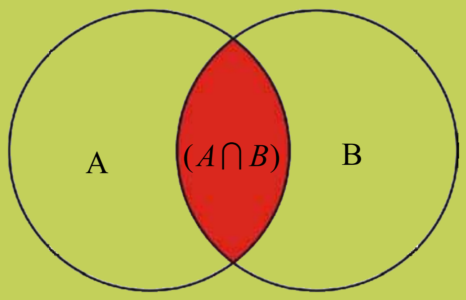
له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د ګاډي په واسطه سرته رسېدلې وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پېښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسېدل، په دې شرط چې د ګاډي په واسطه نه وي راغلی یعنې $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پيښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پيښې احتمال يو له بل سره څه اړيکه لري؟



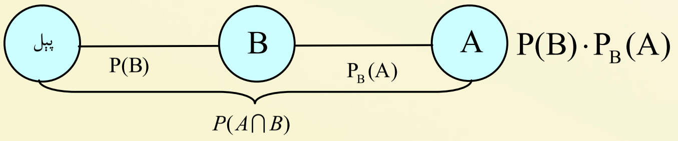
فعاليت

- که چيرې A او B دوې ناخاپه پيښې د S په نمونه يي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پيښې مشروط احتمال B ته وليکئ.
- د ونه‌ييز دياګرام څخه په ګټه اخيستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قيمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناخاپه پيښو احتمال د A او B ناخاپه پيښو څخه او يا د A مشروط له B څخه په ګټه اخيستنې سره وليکئ.
- د فعاليت د دوو پورتنيو بندونو د محاسبې پايلې يو له بل سره پرتله کړې.
- آيا کولای شو چې موضوع د ډيرو ناخاپه پيښو لپاره عموميت ورکړو.

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

د S په يوه نمونه يي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پيښو لپاره د مشروط احتمال د تعريف په پام کې نيولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

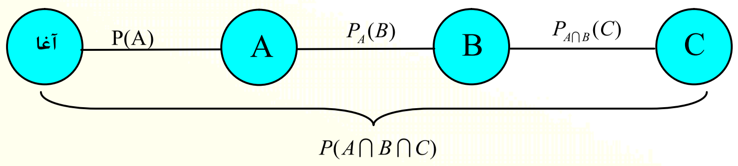
دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ييز دياګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مطلب د دريو A، B او C پيښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناخاپي پيښو لپاره هم په لاس راوړو.

مثال: د B_1, B_2 او B_3 دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنوکې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو دګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند برخه فيصدي ورکړل شوي ده؟

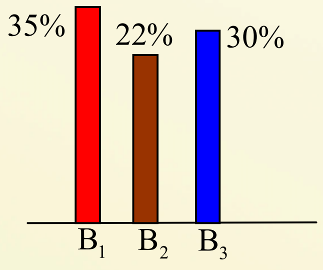
په کوم احتمال د ټاکنوګډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پيښې تعريف او نوموو:

V : هغه رايې ورکوونکي چې د جمهوري ګوند يې ټاکلي دي.

B_i : د ولايت رايې ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.

ولايت	راې ورکوونکي فيصدي	جمهوري ګوند ته رايې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30



د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پيښې په حقيقت کې يې د S نمونه يي فضا يو ويش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1- B_i يو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه يي فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $B_i\cap V\ \ (i=1,2,3)$ پيښنه يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دوارو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: که چیرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ خرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پېښو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضا کې یوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپه پېښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز (Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه يي فضا یو پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پېښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayex) فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

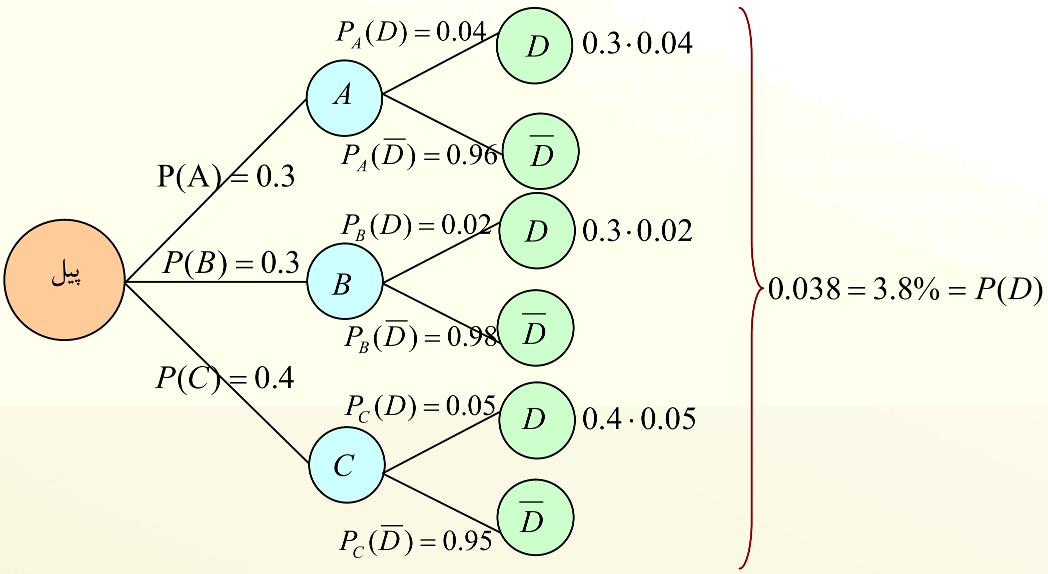
مثال: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره %30 ، %30 او %40 برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چیرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره %4، %2 او %5 وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوي ګروپ وران یا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C)=\frac{P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(C)\cdot P_C(D)}{P(D)}=\frac{0.4\cdot0.05}{0.038}=\frac{0.02}{0.038}=0.526=52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B)=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{P(\overline{D})}=\frac{P(B)\cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0.3\cdot0.98}{0.3\cdot0.96+0.3\cdot0.98+0.4\cdot0.95}$$

$$=\frac{0.294}{0.288+0.294+0.38}=\frac{0.294}{0.962}=0.3056=30.56\%$$

پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوې له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړې، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه به سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناخاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهیږو چـې د A او B دوو ناخاپو پېښو یا حادثو د B د پیښې پېښدل د A پـه پېښـه تـاثیر اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمـال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A \cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

فعالیت

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمـال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېښې وي د P(A) او $P_B(A)$ احتمـالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د P(A⋂B) ناخاپه پېښې احتمـال له څه سره مساوي دي؟
- د P(A⋃B) = P(A) + P(B) − P(A⋂B) د پیښو د احتمـال د فورمول څخه پـه هغه صـورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري څه پایله اخلي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي که چیرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چیرې A او B پېښې دګډو ټکو لرونکی نه وي، نو

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوی زده کوونکی تورې سترګې ولري.

پیدا کړئ هغه احتمال چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او تورې سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H) = P(H)$ بر سیره پردې $P_B(H) = \dfrac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , ...A_n , $(n \geq 2)$ ناخاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ او $\overline{A} \cap B$ ناخاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي؛ نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \overline{B}) = a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) = b(1-a)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناخاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: په يوه کڅوړه کې دوې سپينې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ يوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

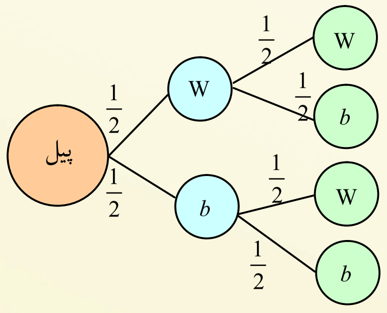
b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

د A پېښه: په لومړي ځل سپينه مرۍ راووزي. B: دويم ځل مرۍ سپينه وي.

له يو بلې څخه مستقلې يا ترلې (وابسته) دي.

حل:

a) څرنګه چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي نو A او B يوه له بلې څخه مستقلې دي.

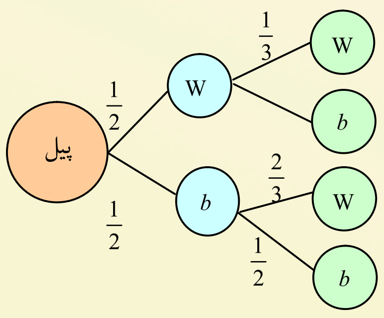


b) څرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه ترلې يا وابسته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلیږي.

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې 5,3,2 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چیرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوي او د تقسیم قابلیت په k ولري، آیا A_2, A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخيص وړ وي، د **پرېکړې یا** گسسته نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي؛ لکه د رمل يا د سکې اچولو تجربي نمونه‌يي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وی د پيوسته يا متمادی نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضاکې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرگندېږي.

هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربي په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

د نښتي(پيوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په يوه تجربي نمونه‌يي فضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلي فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

که چېرې A او B د S، د نمونه‌يي فضا دوې ناڅاپه پېښې چې $P(B) \neq 0$ وي په دې حالت کې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي په دې شرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوې وي.

يوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه یي فضاګانو څخه کومه یوه سره نښتې یا پیوسته او کومه یوه پرېکړې یا ګسسته دی؟
   الف: د یوې رمل دانې اچولو تجربه
   ب: د یوې سکې د اچولو تجربه
   ج: د یو غشي لګېدل په یوه دایره
   د: د یوې فلزي میلې د اوږدوالي زیاتېدلو تجربه نظر حرارت ته
2. د یو چارتراش چې اوږدوالي یې L دي په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددې شته دي چې د کین اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنې وي.
3. د یوه خصوصي شرکت یو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځاي کې چې د مامورینو په ګاډي کې د کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځاي ته رسېږئ څومره احتمال ددې شته چې نوموړي تن له 5 دقیقو څخه لږ منتظر پاتې شي.
4. د $[0.3]$ ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، پیدا کړې ددې احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنی او د 2 څخه لویه وي.
5. په ناڅاپه ډول یو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې وړانګې یا شعاع یې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پیدا کړې ددې احتمال چې ټکي د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.
6. د یو خودکار قلم خرابېدل دوه دلیلونه لري:
   1- د میخانیکیت خرابېدل
   2- د خودکار د نیچې خرابېدل
   که چېرې د یو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دلیل (1) ،شمیره وي مساوي په 0.05 او د دویم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنی دلایل مستقلې او یا غیر مستقلې پېښې دي؟
7. خیبر غواړې هغه څلور کلیګانې چې په جیب کې یې لري او سره یو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دریمې کلي له آزمویلو سره چې له جیب څخه یې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:
   a) هره آزمویل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جیب کې اچوي.
   b) هره آزمویل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جیب کې اچوي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library