

شمير پوهنه (رياضي)

د لسم ټولگي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

ليکونکي:

ډاکټر ماخان ميري شينواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

شمیر پوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکټر ماخان (میری) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

نیولیک	
۴	سرریزه.....
۶	پولینو شمیرنه.....
۲۹	د گاوس الگوریتم.....
۴۶	هورنر شیم.....
۵۵	اړیکې.....
۶۵	فنکشن (خپرونه) یا تابع.....
۹۱	فنکشن او په خپنکشن.....
۹۳	څلوری یا مربع توابع.....
۹۶	نورمال پارابل.....
۱۰۱	د څلوری تکمیل له.....
۱۱۵	کرښیز برابر ونسیستم.....
۱۲۳	د مناسب ځواب له پاره تلنلار.....
۱۲۹	مساوات سیستم بې له.....
۱۳۳	توان یا پوتنڅ توابع.....
۱۳۸	کرښیز توابع د ورکړ شوو.....
۱۳۸	مومړۍ حالت.....
۱۴۲	د کرښیز ابروونو ځانګړی.....
۱۶۵	n- مه درجه ټولراشمنل توابع.....
۱۷۵	د ټولراشمنل توابعو غوڅتګي.....
۱۷۸	د بدلون قانونه.....
۱۸۳	شننیزه – یا تحلیلی هندسه.....
۲۰۲	فنکشنونه (بل بدیل).....
۱۳۷	درېګوډیکچ.....
۲۷۹	ګډوله – یا کمپلکسګډونه.....
۳۱۵	د لیکونکي لیکلیاوژ باری.....
۳۲۰	د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه.....

سریزه

دا څلوېښت کاله کيږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنگ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګړتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلور دیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا مالیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د بنوونځي په کتابونو کې د ستاتیسټیک او احتمالي درسي نور هم خورا ستونځمن دي، چې زه ترې دلته تیریرم او د بنوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده. که زما کتابونه وړاندې نه شو. چې دابرخي یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د بنوونځي کتابونو کې دا برخي نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالي او ستاتیسټیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالي شمیرنه راوړي او د ستاتیسټیک یو کتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پټي ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځنې کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانو لوستونکو ته وړاندې شوي.

د شمیرپوهنې سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیسټیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سر کې راوړم، هیله ده چې ستونځي به رامنځ ته نه کړي.

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځی، چې ستونځوبي (د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمبټونه هم په کې شته. سره د ټولو نیگرتیاوو دا د بنوونځي له پاراهه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنی سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه، د ځان له امله نه وایم، دگرانو زده کوونکو او بنوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دي، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولې، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي بنوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووايم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د بنوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راوینسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ سترې شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بڅبنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼی.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

پولینوم شمیرنه

پولینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي —چې موریې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جگښتونه پیداښتي یا طبیعي ښکته دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

$$\text{بیلگه: } a_n \cdot x^n + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

هنداسي

$$P_n(x) = \underline{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګڼونه دي د ټولو $i=0,1,\dots,n$ له پاره.

پېژند: د پولینمچګګن n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنښه د توان په همغږیز جګیدونکي لیکنښه اودا کښته یې د پولینوم د توان په همغږیز ټیټیدونکي لیکنښه ده.

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته څو:

په دې پورته برابرې کړو، چې اووښتوني یا واریابلې د څلور په جگ یعنې x^4 نه شته. دا په دې مانا ده، چې ځله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنې $0 \cdot x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مخ ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_5 + b_5) x^5 + (a_4 + 0) x^4 + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

گورو، چېد برابر توا یا برابر جگگن واریابلې سره زیاتیږي.

بیلگه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + 0 \cdot x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_5 + b_5) x^5 + (a_4 + 0) x^4 + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلگه داسې لیکو:

$$\begin{array}{r}
 a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \\
 -(b_5 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0) \\
 \hline
 (a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - 0) x^4 + (a_3 - b_3) x^3 + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)
 \end{array}$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7 \\
 -(2x^5 + 0 \cdot x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1) \\
 \hline
 x^5 + 6x^4 - 7x^3 - x^2 + x + 6
 \end{array}$$

پېژند: دوه پولینومونه سره برابر دي، که ځله ووني يا صریبونه یې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \dots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي، د ټولو $i=1,2,\dots,n$ له پاره.

د پولینومونو په هکله مو په اتم ټولگي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولینوم کې هم ټول هغه شمیرلارې، چې په گڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلگې دې هم داروښانه کړي:

د پولینومونوله پاره نورې بیلگې:

$$O \ 3x^2 + 2x + 5$$

$$O \ 7x^3 + x^2 + 6x + 2$$

$$O \quad 10x^5 + 3x^4 + 2x$$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته. په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی. دا لاندې بیلگې دا هم ښایي، چې بینوم څنگه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلگه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلگه

$$(-x^5 - 2x^4 - 3x^2 - x + 2) + (x^2 + 2) = -x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x + 4$$

پولینوم کمون ته بیلگه: په لاندې بیلگه کې گورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کميږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) - (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلگې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږ او تاسې د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسو پام ورته رااړول کیږي

$$(x - 4) \cdot (x^2 - 2x + 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 12$$

$$(x - 5)(x^2 + 3x + 7) = x^3 - 2x^2 - 8x - 35$$

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3+x^2-6x+x^2+x-6 = \underline{x^3+2x^2-5x-6}$$

پولینوموېش:

دا لاندې بیلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پیچلی دی، په دې به پوره وغږیو.

$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$$

$$-(x^4+3x^3)$$

$$-(-x^3-3x^2)$$

$$-(5x^2+15x)$$

$$-(-9x-27)$$

Rest: 27 پاتې

کربنیزځله ووني سره ځل کيږي يا ضربيږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کيږي.

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)(x - 1,5)$$

$$= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3$$

$$= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad / \cdot 2$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه پیدا کړو. لاندې بېلگې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بېلگې په توګه د دریمې درجې ټولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونو په څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-\bar{x}_3)$$

چیرته چې $x_1, x_2, \bar{x}_3$ صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توګه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x_1=2$ یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x_1=2$ صفرځای لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x-2)(\dots)$

د صفرځای ټاکلو لپاره ایښوونه: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې یا وینې (...) ټاکو

دواړه لوري په $(x-2)$ وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6):(x-2)=(\dots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده (...) لاس ته راځي.

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 x^2 - 5x \\
 \underline{-(x^2 - 2x)} \\
 -3x + 6 \\
 \underline{-(-3x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

د نوکانو افاده (...) اوس $x^2 + x - 3$ بڼه لري

له دې لاس ته راځي د صفر ځای ټاکنو لپاره ایښوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\dots)(x-2) = (x^2 + x - 3)(x-2) = 0$$

نو دا مربع مساوات $x^2 + x - 3$ اوس حل کوو.

دا د $-p-q$ فرمول سره ځوابوو:

$$\begin{aligned}
 p = 1; q = -3 &\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}} \\
 x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} &\left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

صفر ځایونه:

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

د x محور سره غوڅتکي:

$$P_{x1}(2|0); P_{x2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} | 0\right); P_{x3}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} | 0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x) = (x-2)\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}\right) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښايي.

$ \begin{array}{r} 62228 : 47 = 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \\ \underline{-47} \leftarrow 47 \cdot 1 \\ 152 \leftarrow 47 \cdot 3 \\ \underline{-141} \leftarrow 47 \cdot 2 \\ 112 \leftarrow 47 \cdot 4 \\ \underline{-94} \\ 188 \\ \underline{-188} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 12) : (x - 4) = x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-(x^3 - 4x^2)} \leftarrow (x - 4) \cdot x^2 \\ -2x^2 + 11x \leftarrow (x - 4) \cdot (-2x) \\ \underline{-(-2x^2 + 8x)} \leftarrow (x - 4) \cdot 3 \\ 3x - 12 \\ \underline{-(3x - 12)} \\ 0 \end{array} $

گڼ ۶۲ د لومړيو دوه ځايونو څخه چور دی د دې وېشونو گڼونو څخه د پروېشونې (۴۷)

سره وېشل کيږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره ځل يا ضرب کيږي او د گڼ (۶۲) څخه کميږي. د کمښت نتيجه کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

$$47 \cdot 1324 = 62228 \quad \text{ازماښت:}$$

بيلگه:

$$\begin{array}{r}
 (-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12) : (-2x + 3) = 3x^2 + 2x - 4 \\
 \underline{-(-6x^3 + 9x^2)} \\
 -4x^2 + 14x \\
 \underline{-(-4x^2 + 6x)} \\
 8x - 12 \\
 \underline{-(8x - 12)} \\
 0
 \end{array}$$

Probe:

$$(-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12) = (3x^2 + 2x - 4)(-2x + 3)$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 2) = x^2 + 5x + 4 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 5x^2 - 6x \\
 \underline{-(5x^2 - 10x)} \\
 4x - 8 \\
 \underline{-(4x - 8)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{Probe: } (x^2 + 5x + 4)(x - 2) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \\
 \underline{-(a^3 + a^2b)} \\
 2a^2b + 3ab^2 \\
 \underline{-(2a^2b + 2ab^2)} \\
 ab^2 + b^3 \\
 \underline{-(ab^2 + b^3)} \\
 0
 \end{array}$$

از مابینت:

$$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \underbrace{(a^2 + 2ab + b^2)}_{\text{1. binomische Formel}} (a+b) = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) : (x-2) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \\
 \underline{-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)} \\
 -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \\
 \underline{-\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)} \\
 -x + 2 \\
 \underline{-(-x + 2)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)(x-2) \quad \text{از مابینت:}$$

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 - 14x - 12) : (x - 3) = 2x^2 + 6x + 4 \\
 \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\
 6x^2 - 14x \\
 \underline{-(6x^2 - 18x)} \\
 4x - 12 \\
 \underline{-(4x - 12)} \\
 0
 \end{array}$$

بیلگه:

په ځنو حالتونو کې دا ښه ده، چې د پولینوم لیکنو کې د اړتیا په وخت کې یوه تشیا پرېږدو، کله په پورته بیلگه کې چېگورو.

یوه بله شونتیا یې داده، چې هغه تشیا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندې:

$$2x^3 - 14x - 12 = 2x^3 + 0x^2 - 14x - 12$$

بیلگه:

لاندې بیلگه یو وېش د پاتې سره مخ ته بیایي. لکه څنګه چې د لیکنیز وېش څخه راته څرګند دی.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1) = x^2 + 4x - 2 \text{ (Rest } -10) \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \quad \Rightarrow (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1) = x^2 + 4x - 2 - \frac{10}{(x - 1)} \\
 4x^2 - 6x \\
 \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
 -2x - 8 \\
 \underline{-(-2x + 2)} \\
 -10 \text{ Rest}
 \end{array}$$

$$\text{Probe: } \left(x^2 + 4x - 2 - \frac{10}{(x - 1)} \right) (x - 1) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$$

دا چې نوي بلدي یون کې د ناسمون سره مخامخ کېږي، غوره ده چې د دې ازمایښت هم وکړو.

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یو صفرځای څرگند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$(x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Res polynomial}}$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدشي د څلورۍ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېشت یې وکړی.

بیلگه: پولینوموېش او ازماېشت یې

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6$$

$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$

$$x^2 - 5x$$

$$\underline{-(x^2 + x)}$$

$$-6x - 6$$

$$\underline{-(-6x - 6)}$$

$$\text{Prob e : } (x + 1)(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځی

الف. $(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x + 1)$ ب. $(2x^3 - x^2 - 8x + 4) : (x^2 - 4)$

پ. $(2x^3 - 3x + 1) : (2x - 1)$ ت. $(6a^6 + a^4b + 25b^3) : (3a^2 + 5b)$

ټ. $(8x^5 - 6x^7 + 2x) : 2x^2$

ث. $(9a^6b^3 - 12a^3b^5) : 3a^3b^3$

ج. $(15a^9 - 8a^6b + 8b^3) : (3a^3 + 2b)$

چ. $(14a^4 - a^3 + 5a^2 - 3a + 1) : (7a^2 - 4a + 1)$

ح. $\frac{3x^5y^{n+2} + 3x^2y^{3n+2} - 2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3}}{x^3 + y^{2n}}$

$$\frac{48a^{n+x} + 56a^x b^x - 72a^n b^x - 84b^{x+c}}{12a^n + 14b^x} \quad \text{خ -}$$

$$\frac{8a^{2n+1} - 10a^{2n}b + 15a^{3n-2}b - 12a^{3n-1}}{2a^{2n} - 3a^{3n-2}} \quad \text{خ -}$$

$$\frac{2a^5 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5} + 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}}{a^2 - b^3} \quad \text{خ -}$$

پولینوم برابرېون:

د یوه برابرېون په کین اوبښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرېون ورکوي

$$\text{Beispiel: } x^3 - 6x = 3x^2 - 8$$

د داسې برابرېون د اوبی له پاره لومړی دا برابرېون په داسې نامه صفر بڼه اړوي. دا په دې مانا چې برابرېون تر هغې په ورته بڼه بدلونارولکیري، چې په بنیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel: } x^3 - 6x = 3x^2 - 8 \mid -3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x = -8 \mid +8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

د صفر بڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نور مال بڼه وایي. موږ د پولینوم پنځه بدلوننهر اړورو

لومړی بدیل:

په برابرېون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n + b = 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

که n ناجوره وي، نورینه وېستوني کیدی شي کمیز ګڼ هم وي. د رېښې ټیک یو حل شتون لري.

که n جوړه وي، نورینه نیونی (هغه ګڼ چېرینه یې نیول کیږي) یواځې زیاتیز ګڼ کیدی شي.

دوه اوبیوني شتون لري.

بیلګه:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27 &= 0 \mid -27 \\ \Leftrightarrow 8x^3 &= -27 \mid : 8 \\ \Leftrightarrow x^3 &= -\frac{27}{8} \mid \sqrt[3]{} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3 &= 0 \mid +3 \\ \Leftrightarrow 2x^4 &= 3 \mid : 2 \\ \Leftrightarrow x^4 &= \frac{3}{2} \mid \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1,107 \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1,107 \right\}}} \end{aligned}$$

په لومړي حالت کې n ناجوره دي. رینه نیوني کمیزه هم کیدی شي اویواځې یواوبی شتون لري.

په دویم حالت کې n جوړه دي، رینه نیونی زیاتیز دي. که کمیزوي بیا برابرې اوبی نه لري.

دویم بدیل:

پولینوم برابرې یوڅلورې برابرې (مربع مساوات) انځوروي

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

دا د $p-q$ - فرمول له لارې اوبی یا حلکیري بیلگه

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$= \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{4; 9\}}}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکیري چې هغې لږلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا گڼون ټاکلی شي.

که $D > 0$ وي، نو څلوری برابرې دوه اوبی یا حلونه لري

که $D = 0$ وي، نو برابرې یواځې یو ډبل اوبیلري

که $D < 0$ وي، نو برابرې اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبر ابرونیو دوه-څلوری برابرې biquadratische انځوري.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښوونې يا سېسټېمچېوېشن د $p-q-z$ -فرمول په مرسته يا له لارې شمېرل کېدې شي

پسې دې بېرته په ځايونه په څټسېسټېمچېوېشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي. ريښه ټيک د زياتيز - $p-q-z$ -ارزېنتونو له پاره نيول کېدې شي.

بېلگه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18; q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow L = \underline{\underline{\{-3; 3\}}}$$

په دې حالت کې د یسکریمینانت صفر دی، داسې چې د سبستیچیوشناووبنتوني له پاره یو اوبی. ($z = 9$) شتون لري. دا په دېمانا، چې د ۴ مې درجې پولینوم ټیک دوه اوبی یا ځوابونه لري.

څلورمبدیل:

په پولینومبرابرون کې هغه هغه ارژنېته یا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووبنتوني یا مجهوله x کیدی شي له نوکانو راووبستلشي. اوبیوني د صفر ځل یا - صرب له جملې شمیرلکیدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بیلگه

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 0}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p = 1; q = -2$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{L = \{-2; 0; 1\}}$$

د صفر څلوروني یا صریب دویم څلورونی کیدی شي د $p-q$ - فرمولسره سادهوشمیرلشي. د صفر څلوروني جمله: یوخل یا صرب ټیک هلته صفر دی، چې یو څلورونی صفر وي.

پنځم بدیل:

پولینومبرابرون له بدیلونو ۱ - ۴ په څیر نه دی.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په دېرو حالتونوکې کیدی شي، د پوینوموېشله لارې اوبی ومیندلشي. د دې له پاره باید یواوبی معلوم وي.

که د پولینوم یو اوبی معلوم وي، نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لاری به یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرېون راځي، نو اوبیونه یې بیا ساده ه، چې نور اوبی پیدا کړو. لاندې بیلگه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی، د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي. پولینوم وېش همغه په راته څرگنده لیکنیز ډول لاس ته راوړو.

Division.

وېشنه

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د نوکانو (....) وینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.

له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x - 2) = 0$$

اوس دا څلوری برابرېون یا مربع مساوات $(x^2 + x - 3)$ د اوبیوني دي، چې د $p-q$ فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; 2; -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

که چیرې د گومان یا ازمایښت له لوري اوبی نه شي پیداکیدی، نوییا د نومریک
تڼلار څخه کار اخستلکیري (دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونه د x پسې اوبی - یا حل کړی او ازمایښت یې سرت هورسوی.

$$\text{الف - } \frac{1}{5}x^3 - 25 = 0 \quad \text{ب - } \frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0 \quad \text{پ - } 8x(x^2 - 1) = -8x + 1$$

۲ - برابرونه د x پسې اوبی - یا حل کړی او ازمایښت یې سرت هورسوی.

$$\text{الف - } 27x^3 - 8 = 0 \quad \text{ب - } \frac{1}{16}x^3 - 4 = 0 \quad \text{پ - } -2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$$

۳ - برابرونه د x پسې اوبی - یا حل کړی او ازمایښت یې سرت هورسوی.

$$\text{الف - } 4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0 \quad \text{ب - } \frac{1}{4b}(x^3 - b^3) = 0; b > 0 \quad \text{پ - } (x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$$

۴ - برابرونه د x پسې اوبی - یا حل کړی او ازمایښت یې سرت هورسوی.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانگړې باکتریاگانې د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل گڼو (تعداد) څلور برابره کوي. په
یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دی؟

۶ - د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکیا کره کیري. د یوه پنځه کلن زوړ
کارشوي یوم، ترپلورونکي € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که
سړس داسپمخ ته لار شي چې دا په لومړیو پنځه کلونو کې برابر جگ وي؟

۷ - برابرونه اوبی - یا حل کړی

$$\text{الف - } \frac{1}{4}x^3 - 4x = 0 \quad \text{ب - } 3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0 \quad \text{پ - } x^3 + x^2 - 2x = 0$$

۸ - برابرونونه اوبیکړی

$$\text{الف - } 4x(x^2 - x) = 7x^3 - 7x^2 - 6x \quad \text{ب - } \frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\text{پ --- } \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$$

دا لاندې برابرونونه اوبی کړی

$$\begin{aligned} \text{الف - } x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0 \quad \text{ب - } -\frac{1}{2}x^3 + 4x &= \frac{1}{2}x^2 - 4 \\ \text{پ - } -2x^3 + 6x^2 - 4x &= \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{ت - } x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0; x_1 = \frac{1}{2} \\ &\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

لاندې برابرونونه حل کړی چې یو اوبی یا حل پیمعلوم وي

$$\text{الف - } x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0; x_1 = -1$$

د پولینوم وېش څخه کار واخلی.

-- د پولینوم وېش څخه کار واخلی

$$\text{الف - } \left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1) \quad \text{ب - } (x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k) : (x^2 - 2)$$

$$۱۲ - \text{برابرون } x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0 \text{ ورکړ شوی. وښایی، چې}$$

د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یو اوبی دی. د k د کوم ارزښت لپاره تیک یو ډبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو څلوونو یا صریبونو په څیر ولیکی. پوښتنه:

a داسې وټاکي، چې برابرون

$$(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0$$

تيك دوه اوبيوني يا حلونه ولري

يو د دريمي درجي برابرېون دا دوه $L = \{ -4 ; 2 \}$ اوبيوني لري.

الف - د اوبيونو يا حلونو په هکله ويناوي وکړي.

ب - دوه برابرېونونه ددې اوبيوني ورکړي.

۳ - برابرېونونه اوبيکړي

$$\text{الف. } 2x^3 - x^2 - x = 0 \quad \text{ب. } x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$$

۴ - برابرېونونه اوبيکړي

$$\text{الف. } -3x^3 + 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{ب. } x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$$

۵ - برابرېونونه اوبييا حلکړي

$$\text{الف. } x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{ب. } x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$$

برابرېونونه اوبي کړي

$$\text{الف. } -u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{ب. } a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$$

۷ - برابرېونونه حل کړي

$$\text{الف. } x^3 - (3 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$$

$$\text{ب. } \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{پ. } \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$$

$$\text{ت. } \frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0 \quad \text{ټ. } x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$$

$$\text{ث. } \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \text{ج. } x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\text{چ. } x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \quad \text{ځ. } x^3 - 3x^2 = -4$$

$$\text{ځ. } (3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$$

پوښتنې

۱ - برابرېونونه د پسي حل کړي

الف - $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$ ب $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0$
 پ - $-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4} = 0$ ت - $\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - 5x + 15 = 0$
 ث - $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ ج - $(3x - 1)(x + k)^2 = 0$

۱۔ x پسي يي اوبي کړی $(k \neq 0)$

الف - $\frac{1}{9k}(x^4 + x^3 - 12x^2) = 0$ ب - $\frac{k}{2}x^4 - kx^3 - \frac{3k}{2}x^2 = 0$
 پ - $\frac{x^2}{5k^2}(x^2 - 3k) = 0; k > 0$ ت - $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$
 ث - $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ ج - $-\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 3 = 0$
 د - $\frac{1}{3}(x^2 - 3)^2 - 3 = 0$ ه - $\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$
 خ - $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

پوښتنې

حلونه يا اوبيونې وټاکي

الف - $\frac{1}{3}x^4 - 3x^3 = 0$ ب - $\frac{1}{7}x^4 - 7 = 0$ پ - $\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1 = 0$
 ت - $-2x^4 + x^2 + x = 0$ ث - $\frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^3 - x = 0$ ج - $\frac{2}{5}(x^2 - 9)(x + 2)^2 = 0$
 د - $\frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x = 0$ ه - $x^4 - 5x^2 - 2x = 0$ خ - $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Der Gauß- Algorithmus د گاوس الگوریتم

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولگي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.



یادونه: خوارزمیه د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیه دی، چې په لاتین کې ترې الگوریتموس جوړ شوی دی. الخواریزم د الگوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکي چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه. الگوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولگي پا یوه یواځنی د اوبیوني تلنلار ړه. الگوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوبه کرښیز برابر ونو سیستم اوبیوني ته

ننوتنیلگي:

$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -12 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ شمیرنڅیره یا شیمیا داسې لیکو	درې برابر ونونه د درې اووښتونو یا واریابلو یا متحولو سره له ښه بدلون څخه لرو	د کرښې ټول په توگه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه گڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه گڼ سره وېشلکیدلی شي.

$\begin{array}{ccc c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 7 & 3 & -5 & -12 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{array}$				$\begin{array}{ccc c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}$				- سره زیاتیدی شي - سره کم کړي درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووښتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي. د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په څټ ایښوونې له رای هم کیدی شي.	
$\begin{array}{ccc c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 7 & 3 & -5 & -12 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{array}$				$\begin{array}{ccc c} 28 & 12 & -20 & -48 \\ -28 & -56 & 112 & 140 \\ -28 & 7 & -21 & 7 \end{array}$				$\begin{aligned} -14x_3 &= -14 \\ \Leftrightarrow x_3 &= 1 \\ -11x_2 + 23 \cdot 1 &= 23 \\ \Leftrightarrow -11x_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 &= -12 \\ \Leftrightarrow 7x_1 &= -7 \\ \Leftrightarrow x_1 &= -1 \end{aligned}$	
$\begin{array}{ccc c} 28 & 12 & -20 & -48 \\ 0 & -44 & 92 & 92 \\ 0 & 19 & -41 & -41 \end{array}$				$\begin{array}{ccc c} 7 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & -11 & 23 & 23 \\ 0 & 19 & -41 & -41 \end{array}$				$L = \{ -1; 0; 1 \}$	
$\begin{array}{ccc c} 7 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & -209 & 437 & 437 \\ 0 & 209 & -451 & -451 \end{array}$				$\begin{array}{ccc c} 7 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & -11 & 23 & 23 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}$				ازماښت: په لاندې کې د رښتیا له پاره ځای په ځای دي.	
				$\begin{aligned} 7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 &= -12 \quad (w) \\ -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 &= 5 \quad (w) \\ -4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 &= 1 \quad (w) \end{aligned}$				د بیخي نویو له پاره یادونې: د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توتې شي.	

۱- د اصلي ماتلاندې سره د لیکې له لاری ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

۲- په لومړۍ کړبڼه لومړی گڼ باید زیاتیز وي (که نه، بیا کیدی شي د ۱ سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅیږي چې په لومړي درځ کې ټول گڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ مه او ۳ مه لیکه کې دې لومړي گڼونه کمزوي.

۴- ۲ مه او ۳ مه لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په ۲ مه لیکه کې دې دویم گڼ زیاتیز وي (که نه، نو د ۱ سره دې ځل شي)

۶- د ځل یا وېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول گڼونه همغه ارزښت ولري.

۷- و ۲-مې لیکې یا کړبڼې ته ۳-مه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸- لاس ته راوړی د اوبې یا حل په څنډ لور کیردی.

برابر پرمختگ ټول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابر ونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي. دا چې ،، څنگه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونو له لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونيولشي، چې د نا اړینې تیروني مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیري؟

د په څنډ ایښوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه	لاني الماني: سره بدل کړی

tausche: $\Leftrightarrow$

x_1	x_2	x_3		
7	3	-5	-12	
-1	-2	4	5	$\mid \cdot (-1) \mid \Leftrightarrow \text{II}$
-4	1	-3	1	
1	2	-4	-5	
7	3	-5	-12	$\text{II} - 7 \cdot \text{I}$
-4	1	-3	1	$\text{III} + 4 \cdot \text{I}$
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\mid \cdot 9$
0	9	-19	-19	$\mid \cdot 11$
1	2	-4	-5	
0	-99	207	207	$\mid : 9$
0	99	-209	-209	$\text{III} + \text{II}$
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$
 $\Leftrightarrow \underline{x_3 = 1}$
 $-11x_2 + 23 \cdot 1 = 23$
 $\Leftrightarrow -11y = 0$
 $\Leftrightarrow \underline{x_2 = 0}$
 $x_1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -5$
 $\Leftrightarrow x_1 = -7$
 $\Leftrightarrow \underline{x_1 = -1}$
 $L = \{-1; 0; 1\}$

از مابینت:

$7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12 \quad (w)$
 $-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5 \quad (w)$
 $-4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1 \quad (w)$

از مابینست:

$$7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12 \quad (w)$$

$$-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5 \quad (w)$$

$$-4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1 \quad (w)$$

بیلگه ۱: (ساده یا اسانه)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3		
2	-3	4	8	$\cdot 6$
3	4	-5	-4	$\cdot 4$
4	-6	3	1	$\cdot 3$
12	-18	24	48	$\cdot 6$
12	16	-20	-16	$\text{II} - \text{I}$
12	-18	9	3	$\text{III} - \text{I}$
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

د په خټ ایښوولو له لارې د اوبییا حل لاس
ته راوړنه

$$-15x_3 = -45$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_3 = 3}$$

$$34x_2 - 44 \cdot 3 = -64$$

$$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_2 = 2}$$

$$2x_1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 = 1}$$

$$L = \{1; 2; 3\}$$

Probe:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 \quad (w)$$

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -4 \quad (w)$$

$$4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 \quad (w)$$

$$-15x_3 = -45$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_3 = 3}$$

$$34x_2 - 44 \cdot 3 = -64$$

$$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_2 = 2}$$

$$2x_1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 = 1}$$

$$L = \{1; 2; 3\}$$

Probe:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 \quad (w)$$

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -4 \quad (w)$$

$$4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 \quad (w)$$

بیلگه ۲ (منځنۍ سخته)

$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$ $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$ $8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$	د په څټ ایښوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه $48x_3 = 288$ $\Leftrightarrow x_3 = 6$ $x_2 + 1 \cdot 6 = 11$ $\Leftrightarrow x_2 = 5$ $3x_1 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2$ $\Leftrightarrow 3x_1 = 12$ $\Leftrightarrow x_1 = 4$ $L = \{4; 5; 6\}$ ازمایښت: $3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2 \quad (w)$ $4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 9 \quad (w)$ $8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 - 9 \cdot 6 = 13 \quad (w)$

بیلگه ۳: (سخته): لاندې درې برابر ونونه غواړو اوبې کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$

$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$

$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

د په خټ ایښوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 40$$

$$126x_2 - 29 \cdot 40 = 1360$$

$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 20$$

$$20x_1 - 32 \cdot 20 + 15 \cdot 40 = 160$$

$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 10$$

$$L = \{ 10 ; 20 ; 40 \}$$

ازمابښت:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{3}{8} \cdot 40 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4(w)$$

$$\frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 40 = 23$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23(w)$$

$$\frac{4}{5} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 40 = 8$$

$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8(w)$$

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	· 40
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	· 40
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	· 20
20	-32	15	160	· 12
30	15	8	920	· 8
16	-10	5	160	· 15
240	-384	180	1920	: 12
240	120	64	7360	II - I
240	-150	75	2400	III - I
20	-32	15	160	
0	504	-116	5440	: 4
0	234	-105	480	: 3
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	· 13
0	78	-35	160	· 21
20	-32	15	160	
0	1638	-377	17680	: 13
0	1638	-735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د کارونې یا استعمال بیلګې

د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرېون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي یې معلوم دي،

د گاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کارونې بیلګه ۱:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|4) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_2(2|2) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$$

$$P_3(4|4) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(5|20) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$$

a_0	a_1	a_2	a_3	
1	1	1	1	4
1	2	4	8	2 II - I
1	4	16	64	4 III - I
1	5	25	125	20 IV - I
1	1	1	1	4
0	1	3	7	-2
0	3	15	63	0 III - 3·II
0	4	24	124	16 IV - 4·II
1	1	1	1	4
0	1	3	7	-2
0	0	6	42	6
0	0	12	96	24 IV - 2·III
1	1	1	1	4
0	1	3	7	-2
0	0	6	42	6
0	0	0	12	12

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$

$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42$$

$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid :6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارون بیلگه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{9}{2}\right) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$$

$$P_3(-2|8) \Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_4\left(-3 \mid \frac{5}{2}\right) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$ \cdot 2$
1	-1	1	-1	$\frac{9}{2}$	$ \cdot 2$
1	-2	4	-8	8	$ \cdot 2$
1	-3	9	-27	$\frac{5}{2}$	$ \cdot 2$
2	2	2	2	-11	
2	-2	2	-2	9	II - I
2	-4	8	-16	16	III - I
2	-6	18	-54	5	IV - I
2	2	2	2	-11	
0	-4	0	-4	20	I: (-2)
0	-6	6	-18	27	I: 3
0	-8	16	-56	16	I: 4
2	2	2	2	-11	
0	2	0	2	-10	
0	-2	2	-6	9	III + II
0	-2	4	-14	4	IV + II
2	2	2	2	-11	
0	2	0	2	-10	
0	0	2	-4	-1	
0	0	4	-12	-6	IV - 2 \cdot III
2	2	2	2	-11	
0	2	0	2	-10	
0	0	2	-4	-1	
0	0	0	-4	-4	

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کارونې بیلګه ۳ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-1	1	-1	-16	
1	2	4	8	11	II - I
1	4	16	64	-11	III - I
1	6	36	216	-9	IV - I
1	-1	1	-1	-16	
0	3	3	9	27	: 3
0	5	15	65	5	: 5
0	7	35	217	7	: 7
1	-1	1	-1	-16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III - II
0	1	5	31	1	IV - II
1	-1	1	-1	-16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	-8	
0	0	4	28	-8	IV - 2 · III
1	-1	1	-1	-16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	-8	
0	0	0	8	8	

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلگه ۴ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-1	1	-1	7	
1	-2	4	-8	6	II - I
1	3	9	27	1	III - I
1	-3	9	-27	-2	IV - I
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	4	8	28	-6	III + 4 · II
0	-2	8	-26	-9	IV - 2 · II
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	0	20	0	-10	
0	0	2	-12	-7	

Die Funktionsgleichung:

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7$$

$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid : (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid : (-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پورته المانیژباره: د څیروني يا تابع برابرېون

د کاروني بیلګه ۵ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$

$$P_2(4|44) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$

$$P_3(-4|4) \Rightarrow f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(8|40) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II - I
1	-4	16	-64	4	III - I
1	8	64	512	40	IV - I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	-6	12	-72	-18	III + 3 · II
0	6	60	504	18	IV - 3 · II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	-48	IV - $\frac{1}{2}$ · III
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	-72	

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$

$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \mid +24$$

$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \mid : 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \mid -4$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \mid -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$$

د پورته المانیژباره: د څیرونیا تابع برابر و

د کاروني بیلګه ۶ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|0) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$$

$$P_2(-1|-2) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$$

$$P_3(2|16) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$$

$$P_4(-3|-4) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	-1	1	-1	-2	II - I
1	2	4	8	16	III - I
1	-3	9	-27	-4	IV - I
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	1	3	7	16	III + $\frac{1}{2}$ · II
0	-4	8	-28	-4	
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	0	3	6	15	: 3
0	0	8	-24	1	: 8
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	-3	0	IV - III
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	-5	-5	

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$

$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 | -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 | +2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 | -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کارونې بیلګه ۷ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_2(2|0) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

$$P_3(-2|4) \Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(3|9) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II - I
1	-2	4	-8	4	III - I
1	3	9	27	9	IV - I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	-1	
0	-3	3	-9	3	III + 3 · II
0	2	8	26	8	IV - 2 · II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	-1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	IV - $\frac{1}{6}$ · III
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	-1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$

$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid :12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کاروني بيلگه ۸ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}|\frac{45}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}|\frac{77}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3	
1	1	1	1	6
1	3	9	27	-4
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$ ·8
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$ ·8

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

1	1	1	1	6	
2	3	9	27	-4	II - I
8	-4	2	-1	45	III - 8·I
8	-12	18	-27	-77	IV - 8·I

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	-12	-6	-9	-3	III + 6·II
0	-20	10	-35	-125	IV + 10·II

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	0	42	147	-63	: 21
0	0	90	225	-225	: 45

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	0	2	7	-3	
0	0	2	5	-5	IV - III

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	0	2	7	-3	
0	0	0	-2	-2	42

د کارونې یا استعمال بیلګه ۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	-1	1	-1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	-8	$\mid \cdot 8$

$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$
 $\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

8	8	8	8	-36	
8	-8	8	-8	44	II - I
8	24	72	216	-20	III - I
8	-20	50	-125	-64	IV - I
8	8	8	8	-36	$\mid : 4$
0	-16	0	-16	80	$\mid : 4$
0	16	64	208	16	$\mid : 4$
0	-28	42	-133	-28	$\mid : 7$
2	2	2	2	-9	
0	-4	0	-4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	-4	6	-19	-4	IV - II
2	2	2	2	-9	
0	-4	0	-4	20	
0	0	16	48	24	$\mid : 8$
0	0	6	-15	-24	$\mid : 3$

$2a_2 + 6a_3 = 3$
 $\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$
 $\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$
 $\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$

$-4a_1 - 4a_3 = 20$
 $\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$
 $\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$
 $\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$
 $\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$
 $\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$
 $\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$

د کارونې يا استعمال بیلگه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$

$$P_2(-1|-49) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$

$$P_3(3|27) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$

$$P_4(5|5) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	-1	1	-1	-49	II - I
1	3	9	27	27	III - I
1	5	25	125	5	IV - I
1	1	1	1	25	
0	-2	0	-2	-74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	-20	IV + 2 · II
1	1	1	1	25	
0	-2	0	-2	-74	
0	0	8	24	-72	
0	0	24	120	-168	IV - 3 · III
1	1	1	1	25	
0	-2	0	-2	-74	
0	0	8	24	-72	
0	0	0	48	48	

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$

$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$$

$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid : 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid : (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{cases} \Rightarrow L = \{13; 15; 17\}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow L = \{15; 12; 10\}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{cases} \Rightarrow L = \{5; 3; 1\}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow L = \{3; 2; 1\}$ $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases} \Rightarrow L = \{-1; 3; 2, 5\}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow L = \{5; 3; 1\}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cc|cc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1; -1; 2; -1\}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cc|cc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1; -1; 0; 5\}$$

د لاس ته راوړني د کنترول له پاره دې ازماښت وشي.

Das Horner – Schema هورنر- شیمما

د دې له پاره چې د جگودر جو ټولراشنلڅیرونو یا که غواړی توابعو گراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابر کړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین څیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیمما دا شمیرني ډبرې ساده کوي.

بیلگه : دریمه درجه ټولراشنل فنکشن یا راشنل څیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x \left[a_3x^2 + a_2x + a_1 \right] + a_0 = x \left[x \left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2} \right) + a_1 \right] + a_0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{e_4}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_E$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

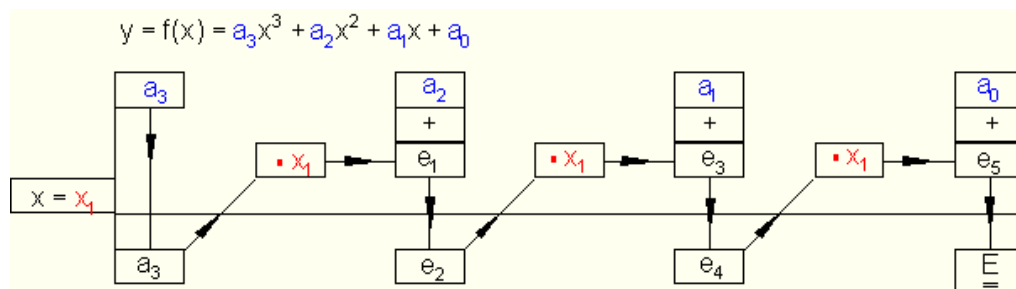
-- گرد نوکان وشمیري

--منځ لاس ته راوړنه (ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس -ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته یې ور زیات کړو

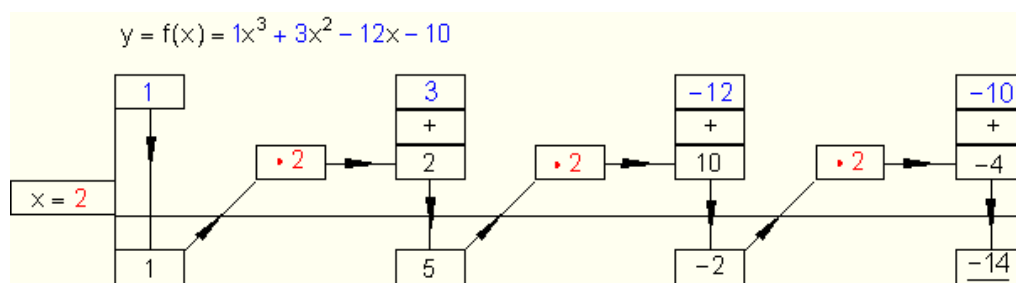
دا شمیرنکارونې یا که غواړی شمیرنعمليې کیدی شي څیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

Allgemeines Schema: ټولیزه بڼه



بیلګه: $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیمال له لارې وشمیرل شي.



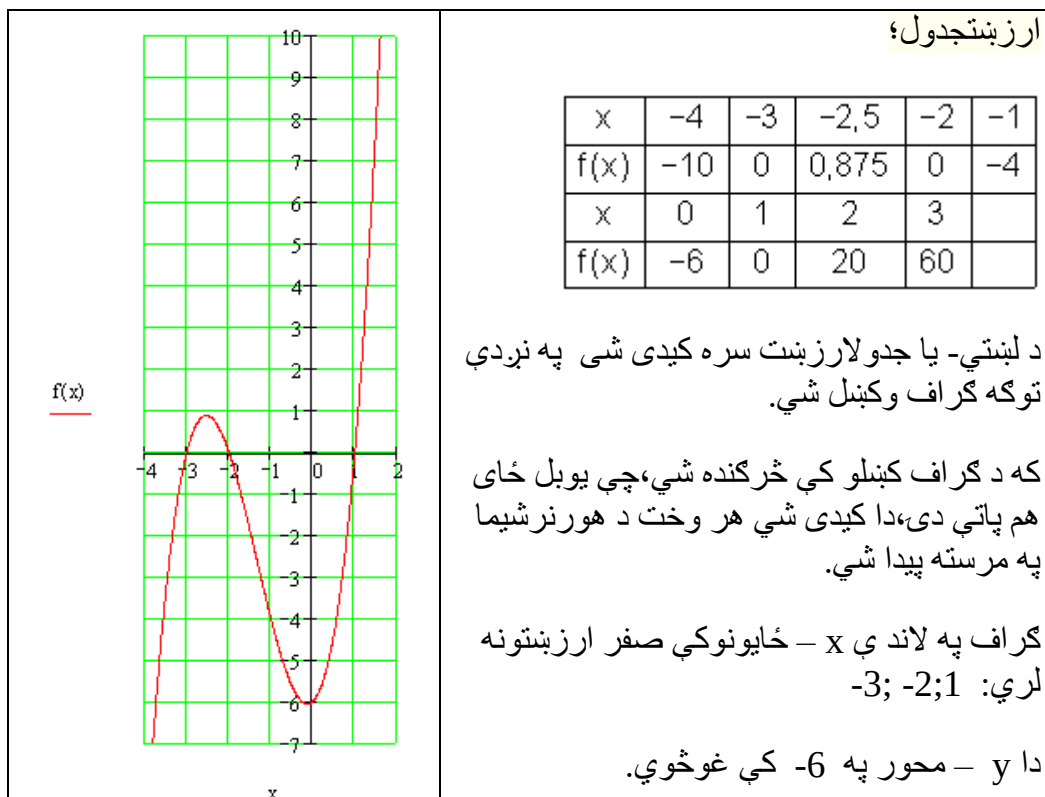
نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = -14$

د یوه دریمې درجې پولینوم له پاره- چې غواړو گراف یې رسم کړو یا کارو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

$$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$$

$x = -4$	1	4	1	-6	
		<u>-4</u>	<u>0</u>	<u>-4</u>	
	1	0	1	-10	$= f(-4)$
$x = -3$	1	4	1	-6	
		<u>-3</u>	<u>-3</u>	<u>+6</u>	
	1	1	-2	0	$= f(-3)$
$x = -2$	1	4	1	-6	
		<u>-2</u>	<u>-4</u>	<u>+6</u>	
	1	2	-3	0	$= f(-2)$
$x = -1$	1	4	1	-6	
		<u>-1</u>	<u>-3</u>	<u>+2</u>	
	1	3	-2	-4	$= f(-1)$
$x = 1$	1	4	1	-6	
		<u>+1</u>	<u>+5</u>	<u>+6</u>	
	1	5	6	0	$= f(1)$
$x = 2$	1	4	1	-6	
		<u>+2</u>	<u>+12</u>	<u>+26</u>	
	1	6	13	20	$= f(2)$
$x = 3$	1	4	1	-6	
		<u>+3</u>	<u>+21</u>	<u>+66</u>	
	1	7	22	60	$= f(3)$
$x = -2,5$	1	4	1	-6	
		<u>-2,5</u>	<u>-3,75</u>	<u>+6,875</u>	
	1	1,5	-2,75	0,875	$= f(-2,5)$



که په کښلو کې څرگنده شي چې یوېل ځای هم پاتې دی، نو دا کيدی شي د هورنر شېما په مرسته پيدا کړو، د بيلگې په توگه $f(0,5)$

	1	4	1	-6	
$x = 0,5$		$+0,5$	$+2,25$	$+1,624$	
	1	$4,5$	$3,25$	$-4,375$	$= f(0,5)$

د پولینوم وېشنې پر ځای کيدی شي د ټولراشئل تابع درجه د هورنر شېما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شېما څیړو:

موږ بیرته تابع ترڅیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x_1=2$ یو صفرخای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شیما د $x_1=2$ سره

په دریمه لیکه کې درې عددونه د وېش نتیجه لپاره هم د پاتې پولینوم ضریبونه بللکیري. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ پاتې پولینوم کرښیز ضریب	موخه د ضریب $(x-2)$ له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 6 \\ x = 2 \quad \downarrow \quad 2 \quad 2 \quad -6 \\ \quad \quad \quad 1 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \end{array}$

د $f(x)$ د نورو صفرخایونو لپاره د پاتې یا باقي پولینوم صفرخایونه شمېرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کیري.

نتیجه یې د لاندې پولینوم وېش بیلگې سره وگوری.

بیلگه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چیرته چې $x_1 = -2$ یو صفرخای دی.

باقي یا پاتې پولینوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2) \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \right)$ د مربع مساوات حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x_2=2$ او $x_3=-4$	$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad 1 \quad -1 \quad -4 \\ x = -2 \quad \downarrow \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \quad 4 \\ \hline \quad \quad \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad -2 \quad 0 \end{array}$

بیلگه:

چیرته چې $x_1 = 1$ یو صفرخای دی $f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0 \cdot x^2 + 7x - 6$

باقي پولینوم: $-1.x-1.x+6$	$-1 \quad 0 \quad 7 \quad -6$
$f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$	$x=1 \quad \downarrow \quad -1 \quad -1 \quad 6$
د مربعیز مساوات حل:	$\hline -1 \quad -1 \quad 6 \quad 0$
x^2-x+6 له دې لاس تره اوپه	
څنې یا برعکس $x^2=2$ او $x^3=-3$	

لکه بیلګه چې ښايي، د هورن شیمیا سره د پاتې پولینوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولینوم وېش ته.

دا ټولې پورته تڼلارې مو د مربع مساوات حل ته لارښودوي. که دا ونه توانیږو، نو د نومړیکي تڼلارو څخه کار اخستل کیږي، چې دا دلته نه څېړل کیږي.

تمرینونه: د پولینوم وېش...

د لنډې ترمونو لپاره د پولینوم وېش وکاروئ:

لومړۍ - $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1)$ دیم - $(2x^3 - 14x - 12) : (x - 3)$

دریم - $(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63) : (x - 7)$ څلورم -

$\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6\right) : (x + 2)$

پنځم - $\left(x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 5x - 4\right) : (x + 2)$ شپږم - $\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3\right) : (x - 2)$

اوم - $\left(x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{23}{4}x + \frac{3}{2}\right) : (x - 3)$ اتم - $\left(x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{47}{3}x - 5\right) : (x + 3)$

$$\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3\right) : (x+3) \quad \text{نهم -} \quad \left(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63\right) : (x-1) \quad \text{لسم -}$$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرخایونه.

تمرین ټولراشنل تابع IV

د صفرخایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانون له مخې د ټولراشنل توابعو صفرخایونه وټاکي. د x محور سره د گراف غوڅټکي و ټاکي او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړي.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad \text{دویم -} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18 \quad \text{اول -}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216 \quad \text{څلورم -} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \quad \text{شپږم -} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x + 3 \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2 \quad \text{اتم -} \quad f(x) = 3x^4 - 3 \quad \text{اوم -}$$

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20 \quad \text{لسم -} \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 16x \quad \text{نهم -}$$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محور غوڅټکي گرافونه

صفرخایونه وشمیرئ او گرافونه وکارئ

لومړۍ: د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ ب- $f(x) = x^2 - 6x + 9$

پ- $f(x) = (x^2 - 25)\left(\frac{1}{2}x + 4\right)$ ت- $f(x) = x^6 - x^4$

ټ- $f(x) = 3x\left(\frac{2}{3}x - 2\right)(-2x + 3)$ ث- $f(x) = 3(x^2 + 4)(x^2 - 4x + 10)$

دويم: لومړۍ: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ ب- $f(x) = 4x^4 + 6x^2 - \frac{7}{4}$ پ- $f(x) = x^6 - 8x^4 + 20x^2$

درېم: لومړۍ: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$ ب- $f(x) = x^3 - 12x + 16$

پ- $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ ت- $f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 4x + 20$

ټ- $f(x) = x^4 - \frac{11}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$ ث- $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - 3x + 3$

ج- $f(x) = -5x^3 - 10x^2 - \frac{5}{2}x - 5$ چ- $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6$

څلورم: لومړۍ: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x) = -3x^4 + 15x^2 - 12$ ب- $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

پ- $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 16x - 24$ ت- $f(x) = (x^2 - 6x + 9)(x - 4)$

ټ- $f(x) = x^6 - 3x^4 - 4x^2$ ث- $f(x) = x^4 - 25x^2 - 60x - 36$

پنځم: د لاندې ټولراشل توابعو ګرافونه په يوه مناسب پروټولار يا ګواوډينات سيمه کې وکارئ. د دې لپاره يو ارزښت جدول واچوئ او محور غوڅکي وټاکئ

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,5 \leq x \leq 4,5\}_{\mathbb{R}} \quad \text{الف.}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \quad D_f = \{x \mid -3,5 \leq x \leq 2,5\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \{x \mid -0,2 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \quad \text{پ.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 3,5\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ت.}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2,5 \leq x \leq 3,5\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ټ.}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,2 \leq x \leq 8\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ث. ج.}$$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځايونه وټاکئ او گراف يې تر شونې پولې پورې ښه وکارئ.
ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جېشميرې سره وشميرئ. ځنې صفرځايونه اټکل کړئ او که شونې وي، صفرځايونه وشميرئ.

$$f(x) = 0,01(x^3 - x^2 - x + 1) \quad \text{ب.} \quad f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1 \quad \text{الف.}$$

$$f(x) = (x - 1,7)(x^2 - 3) \quad \text{ت.} \quad f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10 \quad \text{پ.}$$

تر ۶۴۰ پورې دلته محور غوڅتکيږاځي؟

اړيکې "Relation":

سرلیک

یوه اړیکه له دوه شیانو جوړه ده:

۱ - یوه وینابنه

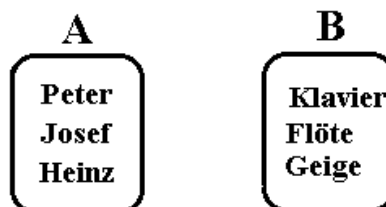
۲ - جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي (چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي) *

بیلگه:

دیوې کورنۍ د غرو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ.

A	B
سپین	فوتبال
	هاکي
	زیرگل
	والبال
	کوچی

یا دا لاندې

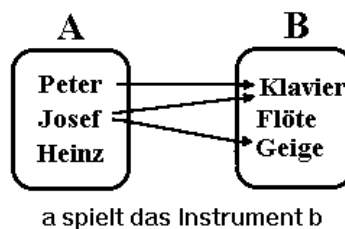


د کسانو نومونه: پتر یوسف هاینخ	A Peter Josef Heinz	B Klavier Flöte Geige	موزیک الې پیانو شپیلې گایکې

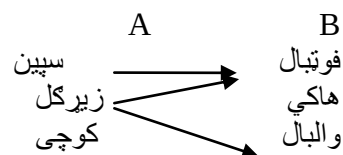
د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سری a له b باندې لوبې کوي.

جوړه، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلگې په توګه لاندې جوړې وي:

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په گایگي لوبه کوي، د څیري په توگه اړیکي داسي انځوريزي:

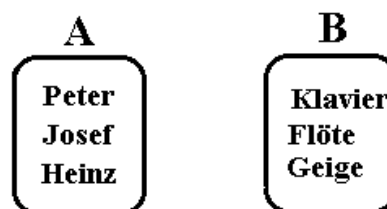


یا دا لاندې



نورې بیلګې

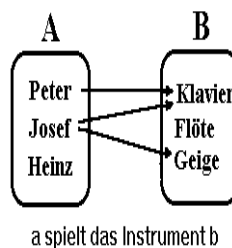
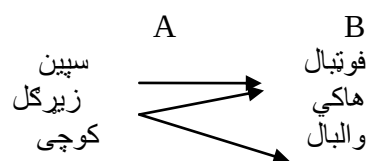
موږ د مخه دا لاندې ډیرۍ منځ ته راوړي:



د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په څیر موږ اړیکي «په اله لوبه کوي» راوړي یا دا لاندې

سپین	فوتبال
زیرگل	هاګي
کوچی	والبال

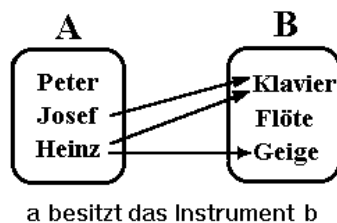
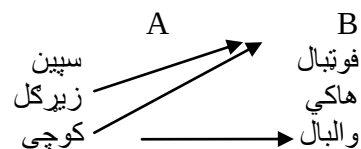
سرلیک



په پورته کې ښوول کېږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي. موږ اوس دواړه ډیرې A او B ساتو، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپېژنو یا تعریف کړو:

بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې «اله لري» او «په اله باندې لوبه کوي» نور نه وي. د دې برسیره دې اړیکې «اله لري» لاندې درې جوړې ولری:

هاینڅ کلاویر لري
هاینڅ یوه گایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د څیرې په څیر انځور یږي:



لیدلکیري، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونو کې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي.
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱
ډیری $A = \{1, 2, 3\}$ او ډیری $B = \{1, 2, 3\}$ دې ورکړ شوي وي. وینابڼه کوچنۍ له یا لنډ <

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/3)$ ، $(1/2)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي. جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته.

بیلګه ۲

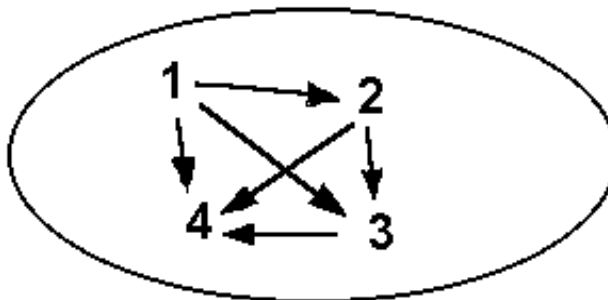
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډیرې لویې وي او یا ناپای.
بیلګه: ډیری: $A = B = \{1, 2, 3, \dots\}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشونې ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي.

بیلګه ۳

کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلې.
بیلګه: ډیری نارینه M او ښځینه F وینابڼه کې راوستل شي، چۀ «واده له سره»
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوي.

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي.
۱ – ددوه ډیریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیرۍ په دننه کې اړیکې

ټیوپ ۱ - مور وپیژند
د ټیوپ ۲ - لپاره بیلگه لاندې اړیکې دي (چې په څیره کې کښل شوي دي):



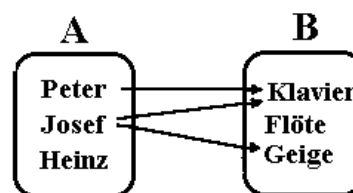
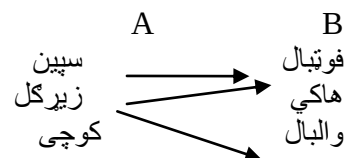
x له y څخه کوچنی دي

د مخ ته تیرو بیلگو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکې پرتې دي

بنسټیږی، موخه ډیری یا تر مخور شو پسې ورشو

Erklärung روښانه ونه

د ډیری A (بنسټیږی) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پنر، یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، گایگی) اړیکې هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري.
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي



بنسټیږی: { سپین، زیرگل، کوچی } Grundmenge:
موخه ډیری: { فوتبال، هاکي، والیبال } Zielmenge

Vorbereich : {Peter, Josef} تر مخور شو
Nachbereich : {Klavier, Geige} ورپسې ور شو

ځنې شمیرپوهان دا مخور شو او همداسې پسې ور شو، تعریفی،
ارزښتدیری یا تعریفور شو همداسې ارزښتور شو بولي

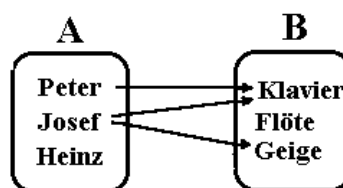
Relationstafel د اړیکو تخته

تراوسه مو ټولې اړیکې د غشیدیاگرام له لارې انځور کړل. یو شونوالی یا امکانات یې
د اړیکو تخته له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټدیری او موخه دیری توکي په یوه جدول کې لیکو. د بنسټدیری توکي په
پورته لیکه کې لیکو اود موخه دیری توکي په کین درځ یا کینه مته کې لیکو.

په صلیبونه سره هغه پیژند یا تعریف ورکول کیږي، چې د موخه دیری
په توکي باندې د بنسټدیری یو توکی تنظیم شوی وي.

د بیلگې په توګه بیرته همغه د ساز الو سره بیلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړیکتخته په لاندې ډول لیدل کیږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

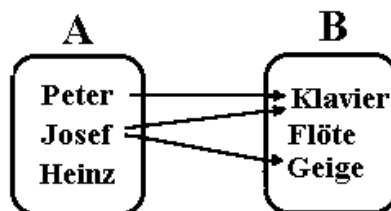
د کوارډینات سیستم انځورښه

تراوسه مو اړیکې د غشیدیاگرام او اړیکتختو له لارې انځور کړي. اوس یو دریم شوونوالی یا دریمه شوونتیا یا امکان غواړو وپېژنو: انځورونه په یوه کواوردیناتسیستم کې:

د بنسټیزې توکي د پروت محور په نڅېنه کوو او د موخه ډیرې توکي په ولاړ محور په نڅېنه کوو. د ټکو سره هغه د بنسټیزې توکي او ورسره د تنظیمډیرې تنظیم توکو ټاکلي وي

بیلګه

د بیلګې په توګه بیرته هغه بیلګه د لوبو یا موزیک الاتو سره ټاکو: دلته په دې لاندې الماني لیکنېا بڼه یې: څیره بسیا کړی شو

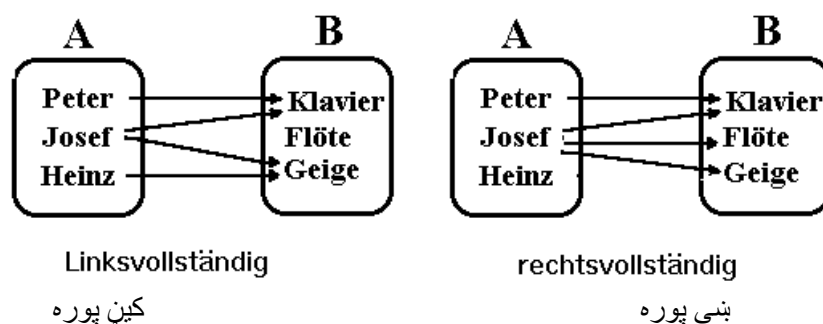


په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې لیدل کیږي

Geige		x	
Flöte			
Klavier	x	x	
	Peter	Josef	Heinz

کڼ پوره کیدونکې اړیکې:

د A څخه هر توکی کم له کمه د B په یوه توکي تنظیمیږي (پېژندورشو یا مخ ته ورشو او بنسټیزه ډیرې کټمټ دي) ښي پوره اړیکې: د B هر توکی کم له کمه د څیرې په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډیرې کټمټ دي)



کين پوره

بنی پوره

بنی یواځنی اړیکې

د بنسټپیری (کین) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه پیری (بنی) باندې تنظیمیږي.

پام مرسته : غشي بني « بنیلوریز) یواځنی دي.

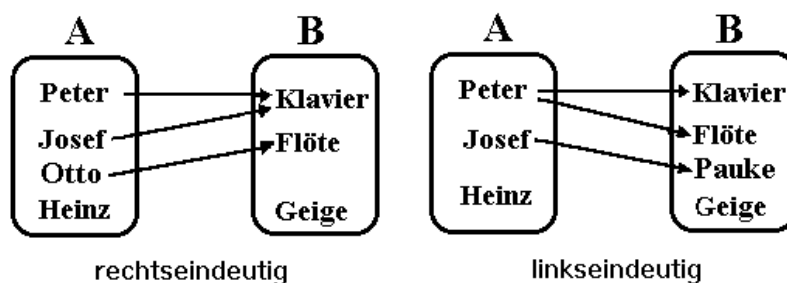
کين یواځنی اړیکې :

د بنی پیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې پیری (کینپیری) د څیرې په ډول منح ته راځي.

پام مرسته : غشي بني لورته یواځني دي.

ناتیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

linkeindeutig

بنی

کين یواځنی

یواځنی، .

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکې یواځنی اړیکې بلل کیږي (فنکشن او یا څیروني)

په غشیدیاگرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکي ټیک یو غشی پیل کیږي

په څټ اړیکې : په څټ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسې ورشوګانې سره بدلیري (پیژندډیری او ارزښتډیری)

۲ – اوبنتوني سره بدلیري

رفلکسیو اړیکې reflexive relations

دیاگرام : په هر توکي یوکرئ غشی شته

رفلکسیو اړیکې :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابر و توکو جوړه اړیکو پورې اړخ لري

د فرمو په څیر یې لیکنه : د ټولو a لپاره باور لري:

aRa

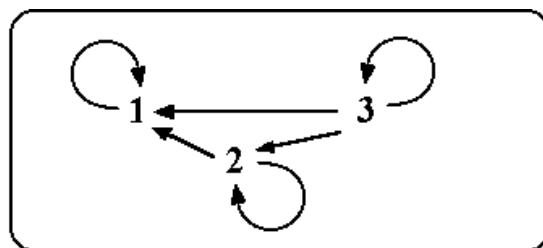
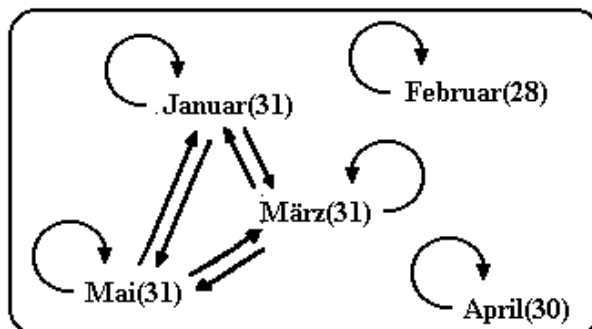


Bild: Die reflexive Relation $\geq$

انتیرفلکسیو (ایرفلکسیو اړیکې

Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

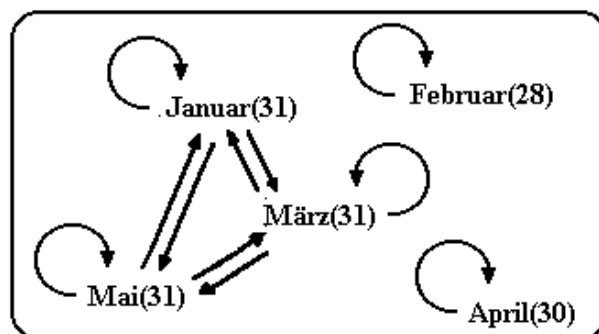
پیژند : په انټیرفلکسیو اړیکو کې په هیڅ توکي کړی غشی نه شته
 د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونډه نه لري •
 د فرمول په توګه لیکل یې : $\neg(aRa)$



سیومتريکي اړیکي : symmetric relations

هر غشي ته په څټ غشي شته

که (a,b) اړیکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړیکو پورې اړه لري •
 د سیومري اړیکو څیره: « همغومره ورځي لري لکه»



انتیسیومتري اړیکي: Antisymmetric relations

د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په څټ غشي نه شته •

که (a,b) په اړیکو اړه ولري، نو (b,a) په اړیکو اړه نه لري، مګر که $a = b$ وي •

فرمول: $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

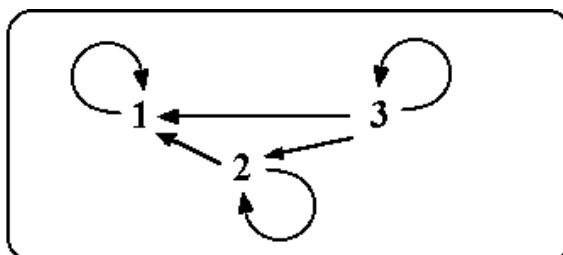


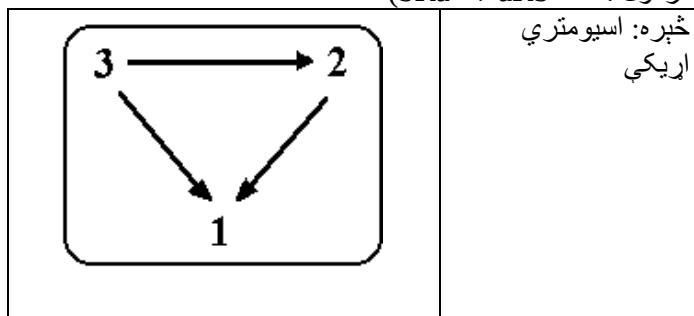
Bild: Die antisymmetrische Relation $\geq$

Antiasymmetric relations: ناسیومتریکی اړیکې پورته څېره

اسیومتریکی اړیکې

asymmetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسیومتریکی اړیکو ډیاگرام نه په څټ غشی لري او نه کړي غشی لري •
د اسیومتریکی اړیکو پیژند: انټیرفلیکسیو او انټیسیومتریکی اړیکې
فرمول: $\neg(bRa \Rightarrow aRb)$



څیره کونه یا توابع Funktionen

p

یادونه: په انرېزي کې mapping د او الماني کې DieAbbildung په نامه
ن، مولشوي، چې پښتومانایي څیرونه یا څیره کونه ده.

فنکشنده اوښتونېیا واریابلېري، چې یوه خپلواکه او بله یېواکه ده. له دپام له د فنکشن
لهپاره ناسم د تابع نومورکړ شوی دی.

په ریاضي یا شمیرپوهنه کې څیرونه یا توابع

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللي چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواورډینات – یا پروتولارسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوي ډیري یا ست په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دبانډنئ تودوخي د ورځي د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکل ځغلوونکي وهلي لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلني وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوږښه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموښي نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې ډډايي د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلي ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لويي سره تنظیمیږي.

ډیري یا ست ← وخت خرڅشوي ست په قیمت اغیزه لري.

د ورځي وخت ← تودوخي. د ورځي وخت په اندازه شوي تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راوړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې د یوې ازموښي نمرې د لاس ته راوړلو ټکو اغیزمن کیږي.

تمرین ۲ : د پاتې بیلگو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرین ۱ کې مو میندلي اړیکې پیدا کړئ.

دا یو له بل سره تنظیم شوی لویې متحولې (اووښتوني یا **Variablen**) بلل کیږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی یا تابعیت د دوي په منځ کې شتون لري.

د ریاضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مگر نه د نمرې د ټکو په واک کې.

سړی نمرې د بلواک یا تابع متحولو په حیث هم ښایي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حیث ښایي.

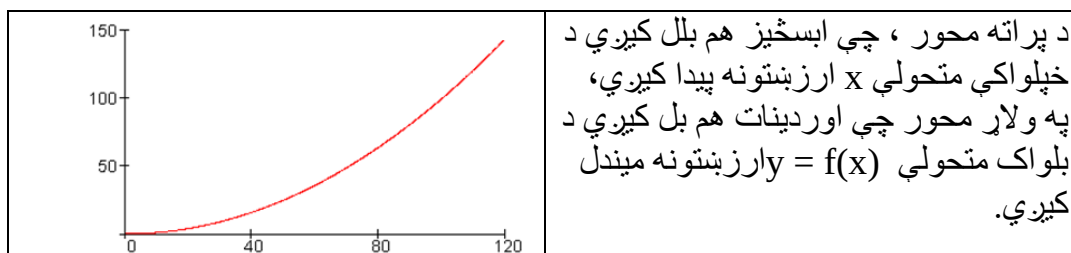
د ټکو او نمرې په منځ کې یو فنکشن یا بلواکیزې یا که غواړئ تابعیتي اړیکې شتون لري.

لکه د مخه درسوونو څخه چې پوهیږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعیتي اړیکې تشریح کړو یا انځور کړو.

د مختلفو چټکتیاو لپاره د بریک لار اندازه کیږي او یو ارزښت جدول ترتیبیږي.

چټکتیا په $\text{km/h}(x)$	20	40	60	80	100	120
د برېکنيولو لار په $m(y)$	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په یوه پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم کې وکښل شي، نو سړی گراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي یو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتیا او بریکلار ترمنځ اړیکې تشریح کوي.



تمرین ۳ : د ارزښت جدول سره سم په یوه مناسب پروتولاړ – یا کواوردیناتسیستم کې اړونده ټکي وکارئ او دا په یوه گراف کې سره ونښلوئ.

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټاکئ.

پولیس یوه 90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0,01 x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره ایښوول شوی او دا وایي، چې y -کواردینات په کواردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولې x یو تابع دی یا په واک کې دی. تابع مساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د $f(x)$ تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځای هم وایو چې $f(x) = 0,01 x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0,01 x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوي کار څخه کیدی شي ووايو:

پېژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولې x هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې- یا سره تنظیمیږي. سری دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$\underbrace{f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}} : \text{لیکنډول } f$$

پورته لومړۍ یې په پښتو: تابع برابرېدون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط $f(x) = \dots$. ۱.

د تابع نوم f دی.

دا $f(x) \rightarrow x$ لیکندود روښانه کوي، د هر x — ارزښت سره یو ټاکلی تابع ارزښت $f(x)$ اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شمیرلو قاعده یا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنگه جوړیږي.

د دې لپاره چې د نظم یواځنوالی بیا وښایو، لاندې بیلگه راوړو:

هر زده کوونکی یو ټاکلی د بوتانو لویوالی لري. دلته حتمي ده چې زیات زده کوونکي به یو - یا هماغه د بوتانو لویوالی ولري.

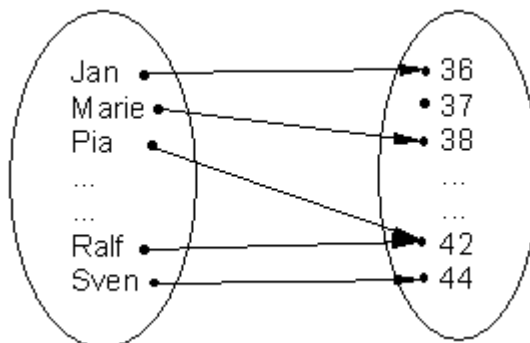
یواځنوالی په زده کوونکو اړه لري $\leftarrow$ د بوتانو لویوالی.

د متحولو سره کښلی یا لیکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په گوته کوي او هغه سره تنظیم شوي د بوتانو لویوالی بلواکه یا تابع متحوله جوړوي.

معکوس یا په څټ د زده کوونکو تنظیم یواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بیلگې په توګه ۴۲ نمري د بوتانو لویوالی لرو دی شي.

دا ډول تابع د تابع مساوات نه لري، دا کیدی شي چې د ډېرې څیرې یا ستعکس په څیر انځور شي.

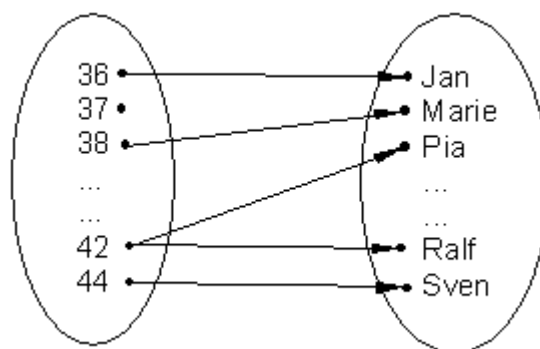
یواځنی نظم (تابع یا فنکشن)



د بوتانو لویوالی ډېرې یاست د زده کوونکو سټ

(ارزښت ډېرئ) (تعریف ډېرئ)

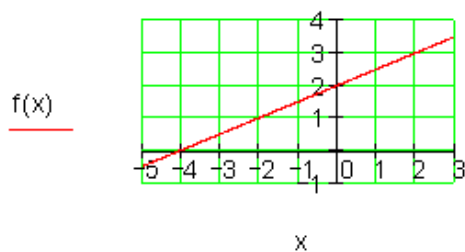
نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



د دواړو ستونو بدلول

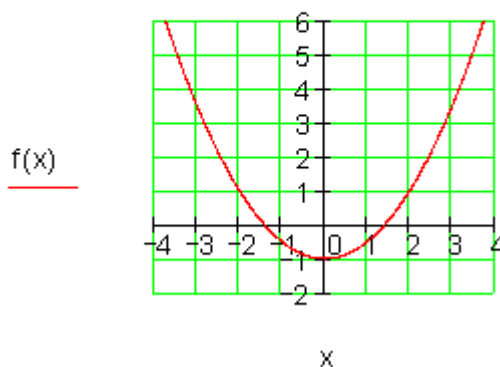
د ریاضیکي توابعو او تابع مساواتو بیلګې (له کین و ښي لورته)

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$$



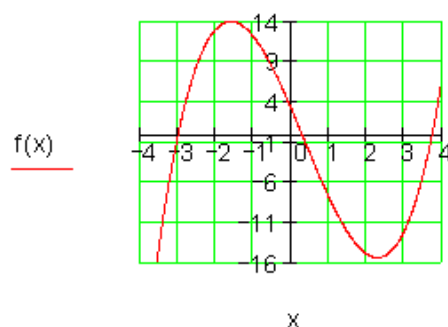
کرښیز
مساوات (ګرښه
(

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$$



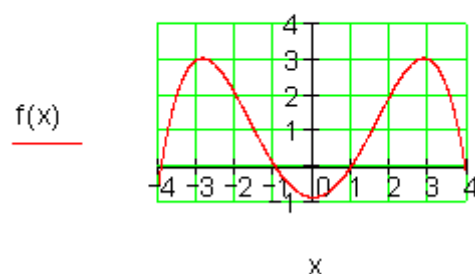
مربع
مساوات (پارا
بل)

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



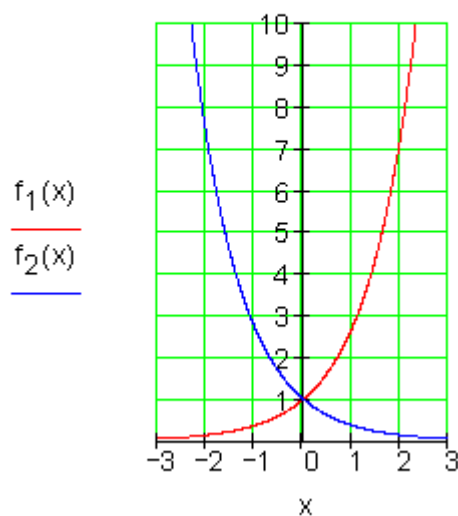
د دریمې
درجې
ټولراشندل تابع

$$f(x) := \frac{-7}{120} \cdot x^4 + \frac{23}{24} \cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



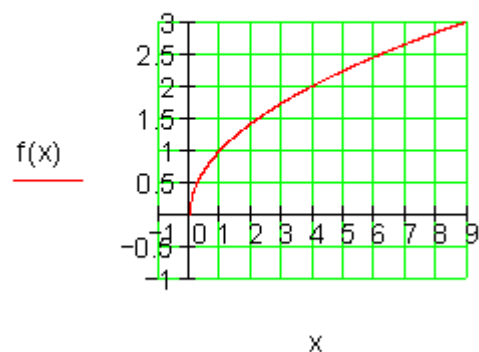
د څلورمې درجې ټولراشندل تابع

$$f_1(x) := e^x \quad f_2(x) := e^{-x}$$

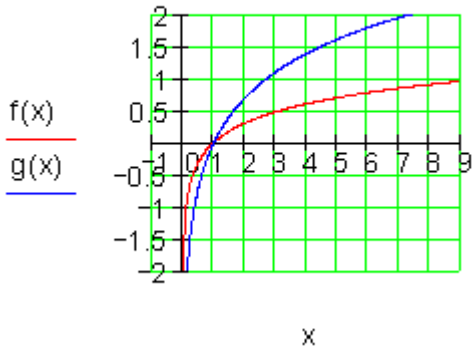
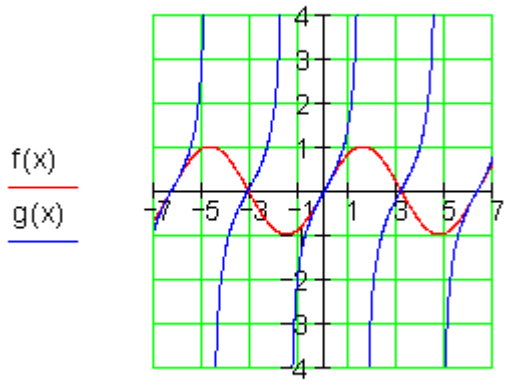
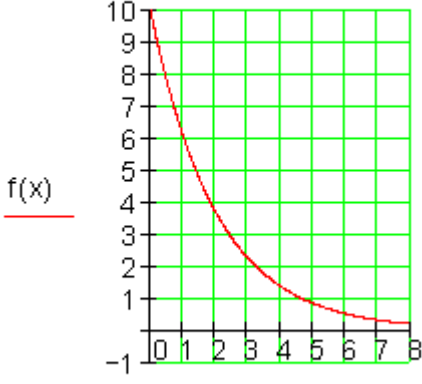
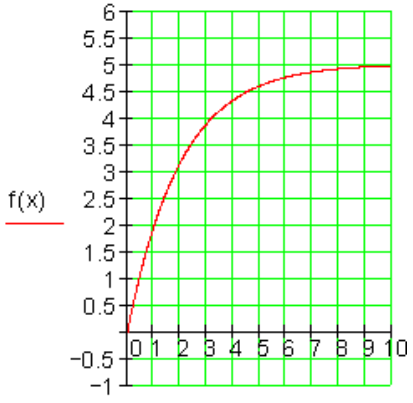


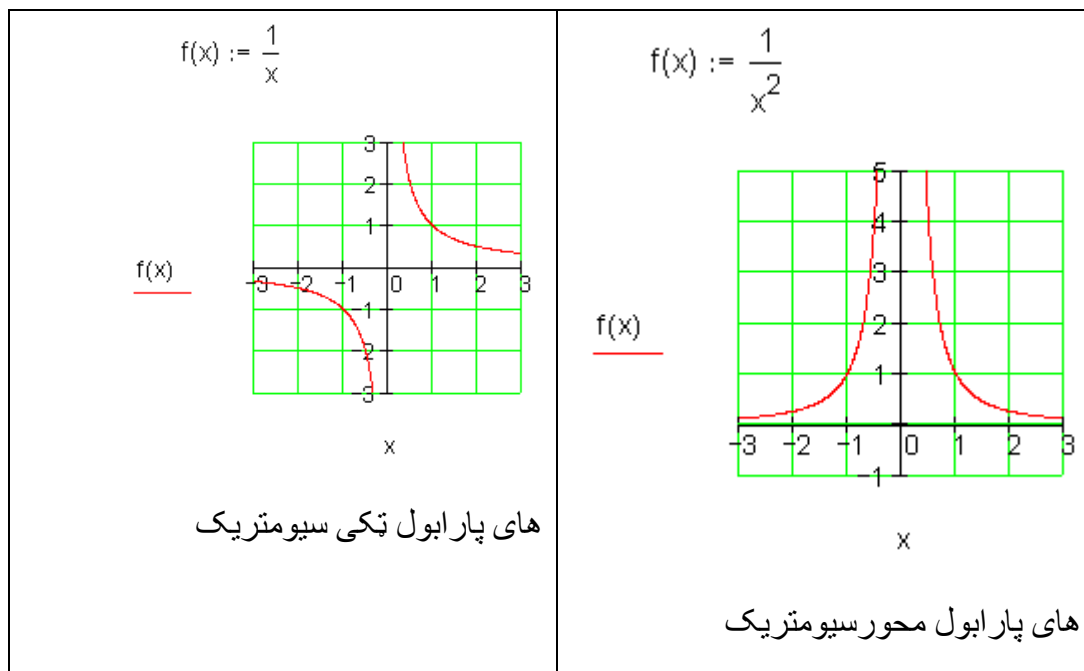
اکسپوننشل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



رېښه تابع

$f(x) := \log(x)$ $g(x) := \ln(x)$  $\frac{f(x)}{g(x)}$ لوگاریتم تابع	$f(x) := \sin(x)$ $g(x) := \tan(x)$  $\frac{f(x)}{g(x)}$ تریگونومیتریک (مثلثاتی) تابع
$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$  $f(x)$ اکسپوننشلی کبته کیدنه	$f(x) := 5 \cdot (1 - e^{-0.5 \cdot x})$  $f(x)$ اکسپوننشل مربسته کبته



تعريف- او ارزښت ډېرې يا - ست

تعريف (پيژند):

د يوه تابع تعديفست D د ټولو خپلواکو متحولو ډېرې يا ست ده، د کومو لپاره چې تابع تعديف دی.

ارزښت ډېرې W د ټولو تابع ارزښتونو- يا بلواکو - ست ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بيلگه:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعديفست $D = \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{x}$ تعديفست $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	$\mathbb{R}$ د حقیقي اعدادو ډېرۍ ده

بیلگه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x+1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیر پوهنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$ لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه $(4 | 7)$ په کواوردیناتسیستم کې د ټکي $P(4 | 7)$ کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف سټ D څخه خپلواکه متحوله x ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې تنظیم شي څیرونه (چېمور یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعې (خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات (د بیلګې په توګه: $f(x) = 2x + 1$) سره لیکل یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x -ارزښتونو په ایښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې ایښولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

په زیاتو حالتونو کې کیدی شي دا منځ ته راغلي ټکي یوه گراف ته سره رايوځای یا وتړل شي.

ډ ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعریف ډېرئ یا -ست بلل کېږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ یا -ست، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.



د تمرینونو حل

لومړی تمرین: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بیلګې پیدا کړئ.

ځواب: - د یوه تیلوسوزونکي ماشین قدرت د څرخونتعداد (د ماشین د څرخیدو تعداد) په واک کې دی.

- د یوې گردئ یا دایرې سطحه د وړانګې یا شعاع په واک کې ده.

- د بریښنا پیسې د ثابت قیمت سره د انرژي یا بریښنا مصرف په واک کې ده.

دویم تمرین: د پاتې بیلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرین کې ولیدل کېږي اړیکې سره په فرمولبندي کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتیا د خوزښت وخت په وهلي لار اغیز لري.

بریکلار → چټکتیا: د یوه موټر چټکتیا د بریکلار باندې اغیزه لري.

ټوله ګټه → د تیریدني وخت: د سرمایې ایښوني وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغیزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغیزه لري.

قدرت → خرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په خرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه → وړانګه: د گردۍ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب → انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژي سټ یا ډېرۍ د بریښنا بل (هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین: په یو مناسب کواور دیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکارئ او دا یوه گراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 30 ; 50 ; 70 ; 90 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلئ؟

خواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره خُلي.

تلنلار: په کواور دیناتسیستم یا پروتولار سیستم کې د x-محور (ابسخیزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمایندګي کوي، د y-محور (اور دینات) د بلواک یا تابع متحولو نمایندګي ده.

د مخه له دې چې په یوه کواور دیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل — یا کښل کيږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

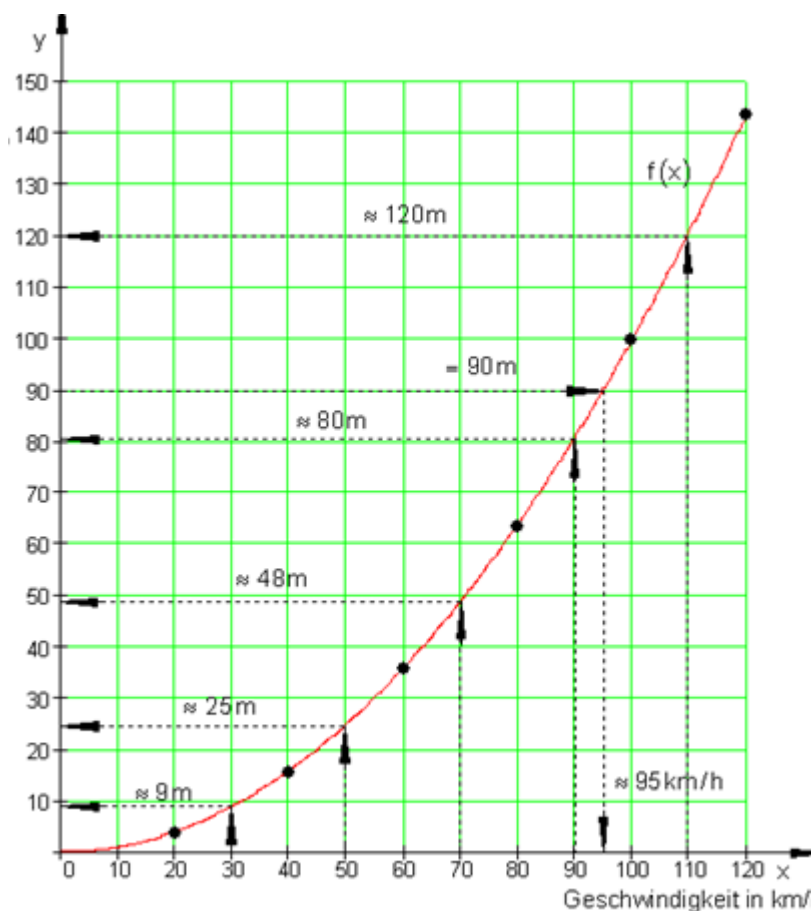
پسې دا هم غوره ده، چې د کوچني لپاره یوو ښه کچونۍ یا هغه اله چې اندازه پرې کچوو باید ومومو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چې دواړه محورونه په څو برخو باید ووېشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواورډیناتسیستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د گراف په توگه سره تړل – یا نښلول کيږي.

کیدۍ شي له گراف څخه د داسې x -ارزښتونو لپاره هغه لږ یا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کیدۍ شي د یوه ټاکلې تابع ارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتیجو ټیکوالۍ د دې په واک کې دی، چې گراف څومره ټیک کښل شوی دی.



پورته کواور دینات – یا پروتولار سیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ: بریکلار په متر

څلورم تمرین:

لوسټل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0,01 x^2$ وي.

ځواب:

تابع ارزښتونه داسې شمیرلکیري، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کیننول شي.

$$f(x) = 0,01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0,01 \cdot 30^2 = 0,01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0,01 \cdot 50^2 = 0,01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0,01 \cdot 70^2 = 0,01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0,01 \cdot 90^2 = 0,01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0,01 \cdot 110^2 = 0,01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 49 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 81 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 121 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوي، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $0,01x^2 = 90 \Leftrightarrow f(x) = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

$$0,01x^2 = 90 \mid : 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \mid \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94,9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه وړ دي، ځکه چې موږ مثبت چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه: لومړی شمېرنه ټیک ارزښتونه راځوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمېرل شوي ارزښتونه په گراف کې یا له گراف څخه هم د لوستلو له لارې کنټرول کړو.

پوښتنې

I تابع

لومړی:

ټول ټکي په کواورډینات سیستم کې په نڅېه کړئ، چې کواورډینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف. $y \leq -1 \wedge x \geq 1$ ب. $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 3$ پ. $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت. $0 \leq x \leq 4 \wedge y \geq 0$ ټ. $|x| \geq 1,5 \wedge |y| \leq 2$ ټ. $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواورډینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40 \mid 220); B(10 \mid 250); C(200 \mid 300); D(80 \mid 240)$$

ایا د x او y -کواورډیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

الف- ټکي $P_t\left(t-1\mid\frac{1}{t+1}\right)$ د $t \in \mathbb{R}$ کوم ارزښت په لومړۍ څلورنکې پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t(t|t^2-1)$ د $t \in \mathbb{R}$ کوم ارزښت لپاره د x محور کېننه لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټگودېرۍ یا سټ $A = \left\{ (1|3); \left(2|\frac{3}{2}\right); (3|1); \left(4|\frac{3}{4}\right); \dots \right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواورډینات سیستم کې وکارئ. ایا د x - او y -کواورډیناتونو ترمنځ اړیکې شته؟

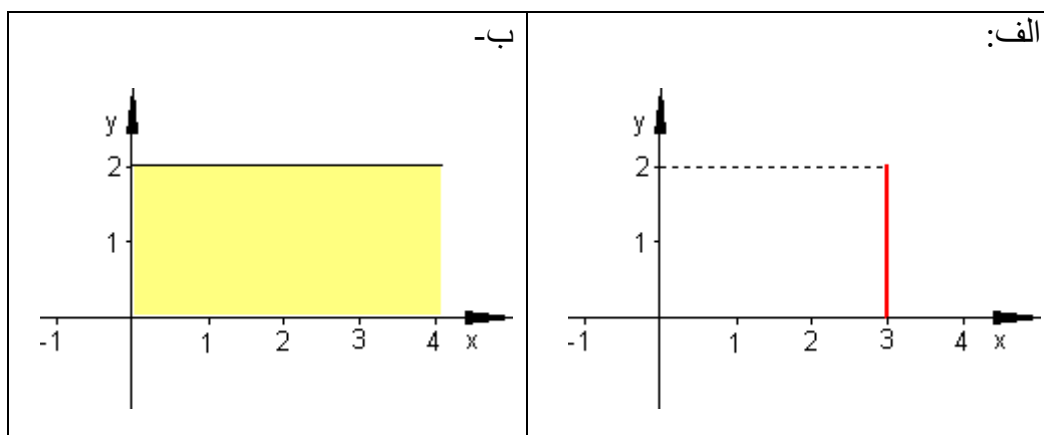
پنځم: یو ټکی $P\left(t\mid\frac{t}{2}+3\right)$ د $t \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوی دی.

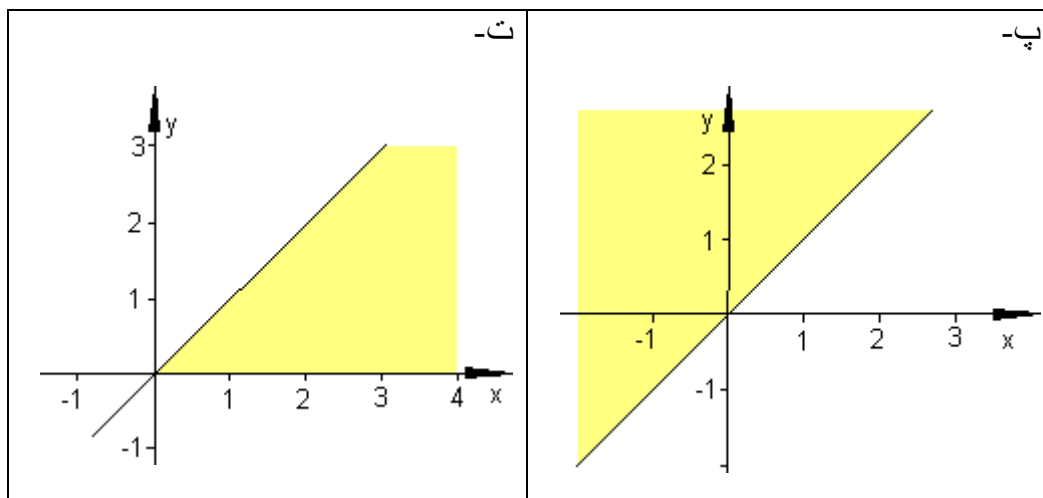
د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواورډینات سیستم کې وکارئ.

د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواورډینات د ټکي د y -کواورډینات سره برابر دي؟ 

شپږم: په نڅېنه شوي کرښه او همداسې سطحه تشریح کړئ.





پوښتنې

توابع II

لومړۍ

بښاغلی برگ د یوه ملفون (لاسي يا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتي € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 40, 80 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتني حساب به یې څومره جگ وي؟

ب - لگښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ - اړیکې گرافیکي انځور کړئ.

دویم: یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب - اړیکې یې گرافیکي خور کړئ.

پ-له خومره کیلومتره وروسته به ذخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیرارونې جدول جوړ کړئ، چې ^0C څلزیوس (^0C) په فارنهایت (^0F) اړوي د 20^0C - او 60^0C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې گرافیکي انخوړ کړئ. دا اړیکې کوم ترم په گوته کوي؟ د ا د تې تودوخې کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لگښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیري. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لگښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لگښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنی کتله (یا بهتره ډکې): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جگوالی 1 cm .

خورا جگه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جگوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یا حجم $V = 21 \text{ dm}^3$ لپاره د سور او جگوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلور ډکې یا حجم خومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

A : د کرایې موټر ټول لگښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلار b او عکس العمل لار c څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړی چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړگودیز یا مستطیل $U = 12 \text{ cm}$ چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنگه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع $f(x)$ ورکړ شوي. یو مناسب ازبښتجدول وکارئ. دې ته اړوند گراف رسم کړئ.

الف - $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = x^2$ پ - $f(x) = \frac{1}{x+3}$ ت - $f(x) = 3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو، یواځنی نیظم، د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2 + y^2 = 1$ دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفست یا - ډېری هم وټاکئ.

$$P = \left\{ (2|1); \left(5|\frac{1}{4}\right); \left(10|\frac{1}{9}\right); \left(25|\frac{1}{24}\right); \dots \right\}$$

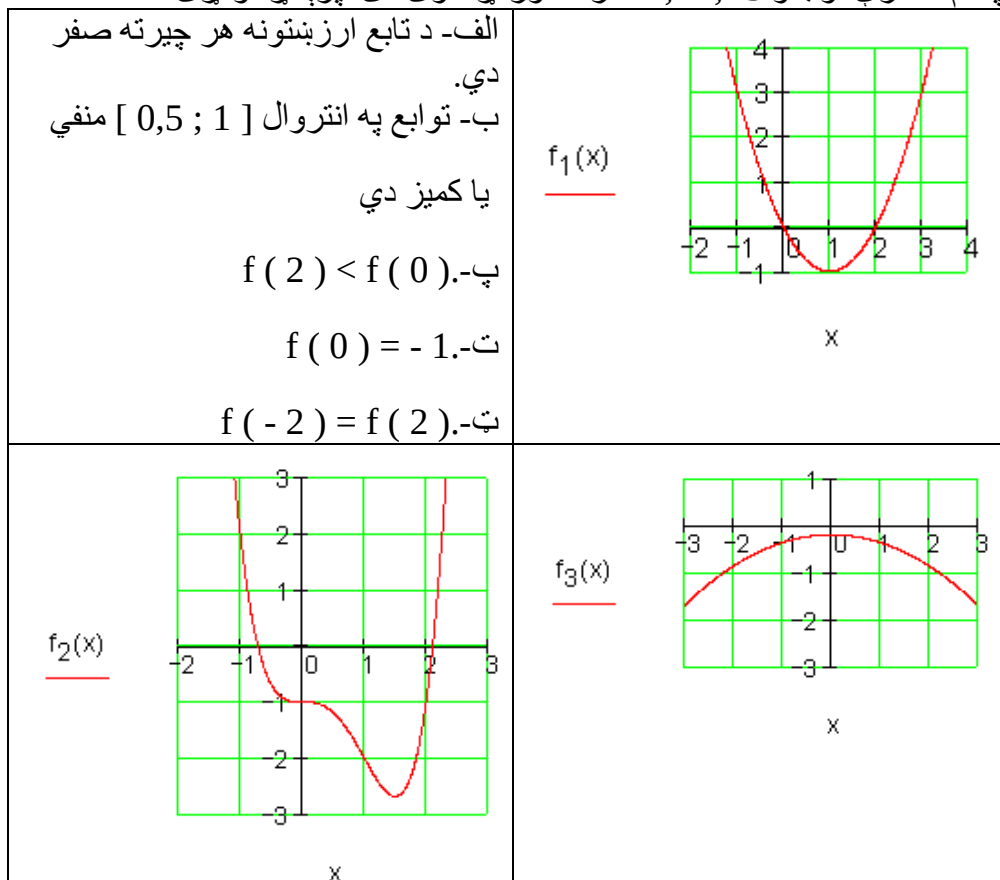
څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع گراف وکارئ:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 2x - 4); x \in \mathbb{R}$$

الف- د جشمیري سره $f(3)$ او $f(-2)$ وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

پ-د کومو x - ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 1 دی؟
 ت-د کومو x - ارزښتونو لپاره تابع ارزښت کمیز یا منفي دی؟
 ټ-د کومو x - ارزښتونو لپاره باور لري: $f(x) < 1$ کړی، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
 پنځم: د درې توابعو f_1, f_2, f_3 گراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:



پوښتنې

IV توابع

لومړی: تابع f ورکړ شوی د $f(x) = -0,2(2-x)$; $x \in \mathbb{R}$ سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې ویناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

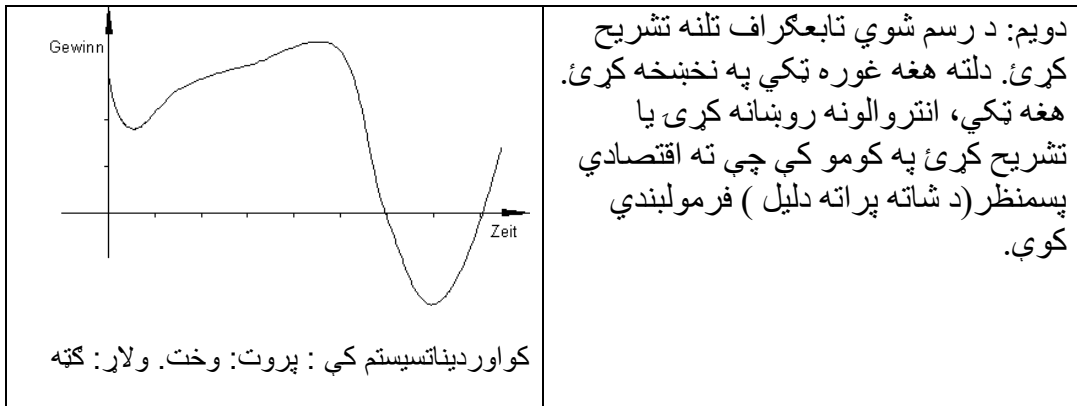
خپل ځواب مدلل کړئ.

الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x - ارزښتونو لپاره.

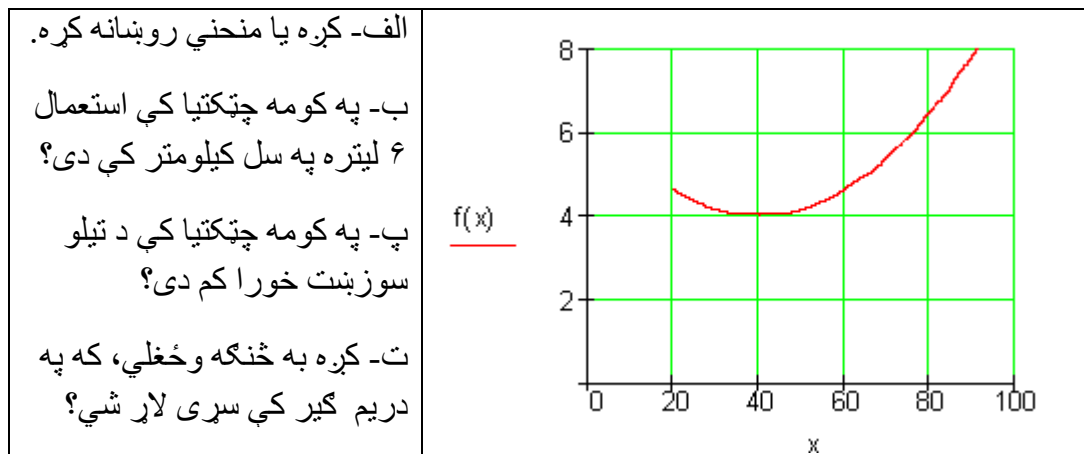
ب- $f(x) < 0$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

پ- $f(x) = 2$ د x لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u+1)$ فابور لري.



دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کې یا تابع دی. دا په څنګ کې څیره د تیلو سوزول بنایي په لیتر په سل کیلو متر کې او د چټکتیا په واکوالي کې، که سړی په څلورم گیر Gang کې لاړ شي. 



څلورم: د لمبا په ډنډ کې 40 m^3 اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په m^3 وټاکي.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

V توابع

لومړۍ: د تابع $f(x)$ ماکسیمال تعریفورشو $D_{\max}$ پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب- $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

ث- $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ت- $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{\max}$ سره.

الف- $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$ ب- $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ- $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ت- $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع $f(x)$ ورکړ شوي ده. ماکسیمال تعریفورشو $D_{\max}$ وټاکئ. د $f(x)$ گراف وکارئ.

د $x \in \left\{ k; -\frac{2}{k}; k+1; k-4 \right\}$ لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$ پ- $f(x) = x - x^2$

ت - $f(x) = \frac{1}{x+3}$ - ب - $f(x) = \sqrt{4-2x}$ - ث - $f(x) = 2^x - 1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړ شوي ده.

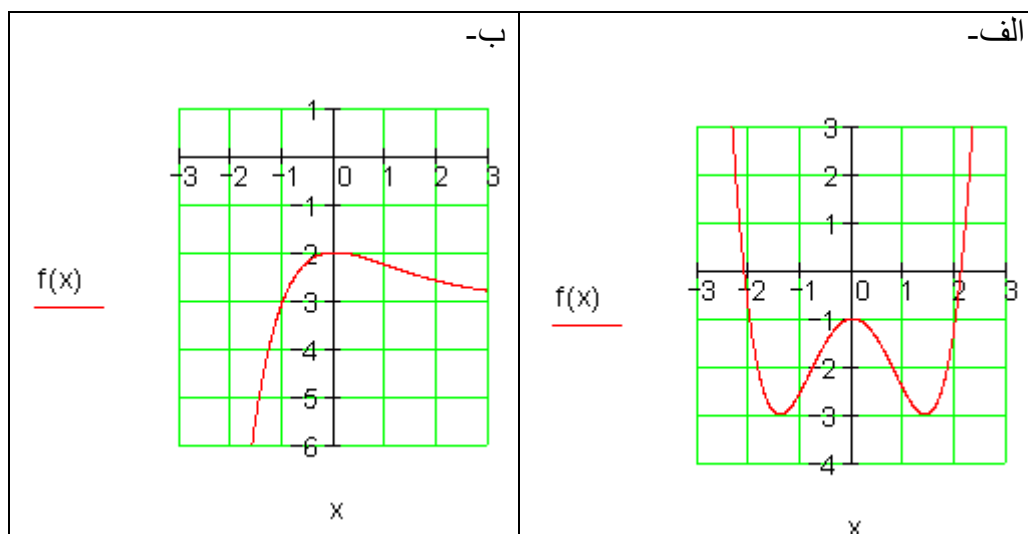
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x) \geq 9$ لري؟

ت- وښايئ: $f(x+1)=3 \cdot f(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره. 

پنځم: تابع $f(x) \in D = \mathbb{R}$ لپاره تعريف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښايئ. 



پوښتنې

توابع VI

لومړۍ: د تابع $f(x)$ ارزښتست د جشميري سره وشميرئ

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 2 \quad \text{د } D=R \text{ سره.}$$

دویم:

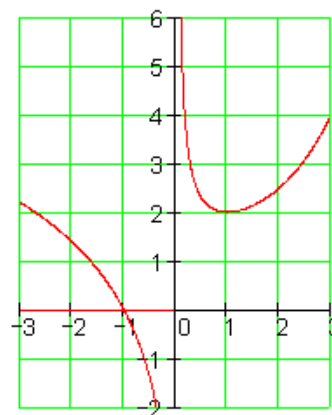
دویم: ترڅنګ کړه د تابع $f(x)$ ګراف دی؟

ایا $f(x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره تعریف دی؟

د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت

- له 2 لوی دی؟

- له صفر کوچنی دی؟

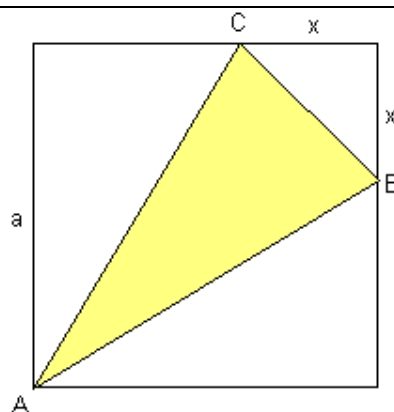


دریم:

یوه مربع یا څلوري د اړخ اوږدوالي

$a = 5 \text{ cm}$ سره ورکړ شوي ده.

د مثلث یا درېکودي ABC د سطحې ترم
وټاکئ $A(x)$



څلورم: د یوه مالک ټول لګښت K د یوه لاسته راوړنې سټ x په واکوالي کې په سټ واحد یا ډبرئ یوون (ME) د ترم له لارې لیکل کيږي

$$K(x) = 0,01x^3 - x^2 + 100x + 720$$

الف- د x - ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لگښت وشمیرئ. یو مناسب ټولنلارې ډول وټاکئ او د ټول لگښت لیدڅیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېرې واحد خرڅلاو 99 پیسېواحدې دی. لاس ته راوړنې (د پیسو) څومره دي، که x (ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواوردیناټسیستم کې د خرڅلاو (پیسو) د لیدلو څیره و کارئ.

پ-د لیدڅیرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x - ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

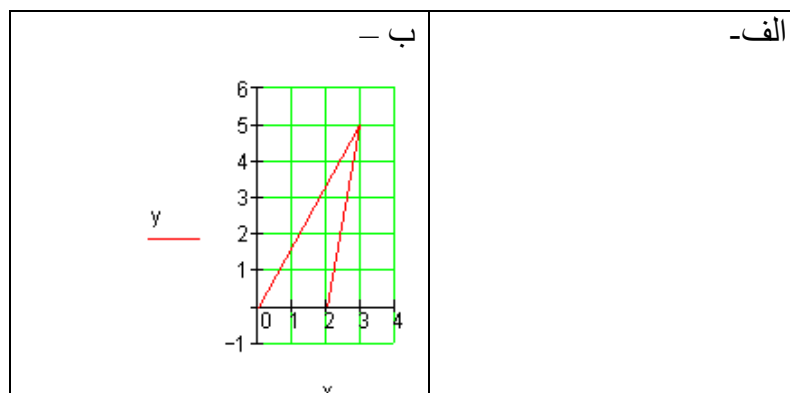
پوښتنې

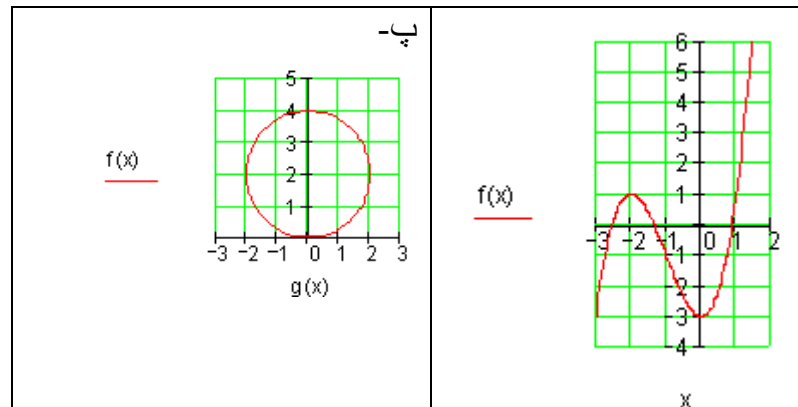
توابع VII

لومړۍ: توابع $f(x)$ ورکړ شوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکارئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دویم: کوم ګراف په تابع $f: x \rightarrow f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.





دریم: د شمیرپوهنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای 3 کې تابع $f(x)$ تابع ارزښت 12 لري.

ب- د تابع $f(x)$ له لارې د x - ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ- ټکی $(2 | 5)$ د $f(x)$ په لیدڅیره باندې پروت دی.

ت- $f(x)$ د کومو اېسټیډیا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د $f(x)$ تابع تابع ارزښت له 7 لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

ث- تابع $f(x)$ د 17- ځای کې تابع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

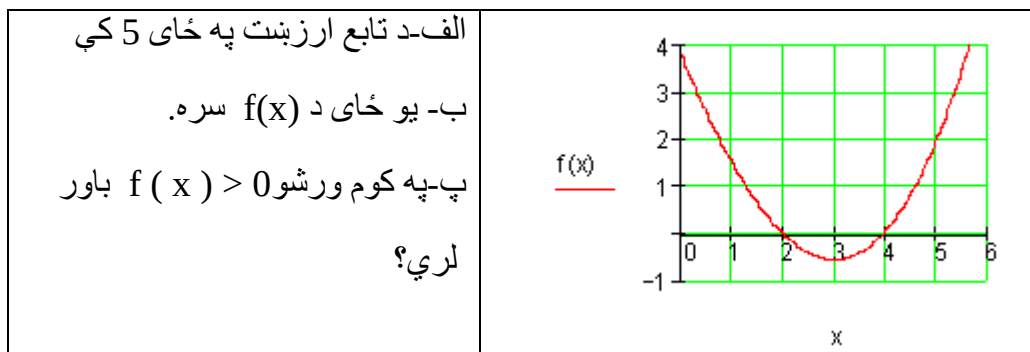
چ- په کوم ځای x کې df تابع ارزښت د g له تابع ارزښت څخه کوچنی دی؟

ح- د تابع $f(x)$ د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

خ- د یوه کبري ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روځنې بیلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کړه یا منحنی د تابع $f(x)$ ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.



شپږم: کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

x	-1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

ب -

x	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	4	4

الف -

توابع او په څټ - یا معکوس توابع

ټولیز:

د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کيږي، لکه د بیلگې په توګه

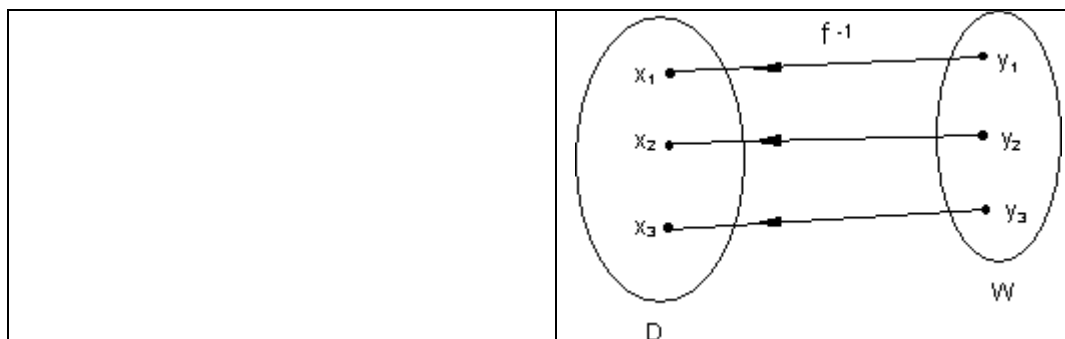
$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

یا په لنډه توګه: $y = f(x) = 2x + 3$

د یوه تابع د یو-یواځنوالي د f^{-1} یو-یواځنی نظم هم شتون لري.

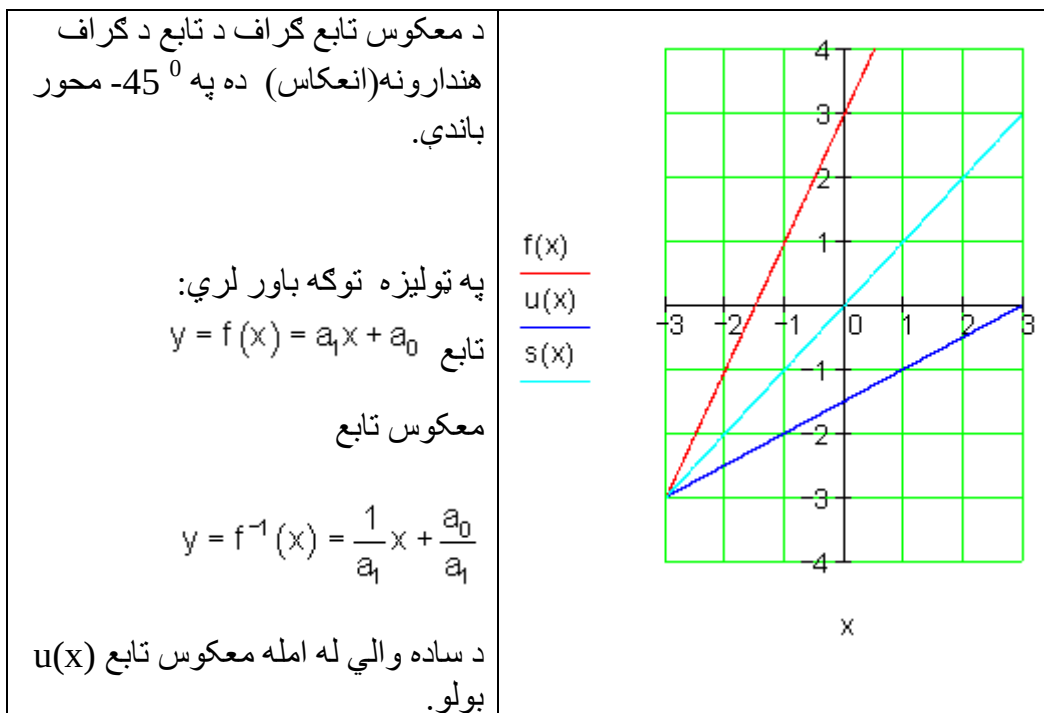
دا نظم معکوس تابع یا په څټ تابع یا انورز inverse تابع بلل کيږي، لکه د بیلگې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



د کرښیز توابعو معکوس توابع

تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه گراف ده تابع f جگوالی $m = 2$ لري. دا د خپل گراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1, 5 0)$ کې غوځوي او ولار محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 3)$ کې غوځوي. د هغه گراف کرښه ده. که د تابع اووښتونې یا متحولې یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه ښه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.	تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$



مربع توابع

څلورۍ- يا مربع توابعو ته ننوتنه يا پيل

ننوتنه يا پيل

هرڅوک چې موټر زده کوي، بايد پوه وي، چې د بريک په وخت کې په پاڅه سرک د
بريک نيولو او د موټر دريدځای په منځ کې لار يا واټن څنگه سره يوځای کيدی شي يا
جمعه کيدی شي..

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا (سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلگي په توگه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

$$\text{د بریک لار } b = \left(\frac{v}{10} \right)^2 \quad \text{د عکس } r = \frac{v}{10} \cdot 3 \quad \text{العمل لار}$$

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$$I: b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10} \right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h) وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د $s = f(v)$ تابع مساوات و ټاکي، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مساوات $s = f(v)$ د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت $v = 0$, $10, 20, 30, \dots, 100 \text{ km/h}$ سره ده یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې گراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړي نتیجه تشریح کړی.

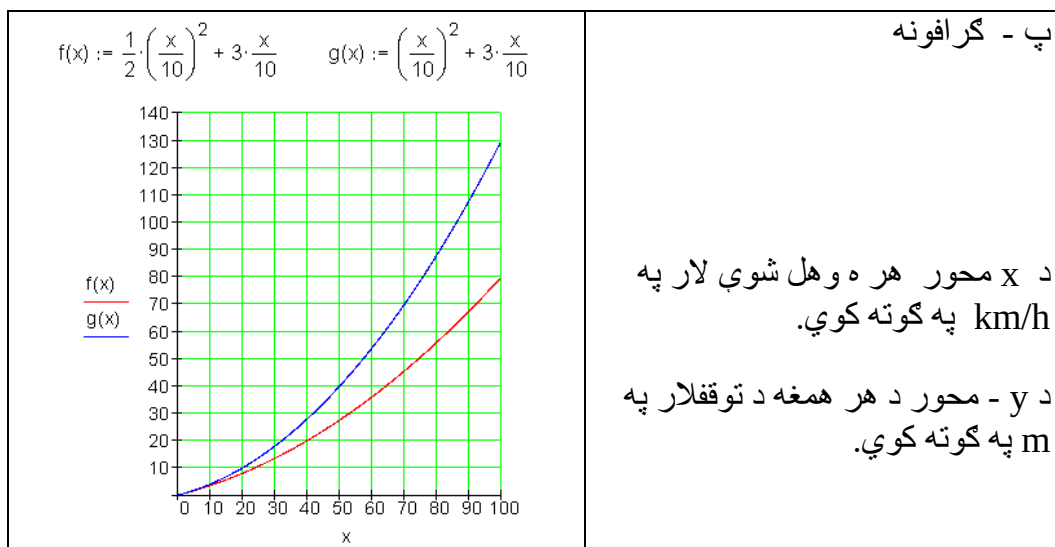
Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

$f(v) = \left(\frac{v}{10} \right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100} v^2 + \frac{3}{10} v$	زور قانون:
$I: f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10} \right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200} v^2 + \frac{3}{10} v$	نوی قانون:

ب - : ارزښتجدول (په کیلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu



ت - کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا (سرعت) زیاتیدني توپیر تل زیاتیري. د 50 km/h چټکتیا سره نوی د تم کیدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار 40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوی لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لار پانږدې 61% ده. د برېک نیولو لار کمېدنه د برېک بڼه کیدو (ABS) سره موخه وړه ده.

د تابع مساوات د ټیک پامورتیا او گراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښیز مساوات دی او نه یوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او یا هم د 2-مې درجې ټول (تام) راشنل توابع.

گرافونه یې پارابول بلل کيږي.

تمرینونه:

د لاندې پارابولونو گرافونه وکاري.

د دې لپاره ارزښت جدول وليکي

اول - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ دويم $f(x) = x^2 + 2x + 5$

دریم - $f(x) = -x^2 + x + 6$ څلورم - $f(x) = x^2 - x$

پنځم - $f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$ شپږم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ اتم - $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$

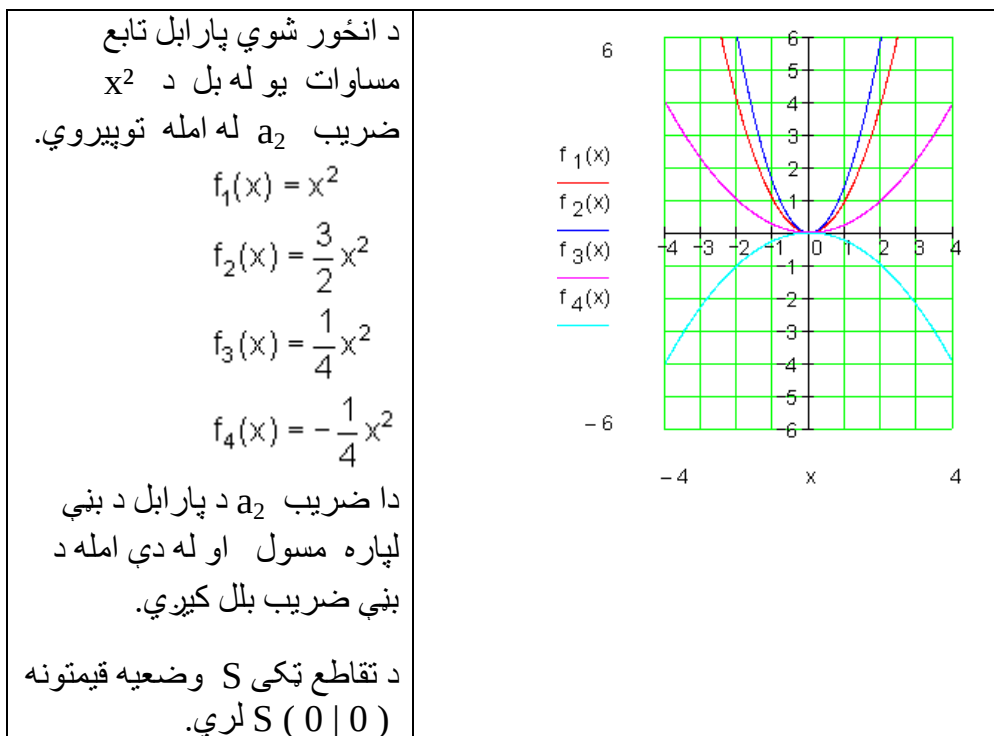
نهمم - $f(x) = 3x^2 - 3x$ لسم - $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

نور مال پارابل، بڼه حل يا - ضريب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a_2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = a_2x^2$ وڅيړي او گراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاري:

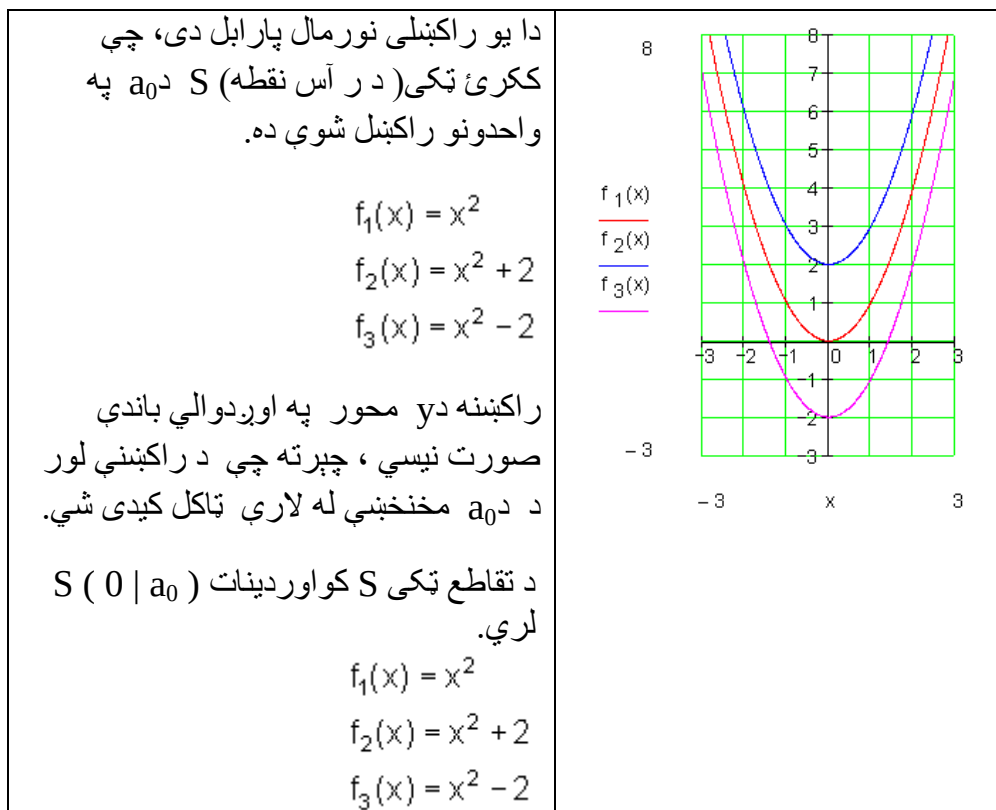
$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$



بڼه ضریب د پارابل قواري یا شکل ته څنگه تغیر ورکوي؟

ضریب بڼې	د پارابل په نڅېنه ونه
$a = 1$	→ نورمال پارابل
$a > 1$	→ غزېدلی پارابل
$0 < a < 1$	→ کپکاپړلی پارابل
$a = -1$	→ په x محور هنداره شوی نورمال پارابل
$a < -1$	→ غزېدلی پارابل، په x -محور هنداره شوی کپکاپړلی پارابل، په x -محور هنداره شوی
$-1 < a < 0$	→

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_0$ تابع مطالعہ کړی او په وضعیه $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی:



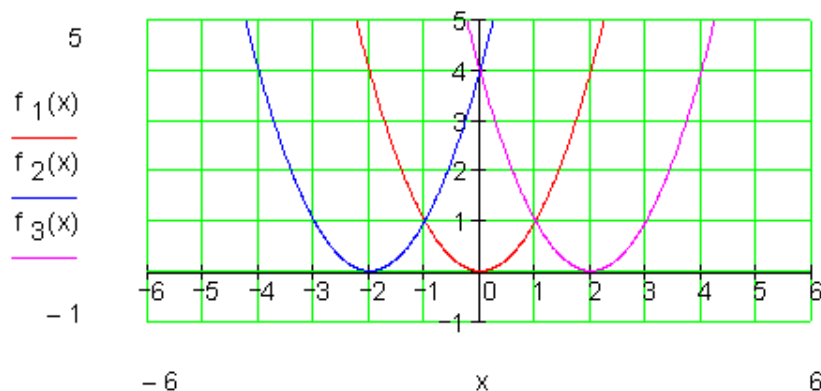
د کار ورکونې قرارداد:

د $f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (x+2)^2 \quad f_3(x) = (x-2)^2$$

د ارزښت جدول:

f_1	x	-2	-1	0	1	2	f_2	x	-4	-3	-2	-1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4

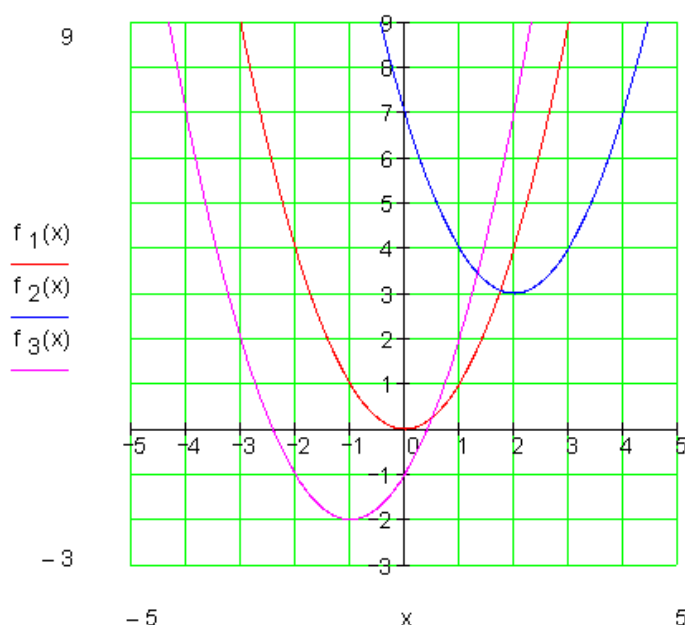


د ا یو راکنبلې (چې خای ته یې تغیر ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککړئ ټکی (د رأس نقطه) S یې د u په واحدونو (یوونونو) د x په محور راکنبل یا کنبول شوي ده. S د غوڅټکي (نقطه تقاطع) یې کواوردینات $(-u | 0)$ لري.

$u > 0 \Rightarrow$	کیني لور ته څرخون یا څرخول، ککړئ ټکی S په u واحدونو یا یوونو د پیل یا سرچیني کین لورت پروت دی.
$u < 0 \Rightarrow$	بنی څرخون یا څرخول، ککړټکی S په u واحدونو د پیل یا سرچیني بنی لورته پروت دی.

د کار (ورکوني) قرارداد: د u او a_0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ وڅیری او گراف یې په یوه کواوردینات (پروت ولاړ) سیستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \quad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$



د $f_2(x)$ گراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککړئ ټکی S یې په دوه واحده بڼی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د $f_3(x)$ گراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککړئ ټکی S (د راسټکی) په یوه واحد(یوون) کښ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x + u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککړئ ټکي(راس ټکي) بڼې تابع بلل کیږي.

د تابع گراف نورمال پارابول دی، چې په u ارزښت x د محور په لور او په a_0 د y محور په لور راکښل شوی دی.

که ککړئ ټکی د $S(x_s | y_s)$ سره په نڅه کړو، نو د ککړئ ټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

$S(x_s y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$	لنډه بڼه:
$S(3 -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$	بېلگه:

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (راکش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دي بیا فاکتور a_2 په پام کې ونيول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$$\text{Ist } f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د راس ټکی)}$$

$$S(x_s | y_s) \quad \text{لری، نو} \quad f(x) = a_2 (x - x_s)^2 + y_s \quad \text{د ککرتکي د تابع مساوات دي.}$$

د څلورۍ تکمیلوني له لارې د راس ټکي (ککری ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow a_2 (x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s | y_s)$$

په ککرتکي کې د ټولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرتکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بېلگه:

$$F(x) = 3x^2 - 12x + 15 \quad \text{دي په ککری ټکي مساوات وړول شي.}$$

لورمی پل (قدم): د x^2 تر مخه ضریب دي له نوکانو راه وېستل شي.

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2 - 4x + 5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه [] او بڼه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 5] = 3.[(x-2)^2 + 1] = 3.(x-2)^2 + 3 \\ \Rightarrow S(2;3)$$

بیلگه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}[x^2 - 6x + 8] = \frac{1}{2}[x^2 - 6x + \textcolor{red}{3^2} - \textcolor{red}{3^2} + 8] \\ \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}[(x-3)^2 - 1] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)}}$$

بیلگه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right] \\ \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \\ \Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)}}$$

تمرینونه: د مربع تکمیلونې له لارې د راس ټکي (ککړۍ ټکي) ټاکل

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړ شوي دي (د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره راسټکو بڼه او راسټکي پیدا کړی.

گرافونه یې وکارئ:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دویم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دریم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3,5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نههم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بیلگه 1 :

د ټول راشنل تابع گراف چې رسم کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپېژنو. د دې لپاره جېشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړین دی.

یوه ساده بیلگه به له جېشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$

$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پې کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کيږي.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	8	3	0	-1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ گراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي، دا بیا پسي شمیرل کېدی شي

د بیلگې په توګه $x = \pm \frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جېشمیري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمېروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي گډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

یوه غوره بیلگه، چې ځنې برخې یې د جېشمیري په مرسته حل شوي دي

$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} \quad \text{د تابع مساوات}$$

بادونه: په لاندې زیات ځایونه HN راغلي، دا د اصلي مخرج په مانا دي.

موږ د $x = 0$ سره پیل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0^2 - \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5} \cdot 1^2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5} \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$$

$$= -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5} \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} = \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5} \cdot 4^2 - \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} = \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5} \cdot 5^2 - \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$\begin{aligned}
 x = -1: f(-1) &= \frac{4}{5} \cdot (-1)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-1) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{16}{20} + \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{39}{20} = -1,95 \\
 x = -2: f(-2) &= \frac{4}{5} \cdot (-2)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{32}{10} + \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2 \\
 x = -3: f(-3) &= \frac{4}{5} \cdot (-3)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} + \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{144}{20} + \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{119}{20} = 5,95 \\
 x = -4: f(-4) &= \frac{4}{5} \cdot (-4)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-4) - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} + 3 - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{128}{10} + \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{123}{10} = 12,3
 \end{aligned}$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د گراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسي شميرل کیدی شي

د بيلگې په توگه $x = \pm 5/2$

$$\begin{aligned}
 x = -\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} + \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = \frac{27}{8} = 3,375 \\
 x = \frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} - \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = -\frac{3}{8} = -0,375
 \end{aligned}$$

یادونه: په پورته کې HN (Hauptnenner) داصلي مخرج (ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا نام راشنل تابع گراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړین دی، چې ارزښت جدول وکارو. د دې لپاره یو جېشمیروني ته اړتیا لرو.

یوه ساده بیلگه به له جېشمیروني څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولي $x = 0$ څخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$

$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدای شي چې په کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کېږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کېږي.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	8	3	0	-1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدای شي د $f(x)$ گراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm \frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5 \frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1 \frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جېشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمېروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جېشمېري په مرسته حل شوي دي:

$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} \quad \text{د تابع مساوات}$$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0^2 - \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5} \cdot 1^2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5} \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5} \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} = \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5} \cdot 4^2 - \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} = \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5} \cdot 5^2 - \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$\begin{aligned}
 x = -1: f(-1) &= \frac{4}{5} \cdot (-1)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-1) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{16}{20} + \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{39}{20} = -1,95 \\
 x = -2: f(-2) &= \frac{4}{5} \cdot (-2)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{32}{10} + \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2 \\
 x = -3: f(-3) &= \frac{4}{5} \cdot (-3)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} + \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{144}{20} + \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{119}{20} = 5,95 \\
 x = -4: f(-4) &= \frac{4}{5} \cdot (-4)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-4) - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} + 3 - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{128}{10} + \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{123}{10} = 12,3
 \end{aligned}$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د گراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کيدی شي

د بېلگې په توگه $x = \pm 5/2$

$$\begin{aligned}
 x = -\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} + \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = \frac{27}{8} = 3,375 \\
 x = \frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} - \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = -\frac{3}{8} = -0,375
 \end{aligned}$$

پوښتنې

بنستونه مربع توابع II

لومړۍ - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړئ:

الف- $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ب- $f(x) = x^2 + 4x + 2$

پ- $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ ت- $f(x) = -x^2 + 8x - 9$

ث- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ ډ- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

ج- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ چ- $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 6$

ح- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 7$ خ- $f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

(۱) د ککړۍ ټکي بڼه او ککړۍ ټکي وټاکئ.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیرئ.

(۳) پل په پل تشریح کړئ، چې $f(x)$ د نورمال پارابول څخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولارسیستم کې د $f(x)$ ګراف وکارئ

دویم - سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدنې یا غزونې له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا د x محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

د y په لور راګېښه یا خای د x په لور راګېښه یا
بدلون خای بدلون بڼه ضریب

- a) په 2 واحدونو کېښه لور ته په 2 واحدونو بڼې لورته $a_2 = 1$
- b) په 4 واحدونو پورته لور ته په 3 واحدونو کېڼ لورته $a_2 = -1$
- c) په 4 واحدونو کېښه لور ته په 2 واحدونو کېڼ لورته $a_2 = \frac{1}{2}$
- d) په 5 واحدونو پورته لور ته په 1 واحد بڼې لورته $a_2 = -2$
- e) په 3 واحدونو پورته لور ته په 4 واحدونو کېڼ لورته $a_2 = -\frac{1}{4}$
ته
- f) په 6 واحدونو کېښه لور ته په 2,5 واحدونو بڼې لورته $a_2 = \frac{3}{2}$
- g) په 3 واحدونو پورته لور ته په 3 واحدونو کېڼ لورته $a_2 = -\frac{3}{4}$
- h) په 4,5 واحدونو کېښه لور ته په 3,5 واحدونو بڼې لورته $a_2 = 2$
- i) په 3 واحدونو یا یوونونو کېښه لور ته په 2 واحدونو بڼې لورته $a_2 = \frac{1}{3}$
- j) په 3 واحدونو پورته لور ته $a_2 = -\frac{2}{3}$

په 4 واحدونو بني لورته

(۱) د ککړۍ ټکي بڼه او ککړۍ ټکي وټاکي.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) د تابع مساوات په پولینوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ؟ څنگه دي؟

(۴) په یو مناسب کواور دینات سیسم کې د $f(x)$ گراف وکاري.

پوښتنې

د مربع توابعو بنسټونه **IV**

لومړی:

تابع $f(x)$ ورکړ شوی دی. د شمېرنې له لارې وښایی، چې گراف تابع په x محور کې لمسوي. گراف وکاري.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دویم: د تابع مساوات $f(x)$ د محور غوڅټکي وشمیری، او ککړۍ ټکي. گراف یې رسم کړی.

الف. $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ. $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت. $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$ ټ. $f(x) = 3x(1-x)$ ټ.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دریم: $U = 18 \text{ cm}$ محیط سره کوم مستطیل (ولاړکوډیز) خورا لویه سطحه لري؟

څلورم: د توابعو $f(x)$ او $g(x)$ گرافونه چیرته د x محور غوڅوي؟ ککړی چیرته پرته دي؟ د دواړو گرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرته دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړی.

الف –

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	-3,5
$g(x)$	4	0	-2	-2	0	4

ب –

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-12	-5	0	3	4	3
$g(x)$	3,5	0	-2,5	-4	-4,5	-4

پنځم: د اړونده گراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-یا څلورۍ توابعو معکوس تابع

تلنار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وښوول شوه.

$$y = (f(x) = x^2$$

د متحولو x او y بدلول

$$x = f(y) = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x$$

رېښه نيونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

$$y = -\sqrt{x} \text{ يا}$$

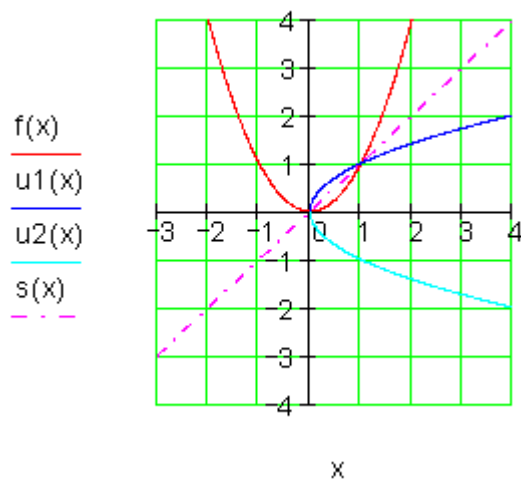
نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$$y = u_1(x) = \sqrt{x}$$

او

$$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$$

د معکوس تابع جوړولو سره تعریفورشو
محدوده شوه، د دې لپاره چې یواځنی
نظم منځ ته راشي



کرنیزبرایرونسیستم د ۲ برابر ونونو او ۲ متحولو سره.

داسې سیستم له دوه مساواتو څخه جوړ دی. غوښتونې د دواړو مساواتو گډ حل دی. مختلفې تڼلارې شته، چې سړی حل ته ورسېږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې ایښوول.

د جمعې تڼلار:

د حل پل (قدم) غوڅي (قطاع، که قطعې؟) د جمعې تڼلار ته لومړی امکان یا واریانت	مساوات سیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$
لومړی: مساوات ورته داسې بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (تر مخ عددونه) د y متحولې تر مخنځې پورې سره سروخوري.	(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$
دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د x - متحولې پسې یې حل کړئ	(I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ $10,5x = 10,5 \mid : 10,5$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$
دریم: د x لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کيږدئ او y پسې یې حل کړئ.	په $3x + 3y = 9$ کې ایښوونه: $x = 1$

	$3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$
څلورم: حلست يا حلډېرئ وليکئ	$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$

پنځم:

ازماښت د اېښوونې له لارې

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه قدمونه د جمعې تڼلار لپاره

دويم واريانت

مساواتسيستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

لومړۍ: مساوات داسې ورته بڼه بدل

کړئ، چې د x ضريبونه

ترمخددونه تر مخخښې پورې سره

يوغريز شي.

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid \cdot 3$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid \cdot (-5)$$

$$(I) \quad 15x - 6y = 3$$

$$(II) \quad -15x - 15y = -45$$

دويم: منځ ته راغلي مساوات سره

جمعه کړئ او متحولي y پسې يې حل

کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad 15x - 6y = 3 \\ (II) \quad -15x - 15y = -45 \end{array} \right\} +$$

$$-21y = -42 \mid : (-21)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

دریم: ښي لور ته الماني د اېښوونې په

مانا ده $y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$

د x لپاره میندل شوي ارزښتونه له دې

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \quad | -6$$

دوه پهبوه مساوت کې کیردئ او د

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \quad | : 3$$

متحولي x پسې یې حال کړئ.

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلروم: حلست یا د حلېږئ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 | 2)\}}}$$

پنځم: د اېښوونې له لارې ازماېښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابر اېښوونې تلنلار

د حل پل د برابر اېښوونې تلنلار ته

مساواتسیستم

واریانت 1

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتونې یا
متحولې x پسې حل کيږي.

$$\begin{array}{rcl} \text{(I)} & 5x - 2y & = 1 \quad | +2y \\ \text{(II)} & 3x + 3y & = 9 \quad | -3y \\ \hline \text{(I)} & 5x & = 1 + 2y \quad | : 5 \\ \text{(II)} & 3x & = 9 - 3y \quad | : 3 \\ \hline \text{(I)} & x & = \frac{1+2y}{5} \\ \text{(II)} & x & = \frac{9-3y}{3} \\ \hline \text{(I)} & x & = \frac{1+2y}{5} \\ \text{(II)} & x & = 3 - y \end{array}$$

دویم: د مساوات ښي اړخونه برابر
ایښوول کيږي او د متحولې y پسې حل
کيږي.

$$\begin{array}{rcl} \frac{1+2y}{5} & = & 3 - y \quad | \cdot 5 \\ \Leftrightarrow 1 + 2y & = & 15 - 5y \quad | +5y \\ \Leftrightarrow 1 + 7y & = & 15 \quad | -1 \\ \Leftrightarrow 7y & = & 14 \quad | : 7 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}} \end{array}$$

دریم: (د کین لور الماني په پښتو:

ایښوول په .. کې) $y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3 \cdot 2 & = & 9 \\ \Leftrightarrow 3x + 6 & = & 9 \quad | -6 \\ \Leftrightarrow 3x & = & 3 \quad | : 3 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}} \end{array}$$

د y میندل شوی ارزښت د دواړو څخه
په یوه وتونمساوات کې ایښوول کيږي،
او دا بیا د متحولې x پسې حل کيږي.

څلورم: حلست یا -ډېرئ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

پنځم: د خا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازمایښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پل د برابر ایښوولو له لارې

مساوات سیستم

واریانت 2

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$

$$(I) \quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$

$$(II) \quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$

$$(I) \quad y = \frac{1-5x}{-2}$$

$$(II) \quad y = \frac{9-3x}{3}$$

$$(I) \quad y = \frac{5x-1}{2}$$

$$(II) \quad y = 3-x$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا
متحولې y پسې حل کيږي.

دویم: د دواړو مساواتو بڼې خوا برابره لیکل یا ایښوول کيږي او د متحولې x پسي حل کيږي.

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{2} &= 3-x \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 5x-1 &= 6-2x \quad | +2x \\ \Leftrightarrow 7x-1 &= 6 \quad | +1 \\ \Leftrightarrow 7x &= 7 \quad | :7 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

دری (بڼی الماني: ایښوول په ... کې)

د x میندل شوی ارزښت د دواړو وتونمساواتو څخه په یوه کې ایښوول کيږي، دا بیا د متحولې y پسي حل کيږي.

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y &= 9 \\ 3 \cdot 1 + 3y &= 9 \\ \Leftrightarrow 3 + 3y &= 9 \quad | -3 \\ \Leftrightarrow 3y &= 6 \quad | :3 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y}} &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

څلورم: د حلست وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

پنځم د ایښوونې له لارې ازماښت

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 5x - 2y &= 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w) \\ \text{(II)} \quad 3x + 3y &= 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w) \end{aligned}$$

د ایښوونې تلنلار: د ایښوونې
تلنلار لپاره د حل پلونه (قدموه)

وارینت 1

مساوات سیستم

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 5x - 2y &= 1 \\ \text{(II)} \quad 3x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

لومړۍ: مساوات (I) د x پسي
حل کيږي.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 5x - 2y &= 1 \quad | +2y \\ \Leftrightarrow 5x &= 2y + 1 \quad | : 5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \quad | -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{دویم: د بني اړخ میندل شوی ترم} \\ \text{په مساوات (II) کې ایښوول} \\ \text{کيږي او د } y \text{ پسي حل کيږي.} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \quad | \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 21y = 42 \quad | : 21$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

دریم: د y لپاره میندل شوی
ارزښت په یو د دې دوه
وتونمساواتو کې ایښوول کيږي،
دا بیا په x پسي حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلورم: د حل سټ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 | 2)\}}}$$

پنځم: د ایښوولو له لارې حل

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه (قدمونه) د ایښوولو تڼلار
لپاره

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

لومړۍ: مساوات (II) د متحولې y
پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned} (II) \quad 3x + 3y &= 9 \quad | -3x \\ \Leftrightarrow \quad 3y &= 9 - 3x \quad | : 3 \\ \Leftrightarrow \quad y &= 3 - x \end{aligned}$$

دویم: دېنې لور میندل سوی ترم په
مساوات (I) کې کيږدئ او په x
پسې یې حل کړئ.

$$\begin{aligned} y = 3 - x \text{ eingesetzt in (I): } 5x - 2y &= 1 \\ 5x - 2(3 - x) &= 1 \\ \Leftrightarrow 5x - 6 + 2x &= 1 \quad | +6 \\ \Leftrightarrow 7x &= 7 \quad | : 7 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

3. دریم: د x لپاره میندل شوی
ارزښت په یو د دې دوه
وتون مساوتو کې ایښوول کيږي، او
دا بیا د متحولې y پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y &= 9 \\ 3 \cdot 1 + 3y &= 9 \\ \Leftrightarrow 3 + 3y &= 9 \quad | -3 \\ \Leftrightarrow 3y &= 6 \quad | : 3 \\ \Leftrightarrow \quad y &= 2 \end{aligned}$$

څلورم: جلست وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

پنځم: ازماينست د اينسولولو له لارې

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تېلنلارې د هغه د واريانتو سره په يوه ټکلي مساوتسيستم وکارول شو. که څوک يوگوني تېلنلارې ټيک وگوري، پېژني، چې په واريانت ۲ کې لږ د شميرلو کار غوښتونی دی.

په يوه ټاکلي تېلنلار د شميرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسيستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړۍ پام وشي، چې کومه تېلنلار د لږ کار سره سرته رسيدی شي. د دې لپاره نو يو څو بيلگو ته اړ يو. لاندې بيلگې دې د دې لپاره يوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – يا ځواب تېلنلار پيداشي.

د مناسب ځواب تېلنلار لپاره بيلگې

بيلگه ۱ :

$(I) \ y = 7x + 8$ $(II) \ y = -2x - 1$ د برابر ایشوونې لار $7x + 8 = -2x - 1 \quad +2x$ $\Leftrightarrow 9x + 8 = -1 \quad -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \quad :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$	$y=7x+8 \text{ په } x1=-1 \text{ کې ایشوونه}$ $\left \begin{array}{l} y = 7 \cdot (-1) + 8 \\ \Leftrightarrow y = -7 + 8 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}} \end{array} \right.$ حل: $L=\{(-1 1)\}$ ازمایښت $\left \begin{array}{l} (I) \ y = 7x + 8 \Rightarrow y = 7 \cdot (-1) + 8 \\ \Leftrightarrow y = -7 + 8 \Leftrightarrow y = 1 \ (w) \\ (II) \ y = -2x - 1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) - 1 \\ \Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1 \ (w) \end{array} \right.$

بیلگه ۲:

$(I) \ 2x + 4y = 8$ $(II) \ 2x - 5y = 35$ د جمعې تڼلار: $\left. \begin{array}{l} (II) \ 2x - 5y = 35 \quad \cdot (-1) \\ (I) \ 2x + 4y = 8 \end{array} \right\} +$ $\left. \begin{array}{l} (II) \ -2x + 5y = -35 \\ (I) \ 2x + 4y = 8 \end{array} \right\} +$ $\underline{\underline{9y = -27 \quad :9}}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$	$Y=3 \text{ ایشوونه په } (1) \text{ کې } 2x+4y=8$ حل: $2x - 12 = 8 \quad +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \quad :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازمایښت $(I) \ 2x + 4y = 8 \Rightarrow 2 \cdot 10 + 4 \cdot (-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20 - 12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \ (w)$ $(II) \ 2x - 5y = 35 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20 + 15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35 \ (w)$

$(I) \quad x + 2y = 5$ $(II) \quad -x + y = 1$ د ایښوونې لار؛ (II) په y پسې حل کړئ $-x + y = 1 \quad +x$ $\Leftrightarrow y = x + 1$ په (I) کې کیدوئ $x + 2y = 5$ $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \quad -2$ $\Leftrightarrow 3x = 3 \quad : 3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$	$x + 2y = 5 \text{ په } (1) \text{ کې کیدوئ } X = 1$ $1 + 2y = 5 \quad -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \quad : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ حل: $L = \{(1 2)\}$ ازمابښت $(I) \quad x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \quad (w)$ $(II) \quad -x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$ w د رښتیا لپاره

بیلگه ۴ : په لاندې: einsetzen ایښوونه په (1) کې اوبیونه یا حل: Lösung
 ازمابښت Probe د زیاتون یا جمعې
 لار:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad | \cdot 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad | : (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ (II) \quad -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \quad | \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung: $L = \{(2 | -5)\}$ $x, y \neq 0$

Probe :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad | \cdot 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad | : (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ (II) \quad -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \quad | \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung: $L = \{(2 | -5)\}$ $x, y \neq 0$

Probe :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad | \cdot 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad | : (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ (II) \quad -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \quad | \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung: $L = \{(2 | -5)\}$ $x, y \neq 0$

Probe :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

يادونه:

مساواتسيستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کيدو اجازه نه لري يا نه شي صفر کيدی، تعريفست بايد ورکړ شي. داسی مساواتسيستم کرښيز نه دی.

د رسموني لار

$$(I) \quad x - y = -2 \quad L_I = \{(-2 | 0); (-1 | 1); (0 | 2); (1 | 3); \dots\}$$

$$(II) \quad -2x - y = 1 \quad L_{II} = \{(-2 | 3); (-1 | 1); (0 | -1); (1 | -3); \dots\}$$

دواړه مساوات د y پسي حل کيږي.

$$(I) \quad x - y = -2 \mid +y$$

$$(II) \quad -2x - y = 1 \mid +y$$

$$(I) \quad x = -2 + y \mid +2$$

$$(II) \quad -2x = 1 + y \mid -1$$

$$(I) \quad x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2$$

$$(II) \quad -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

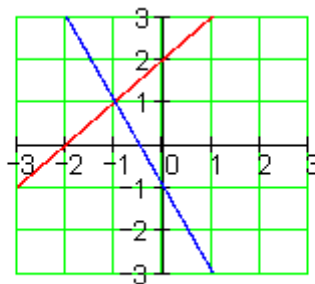
د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په گوته کوي.

کا دا په يوه کواورډیناټسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅتکي یا نقطه تقاطع کې د د، اړو مساواتو حلست پروت دی.

$$L = \{(-1|1)\}$$

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه ایښوول کېږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسمونې لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي (ځمکچیزې) اړیکې لیدور کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د گډغوڅتکي کواورډینات په گرافیک کې ناتییک لوستل کیدی شي.

برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل څخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکې لیدور کوي.

- دوه کرښې کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتخایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوڅي کړي، لکه پورته بیلگه چې لیدور کوي، د دواړو کرښیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دا اړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot (-2) \\ \hline \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \mid \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \mid \end{array}} \right\} +$	مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه لیدور دا په دې معنا دی، چې خغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.
$0=2$ نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته راځي $L=\{\}$	

دا مساوات سیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot (-2) \\ \hline \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \mid \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \mid \end{array}} \right\} +$	د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمع کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنټیک دي. هر د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي، دا مساوات (II) هم پوره کوي. لیدور دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتې دي.
$0=0$ له دې لاس ته راځي رښتیا وینا	

پوښتنې

مساوات سیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیز مساوات سیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې (د متن سره پ، ښتنې)

لومړی: د لاندې مساوات سیستم حلست وټاکئ

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4x + 5y = 32 \\ \text{(II)} & y = 5x - 11 \end{array} \quad \text{ب - الف}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x = y + 15 \\ \text{(II)} & 2y - 10 = 2x \end{array} \quad \text{ت - پ}$$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

الف - ب - پ - ت -

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2y = 2x - 40 \\ \text{(II)} \quad 3x = 10 - 2y \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ \text{(II)} \quad \frac{x}{4} + y = 8 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ \text{(II)} \quad \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ \text{(II)} \quad \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{array} \end{array}$$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

الف - ب - پ - ت -

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ \text{(II)} \quad \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ \text{(II)} \quad \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{4}{x} + \frac{8}{y} = \frac{5}{3} \\ \text{(II)} \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{1}{6} \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{3}{2x-1} - \frac{8}{3y+2} = -\frac{1}{5} \\ \text{(II)} \quad \frac{5}{2x-1} + \frac{4}{3y+2} = \frac{8}{15} \end{array} \end{array}$$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \frac{7}{2x-5} - \frac{9}{7y+5} = \frac{10}{3} \\ \text{(II)} & \frac{24}{2x-5} + \frac{15}{7y+5} = \frac{19}{3} \end{array}$$

پنځم: یو پلار په دې لحظه کې څلورواړه دومره عمر لري لکه څوې یې او په ۵ کاله کې به فقط درې واړه دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخت کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتونې د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستطیل یا ولاړکونجیز چاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخ a څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتخاایزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد 9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه څا ارزښتونه څومره دي؟

توان- یا پوتنځ توابع

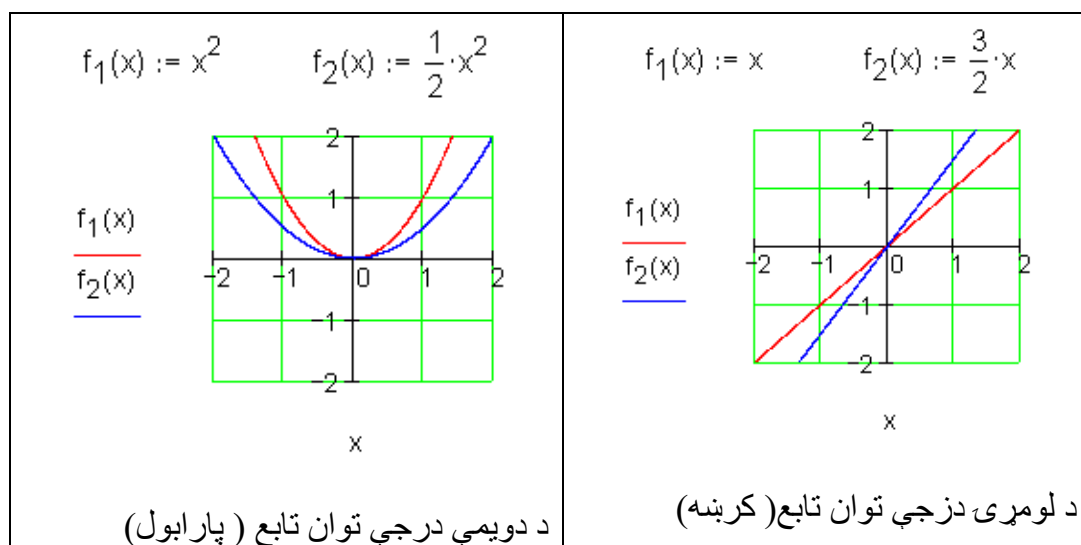
توان توابع

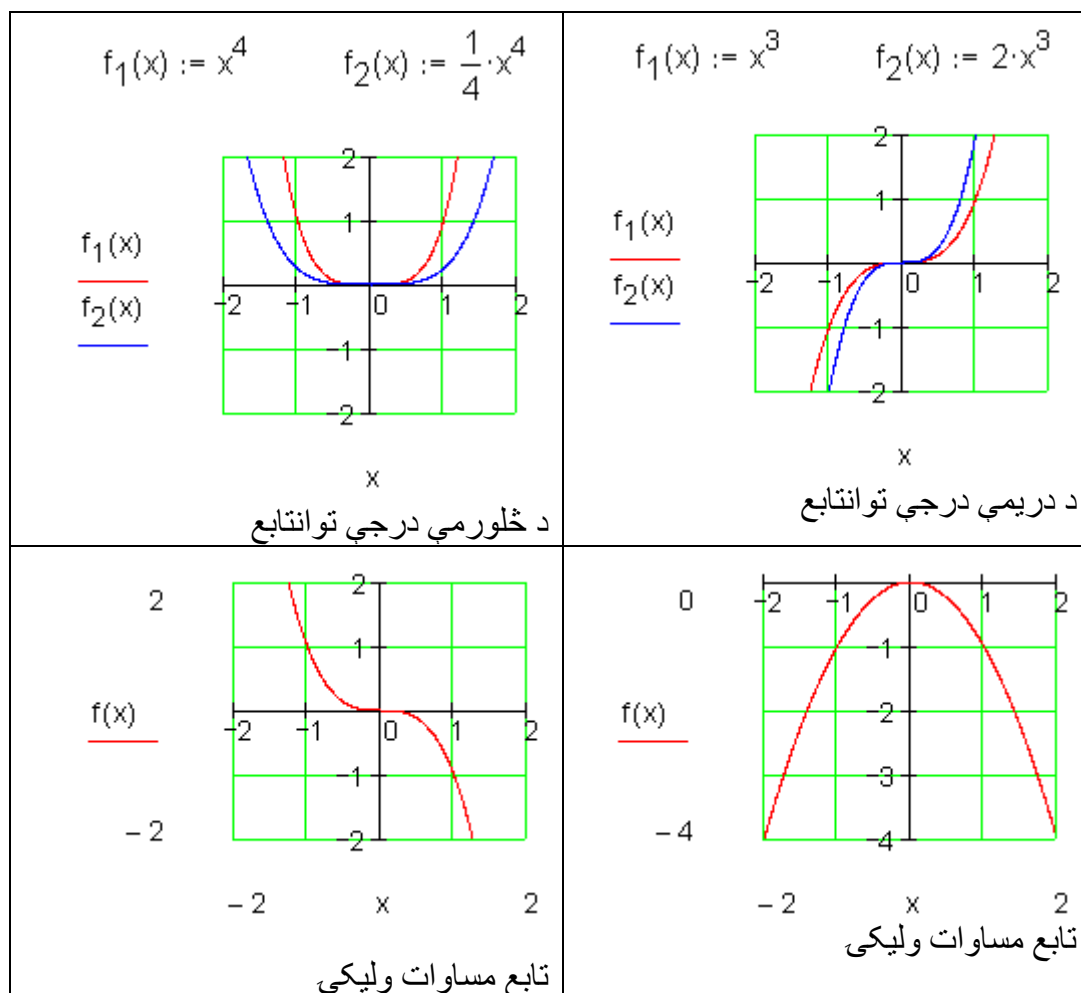
تعریف:

یوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n$; $n \in \mathbb{N}$; $a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنځ تابع بلل کیږي.

د n اکپوننت یا جگعدد د پوتنځ تابع درجه ټاکي او ضریب a_n د گراف بڼه یا فورم او هغه د بڼې ضریب بلل کیږي.

بیلګې:





لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب - n درجه او د a_n مخنځینه د گراف په تلنه کومه اغیزه لري؟

پ - د پوټنځ تابع n درجه د گراف په سیومتری کومه اغیزه لري؟

ت - د پوټنځ تابع د n په واکولي او د a_n مخنځینې له امله کوم ارزښتست (ارزښتدېری) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د گراف په تلنه کوم ایز لري؟

خوابونه لږ وروسته راځي.

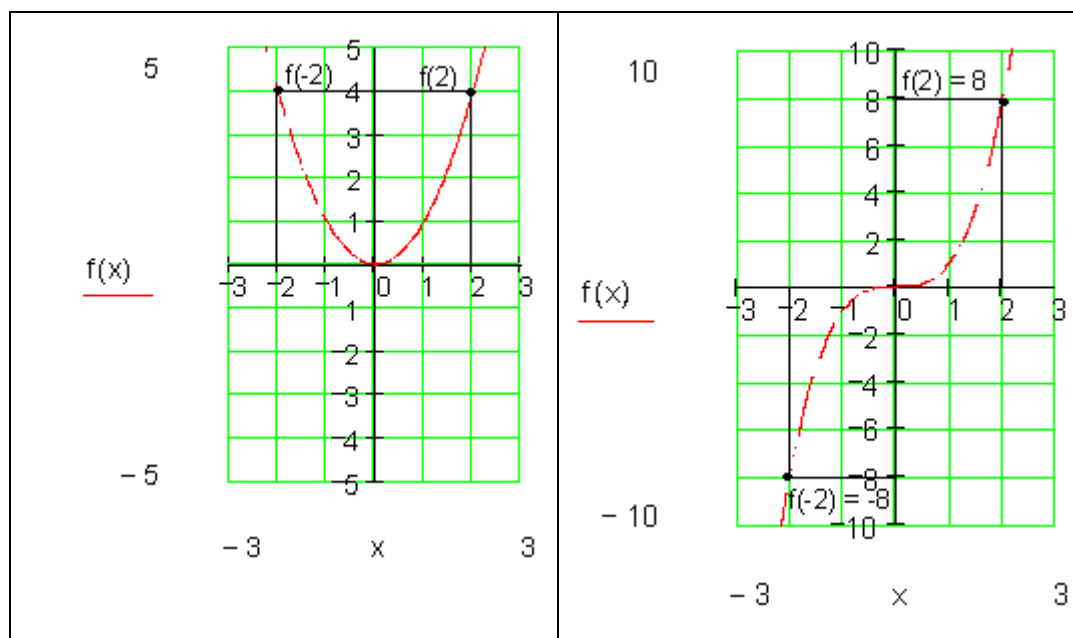
سيومتري

په سيومتري څنگه قضاوت کيدی شي، که څوک فقط د يوه توان (پوتنڅ) تابع تابع مساوات پيژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو گرافونه کارو:

$$f(x) = x^3 \text{ او } f(x) = x^2$$

او تابع د $x = -2$ او $x = 2$ په ځايونو کې تر څيړنې لاندې نيسو.



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

$x \in D$ د جوړه جګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې:

محورسیمیتریک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه (طاقو) جګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادي مخنځېني لري.

دا په دې معنا چې:

ټکی سیومتریکی، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړیکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان - یا طاقت تابع محورسیومتریکی دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: $f(-x) = f(x)$

د یوه توانتابع گراف ټکی سیمتریک دی، که د ټولو $x \in \mathbb{D}$ لپاره باور ولري $f(-x) = -f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توانتابع د جوړه جگعدد سره محور سیمتریک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتابع د ناجوړه(طاق) جگعدد سره ټکيسیومتریک دي. دوی له III. و I. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو < 0 لپاره باور لري:

ټول توانتابع د جوړه جگعدد سره محور سیمتریک دي. دا له III د IV. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتابع د ناجوړه(طاق) جگعدد سره ټکيسیومتریک دي. دوی له II. و IV. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خپونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکي، په سیمتریکي حالت، د گراف په تله او او ارزښت دېری یې یوه وینا وکړی د د هر گراف یې په پروت ولاړسیستم (کوارډینات سیستم) کې رسم کړی.

$$f(x) = \frac{1}{4}x \quad \text{دویم} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{لومړی}$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 \quad \text{څلورم} \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^4 \quad \text{دریم}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x \quad \text{شپږم} \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^5 \quad \text{پنځم} -$$

$$f(x) = 2x^2 \quad \text{اتم} \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^3 \quad \text{اوم} -$$

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^4 \quad \text{لسم} \quad f(x) = \frac{1}{5}x^4 \quad \text{نهم} -$$

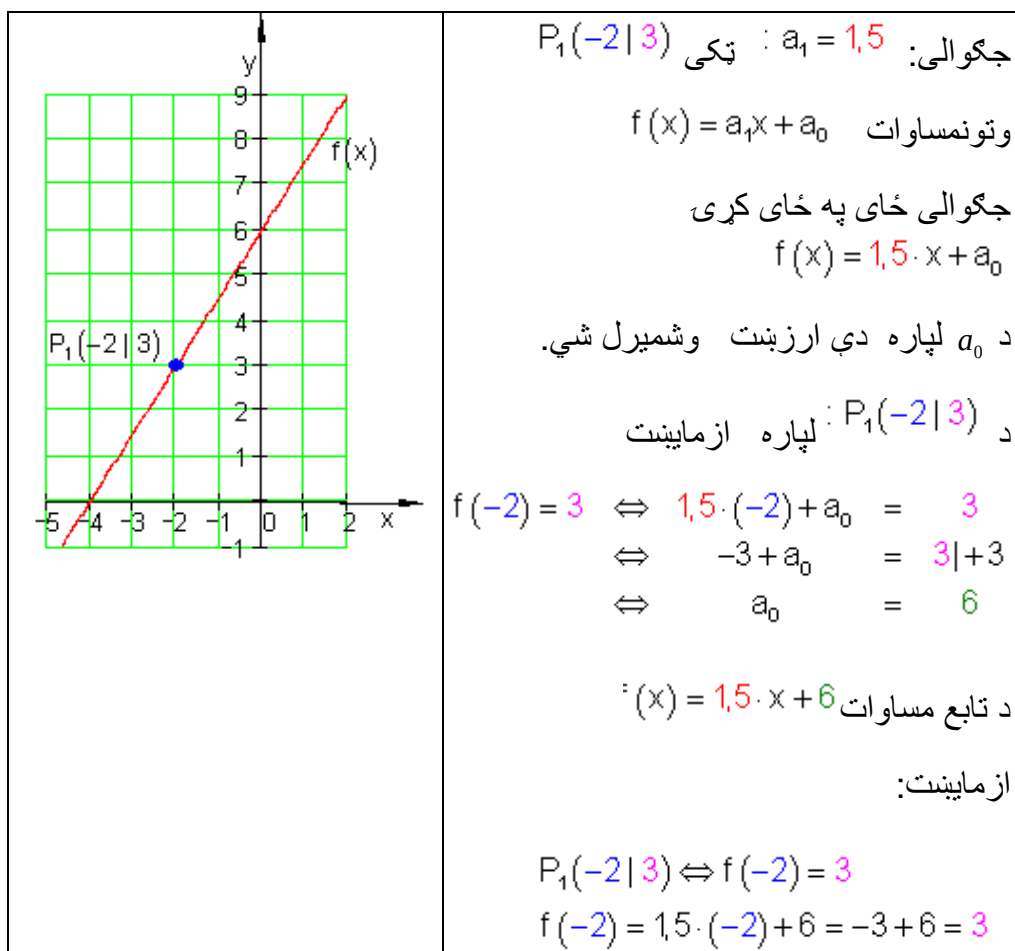
کرنیز ی توابع د ورکړشوو شرایطو سره

. لومړۍ حالت : د P ټکي څخه تیرې کرنیزې د a_1 جگوالي سره

بیلگه:

یوه کرښه د a_1 د جگوالي سره د $P_1(x_1 | y_1)$ په ټکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a$ تابع مساوات دې پیدا شي.



بیلگه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځي 7,5 kg خوراک شته. دولس روځي، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکي، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډېری به دا د وښو زیرمه دولس ورځي د مخه ډکه شوې وي.

حل و الف ته - x محور: وخت په ورځو

y محور: د وینو زېرمه په کیلوگرام kg .

$$f(x) = -7,5x + a_0$$

$$P(12 | 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7,5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 | +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = -7,5x + 340$$

حل و ب ته- د ډکیدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7,5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وینو شتون دولس 12 ورځې د مخه په $340 kg$ ډک شوی.

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرښې جګوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشو داتن یا داتن $Daten$ سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمېرنه توپیر سرته رسیږي. دا مو بیا یو فرمول ته لارښوده وي.

یوه کرښه a_1 جګوالی سره د $P_1(x_1 | y_1)$ ټکي څخه تیري.ي.

د کرښمساواتو تولید فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 | -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکي - جګوالی فرمول هم بلل کیږي.

بیلګه:

$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$: کې ځا په ځای کړی $a_1 = -2$; $P_1(-3 | 4)$ په

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

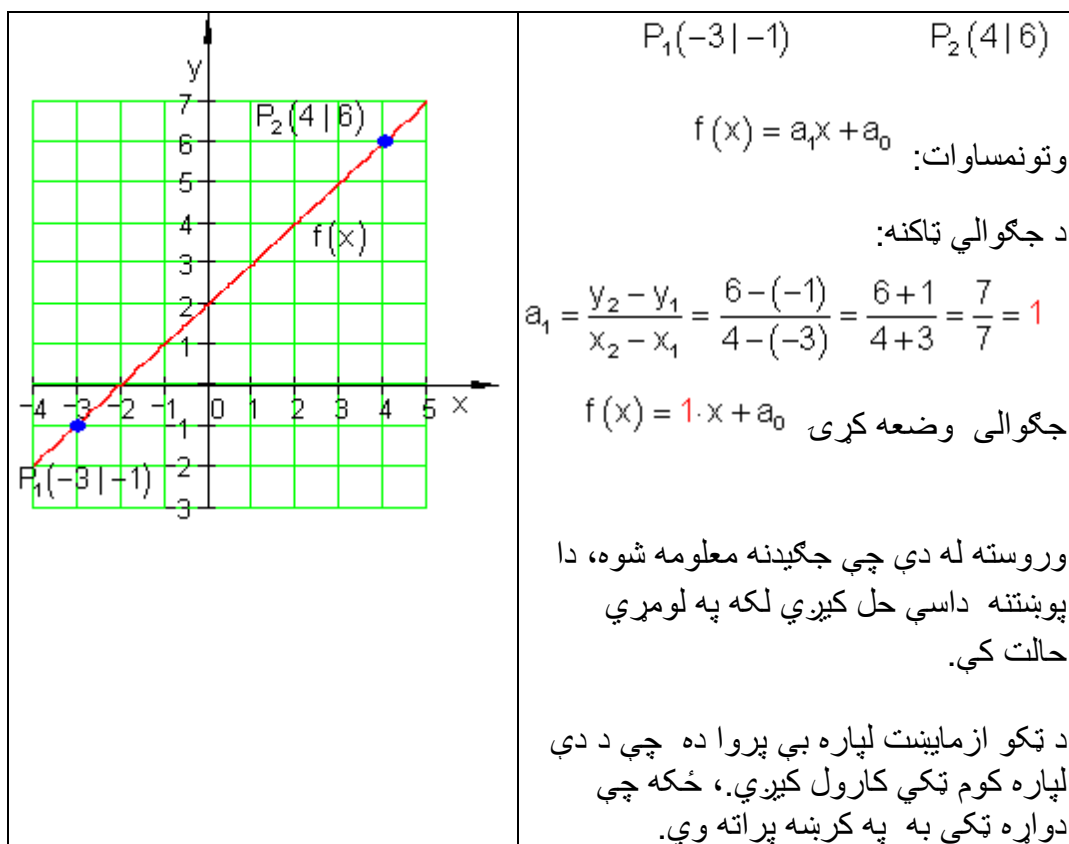
.

دویم حالت: کرښه له دوه ټکو تیریري

بیلگه:

دوه ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ او $P_2(x_2 | y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پیداکړو.



د ټکو آزمایشت د $P_2(4 | 6)$ یا P_1 لپاره

$$P_2(4 | 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلگه:

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو (گرمۍ کچونې) لپاره مختلفې دد
حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالاCelsiuskala او د فارنهایت سکالا
Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزې اړیکې موجود دي.

100 °C برابری دي د 212 °F سره . 0 °C برابر دی په 32 °F سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته °C په °F اړول کیږي.

خپلواکه متحوله x په °C او بلواکه یا تابع متحوله y = f(x) په °F .

جگوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 | 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په °C کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلگې په ډول:

$$x = 20^\circ\text{C} : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20^\circ\text{C} \triangleq 68^\circ\text{F}$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شي:

دوه ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ او $P_2(x_2 | y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده: $f(x) = a_1x + a_0$.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0 \quad \text{جگوالی:}$$

$$P_1(x_x | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښیزو مساواتو یو ټولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; x_1 \neq x_2$$

چیرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کارونې لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

بیلگه:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \quad \text{په} \quad P_1(2|-1); P_2(-3|2)$$

کې ځای په ځای کړی

$$f(x) = \frac{2 - (-1)}{-3 - 2}(x - 2) + (-1) = \frac{2+1}{-5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5} - \frac{5}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

تمرین:

د $^{\circ}\text{F}$ په $^{\circ}\text{C}$ باندې شمیرني لپاره یو تابع مساوات ولیکي

2.2.3. تمرین: د تابع مساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د a_1 جگوالی لري او د P له ټکي تیریري.

د $f(x)$ تابع مساوات معلوم کړی او د محورونو قاطع ټکي یا غوڅټکي او گراف انځور کړی

اول - $P(2 | -2)$ $a_1 = \frac{1}{2}$ دویم - $P(-1 | 3)$ $a_1 = \frac{3}{4}$

دریم - $P(3 | -1)$ $a_1 = 2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2} \mid 4\right)$ $a_1 = \frac{4}{5}$

یوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تیریري.

د $f(x)$ تابع مساوات پیدا کړی او د محور قاطع ټکي او گراف رسم کړی.

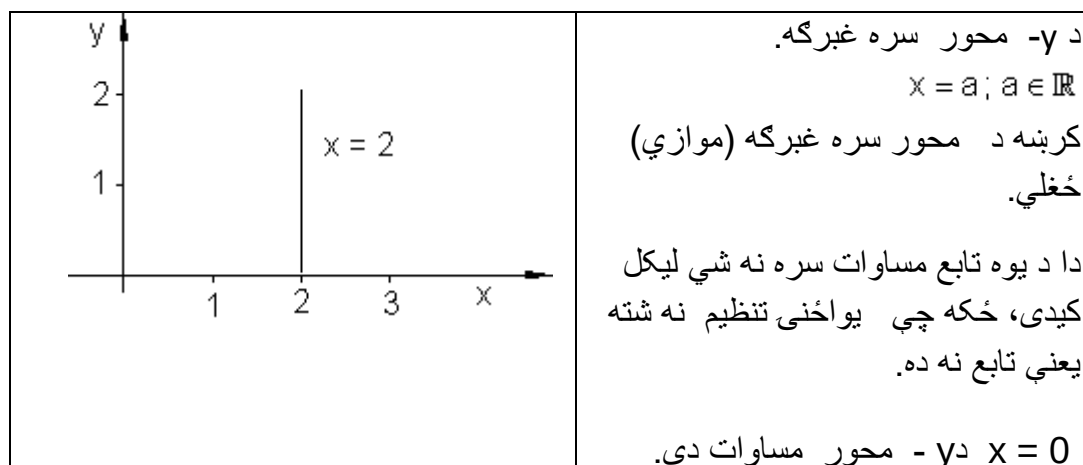
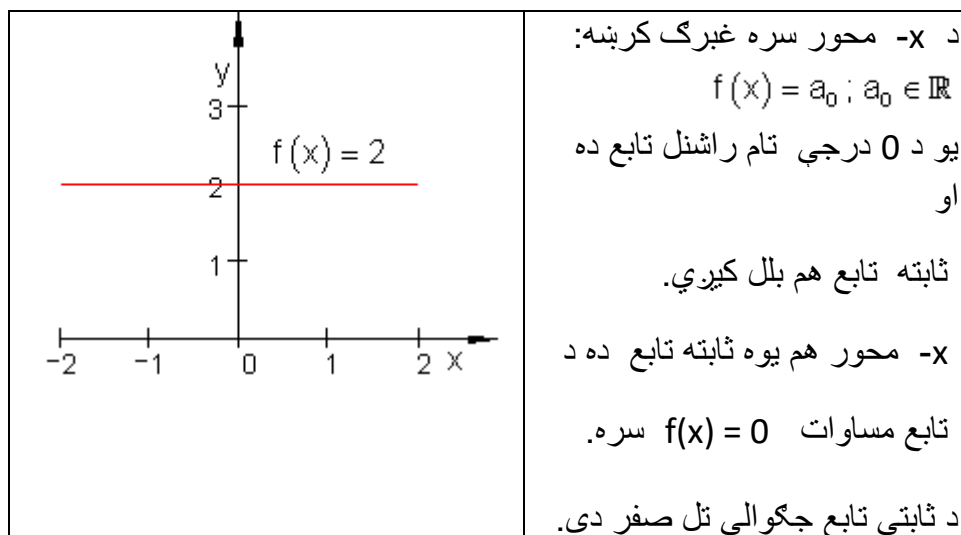
پنځم - $P_2(5 | 4)$ $P_1(2 | 1)$ شپږم - $P_2(2 | 3)$ $P_1(-3 | -2)$

اوم - $P_2(4 | -1)$ $P_1(-2 | 3)$ اتم - $P_2(3 | 1)$ $P_1(-4 | -1)$

$$P_1(-4 | -2) \quad P_2\left(\frac{7}{2} | 4\right) \quad \text{لسم -} \quad P_1\left(-3 | \frac{9}{2}\right) \quad P_2(4 | -1) \quad \text{نهم -}$$



. د کرښبر ابروتو ځانگړی حالت:



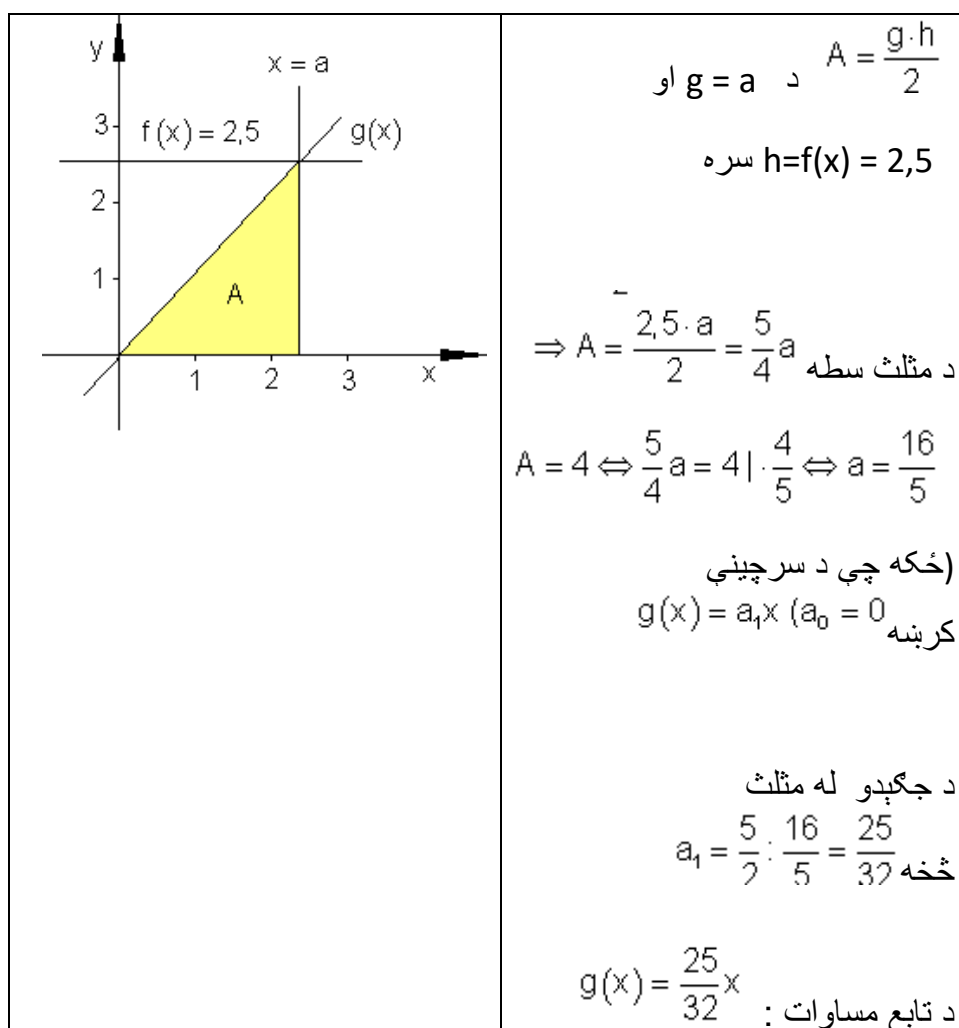
بیلگه:

یو $f(x) = 2,5$ ور کړ شوی او y -محور سره موازي د a واټن د $a > 0$ سره.

یوه سرچینیزه کرښه g د $P(a | f(x))$ ټکي څخه تیریري.

دا x - محور او د y -محور سره غبرگي کرښې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکي چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونه FE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د $g(x)$ تابع مساوات څنگه دي؟



تمرین: د $^{\circ}\text{F}$ بدلون شمیرنه په $^{\circ}\text{C}$ لپاره د تابع مساوات ولیکي

حل:

د $^{\circ}\text{C}$ اړونه یا بدلون په $^{\circ}\text{F}$ د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په $^{\circ}\text{F}$ مستقلة یا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په $^{\circ}\text{C}$ بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212^{\circ}\text{F} \triangleq 100^{\circ}\text{C} \Rightarrow P_1(212|100) \quad \text{او} \quad 32^{\circ}\text{F} \triangleq 0^{\circ}\text{C} \Rightarrow P_1(32|0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه اړیکه پرته ده، نو ټکي P_1 او P_2 په یوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده: $f(x) = a_1x + a_0$.

دلته ضریبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0 \quad \text{جگوالی:}$$

ټکي ازمایښت د $P_1(32|0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9} \cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{9} + a_0 = 0 \mid -\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x - 32)$$

د $^{\circ}\text{F}$ اړونې په $^{\circ}\text{C}$ لپاره باور لري.

$$^{\circ}\text{F in } ^{\circ}\text{C gilt } f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

x په ^0F او y په ^0C .



پوښتنې:

کرنيزې توابع  

لومړۍ: د g کرښو مساوات وټاکي

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې خځلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په $x=2$ او $y=6$ کې غوڅوي (قطع کوي)

ټ- g له $P(-6;1)$ تیرېږي او له h سره غبرگ دی د $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ مساوات سره

ث- g جگوالی $a_1 = -4,5$ لري او له $P(1;1,5)$ څخه تیرېږي.

ج- g جگوالی $a_1 = 2$ لري او له $P(1;1,5)$ څخه تیرېږي

چ- g د x محور په $x=3$ کې غوڅوي او د h کرښه د $h(x) = 4x - 2$ سره په $x = -1$ کې غوڅوي.

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی $P(3;-2)$ تیرېږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع $f(x)$ سره پیدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تیرېږي او تابع مساوات وټاکي.

الف- $P_1(-3|5); P_2(1|2,5)$ ب- $P_1(1,5|3); P_2(3|2,5)$

پ- $P_1(k|3); P_2(2k|-1)$ ت- $P_1(4|0); P_2(-1|-\sqrt{2})$

ټ- $P_1(2\sqrt{k}|\sqrt{2k}); P_2(\sqrt{k}|0)$ ث- $P_1(1|0); P_2(-1|k+1)$

څلورم: د $f(x)$ کرښیز تابع مساوات وټاکي. که معلوم وي:

الف- کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جگړښي سره له $P(4;-1)$ څخه تیرېږي.

ب- کرښه له ټکو $P_1(-5|-3)$ او $P_2(0|3)$ څخه تیرېږي.

پ- کرښه له $P(4,5;2,7)$ ټکي تیرېږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت- کرښه له $P(-1,5;0)$ تیرېږي او د $h(x) = 2x+2$ سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کرښه g وکارۍ او کرښیز مساوات وټاکي.

الف- $P(3|-1) \in g$ او g د y محور سره غبرګه؛ (موازي) ځغلي.

ب- $P(3,5|2,5) \in g$ او g د x محور سره موازي ځغلي.

پ- g له $P(-5;1)$ تیرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1|\frac{3}{2}\right)$ تیرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2|-3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}|-5\right)$ تیرېږي، موازي ځغلي.

پوښتنې

کرنیز مساوات VI

لومړۍ -

د لاندې کرنیزو توابعو گرافونه وکارئ او د ارزښت سټ یا - ډېرې W وټاکئ

الف - $f(x) = -2x + 2; D = \{x | -3 \leq x \leq 5\}$ $\mathbb{R}$ ب -

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}; D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}$ $\mathbb{R}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3; D = \{x | -2 \leq x \leq 6\}$ $\mathbb{R}$ ت -

 $f(x) = 3x - 6; D = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ $\mathbb{R}$

دویم -

ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د $f(x)$ تابع مساوات پیدا کړئ او گراف یې وکارئ

الف - $P_1(3 | 4); P_2(7 | -1); D = \{x | 0 \leq x \leq 7\}$ $\mathbb{R}$

ب - $P_1(-8 | 1); P_2(2 | -3); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}$ $\mathbb{R}$

پ - $P_1(4 | 3); P_2(-7 | -1); D = \{x | -7 \leq x \leq 4\}$ $\mathbb{R}$

ت - $P_1(-4 | -4); P_2(4 | 2); D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}$ $\mathbb{R}$

دریم -

د لاندې مساواتو حلست یا حلډېری پیدا کړی. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

$$\text{الف. } x - 5 = 9 \quad \text{ب. } x + 8 = 25 \quad \text{پ. } x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{ت. } x - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$\text{ټ. } 88 = 4x - 16 \quad \text{ث. } a + bx = 3b + a \quad \text{ج. } 8 - (x + 5) = 2$$

$$\text{چ. } 9 + (5 - x) = 6 \quad \text{ح. } (x - 6)(x + 3) = (x - 5)(x - 2) \quad \text{خ. } -$$

$$(x + 3)(x + 7) = (x + 2)(x + 9) \quad \text{ځ. } \frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x$$

$$\text{ځ. } \frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = a \quad \text{ډ. } \frac{ax}{b} - \frac{b}{ac} = \frac{a}{bc} - \frac{bx}{a} \quad \text{د. } \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x}$$

$$\text{ذ. } 23a - \{5ax - [9ax + (12a - 6ax)] - (3a - 8ax)\} - 15a = 5ax - 7a$$

څلورم: د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړی.

$$\text{الف. } f(x) = 2x - 7 \quad \text{ب. } f(x) = -2x + 6 \quad \text{پ. } f(x) = 3x - 3$$

$$\text{ت. } f(x) = 2x + \frac{2}{3} \quad \text{ټ. } f(x) = \frac{3}{4}x + 2 \quad \text{ث. } f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$$

$$\text{ج. } f(x) = 3,5x + \frac{1}{2} \quad \text{چ. } f(x) = -2,5x + 2\frac{1}{2} \quad \text{ح. } f(x) = 1\frac{3}{4}x - 3\frac{2}{3}$$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له ا تر IV لپاره وټاکي:

$$P_1(3 | 4); P_2(7 | -1); D = \{x | -2 \leq x \leq 8\}_{\mathbb{R} |}$$

$$P_1(-8 | 1); P_2(2 | -3); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R} ||}$$

$$P_1(4 | 3); P_2(-7 | -1); D = \{x | -8 \leq x \leq 4\} \quad \text{III.}$$

$$P_1(4 | 2); P_2(-4 | -4); D = \{x | -4 \leq x \leq 4\} \quad \text{IV.}$$

الف - د جگیدني ضریب m.

ب - د کرښي تابع مساوات

پ - د y محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښت پېری W .

ث - په D کې د تابع گراف

شپږم: لاندې مساوات سیستمونه حل کړی:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 15y - 4x = -50 & \text{I} \quad 4x + 5y = 32 \quad \text{I} \quad 5y - 3x = 1 \\ \text{II} & x = y + 7 & \text{II} \quad y = 5x - 11 \quad \text{II} \quad x = y + 1 \end{array} \quad \text{الف -}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x + y = a + b & \text{I} \quad 2y = 2x - 40 \quad \text{I} \quad 3x = y + 15 \\ \text{II} & x - y = a - b & \text{II} \quad 3x = 10 - 2y \quad \text{II} \quad 2y - 10 = 2x \end{array} \quad \text{ت -}$$



پوښتنې

کرښیز مساوات IX

لومړۍ کرښه g له ټکو $P_1(4;-3,5)$ او $P_2(2,5;-1)$ تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}|\frac{25}{3}\right)$ تیرېږي.

گرښي یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرته دي؟

دویم: $f(x)$ کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه (ارزښتورشو) و ټاکي، که صدق ولري:

الف. $f(-3) = 6; f(2) = -8; x \in [-3; 3]$ ب. $f(0) = 20; f(12) = 32; x > 0$

دریم:

د $f(x)$ کرښیزې تابع ګراف په LE 3 اوږدوالی واحد کین لور

ته خوزیږي. د راکښل شوي کرښي د $f^*(x)$ مساوات څنګه دي؟

$$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$$

څلورم: د $f(x)$ او $g(x)$ توابع ورګر شوي دي. د کوم ارزښت لپاره $f(x) > g(x)$ صدق کوي؟

$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

پنځم: یوه $g(x)$ کرښه ورګر شوې.. دا د یوې کرښي $h(x)$ له خوا قطع کیږي. د $h(x)$ مساوات وټاکي، که باور ولري: $g(x) = -3x + 2$

الف. قاطع یا غوڅی x محور سره. ب. قاطع (غوڅی) په $x = -5$ کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1 = -0,125$ جګوالي سره و	$h(x) = -1,5(x - 2)$
داسی کښول کیږي. چې کرښه h د مساوات	

	سره د x په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړی او د راکښل شوي کرښې گراف و کاری.

اوم: یوه $f(x)$ کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ گراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکيڅي ترتیب کړی.



الف- د P او Q کواورديناټ وټاکي، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- د u د کوم ارزښت لپاره P د x محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u | f(u))$ په 1 څلورۍ يا ربع کې پروت دی. $Q, R(0 | 0)$ او P د یوه مثلث رأسونه (ککړتکي) جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکي. u (محیط) داسې وټاکي، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: د g کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکي، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 | 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 | 4)$

پ- $g(x) = -1,5kx; P(1 | 0)$

نهم: کرښه g له ټکو P_1 او P_2 تیرېږي. د h کرښې ته یې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکي معلوم کړی.

$P_1(-1 | 1,5); P_2(-2 | -2,5)$ $h: -x - 6 - 4y = 0$

لسم: و ښایي: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$g: y - \sqrt{2}x = 1$ $h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$

$g(x) = -3x + 2$

یولسم:

$A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$	د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رأس ټکي دي. د $k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړگودیز) دی؟ (بنی رأس په C پروت دی)

پوښتي

کرنیز توابع **XI**

لومړۍ-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرنه له تابع $f_1(x)$ سره د دویمې کرنې د تابع $f_2(x)$ سره غوڅیږي. وټاکي:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅتکی S .

ب – د دواړو کرنو غوڅتکي د y محور سره.

پ – د دواړو کرنو غوڅتکي د x محور سره.

ت – د دواړو توابعو گراف په D کې.

دویم –

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4; D = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کړېنه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $(y_s \mid 3)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کړېنې څخه غوڅیږي.

وټاکي:

الف-د S پوره کواوردينات

ب-تابع $f_2(x)$.

پ-د دواړو کړېنو غوڅتکي د کواوردينات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو گراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; D = \{x \mid -7 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

کړېنه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $(y_s \mid -4)$ کې کې له کړېنې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروت محور په -7 کې غوڅوي، غوڅیږي.

وټاکي:

الف – د S پوره کواوردينات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کړېنو غوڅتکي د کواوردينات د محورونو سره.

ت – د دواړو توابعو گراف په D کې..

څلورم –

د یوه درېکودي یا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د درېکودي د اړخونو تابع وټاکي. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړی.

الف -

$$[P_1 P_2] \triangleq f_1; [P_2 P_3] \triangleq f_2; [P_1 P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1 \left(-6 \mid \frac{3}{2} \right); P_2 \left(-2 \mid -\frac{3}{2} \right); P_3 (-4 \mid 3)$$

ب -

$$[P_1 P_2] \triangleq f_1; [P_2 P_3] \triangleq f_2; [P_1 P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1 \left(6 \mid \frac{3}{2} \right); P_2 \left(2 \mid -\frac{3}{2} \right); P_3 (4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3; P_2(-2 \mid -3); D = \{x \mid -6 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کړېنه د تابع $f_1(x)$ سره د دویمې کړنې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې له ټکي P_2 تیرېږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوڅیږي.

وټاکي:

الف - د $f_2(x)$ جگوالی m_2 .ب- تابع $f_2(x)$.پ - د دواړو کړنو غوڅتکی S .

ت - د دواړو کړنو محور غوڅتکي.

ټ - د دواړو کړنو گراف په D کې.

پوښتنې

کرنیز توابع XII

لومړۍ -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3; P_2(2 | -3); D = \{x | 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرنیزه د تابع $f_1(x)$ سره له یوې دویمې کرنیزې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تیریري په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوڅیري.

وټاکي.

لومړۍ:

الف - د $f_2(x)$ جگوالی m_2 .ب - تابع $f_2(x)$.پ - د دواړو کرنیزو غوڅټکي S .

ت - د دواړو کرنیزو د محور غوڅټکي.

ټ - د دواړو کرنیزو گراف په D کې.

دویم -

د کرنیزې تابع $f_2(x)$ وټاکي، چې پروت محور په P_{x2} کې غوڅوي او له کرنیزې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوڅیري. د واړو کرنیزو غوڅټکي وشمیرئ او د دواړو کرنیزو گراف په D کې رسم کړئ.

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3; P_{x2}(4 | 0) \quad f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6; P_{x2}(-6 | 0)$$

$$S(3 | y_s); D = \{x | -1 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}} \quad S\left(x_s \mid \frac{3}{2}\right); D = \{x | -6 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$$

الف - ډریم -

$$P_1(-5 | 5); P_2(-1 | -1); S(x_s | 2); D = \{x | -6 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرنیزه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 تیریري او په ټکي S کې ولاړکونجیز له کرنیزې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوڅیري.

وټاکي:

الف- د $f_1(x)$ جگوالی m_1 .ب - تابع $f_1(x)$.پ - د S پوره کواوردینات.ت - د $f_2(x)$ جگوالی m_2 .ټ - تابع $f_2(x)$.ث - د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ گرافونه
خلورم -

$$P_1(5|5); P_2(1|-1); S(3|y_s); D=\{x|0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 څخه تیرېږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه
له کربني د تابع $f_2(x)$ سره غوڅیږي.

وټاکي:

الف - د $f_1(x)$ جگوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.پ - د S پوره کواوردیناتونه . ت - د $f_2(x)$ جگوالی m_2 .ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ گرافونه.

پنځم -

$$f_2(x) = 3x - 3; S\left(\frac{3}{2} \mid \frac{3}{2}\right); D=\{x|0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ گراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له گراف څخه ولاړکونجیزه
غوڅیږي.

وټاکي:

الف - تابع $f_1(x)$.

ب - د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ - د دواړو توابعو گراف په D کې.



پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړۍ -

$$f_2(x) = \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}; S\left(2 \mid \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ گراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له گراف څخه ولاړکونجيز (قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکي:

الف: تابع $f_1(x)$.

ب - د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ - د دواړو توابعو گرافونه په D کې.

$$g: y - \sqrt{2}x = 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{2}x + 1$$

$$h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0 \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + 3$$

د اور توگوناليتي شرايط: $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ q.e.d}$$

دویم:

د دوه کرښو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د یوې دریمې کرښې جگوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې گراف یې د نورو دواړو کرښو غوڅټکي څخه تیر شي. د دریواړو کرښو محور غوڅټکي وټاکئ او د دریواړو توابعو گراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2; m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب -

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}; m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

دریم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تیري او له یوې دویمې کرښې چې له ټکي P_2 تیريږي په ټکي S کې غوڅیږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محور غوڅټکي او په D کې یې گراف وکارئ.

$$P_1\left(-2 \mid \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \mid \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \mid \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \mid \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرگه یوه دویمه کربنه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کربني له یوې دریمې کربنې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریری په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه (قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع $f_1(x)$

پ - تابع $f_2(x)$ ت - د دریواړو توابعو گراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2} \mid -\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D = \{x \mid -8 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث (ولاړکونجیز درې ګودي) څخه، چې ولاړ کونج (قایم الزاویه) یې په C کې پرته ده، ټکي A او B ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اورډینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعي [BC] تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواورډیناتونه

ت په D کې گرافونه.



پوښتنې

کربنیزې توابع XIV

لومړۍ: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x|-8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

له يوه قايمالزاويه مثلث، چې قايمه زاويه يې په B پرته ده، ټکي A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ) [BC] د اوږدینات محور (ولامحور) په 3 کې قطع کوي.

دا وټاکي:

الف-

$[AB] = f_1; [BC] = f_2; [AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواوډینات يا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ- په D کې گراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x|-4 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$

د يوه مثلث ټکي A او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع د y محور په 12- کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکي:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع [AB]. قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو گرافونه په ټکي $(5 | 3)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکارئ، چې گراف په ټکي S عمود خځلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه گرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x | -10 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواورینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محور سره.

ت - د دواړو توابعو گراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ گراف د y محور په $3 | 0$ کې رسم کړئ. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم (پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅنکی (نقاط تقاطع) وټاکئ او گراف یې وکارئ.

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -10 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}} \quad \text{الف -}$$

$$f_1(x) = -2x + 2; f_2(x) = 3x - 6; D = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ب -}$$

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4; f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}; D = \{x \mid -1 \leq x \leq 7\}_{\mathbb{R}} \quad \text{پ -}$$

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}; D = \{x \mid -8 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ت -}$$

n -مه درجه ټول مات- يا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لښکون

يو تابع $f(x)$

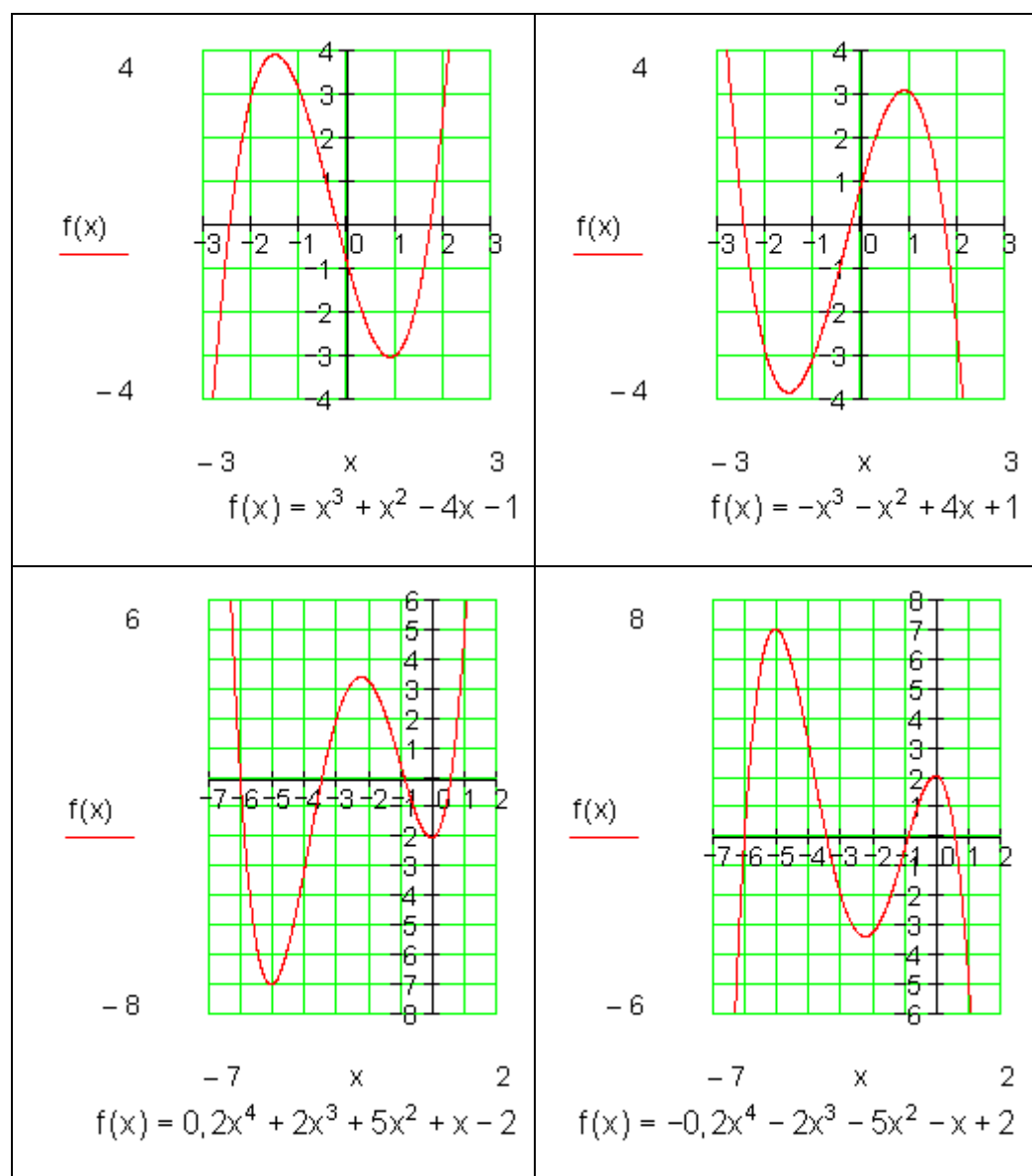
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

سره **n** -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عدونه $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_2; a_1; a_0$ ضريبيونه بلل کيږي.

ټول راشنل يا هوښيار توابع د توان توابعو يوځای ايښوولو له لارې لاس ته راځي.

بيلگي:



د گراف تلنه

جمله:

د ټول راشنل تابع گراف تلنه د خورا جگ توان زیاته ووني (د جمعي غړي) سره ټاکل کيږي.

n ناچوره (طاق)	n جوړه	
تله له I و III ته.	تله له II و I ته.	$a_n > 0$
تله له II و IV ته.	تله له III و IV ته.	$a_n < 0$

بیلگه: د المای پښتو: ناچوره (طاق) جوړه (جفت) ناچوره

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \quad n = 3 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{III} - \text{I}}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \quad n = 4 \text{ (gerade)} \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{III} - \text{IV}}}$$

$$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \quad n = 5 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{II} - \text{IV}}}$$



سیومتری

گومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جگعدونو توانونو څخه یوځای شوي وي، محور سیومتریکی دي او توابع چې فقط د ناچوره (طاقو) جگعدونو توانونو څخه یوځای شوي وي، ټکی سیومتریکی دي.

جمله

د یوه ټولراشنل تابع گراف ټیم هلته محور سیومتریکی دی، که تابع مساوات فقط جوړه جگعدونه ولري.

د یوه ټولراشنل تابع گراف ټیک هلته ټکیسیومتریکی دی، که تابع مساوات فقط ناچوره (طاق) جگعدونه ولري.

بیلگه:

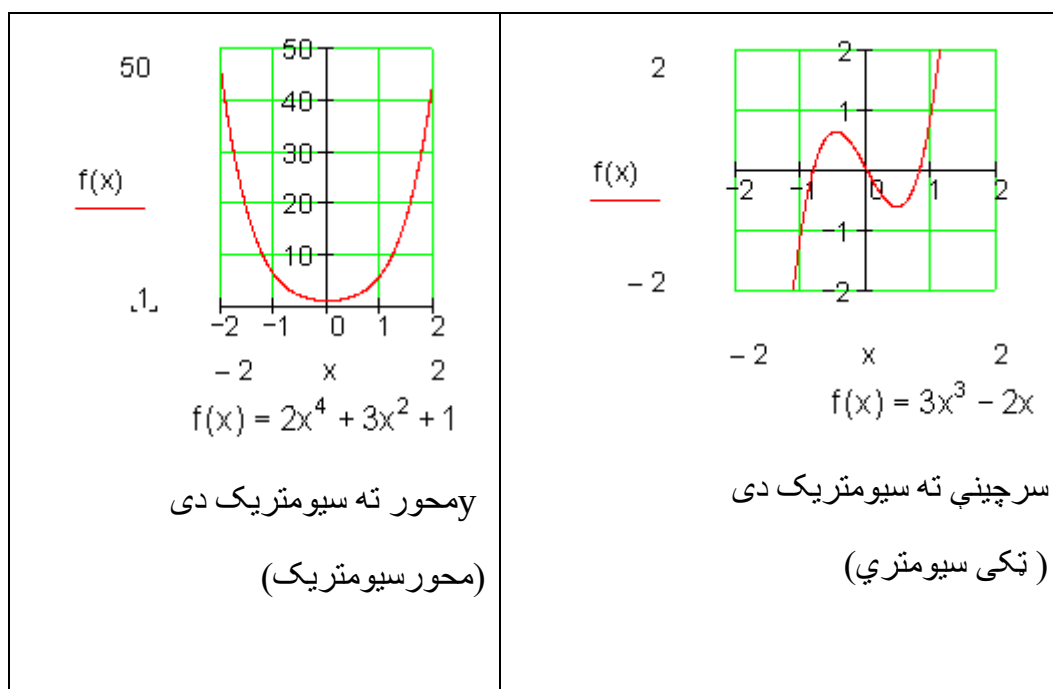
$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

ټکی سیومتريک



تمرینونه:

د ټول هوښیارو تابعو خوښونه.

د لاندې تابعو په سیمټري، تلنه او د صفر ځایونو تعداد یا گڼون باندې ویناوې وکړئ.

لومړۍ - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$$f(x) = -x^5 - x^3 + x \quad \text{څلورم} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2 \quad \text{ریم}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x \quad \text{شپږم} \quad f(x) = x^6 - x^4 + 1 \quad \text{پنځم}$$

$$f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2 \quad \text{اتم} \quad f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x \quad \text{اوم}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x \quad \text{لسم} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1 \quad \text{نهم}$$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتريک

که د یوه ټکي سیومتريک تابع گراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچیني ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلي پاتي کيږي.

بیلگه:

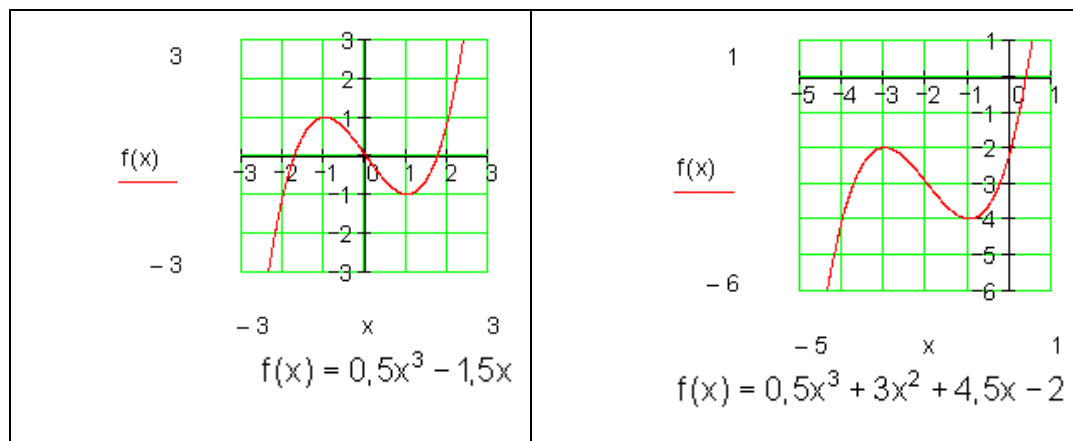
د $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$ تابع گراف ټکی سیومتريک دی، یعنې سرچیني ته سیومتريک.

دا گراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کین لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښل شوي گراف تابع مساوات دي:

$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتريک دی.



کوارډیناټیستم د گراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتو تڼیځ خورلی.

د حالت بیلگه: باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع گراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتريک دی.

تر مخ راوړنه.

چمتوالی:

د ټکو کوارډیناټ لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$x_1' = x_0' - \Delta x$$

$$y_1' = y_0' - \Delta y$$

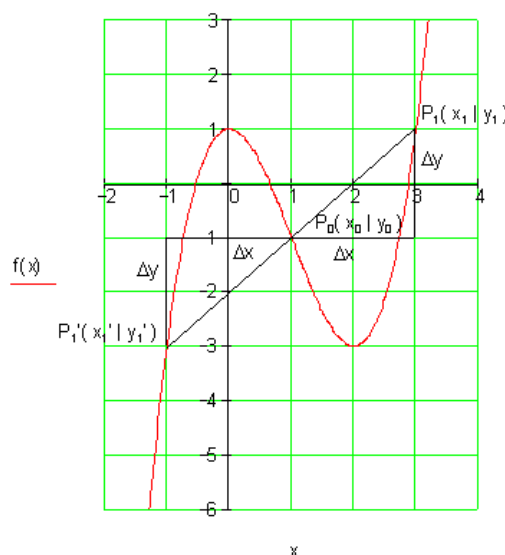
$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کوارډیناټونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$

$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



د دې قاعدې يا لار سره تل کېدې شي په P_0 و P_1 ته يوه هندارونه يا انعکاسونه کې اړونده هندارونه P_1' وټاکل شي.	

بيلگه:

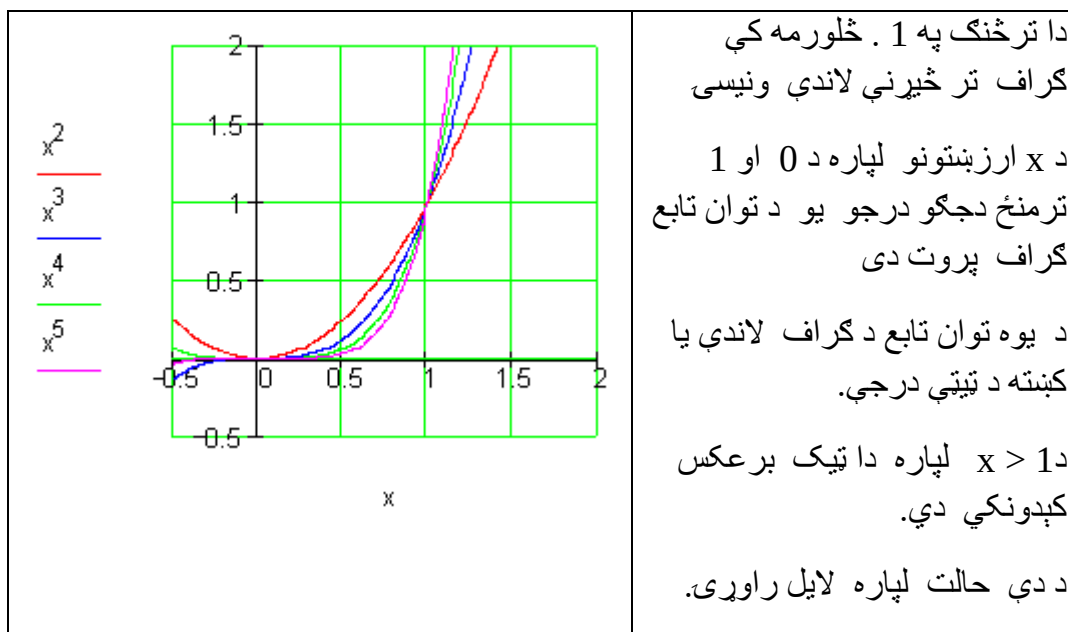
که هندارونه په گراف نه وي پرته ، نو گراف و P_0 ته ټکي سيومتریک نه دی.

پوښتنې

ټول مات- يا راشنل توابع I

د توان توابعو خويونه

لومړۍ –



دویم - د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او تړلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوي تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم -

د څلورمې درجې توان تابع کراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې تړلی دې په دوه ضریبه و غزول شي.

الف - د راکښل شوي کراف لپاره تابع مساوات ورکړی

ب - وښایی، چې کراف نه محور - او نه ټکی سیومتریکی دی.

څلورم -

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په کراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړی.

الف - $P(-3 | -27)$ ب - $P(-2 | 16)$ پ - $P(0,5 | 0,25)$ ت -

$$P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$$

ب - $P(0,1 | 0,0001)$ ث - $P(-1 | 1)$ ج - $P(-2 | 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم -

د لاندې توان توابعو سیومتری او د کراف تلنه وټاکي او د هر یوه ارزښتدېری (ارزشتست) او درجه ورکړي.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ - $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل یې درجه ورکړی.

الف - $f(x) = (x-2)^2 - 4x^3$ ب - $f(x) = 4(x+5)^3 + (x-2)(x+2)$

پ - $f(x) = 2x^3 - (x-1)^2$ ت - $f(x) = (x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 - x^2 + 4)$ ث - $f(x) = \frac{x-5}{8}(x-2) + \frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راپړی:

د یوه ناجوره (طاق) درجې ټولراشنل تابع گراف د x محور لږ تر لږه په یوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه حوره یا جفتوي؟

پوښتنې

II ټول راشنل توابع

سیومتری او تلنه

لومړۍ – و څېړئ، چې ایا $f(x)$ یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع گراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n$ ارزښتونه ورکړی.

الف - $f(x) = 2$ - ب - $f(x) = 4x$ - پ - $f(x) = 2^x$ - ت - $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{8}$

ب - $f(x) = \sqrt{3}x^4$ - ت - $f(x) = \frac{1}{x}$ - ج - $f(x) = \sqrt{x}$ - چ - $f(x) = (x - \sqrt{3})^2$

ح - $f(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ - خ - $f(x) = 16x^3 - 2x^2 + 5x^2 - 4$

دویم - د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتريک او کوم یې ټکی سیومتريک دي؟

الف - $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ - ب - $f(x) = x^3 + 3x + 1$ - پ - $f(x) = (x - 2)(x + 2)$

ت - $f(x) = x^6 - 6x^2 + \sqrt{3}$ - ب - $f(x) = (x - 2)^3(x - 1)$ - ت - $f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$

ج - $f(x) = (2x^4 + 2x^2 + 5)x$ - چ - $f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x + 1)(x - 1)$

ح - $f(x) = 1 - 3x^2 + x^6$

دریم - دح متحوله داسی وټاکي، چي د تابع گراف ټکی سیومتريک او همداسي محور سیومتريک شي.

الف - $f(x) = x^3 + 4x + c$ - ب - $f(x) = (x - c)(x + 4)$ - پ - $f(x) = x^5 + x^c$

ت - $f(x) = x^3(x^2 - cx)$ - ب - $f(x) = c + x^3$ - ت - $f(x) = 4x^3 + x^2 + cx^2 + 5x$

څلورم : د لاندې توابعو د گراف تلنه معلومه کړی.

الف - $f(x) = 2x^5 - 6x^3$ - ب - $f(x) = -4x^4 + 3$

پ - $f(x) = 2x - 5$ - ت - $f(x) = -2x^2$

$$\text{پ.} \quad f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 4x - 5 \quad \text{ث.} \quad f(x) = -6x + 3$$

$$\text{ج.} \quad f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 6x^5 \quad \text{چ.} \quad f(x) = -2x^5 + 6x^3$$

پنځم - د لاندې توابعو د گراف تلنه او سیومتری ورکړی.

$$\text{الف.} \quad f(x) = \sqrt{3}x^2 - \sqrt{5}x^4 - 2 \quad \text{ب.} \quad f(x) = x\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(8 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$\text{پ.} \quad f(x) = 5x^6 - 4x^4 + 5 \quad \text{ت.} \quad f(x) = x^5 + x^3 - 2x$$

$$\text{ث.} \quad f(x) = 5 \quad \text{ث.} \quad f(x) = (x^2 - 25)(x^2 + 6x + 9)$$

$$\text{ج.} \quad f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 \quad \text{چ.} \quad f(x) = (4x^2 - 4)(x^3 + 8x^2 + 16x)(x^3 + 27)$$

$$\text{ح.} \quad f(x) = -3 \quad \text{خ.} \quad f(x) = -x^5 + x^3 - 2$$

شپږم : د لاندې تابعو صفر ځيونه وشمېری:

$$\text{الف.} \quad f(x) = (x-4)(x-2)(x+1) \quad \text{ب.} \quad f(x) = (x-4)(-x+2)$$

$$\text{پ.} \quad f(x) = x(x+5)^2 \quad \text{ت.} \quad f(x) = 3(x-4)^3(x+2)$$

$$\text{ث.} \quad f(x) = (2x-4)(x+3)x^3 \quad \text{ث.} \quad f(x) = x^3 - 2x^2$$



د ټولراشنل توابعو محور غوڅتکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراشنل توابعو محور غوڅتکي (د محور د تقاطع نقطی)

د y محور سره غوڅتکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بیلگه: د یا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3 \\ \Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

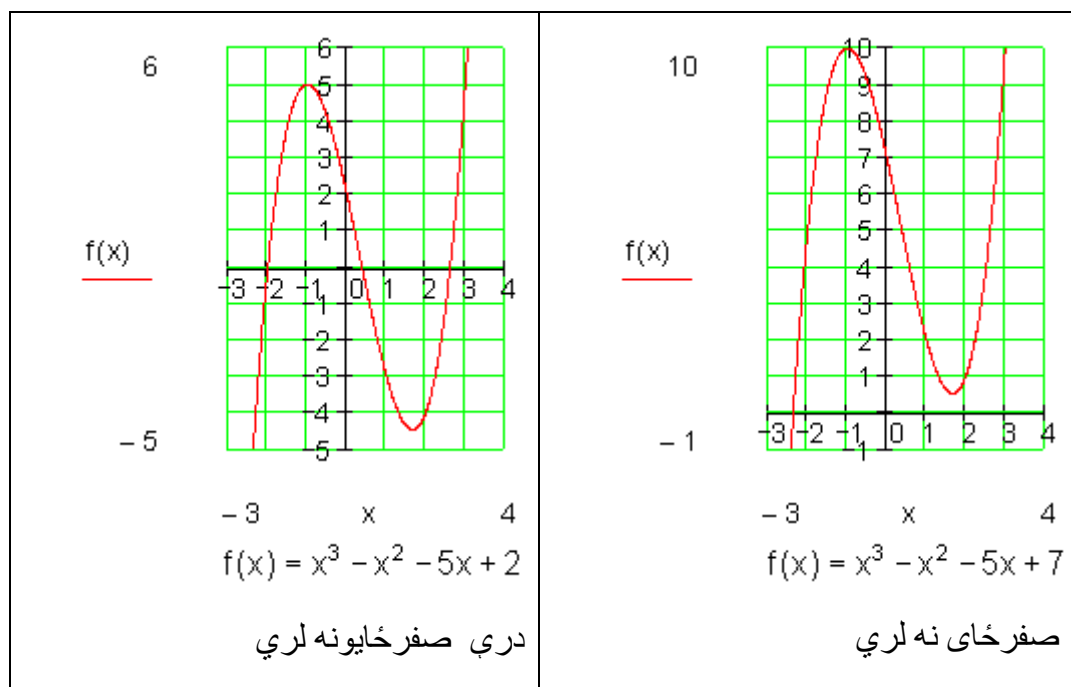
د P_y د y کواوردینات تل د ضریبونو a_0 سره کټمټ ده.

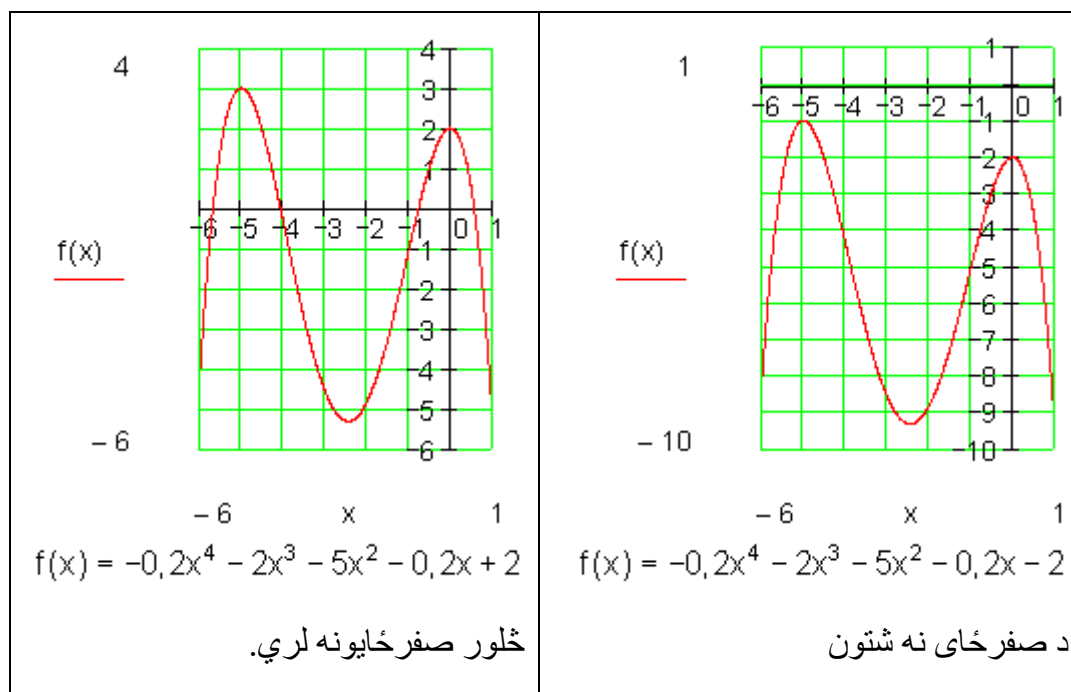
دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کیدی شي.

د x -محور سره غوڅتکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای: شرط: $f(x) = 0$

د مربع تابع (د دویمې درجې ټولراشنتابع) څخه بوهیرو، چې دا دوه، یو، یا هیڅ صفرځایونه لرو دی شي. دا د جگ درجو ټول راشنتابع سره څنگه دی؟

بیلگه:





جمله:

يو د n -مې درجې ټولراشمنل تابع زيات له زياته n صفرځايونه لري.

که n جوړه وي، نو دا لږترلږه يو صفرځای لري.

د صفرځايونو شميرني لار (تگلار)

د فکتوري کونو يا صريبونو تگلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده يا ويينه صفر دی.

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفر خایونه :

$$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(0|0); P_{x2}(2|0); P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

یادونه: په دې معنا چې د یوې اووښتونې یا متحولې لپاره بله متحوله خا په خای کوو.

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \text{بی مربعیز (بی څلوریز) مساوات}$$

بدلون: $x^2 = z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څنډ- یا بیرته گرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = z_2 = 4 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$|x| = \sqrt{4}$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوښتنې

محور غوڅتکي او د ټولراښل یا ماتتوابعو گرافونه II

لومړی: د درېمې درجې یو ټولېوېنېار یا -راشنل تابع سرچینې سره سیومتريک ده، که
الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تیره شي.

ب- که کرښه $g(x)=3x$ سره پارابول په $P(0|0)$ کې لمس کړي.
دویم: تابع $f(x)$ د پیژندورشو یا تعریف ساحې $D = \mathbb{R}$ سره ورکړ شوی ده. تابع $f(x)$ په سیومتري وڅیړی، صفرځایونه وشمیرئ او گراف وکارئ.

$$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{48}x^3 - x \quad \text{ت} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 \quad \text{پ}$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x(3-x)(x+1) \quad \text{ث} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad \text{ټ}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \quad \text{چ} \quad f(x) = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2 \quad \text{ج}$$

دریم: تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$; $D = \mathbb{R}$ ورکړ شوی ده.

$f(x)$ x	الف - وښایئ: د $f(x)$ صفرځای د $(-1; -2)$ ترمنځ پروت دی مدلل کړئ، چې $f(x)$ ټیک یو صفرځای لري، دا گراف باید څنگه راکښل شي، چې له هغې سره دا ټیک دوه صفرځایونه ولري؟ ب- کرښه $x = u$ د $f(x)$ گراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي. د لاندې درېکودې یا مثلث OPQ سطحه د $u = 2$ لپاره وښایئ. د مثلث د (خوندي) سطحې ترم u په واکوالي کې د $u > 0$ لپاره ورکړئ. د $g(x) = 3 \cdot f(x)$ څومره صفرځایونه د لري؟ دلایل یې راوړئ.

څلورم: تابع $f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4$ ورکړ شوی ده. وښایئ: $x=0,4$ یو صفرځای دی.

پسې نور صفرځایونه وشمیرئ.

$$f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4; D = \mathbb{R}$$

پنځم: د اووښتونې یا متحولې c په واکوالي کې د صفرځایونو تعداد وټاکئ.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx; D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2; q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$

$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0,5$$

$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0,5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$

$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0,5$$

$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0; x_3 = -2$$

اړیکې:

د $c > 0,5$ لپاره $f(x)$ ټیک یو صفرځای لري: $P_x(0 | 0)$

د $c = 0,5$ یا د $c = 0$ لپاره $f(x)$ ټیک دوه صفرځایونه لري.

د $c < 0,5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ ټیک درې صفرځایونه لري.

پوښتنې

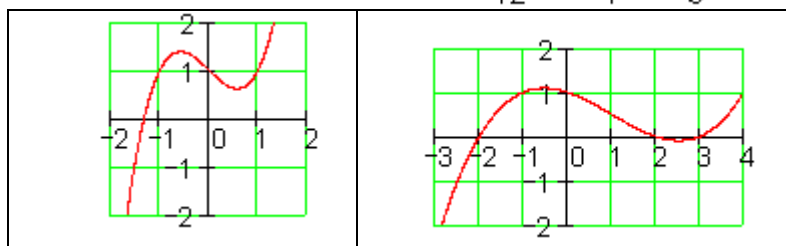
د ټول راشنل توابعو محور غوڅتکي او ګرافونه **III**

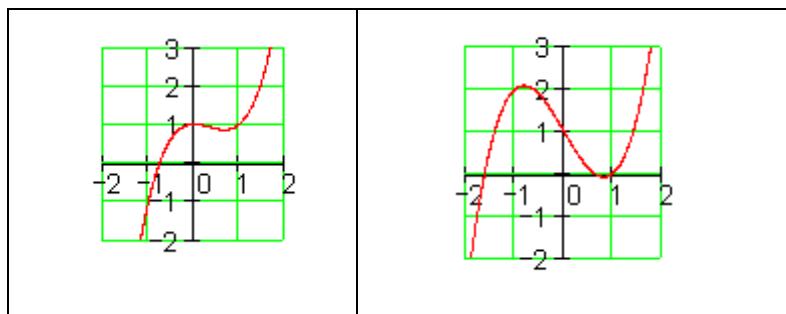
تابع په یوه ګراف تنظیميږي.

لومړی: هر د یوه تابع ترم سره تنظیم کړی او خپله پرېکړه په دلیل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$





دويم: هر هغه څوك چې د لايسنس اخستلو لپاره ځان چمتو كوي، بايد وپوهيږي، چې د يوه بريک وړونكي موټر تمكيدنې واټن په يوه وچ پاخه سرک(چې طبعاً بايد هوار وي) د عكسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځای جوړه ده. د لاندې د موتي قانون يا لار(د درې گوتو) څخه كيدى شي د چټكتيا v په km/h د عكسالعمل لار r او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

$$r = \frac{v}{10} \cdot 3 \quad \text{، د عكس العمل لار:} \quad b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2} \quad \text{همداسې} \quad b = \left(\frac{v}{10}\right)^2 \quad \text{د بريک لار:}$$

د المان د 3.3.04 رايڼ اخبار د اول له جولای 1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بريکلار شميرل کيږي. (په افغانستن کې به داڅنگه وي؟ نه پوهيږم)
الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکى، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملاړ شميرل کيدى شي.

ب – د لاندې تلل شوى چټکتيا $v = 0, 10, 20, 30, \dots, 50 \text{ km/h}$ لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځای s سره يوځای کړى
پ – له دې سره د $(60 \dots 100 \text{ km/h})$ لپاره د s يو ځونور ارزښتونه وشميرى او د دې تابع گراف وکارى.

ت – د نوي بريک نيولو قانون(الماني) سره دا تراوسه شميرل شوي ارزښتونه وشميرى او دا په همغه کواوډينات سيستم کې وکارى او ټوله نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړى.

$$f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5; D = \mathbb{R} \quad \text{درېم: د انابعورکړ شوي:}$$

$$f(x) = 0,5(2x - 1)(x^2 - 3) \quad \text{الف- وښايى:}$$

ب – گراف د شوونتيا تر ټولې ټيک وکارى.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره $f(x) > 0$ باور لري؟

شننیزه ځمکچپو هڼه يا تحليلي هندسه:

تحليلي هندسه (وکتور هندسه هم) د هندسي يوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټوليزه توگه له کرښيز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمکچيزې پوښتنکونې سوچه شميرنيز حل کړی شو، بې له دې چې ليدوني يې مرستې ته راوبولي يعنې چې شکل څنگه برېښي يا دی.

۱۶ - د سطحي شننيزه (تحليلي) هندسه

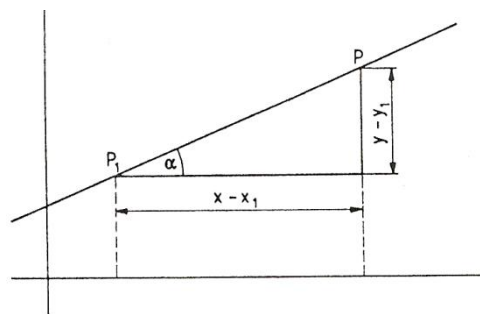
په دې برخه کې يوڅو د تحليلي (شننيزې يا سپرنيزې) ځمکچپو هڼې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څيړل کيږي. د تحليلي هندسي بنسټيزه تگلار به څرگنده (وېنول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرگندونو کې د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دي، چې يوه کرښه يواځنې کره تعين کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونو يا - مساواتو مختلفې ښې شته دي. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور (سمت) له لارې ټاکل کيږي شي. (ټکی او د ټکي ميلان معلوم دی).

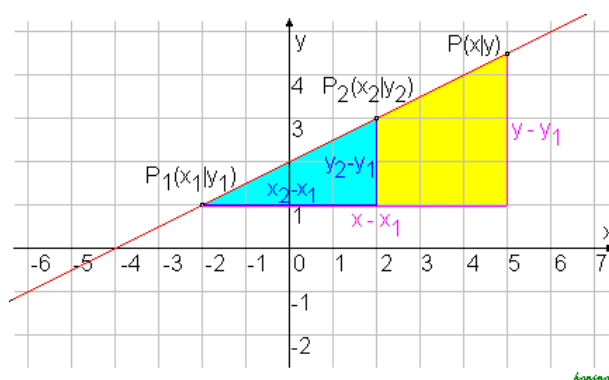
دلته دې $P_1(x_1, y_1)$ دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ دې د جگيدو کونج وي، چې د کرښې

لور ټاکي (څ ۱۶ . ۱) او $P(x, y)$ په کرښه يو اووښتونى (واريابل) ټکی دی.



نو د کرښی د میلان $\tan \alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څیره دې وکتل شي) (لاندې څیره هم په همدې موخه کښل شوې ده)



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \dots \dots \dots (16.1)$$

پورته د کرښی ټکی لور برابر و

که د y په محور P_1 وټاکل شي د کواورډیناتو $x_1 = 0, y_1 = b$ سره، نو له (۱۶. ۱)
(سملاسي په لاس راځي: $y - b = m(x - 0)$) په همدې ډول ($\Leftrightarrow$)

$$y = mx + b \quad (16.2)$$

دا پورته برابر و د کرښمسواتونو نور مال فورم (ښه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ وي، د $x_1 = x_2$ سره، (څیره ش ۱۶ . ۲) د جگړونکي یا تنجنت $\tan \alpha = m$ لپاره داسی دي:

$$m = (y - y_1) / (x - x_1)$$

او

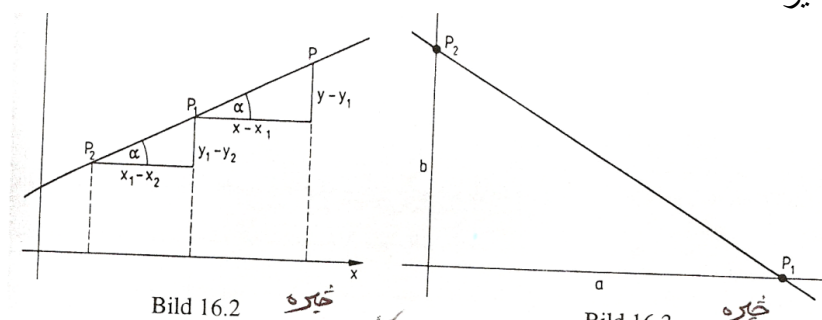
$$m = (y_2 - y_1) / (x_1 - x_2) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \dots \dots \dots (16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیز برابر وړ

څیره ده



که د x - محور باندې د P_1 ټکی، د کواردینات $x_1 = a$, $y_1 = 0$ سره وټاکو او ټکی P_2 د y - محور باندې د کواردینات $x_1 = 0$, $y_2 = b$ سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

$$(y - 0) / (x - a) = (b - 0) / (0 - a)$$

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a + y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابر وړ

څلور پورتنی کرښ مساوات ټول په x او y کی لاینیز دي. د مساوات عمومي فورم (یا ټولیزه بڼه) داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \quad (16.5)$$

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه (عمومي فورم)
 دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
 $y = y_0 \ (A = 0, B = 0)$
 او $x = x_0 \ (A = 0, B = 0)$ چې د x - محور او په همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي
 دي، په داسې حال کې چې تراوسه دومه لاندې نه ځیرل شوي
 بیلګه ۱۶ . ۱ :

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چې له $P(-2, 3)$ ټکي تیريږي او د جګوالي
 کونج $\alpha = 30^\circ$ یی د $m = \tan \alpha \frac{1}{3} \sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسې لیکل
 کیږي $y - 3 = \frac{1}{3} \sqrt{3}(x + 2)$

او نورمال فورم یې په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3} \sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیز برابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو $P_1(3/2, -2)$ او $P_2(1, -4)$ کې د (۱۶ . ۳)
 سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

$$\text{له دې لاس ته راځي: } y+2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x-\frac{3}{2})$$

نو نورمال فورم $y=4x-8$ لرو (اته ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کړېنه د $y = -(3/2)x + 1$ برابرون سره د y - محور په $P_1(0,1)$ ټکي کې غوڅوي او جگوالی یی $2/3$ - دی، دا په دې مانا چې د x - ارزښت تغیریدل په یو د y - ارزښت په $2/3$ - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښې ټکی لاس ته راځي. د بیلگې په توګه $p_2(0+1, 1-(3/2)) = p_2(1, -1/2)$

(خپره ۱۶. ۴ لاندې کښل شوي)

بیلگه ۱۶. ۴ :

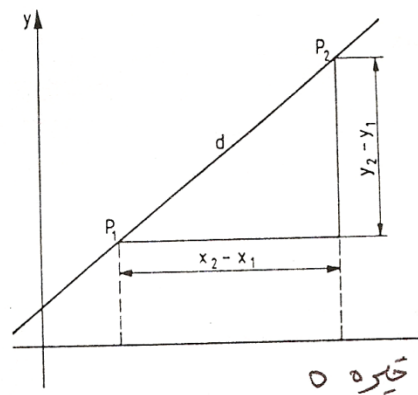
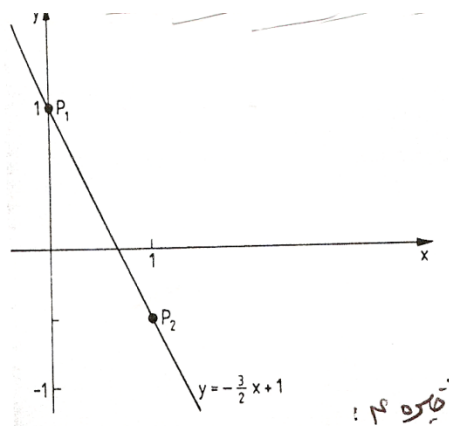
د کرښې د برابرونو عمومي فورم $x - 2y - 6 = 0$ څخه دغوځیدو فورم لاس ته راځي $x/6 + y/3 = 1$

کړېنه دکو او دینات محرونه په دې ټکو $P_1(6, 0)$, $P_2(0, -3)$ کې غوڅوي. په یوه کرښه د دوه ټکو $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ترمنځ فاصله (که د کرښې واټن P_1P_2 وي د پیتاګوراس (فیساغورس) له جملې (خپره ۱۶. ۵) داسې ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \dots \dots \dots (16, 6)$$

پورته د ټکو P_1 او P_2 ترمنځ واټن

خپري ۱۶. ۴ او ۵ -



بیلگه ۱۶. ۵ :

د درې ګوډي ABC د اړخونو اوږدوالی، چی کونجټکي یی دادي $A(3,1), B(-1,1), C(2,5)$ په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمټی) چی (یو د بلې سره) غیرګي نه وي ټیک یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواور دیناتو برابر ون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواور دیناتو، د دوه لاینیزو برابر ونونو سره چی دوه اوبښتوني یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابر ون سیستم چی د دوه کرښو د برابر ونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.

که ناپای ډیرې اوبیوني شته وي، نو په دې حالت کی برابر ون همغه یوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یو بل سره غیرګي ځلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د $g1: y = 3x - 2$ کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو

الف) $g2: -2x + y = 1$,

ب) $g3: 3x - y = 5$,

پ) $g4: -x + (1/3)y = -2/3$

سره څیړو

اوبیونه : د $g1$ برابر ونونو څیره داسی بدلیږي : $3x - y = 2$

الف) د برابر ونونو سیستم $3x - y = 2$ ، $-2x + y = 1$

ټیک یوه اوبیونه لري: $x1 = 3$, $y1 = 7$

ددې څخه څرګندیږي چی ټکی $(3, 7)$ د کرښو $g1$ او $g2$ غوڅټکی دی .

ب) د برابر ونونو سیستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابر ونونه یو بل ردوي په نه زغمي . د g_1 او g_2 کرښی یو د بل سره غبرگي دي

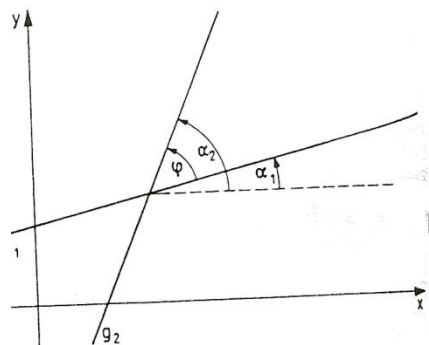
$$\begin{aligned} \text{پ) د برابر ونونو سیستم} \quad 3x - y &= 2 \\ -x + (1/3)y &= -2/3 \end{aligned}$$

نایای ډیرې اوبیوني یا حلونه لري. برابر ونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابر ون ترې لاس ته راځي .

g_1 او g_2 دوه کټ مټ برابر ونونه دي .
که د دوه کرښو

$$g_1 : y = m_1x + b_1 \quad g_2 : y = m_2x + b_2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جگید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر) جوړوو (څ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابر ونونو پوهیږو $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنسټیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan \phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) / (1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2)$$

د کوم څخه چی د $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}; \dots \dots \dots (16, 7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج ډیر

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېرې ۱۶ . ۶ کونج پخ او که تیره دی.

بیلگه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو $g_1: y = x - 1$ او $g_2: y = (7/4)x + 1$ غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255^\circ$$

د g_1 او g_2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745^\circ$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ - کرښی یو بل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180^\circ \vee \phi = 0^\circ \Leftrightarrow$$

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$$

ګورو چې د $m_2 - m_1 = 0$ لپاره باور لري، نو $m_2 = m_1$

(دلته باور لري : $m_1 \cdot m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90^\circ \Rightarrow \tan \phi = (m - m) / (1 + m \cdot m) = \infty$$

دا حالت د $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$ لپاره منځ ته راځي،

یعنی د $m_2 = -1/m_1$ لپاره $(m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$

په کرښه $(m_1 = 0)$ $y = y_0$ باندې کرښه $(m_2 = \infty)$ $x = x_0$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m_2 = m_1 \quad (16, 8)$$

د اورتوګونالیتی Orthogonalität (یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m_2 = -1 / m_1 \quad (16.9)$$

بیلگه ۱۶. ۸: د کرښی g_2 برابرې دې وټاکل شي چې له ټکي $P(2, -1)$ تیریري، او له کرښی $g_1: y = -2x + 1$ سره الف (غبرگه او ب) اورتوگونال (نیغه) ځغلي اوبونه:

الف) د g_2 کرښی میلان (جگوالی $m_2 = m_1 = -2$) دی. پام (۱۶. ۱) ته د کرښی g_2 برابرې لپاره باور لري: $y + 1 = -2(x - 2)$ همداسی $y = -2x + 3$
 ب) د g_2 کرښی میلان یا جگیدنه ده $m_2 = -1/m_1 = 1/2$ د (۱۶. ۱) سره سم د g_2 کرښی برابرې دی: $y + 1 = (1/2)(x - 2) \Leftrightarrow y = (1/2)x - 2$

بیلگه ۱۶. ۹:

د کرښی برابرې ټاکل کیري چې د $P_1(1/3, -1/6)$ ټکی تیریري او په کرښه چې له ټکو $P_2(-1, 1)$ او $P_3(-2, -1)$ تیریري، ولاره وي. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$
 ځواب: کرښه چې له P_2, P_3 ټکو تیریري، و (۱۶. ۳) ته په پام لاندې برابرې لري $(y - 1)/(x + 1) = (-1 - 1)/(-2 + 1) = 2 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

په دې کرښی د (عمودي) ولارې کرښی میلان یا جگوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښی برابرې د m_2 میلان سره د (۱۶. ۱) له مخی دي:
 $y + (1/6) = -(1/2)(x - 173) \Leftrightarrow y = -(1/2)x$

بیلگه ۱۶. ۱۰:

د $g_1: 2x - y - 1 = 0$ او $g_2: 3x + 2y = 5$ کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي $P(6, 13)$ څومره دی او د کرښی برابرې څنګه دی چې د کواورډینات له سرچینی تیریري او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاره کرښه وي؟
 ځواب: د غوڅټکي کواورډینات د لاندې برابرې وټاکو سیستم څخه لاس ته راځي
 $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] 2x - y = 1$
 $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] 3x + 2y = 5 \left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$
 یعنی: $xS = 1, yS = 1 \left[\begin{smallmatrix} P & T & P \\ SEP & SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$
 د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶. ۶) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6) + (1-13)^2} = 13$$

[P]
[SEP]

د (۳ . ۱۶) له مخی د کرښی برابر ونونه چی له S او P تیریږي دي

$$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$$

(جگوالی: [P]
[SEP]) $m = 12 / 5$

له S او P ټکو تیریږونکی کرښه باندې د ولاری کرښی میلان

$$m_2 = -1/m = -5/12$$

د (0,0) P0 څخه تیریږونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې

برابرون لري

$$y-0=-(5/12)(x-0) \Leftrightarrow y=-(5/12)x$$

[P]
[SEP]
[P]
[SEP]
[P]
[SEP]

١٦ . ٧ تمرینونه

١ - د هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیرېږي او د x -محور سره کونج جوړوي

- a) $P_1(2, -3)$, $= 30^\circ$, b) $P_1(-3, 2)$ $= 45^\circ$
 c) $P_1(-1, -4)$, $= 120^\circ$, d) $P_1(4, 4)$, $= 0^\circ$
 e) $P_1(0, 0)$, $= 150^\circ$, f) $P_1(1, -1)$, $= 90^\circ$

٢ - ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیرېږي

- a) $P_1(0, 0)$, $P_2(3, 3)$, b) $P_1(-3, 3)$, $P_2(0, 0)$,
 c) $P_1(1, 4)$, $P_2(-3, -4)$, d) $P_1(1, 2)$, $P_2(-1, 1)$,
 e) $P_1(0, 1)$, $P_2(-1, -1)$, f) $P_1(1, -1)$, $P_2(4, -2)$!

٣ - د محورونو غوڅي (لنډ: محور غوڅي) a, b د کرښې مساوات په نورمال فورم وټاکئ او همداسې د غوڅتکو واټن d د محور غوڅتکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

- a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b = 3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

٤ - یو دریګودی دا لاندې ګوډټکی لري $A(-4, -1)$, $B(2, -2)$, $C(1, 3)$. د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګودیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګودی اړخونه څومره اوږده دي؟

٥ - د لاندې کرښمساواتو نورمال فورم او برختوب څنګه دی یا فورم څنګه دی؟

- a) $3x - 5y + 15 = 0$, b) $4x - 3y - 18 = 0$
 c) $-4x + 2y - 10 = 0$, d) $-3x - 4y + 15 = 0$?

٦ - د کرښې $y = -(12/5)x + 2$ پروتخاي د کرښو

- a) $y + 2, 4x - 6 = 0$, b) $28x + 10y = 0$, c) $8x + 5y = 2$,
 d) $5y + 12x - 10 = 0$. e) $y + (12/5)x = 3$, f) $6x + 2, 5y = 5$

سره وڅیړئ.

۷- د لاندې کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکل:

a) $2x + 3y = 7$

b) $y = (1/2)x + 1$

c) $y - x = 7$

$3x - y = 5$,

$y = -2x + 6$,

$y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$

e) $6x - 2y + 10 = 0$

f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$,

$y = 3x + 6$,

$y = -3x + 5$!

۸- کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅتکي $P(0,5)$ څخه تیریري؟

۹- د لاندې گوځ $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ سره د دریگوځي دننه کونجونه

څومره لوي دي؟ (پیلونه: دریگونجی وکاری) یا (دریگوځی)

۱۰- د ولاپریتو کرښې یا زوړندې مساوات له ټکي $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنگه دي؟

۱۱- د ولاپریتو مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنگه د

۱۲- د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرگلي کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریري، څنگه دي؟

۱۶. ۲. گردی $\overline{P_{SEP}}$ (دایره)

دایره (گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری (سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځای ټکي، داسې په نامه منځنۍ څخه، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په r یی په نڅېنه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (گردی) k د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری (سټ) ده، د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \{X \in E \mid |\overline{MX}| = r\}$$

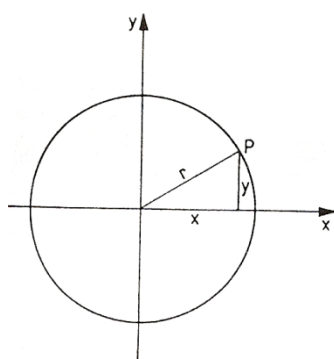
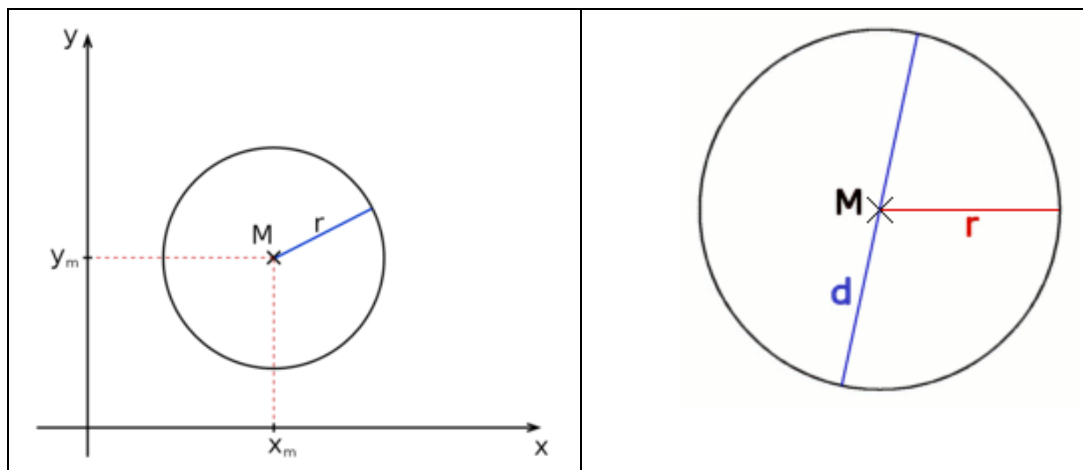


Bild 16.7

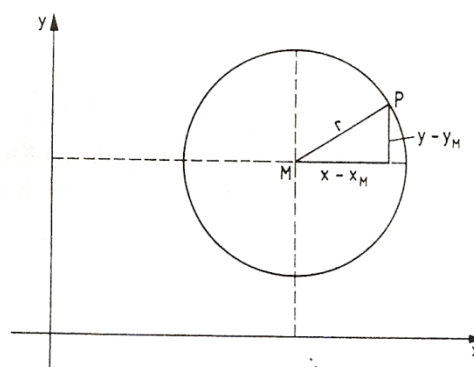


Bild 16.8

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې گردی د منځکې $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره ګې) د لاندې برابرې له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د گردی ټوليز برابرې

دا برابرې د پېژند او پېتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې گردی ځانګړې حالت او د کواورديناټسسيستم سره، چې منځکې يې د کواورديناټ
په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د گردی منځ ټکی د کواورديناټسسيستم (خیره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د
(پېوتاګوراس د جملې له مخې) د گردې په خوښه ټکي $P(x, y)$ لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16.10) \quad \left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$$

د گردۍ منځنۍ برابرې چې د گردې منځنۍ $M(0,0)$ او وړانګه r ده.

که د گردې منځنۍ M کواور دینات (x_M, y_M) ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د گردۍ د خوښۍ ټکي $P(x)$ لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردې د منځنۍ برابرې وي د منځنۍ $M(x_M, y_M)$ او وړانګې r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وي شمیر او برابرې په $A=0$ فاکتور ځلوو (بی له دې چې د گردې برابرې تغیر ومومي)، پس پیژندل کېږي چې د گردې برابرې د څلورۍ یا مربع غړي په x او y کې په فاکتور A لاینیز برابرې په x او y او ثابت غړي (چې یوه غړي په څیرې سره یوځای شوي) لاس ته راوړو. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

نو دا لاندې ټولیز (عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad A \neq 0 \quad (16.12)$$

د گردې برابرې (مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه •
که د گردې برابرې په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړ شوي او که منځنۍ او وړانګه یې څرګنده کوو یا معلومو نو د گردې برابرې د منځنۍ فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي. دوه څیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱:

د گردې برابرې دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 0 \quad \left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه ویشل شي $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

(د څلورۍ پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$ $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

دبېنوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ [SEP] [P] گردی منځکی $M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

بېلګه ۱۶ . ۱۲ :

د گردی برابرې ولېکی چې منځکی یی $M(2;0)$ وي او په کوم چی ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟

اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2 \quad [SEP] [P]$$

د P ټکی د گردی برابرې پوره کوي $r^2 = (6-2)^2 + (4-3)^2 = 16$ [SEP] [P] له دې څخه د گردی وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د گردی برابرې:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64 \quad [SEP] [P]$$

گردی او کرېنه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرو دی شي

۱ - کرېنه گردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده (سیکانتي) [SEP] [P]

۲ - کرېنه گردی په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی) [SEP] [P]

۳ - کرېنه ټوله له گردی دباندې پرته ده (له گردی تیریدونکی، لنډ : تیریدونی)

د غوڅټکي (د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د گردی او کرېنی برابرې پوره کړي سړی د کرېنی برابرې د گردی په برابرېونو کی ردي y یا x پسې حل یا اوبی شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرې) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو ریل ډبل اوبی او یا هېڅ ریل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي. [SEP] [P] [SEP] [P]

بېلګه ۱۶ . ۱۳ :

کوم پروت ځایونه گردی k چې راکړ شوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرېنی و یو بل ته لري؟

$$g1: 2x+y=4, g2: 2x+y=12, g3: -x+y/2=3 \quad [SEP] [P]$$

اوبی: $y=-2x+4$ که د گردی برابرې کی ځاي کړو نو دا برابرې لاس ته راځي

$$(x-2)^2 + (-2x+4-3)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x-8x=0 \quad [SEP] [P]$$

ددې ځوابونو $x=0, y=4$ او $x=8/5, y=4/5$ سره به $g1$ د گردی غوڅوونی یا (Sekant سکانت) وي [SEP] [P]

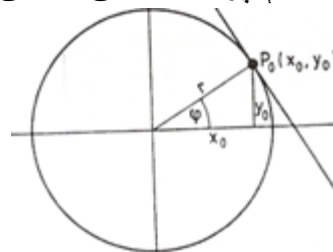
که $g2: y=-2x+12$ د گردی مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$$(x-2)^2 + (-2x+12-3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0 \quad [SEP] [P]$$

د ډبل اوبوني $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره g_2 یو تنجنت دی $\vec{P}_{SEP}$.
که $g_3: y=2x+6$ د گردۍ مساوات کی ځای کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$$\vec{P}_{SEP}(x-2)^2+(2x+6-3)^2=<=> 5x^2+x+8=0\vec{P}_{SEP}$$

دا څلوری برابرېون یا مربع مساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g_3 له گردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په گردې ($x^2+y^2=r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرېون په ټکی $P_0(x_0, y_0)\vec{P}_{SEP}$ مساوات $x_0^2+y_0^2=r^2>0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د $\vec{P}_{SEP}$ تنجنت

$$m = 1 / \tan \phi = -x_0 / y_0 ; \dots \dots \dots (16,13)$$

د تنجنت یا جګې برابرېون د (۱۶ . ۹) سره سم لاس ته راځي:

$$y-y_0=-(x_0/y_0)(x-x_0) <=> xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2\vec{P}_{SEP}$$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \quad (16.14)$$

د گردۍ تنجنت بارېرون په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ په گردې

$$x^2+y^2 = r^2$$

(حالتونه) $P_0(\pm r, 0)$ او $P_0(0, \pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځای (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

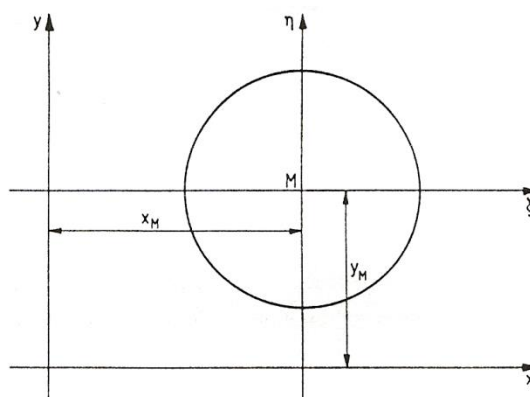


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x_0, y_0 یا x_M, y_M او x_0, y_0 یا x_M, y_M گورو نو کټمټ دي

بیلگه ۱۶ . ۱۴ :

د دوه تنجنتو برابرېون له ټکي $P_1(-12,4)$ په گردې $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداوو. دا باید د گردې برابرېون پوره کړي .
ټکی P_1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرېون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري

$$x_0^2 + y_0^2 = 16 \quad \text{او} \quad x_0 + 4y_0 = 16$$

که دا لاینیز برابرېون د y_0 په لور حل شي ، نو په x_0 کې یو څلوری برابرېون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2 + (3x_0 + 4)^2 = 16$$

همداسې $5x_0^2 + 12x_0 = 0$ د اوبیونو $x_0 = 0$, $x_0 = -12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_0 = 4 , y_0 = -16/5$$

د تنجنت مساوات په گردې، په ټکو $P_1(0,4)$ او $P_2(-12/5, 16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$$0.x + 4y = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

او

$$(-12/5)x - (16/5)y = 16 \Leftrightarrow y = (-3/4)x - 5$$

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځتکي $M(x_M, y_M)$ سره د η, ζ -کواردینات سیستم کی ، چی سرچینه یی په M کی پرته ده) (؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري $\zeta^2 + \eta^2 = r^2$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0, \eta_0)$ کی داسی دي
 $\zeta\zeta_0 + \eta\eta_0 = r^2; \dots\dots\dots (16,15)$

د η, ζ -کواردیناتسیستم د y, x - کواردیناتسیستم یو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواردیناتسیستم کی لاندې اړیکې پرتی دي .
 $\zeta = x - x_M, \eta = y - y_M; \dots\dots\dots (16,16)$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو (۱۵ . ۱۶) کی ځای په ځای شي، نو سړی بیا دا y, x -کواردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي (کشوي یا راکاري) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M) + (y-y_M)(y_0-y_M) = r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کی د گردۍ تنجنت برابرو په گردۍ

$$(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 = r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵ :

په گردۍ چی برابرن $x^2 + y^2 + 16x + 4y + 43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x_1 = x_2 = -5$

سره تنجنت وکارو (کیردو). برابرون یی څنگه دي؟

اوبیونه : د گردۍ برابرون د منځتکي فورم (۱۶ . ۱۱) باندې بدلیري:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 4y + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

اوله دې لاس ته راځي

$$x_M = -8, y_M = 2, r = 5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گردییرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دي لپاره څلوري برابرې يا مربع مساواتو د دواړو اوږدیناتو

مماس ټکي لاس ته راځي: $y_1 = 6$, $y_2 = -2$ او $(17, 16)$ سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ - د لاندې مساواتو سره گړدیمنځټکی او وړانگه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 9y = 0$,

d) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$, f) $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16$!

۱۴ - د لاندې گړدو مساوات وڅیړئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2, -1)$ لری او له سرچینې تیریري

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3, 0)$, $P_2(5, -3)$, $P_3(-3, -1)$ یی د غاړو ټی

پ) چې وړانگه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1, 11)$, $P_2(5, 5)$ څخه تیریري.

ت) له ټکی $P_1(3, 4)$ تیریري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4, 3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2, 2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7, -2)$ او همداسې له ټکي $P_2(11, 2)$ څخه تیریري.

۱۵ - کوم پروتخایونه گړدی k چې فرمول لري $x^2 + y^2 - 8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
 d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ - کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ گردی. $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ - د تنجنت مساوات څنگه دی

الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چی په گردی $x^2 + y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چی په گردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ - د هغو گردیو منځتکي پیدا کړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې
 کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکي $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ - په گردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکي، کوم چې د
 کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ خغلي؟

فنکشنونه (بلواک يا تابع)

د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوگرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي، کله د بلواک او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځمور په دې کار کی بلل شوي چې موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلدیو، ځما په اند یا فکر که دا موږ څیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وگور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځمور د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریښې واریابلی (اووښتوني یا متحولې) R ریښې ارزښته فنکشن (لنډ: فنکشن یا څیړونه) د ریښو ګڼونو ډیری باندې، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیړونه ده. D ډیژند ډیری نومیري.

د ټولو ارزښتونو ډیری چې y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا تعریف ډیری په دننه کی وځلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي. د دې قانونمندی f له مخی هر $M \in x$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیری یا څیره کیږي:

$$y = f(x) \quad \left[\begin{smallmatrix} \overline{p} \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$$

اوس نو x خپلواک واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیری او y بلواک واریابل یا اووښتونی بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موږ وایو، د څیړوني هغه څیره شوی خوا ده. (د فنکشن یا څیړوني او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځور ډولونو په منځ کی سری توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کی له ماتماتیکی یا شمیریز سومبولیک څخه تیرید شو، خو، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی

په لاندې کی به ورسره بلد شو. $\left[\begin{smallmatrix} \overline{p} & \overline{p} \\ \text{SEP} & \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$

بیله ۱۵. ۱: هر ریښ ګڼ د هماغه ریښ ګڼ په نیم وړ زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا څیره کیدل. $\left[\begin{smallmatrix} \overline{p} & \overline{p} \\ \text{SEP} & \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$

بیله ۱۵. ۲: هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو ریښو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو، زیاتون، کمون، ځل، ویش، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵. ۴)

$$\left[\begin{smallmatrix} \overline{p} & \overline{p} \\ \text{SEP} & \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$$

بیله ۱۵. ۱ ته: $y = (x/2) + 1, D = R, W = R \quad \left[\begin{smallmatrix} \overline{p} \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$

بیله ۱۵. ۲ ته: $y = |x|$ لپاره $x < 0$ د $y = x^2$ لپاره $x > 0$ د $D = R, W = [0, \infty)$ دلته

پام دي وي چي په داسي حالت كي له كين و بني لور ته يا گډوډ لوستل كيږي يعنې داسي لولو: x د y مطلقه ارزښت سره مساوي دي ، كه چيري x له 0 كوچني وي.

داسي ليكنو ته دي گران لوستونكي پوره پام ولري او فكر كوم چي له اشتباه سره به نه مخامخ كيږي. تحليلي (شننيزه) انځورونه اكسپليځيت (واضح) روښانه و څرگند (explizit) نوميري، كه د فنكشن برابر و ، لكه په بيلگو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چي په يوه د y په لور حلكيدونكي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$

كه چيري داسي نه وي نو د تحليلي - يا شننيزي انځوروني شكل $F(x,y)=0$ دي او فنكشن ايمپليځيت (ورسره ځاي شوي يا ورسره تړلي implizit) بلل كيږي يا نوميري . د بيلگي په توگه به $2y-x-1=0, D=R, W=R$ فنكشن د بيلگي ۱۵ . ۱ يو ايمپليځيت انځورونه وي. ديوه فنكشن نه هره ايمپليځيت شننيزه بڼه (ايمپليځيت تحليلي فورم) كيډي شي په اكسپليځيت شننيزه يا سپرنيزه بڼه (تحليلي فورم) واړول شي. د بيلگي په توگه $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$:

كه $x + y + y^5 - 1 = 0$ وي، نو دا د y په لور اكسپليځيت حل كيدونكي نه دي. $\left[\begin{smallmatrix} P & T & P \\ SEP & SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$ د يو فنكشن تحليلي يا شننيزي انځوروني ځانگړې بڼه پارامترې څرگندونه ده. دلته تنظيم د يوه مرستندوي اووښتوني يا واريابلي t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښوديري. هر پارامتر (له يوه پارامتر ساحي څخه) $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په يو ارزښتجوړي x, y تنظيميري. $\left[\begin{smallmatrix} P & T & P \\ SEP & SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$

بيلگه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t, y=t+1; -\infty < t < \infty$ به يوه پارامترې انځورونه وي $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ او $x = t, y = t/2 + 1$ به يوه بله پارامترې انځورونه وي. زيات وخت فنكشنونه د جدول په څير وركول كيږي

بيلگي ۱۵ . ۱ ته:

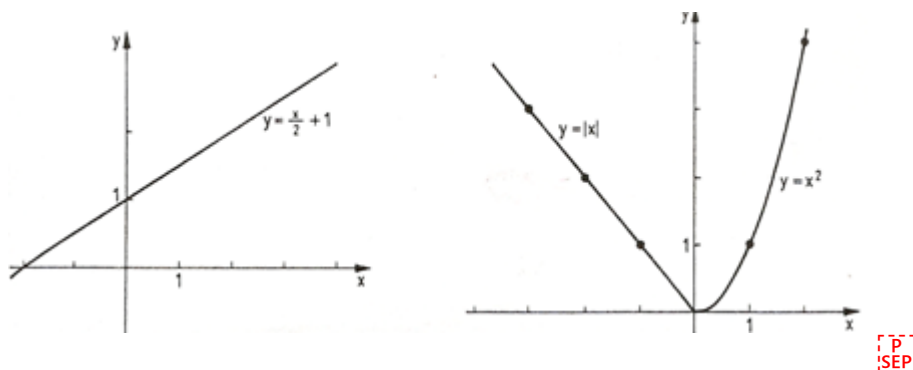
X	-2	-1	0	1	2	
Y	2	0,5	1	1,5	2	

بيلگي ۱۵ ، ۲ ته:

X	-3	2	-1	0	1	2	3	...

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن گرافیکي انځورونه (د یوې ټوټې) په x, y -کو اوږدینات سیستم کې د یوې کبرې له لارې، د هغه فنکشن انځورونې څخه عبارت ده، چې د واریابلو یا اوښتونو جوړې د x, y -هواره یا سطحه کې یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي. څیره ۱.۱۵ او ۱.۱۵ بیلګې (۲.۱۵) بیلګې ۱.۵ ته



۱.۵ د فنکشنونو- یا بلواکو څیونه

پیژند ۲.۱۵: $y = f(x)$

په ایټروال $[a, b]$ کې هلته او هلته یا ټیک هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چېرته چې ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x_1 < x_2$ لپاره $x \in [a, b] \wedge y \in [a, b]$ سره باور ولري:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

که د برابر وټنځښه باور ونه لري نو له کره یا کلکې مونوتوني غږیږو.

وېلګې ۱.۱۵ ته: $y = (1/2)x + 1$ په $D = R$ کې کلک مونوتون دی

و بیلګې ۲.۱۵ ته: $y = |x|$ د $x < 0$ لپاره

او $y = x^2$ د $x > 0$ لپاره

په اینټروال $(0, \infty]$ کې مونوتون ټیټېدونکی یا لویدونکی او په اینټروال $[0, \infty)$ کې مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۳.۱۵:

په یوه اینتروال $[-a, a]$ کې یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریک (symetrisch), (ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریک (antisymetrisch) بلل کیږي چې باوري وي

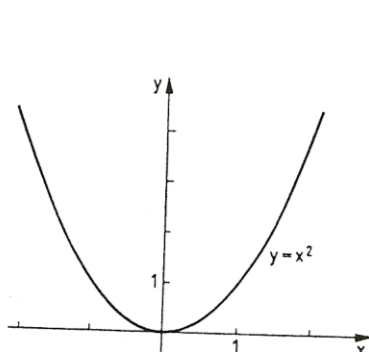
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریک و y - محور ته ځغلي (دلته هم څیره شته، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵. ۳)، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریک ځغلي (بیا هم څیره او ۰۰۰۰ ش ۱۵. ۴) $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

بیلگه ۱۵. ۳:

فنکشن $y = x^2, D = R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$

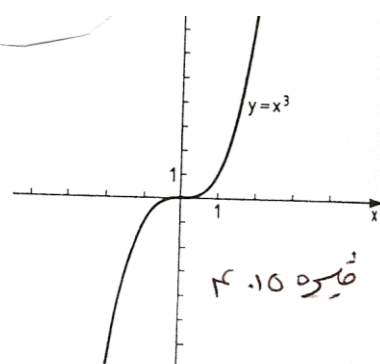


څیره ۱۵. ۳

بیلگه ۱۵. ۴:

فنکشن $y = x^3, D = R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی:

$$(-x^3) = -x^3 \left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$$



څیره ۱۵. ۴

د بیلگي ۱۵. ۱ او ۱۵. ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵. ۴:

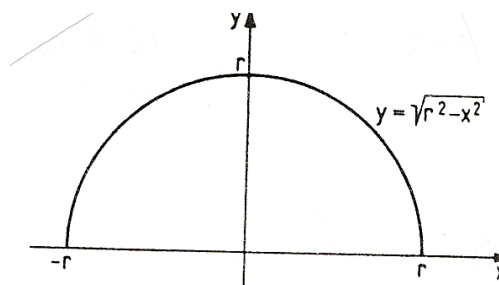
$y = f(x)$ ټیک هلته په D (پیژندپیږی ده) بند یا رابند (محدود) بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چې دا باور ولري $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$:

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلگه ۱۵. ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ را بند یا راگیر (محدود) زه به دا له دې وروسته [P SEP] بند و بولم) دی، ځکه چې لرو نیم یوونگر دی څیره ده [P SEP]

ش. ۱۵. ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵. ۵:

$y = f(x)$ پریودیکی (دوراني یا بیرته-یا تل بیرته راگرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راگرځیدونکی p سره، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دوراني یا تل راگرځیدونکو (پریودیکی) فنکشنونو تیوپیکی بیلگي تریگونومتريکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵. ۳)

پیژند ۱۵. ۶:

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفر ځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داخلونه د $-x$ محور سره د فنکشن کړې د غوڅتکو x - ارزښتونه دي. [P T P SEP SEP]

بیلگي ۱۵. اته:

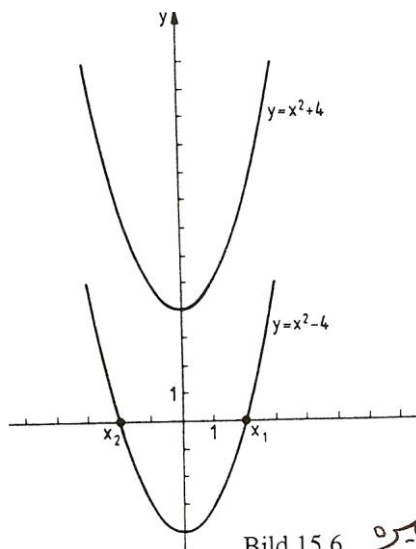
د فنکشن $y = \frac{1}{2}x + 1$ صفر ځایونه د مساوات $\frac{x}{2} + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵. [P T P SEP SEP])

بیلگه ۰.۱۵.۶: [P][SEP]

[P][SEP]

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري. (بیا هم څیر ۰.۱۵.۶)

پیژند ۰.۱۵.۷:

$$x \in D, \quad y \in W \quad y = f(x),$$

یو یواځنی «یا یواځنی او یواځنی بلل کیري، که هر یو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واک کی ويیا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: $y =$ $f(x)$ یو یواځنی یا یواځنی او یواځنی فنکشن په څټکیدونکی دی، دا په دې مانا چي دایو فنکشن $x = g(y)$ تعریفوي، یعنی په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یاواریابلو د نخښی (نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توگه لرو $y = g(x)$ داد فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواکاو یبلواک، دلته د x په واک کی واریابل یا مجهولی یا ناپیزندونکی دي د $y = f(x)$ پهڅټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$ فنکشن $y = x$ د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ (- ورته) identic دی. [P][SEP]برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافیکي څیره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ (هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډی: هندارونه) ده. $\begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$

بیلگي ۱۵، ۱ ته :

د فنکشن $y = f(x) = x/2 + 1$ چپه یا په څټ فنکشن داسی دی
 $y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
 سری $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x = 2y - 2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
 (څیره. ۱۵ ۷ الف)
 ر

بیلگي ۱۵. ۳ ته : فنکشن

$x \in D \quad y = x^2$,
 څیره ش ۱۵. ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی. $\begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$
 هر $y \in W$ $[0, oe] =$ پورې دوه $x \in D = [-oe, oe]$ اړه لري، یعنی $x = +y$ او $x = -y$
 مگر $y = x^2$ کلک مونوتون جگیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلک مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y = x^2, x \geq 0$
 ته چپه- یا په څټ فنکشن $y = +x$ دی، او $y = x^2, x < 0$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y = -x$ دی. (څیره ۱۵. ۷ ب).
 په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵. ۱ :

که $y = f(x)$ کلک مونوتون جگیدونکی (لویدونکی) وي، نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلک مونوتون جگیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵. ۳. بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوټنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتری فنکشنونه او ځیکلومتری فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلو ځانګړ ډوله خویونو له مخی وڅیړل شي. په برخه ۱۵. ۴ که به د فنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي

فنکشنونه) وڅیرل شي. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ د فنکشنونو څیرل به د هغو ځانګړې ډوله یا کرکترېستيکي خوږونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د ډیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}; a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنل فنکشن نومېږي. دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه (یا لنډ : پولینوم) هم ویل کېږي

یو ساده ټولریشنل - ۱ - مه درجه ($n = 1$) یا لاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] y = mx + n \quad (15.2) \quad \left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a_1 او a_0 په مانا دي. د لاینی فنکشنونو

څیره (ګراف $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$) یوه کرښه ده چې په $y = n$ کې y - محور غوڅوي

($x = 0$) او جګوالی $m = \tan \alpha$

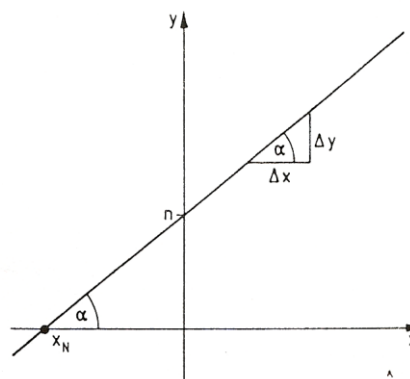


Bild 15.8

څیره

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸ $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$) جګوالی د y - ارزښت د تغیر $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \right]$ x - ارزښت تغیر سره

$$\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{متناسب دی:}$$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي او که $m = 0$ وي،

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کړبڼه ، که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټيک یو $[P_{SEP}]$ صفر ځای $y = 0$ لري: $x_N = -n/m$ $[P_{SEP}]$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښې برابر ون، چی له دوه ټکو (x_1, y_1) او (x_2, y_2) تیریري، پیدا کړو چې یو په بل نیغي نه وي ولاړي ، نو د هغو جگوالی m او د هغو پریټکی یا نوره بڼه غوڅتکی n په y - محور د برابر ونسیستم

$$y_1 = x_1 m + n, y_2 = x_2 m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \quad [P_{SEP}]$$

په بل (پل) قدم) کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو

لکه په (۱۵ . ۱) کی $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \quad (15.3) \quad [P_{SEP}]$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغې سیومتري محور و y - محور ته غیر ګ ځغلي. کوایفیثینټ) ځله ووني یا ځلیدونکی (a, b, c) د پارابول د ککړي ځای او بڼه(فورم) ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

$$1. y = x^2 (a=1, b=0, c=0) \quad (15.4)$$

نورمال پارابول، د ککړي کواوردینات: $x_s = 0, y_s = 0$

(۱۵ . ۹)

$$2. y = x^2 + px + q (a=1, b=p, c=q) \quad (15.5) \quad [P_{SEP}]$$

او $x^2 + px$ ته د څلورۍ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y = x^2 + px = (x + p/2)^2 - (p/2)^2 = (x + p/2)^2 - p^2/4 \quad (15.5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په $p/2$ - او د y - لور په

$p^2/4 - q$ راکښل (رابښل - یا راکش -) شوی نورمال پارابول دی ، دا په دې مانا چی په)

(۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2, y_s = q - p^2/4$$

$[P_{SEP}]$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y = x^2 + 6x + 10, x_s = -6/2 = -3, y_s = 10 - 6^2/2 = 1$$

(خ. ۱۵. ۹)

$$3. y = ax^2 \quad (a=0, b=0, c=0)$$

د ککړې (سر یا راس) کواوردینات . $x_s = 0, y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a| < 1$ لپاره پرسیدلی، د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لور ته واز دی (خلاص دی)

بیلگه ۱۵. ۸:

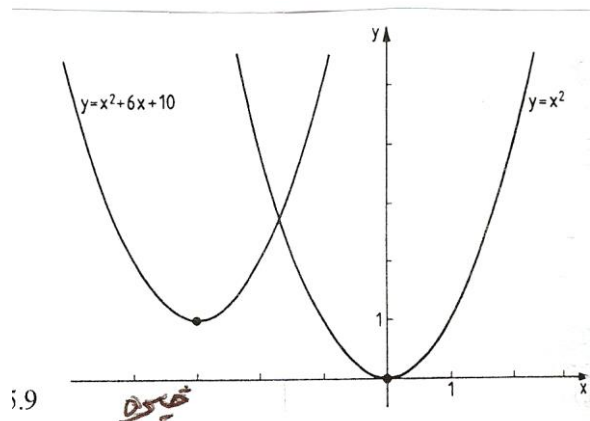
$$y = 2x^2, y = (1/2)x^2, y = -2x^2$$

(خ. ۱۵. ۱۰)

$$4. y = ax^2 + bx + c = a[x^2 + (b/a)x + c/a]$$

د ککړې (راس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵. ۵ کی یی چی مخ ته تللی یو)

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a) - (b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



بیلگه ۱۵. ۹:

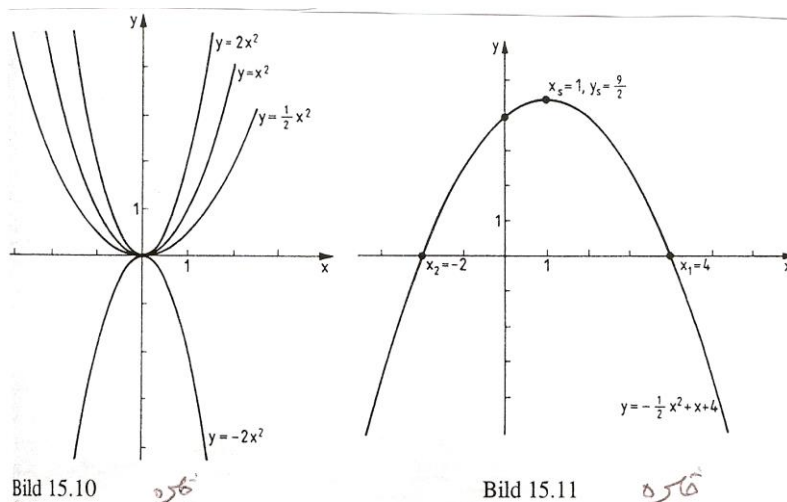
$$y = -(1/2)x^2 + x + 4, (a = -1/2, b = 1, c = 4)$$

د ککړې کواوردینات:

$$x_s = -1/(2 \cdot (-1/2)) = 1, y_s = 4 - 1^2/(4 \cdot (-1/2)) = 9/2$$

دا چې $a = -1/2$ نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵. ۱۱)

پارابول د ککړې (راس) کواوردینات داسی دی



د فنکشن $y = ax^2 + bx + c$ د صفر ځایونه د برابرې $ax^2 + bx + c = 0$ اوبیوني دي. وبللکي ۱۵. ۹ ته (خ. ۱۵. ۱):

صفر ځایونه له دې لاس ته راځي: $-(1/2)x^2 + x + 4 = 0$ ، چی دلته $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ دي.

و بیلگي ۱۵. ۷ (خیره ۱۵. ۹) ته [SEP]:

د $x^2 + 6x + 10 = 0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرې رېیل صفر ځایونه نه لري [SEP].

فنکشن $y = x^2$ غبرگ یا جوړه (ډبل) صفر ځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلگي په توگه د ټولریشنل فنکشنونو بیلگي له مخي، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو

چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانگړی لیدور فورم دی، د هورنر شیمای (بڼه) Horne rschema معرفي شي. ددې لپاره به د (۱۵. ۶) فورم بدل شي.

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0 \quad x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

هغه ورکړ شوي خپلواک x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a_3 له x_1 سره ځل کیږي، دې سره a_2 زیاتیري، زیاتون یی له x_1 سره ځل، او a_1 ور زیاتوو، زیاتون د x_1 سره ځل او a_0 ور زیاتوو. [SEP] د عملیو پرلپسې په لاندې ډول د لاندې شیمای (د هورنر شیمای) له لارې په لیدور ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

$$\begin{array}{rcll}
 & a_2 & a_1 & a_0 & \text{ځلونه يا ضريبونه} \\
 & a_3x_1 & (a_3x_1+a_2)x_1 & [(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1 & \text{منځنۍ ځلونه} \\
 \hline
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
 i_3 & a_3x_1+a_2 & (a_3x_1+a_2)x_1+a_1 & [(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 & \text{منځنۍ زياتون} \\
 & & & = f(x_1) &
 \end{array}$$

ددې شېما پوهيدل لږ نابېلېدې او څه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو څخه روښان دی. $\begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$

بېلگه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y = x^3 - 3x^2 - 14x - 5$ لپاره د فنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شمېرل کيږي.

اوبڼونه () :

که چېرې د درېيمې درجې ريشنلفنکشن يو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولينوم ویش له لارې دا لايڼي فاکتور بيل کړو (پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . $\begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$)

بېلگي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x-5) = x^2 + 3x + 1$ له دې امله لرو: $\begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$

$$y = x^3 - 2x^2 - 5 = (x^2 + 3x + 1)(x - 5) \quad \begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$$

د ویش پولينومونو ځلوونې، يعنې 1 د (x^2) سره، 3 د (x) سره او 1 د هورنر شېما په اخره ليکه کې ولاړ دی. د هورنر شېما له لارې د صفرځاي شمېرلو سره په همغه وخت يا دمگړۍ کې د پولينوم ویش صورت نيسي. لرو:

$$[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0] : (x - x_1) = a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + [(a_2x_1 + a_1)x_1 + a_1]$$

او $f(x_1) = 0$ چې د $(x - x_1)$ سره د ځلوني له لارې دا تصديقېدلې شي. $\begin{bmatrix} P \\ SEP \end{bmatrix}$ پاتې صفر

ځايونه د څلورۍ - يا مربع برابرنې د اوبڼو له لارې لاس ته راځي

$$x^2 + 3x + 1 = 0; x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -(3 \pm \sqrt{5}) / 2$$

په دې ډول د درېيمې درجې فنکشن د درې لايڼي فنکشنونو د ځلوني په څير ليکل کيدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y = x^3 - 2x^2 - 14x - 5 = (x-5) \left[x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right] \left[x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right]$$

د جملې ۱۲. ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n -م درجو ریشنل ږزرږ
ږرطر تظدا غظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵. ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنل فنکشن n صفر ځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري
او یادا صفر ځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس
کیدي شي.

که $x_1, x_2, \dots, x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلوني په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) a_n$$

د هورنر شیمیا په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي: $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنڅ نه وي ، نو د هغه د کوایفیثینت یا ځله ووني
لپاره دې صفر ولیکل شي $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$.

بیلګه ۱۵. ۱۱ :

۵ - مه درجه ټول ریشنل فنکشن

$$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80 \quad x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$$

لري. نور صفر ځایونه دې پیدا کړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلوني په څیر
ولیکل شي. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

ځواب : د هورن جملې له لارې یو په بل پسې د پولینوم ویش یو پاتی ۲ - مه درجه پولینوم
لاس ته راکوي:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & 2 & 0 & -6 & -20 & -8 & 80 \\
 x_1 = 2 & & 4 & 8 & 4 & -32 & -80
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 & 2 & 4 & 5 & -1 & -40 & 0 = f(0) \\
 x_2 = 2 & & 4 & 16 & 36 & 40 & \dots
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccc}
 & 2 & 8 & 18 & 20 & 0 = f(2) \\
 x_3 = -2 & & -4 & -8 & -20 & & .
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccc}
 & 2 & 4 & 10 & 0 = f(-2)
 \end{array}
 \end{array}$$

دا پاتی پولینوم $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i \quad \text{[PSEP]}$$

لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$ [PSEP]

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کيږي

$$y = 2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i) \quad \text{[PSEP]}$$

ددې لپاره چې د دریمې او جگو درجو د ټول ریشنفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکترېستیکي یا د خویونو ټکی یی د ديفرنخيالشميرني له لارې لاسته راوستی شو) برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د ديفرنخيالشمير له مرستي کار واخلو، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکي ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیک تعریف شي. دا د بیلگي په توگه دا مانا لري چې $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$ سره $f(x)$ تل ارزښت g ته نږدې کيږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right] = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n$$

دا چې

$$x^n \rightarrow oe$$

د $x \rightarrow \pm \infty$ لپاره که n جوړه (جفت) وي او $x \rightarrow \pm \infty$ لپاره که n نا جوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$ (کې له ∞ - څخه د ∞ په لور ځي). $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$ (کې له ∞ - څخه د ∞ په لور ځي). $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

که n نا جوړه او a_n کمیز یا مثبت وي، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ (کې له ∞ - څخه د ∞ په لور ځي)

که n نا جوړه او a_n کمیز وي، نو لرو: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$ (کې له ∞ - څخه د ∞ په لور ځي)

پیژند ۹.۱۵ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \dots (15, 7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵. ۷) اصلي مات نومېږي، که $n < m$ وي او نا اصلي مات دی $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ که $n \geq m$ ، نا اصل مات فنکشن کېدی شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنفنکشن او یوه ریشنونۍ ماتې برخې د زیاتون په څیر ولیکل شي. $\left[\begin{smallmatrix} P & P \\ SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$

بیلگه ۱۵. ۱۲:

$$\text{فنکشن } y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x} \text{ اصل مات نه دی (} n=4, m=3 \text{) په ماتلاندې فنکشن}$$

باندې د ماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3 + (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x)$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x_0$ لپاره یو صفرځای لري، که $x = x_0$ وي نو باور لري:

$$P_n(x_0) = 0 \text{ مگر } Q_m(x) \neq 0$$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځای (Lücke) لري، که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x) = 0$

د $x = x_p$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_p) \neq 0$ مگر $Q_m(x_p) = 0$

بیلگه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن $y = (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x)$ د ماتباندي- او ماتلاندي فنکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لایني فاکتورونو په توگه لیکل کيږي.

$$y = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{x(x + 2)(x - 2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مگر مات لاندي صفر نه دی (صفرځای) مات لاندي- او مات باندي فنکشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)

د $x = x_{p1} = 0$ او $x = x_{p2} = 0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځای ته نږدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چی د قطبځای (ټيک ناپای ځای بللکيږي) x_p کی کره داسیمپټوتي کرښي $x = x_P$ ته نږدې کيږي. د یوه تشځای x_L په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادي $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = x_L$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n < m$) د x په جگ پوتنخ یعنی x^m د ماتباندي او ماتلاندي د ویش څخه لاس ته راځي:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \dots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچې د x ټول اکسپوننټونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي، نو د اصل مات فنکشن څیره د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره د x - محور ته نږدې کیږي. فنکشنونه

چې اصل مات نه وي نو د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره داسې ځانونه نیسي، چې اصل د ماتفنکشن برخه یې د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$. د نااصل مات فنکشن څیره د $x \rightarrow \pm\infty$ سره، ځان خپل ټولریشنل برخې ته نږدې کوي. $\left[\begin{smallmatrix} P & P \\ SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$.

بیلگه ۱۵. ۱۴: $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x_0 = 0$ په ځای کې صفرځای لري. تشځای او پول یا قطب نه لري. ریيل اوبیونه نه لري (او د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره د x -محور ($y = 0$) د اسیمپټوټی په څیر لري (څیره. ۱۵. ۱۲) $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

ب: $y = (x^2+2x-3)/(x+2) = x - 3/(x+2)$ صفرځایونه ($x^2+2x-3=0$) په $x_1 = -3$ او $x_2 = 1$ کې لري. تشځای نه لري او په $x_3 = -2$ کې قطب لري دا په دې مانا چې $x = -2$ اسیمپټوټی دی، او د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپټوټی کیږي (دا سیمپټوټی کلیمه دې په برخه ۱۶. ۴ کې هم وکتل شي) $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانگړي ټول - یا مات ریشنل فنکشنونه راوړو: فنکشن

$$y = x^n; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \dots \dots \dots (15, 8_a)$$

یو ځانگړی پوتنځفنکشن دی (د پوتنځ پیژند ۶. ۱۰)

(15.8) د زیاتو یز زیاتیز یا مثبت ټولگن n لپاره یو ټولریشنل فنکشن دی. د جوړه ټولگن n لپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولگن n لپاره ټولی کړي د تعریف ډیری (-) $D = (-\infty, \infty)$ ، د ارزښت ډیری $W = (0, \infty)$ او گډ ټکی $(1, 1)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ لري. (څیره ۱۴ الف ۱۵) د ناجوړه گډ n لپاره $D = (-\infty, \infty)$ او $W = (-\infty, \infty)$ دي $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ او $(-1, -1)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ گډ ټکي دي (څیره ۱۵. ۱۴ ب)

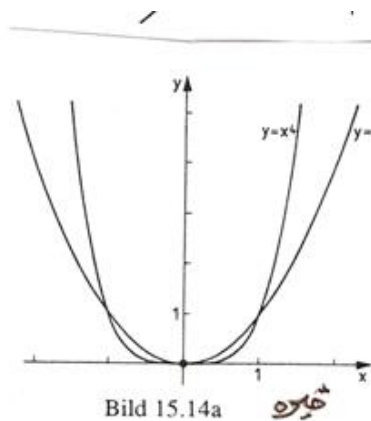
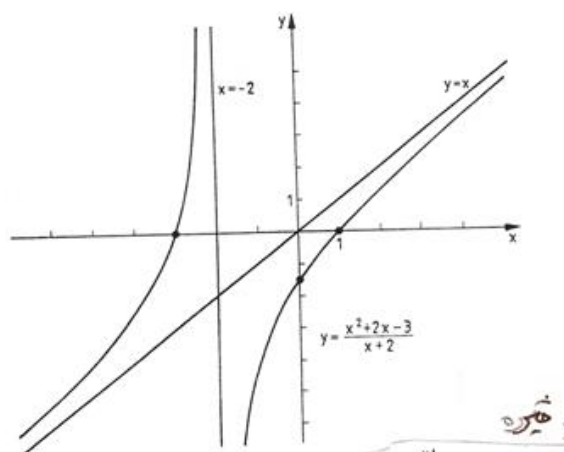
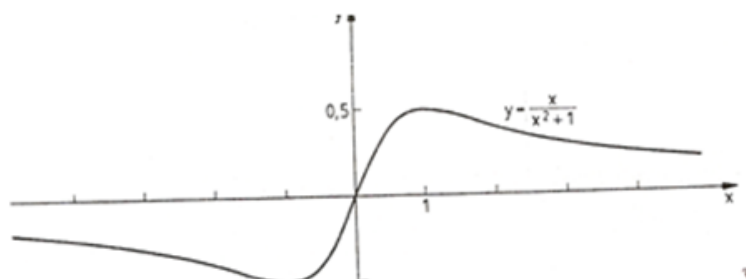


Bild 15.14a

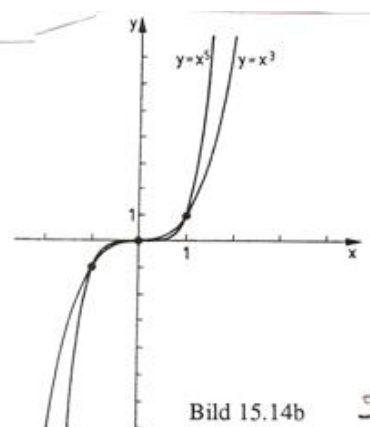


Bild 15.14b

(۱۵، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي گڼ لپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په $x = 0$ کې د یوه قطب او $y = 0$ کې یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه گڼون یا تعداد (کمیز) لپاره ټولې کړې د پیژند ډیري

$D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ د ارزښت ډیرې $W = (0, \infty)$ لري او ګډتکي $(-1, 1), (1, 1)$

؟؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵ الف. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

د ناجوړه ګڼون (کمیز n) لپاره $D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ او $W = (-\infty, \infty)$ او $(-1, -1), (1, 1)$ ګډتکي دی (څیره «۱۵. ۱۵ ب).

دوه څیرې دي

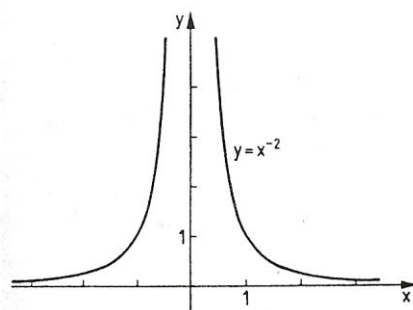


Bild 15.15a

څیره

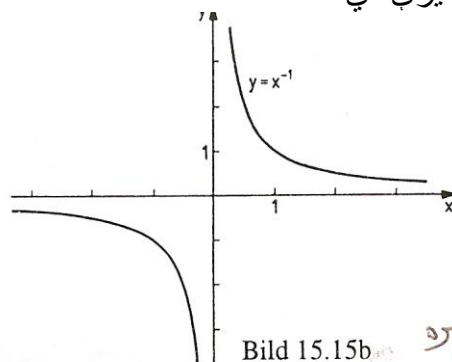


Bild 15.15b

څیره

د پوتنڅ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوټوني اینټروال په پام کې ونیول شي. (پرتله بیلګه (بیلګه ۱۵. ۳)

د فنکشن) لوستل له کین ویني لور ته

$$y = x^n; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

چپه- یا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty) \dots (15, 8_b)$$

او رېښه فنکشن نومیري (پیژند ۶. ۲ دې وکتل شي) پوتنڅ فنکشن کیدی شي و

ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي (دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}}$) (پرتله برخه ۴)

که پوتنڅ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] y = x^a, a \in \mathbb{Q}, x > 0 \quad (15. 8c)$$

نو د رېښي فنکشن (۱۵. ۸ ب) دې د پوتنڅ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنڅ فنکشن (۱۵. ۸ ث) پر څټ بیرته پوتنڅ فنکشن دی. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

تولیز پوتنڅ فنکشن پیژند د ریشنل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی (د ریشنل ګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳. ۱۰ کی)

پیژند ۱۵. ۱۰: فنکشن

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 \quad (15.8d)$$

پوتنخ فنکشن نومیری

بیلگه ۱۵. ۱۵: فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$$

لاندی چپه - یا پر خت فنکشن لرو

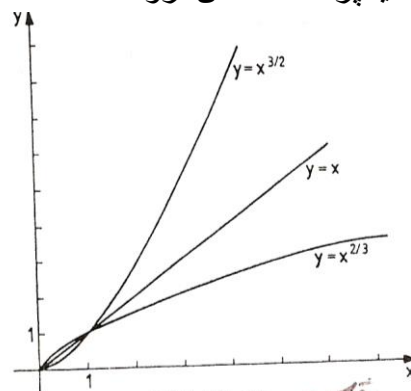


Bild 15.16a

(خیره ۱۵. ۱۶ الف)

فنکشن لاندی چپه فنکشن لری: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

(خیره ۱۵. ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$$

[P]
[SEP]

یادونه: په پیژند ۴. ۲ کی مو وویل چی یواخی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرخت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتونی غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلگي په توگه فنکشن $y = x^3$ په ټول تعریفیږي کی مونوتون پورته کیدونکی دی او لهدې امله ټول په خت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندږی)D = [0, oe کی پر خت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی $y = x^3$ پرخت فنکشن دD = (-oe, 0 سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی (ش. ۱۵. ۱۷) •

پیژند ۱۵. ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a > 0, a \neq 1 \dots \dots \dots (15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جگ (لنډ «جگ» بلواک بلل کيږي.

(ایکسپوننټ یا «جگ» کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

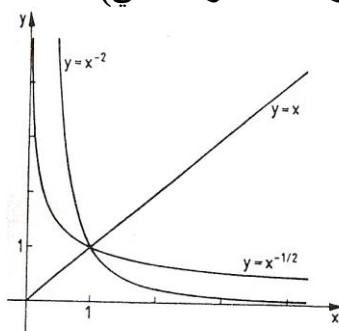


Bild 15.16b

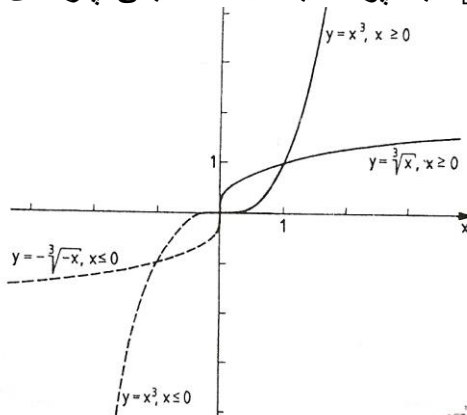
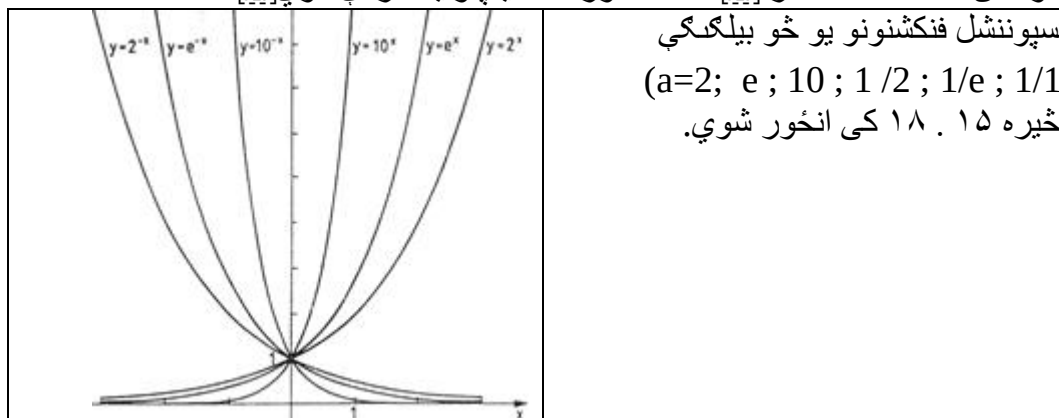


Bild 15.17

پورته دوه څيړي دې پام کې ونيول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پېژندډيري $D=(-oe,oe)$ او ارزښتديري $W=(o,oe)$ لري. $a^0=1$ له امله ټکي $(0,1)$ د ټولو کړو گډ ټکي دی

د $a>0$ لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوټونجيدونگي دی او د $x \rightarrow oe$ سره x - محور ته اسيمپوټيک ورنزدې کيږي (د $0<a<1$ لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوټون لويږي او ځان د $x \rightarrow oe$ سره x -محور ته اسيمپوټيک نږدې کوي



کسپوننشلفنکشنونو يو څو بيلگي
($a=2; e; 10; 1/2; 1/e; 1/10$)
څيره ۱۵ . ۱۸ کې انځور شوي.

پیژند ۱۵. ۱۲:

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څې فنکشن دی

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 \quad (15.10)$$

او لوگاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوگاریتم کلیمې لپاره پیژند ۵. ۱ وگورئ) فنکشن (۱۵. ۱۰) $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ پیژندېږي
 $D = (0, \infty)$ او $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ د ارزښتېږي $W = (-\infty, \infty)$ لري. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

د $y = \log_a x$ کړې د گرو $y = a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y = x$ کې $(1, 0)$ د ټولوکړو گډ
 ټکی دی (څیره شته دی)

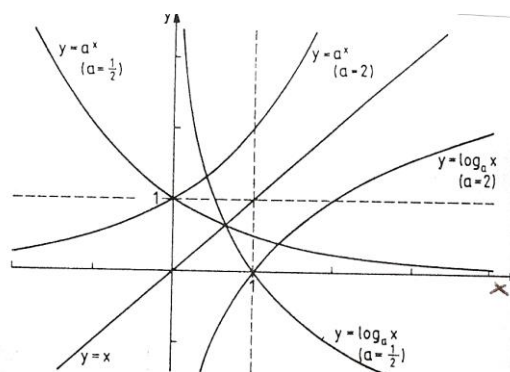


Bild 15.19 څیره

د $a > 1$ لپاره (۱۵. ۱۰) کله مونتونجگیدونکی اود $x > 0$ لپاره اسیمپتوتیک د کمیز y -
 محور ته نږدې کیږي. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ $0 < a < 1$ لپاره (۱۵. ۱۰) کله مونتون لویدونکی دی او

د $x > 0$ لپاره اسیمپتوتیک د زیاتیز y - محور ته نږدې کیږي. په شکل ۱۵. ۱۹

کې $y = a^x$ او په څې یی یعنی $y = \log_a x$

د $a = 2$ او $a = 1/2$ لپاره انځور یږي. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

په ځانگړې توگه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x$, $y = \log_e x = \ln x$

پیژند ۱۵. ۱۳:

د تریگونومتری فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې (پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نڅه کېږي یا راوړل کېږي.

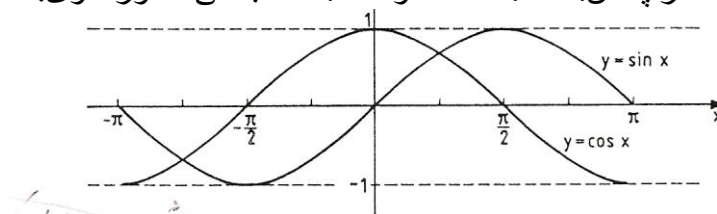
$$y = \sin x; D = \mathbb{R}, W = [1, 1] \dots (15, 11_a)$$

$$y = \cos x; D = \mathbb{R}, W = [-1, 1] \dots (15, 11_b)$$

$$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots (15, 11_c)$$

$$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots (15, 11_d)$$

د دې کړوتگلار په ش. ۱۵. ۲۰ الف او ۱۵. ۲۰ ب کې انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ نا جوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا - بلواک دی. $\left[\begin{smallmatrix} P & T \\ SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$

تریگونومتریکی فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي (مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه $y = \sin x$, $y = \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چې لرو:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$$

لاندې فنکشنونه پریود π

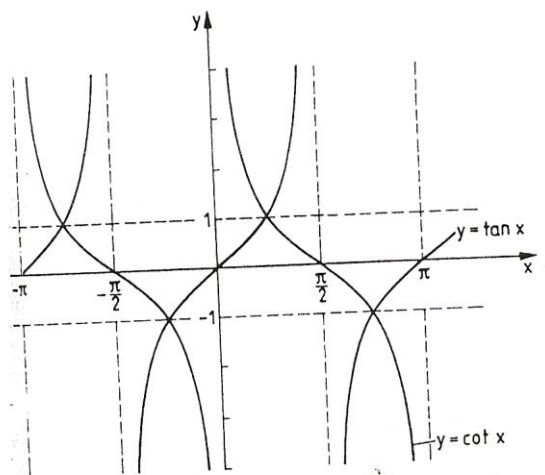


Bild 15.20b

[P]
[SEP]لري $y = \tan x$, $y = \cot x$ دا په دې مانا چې

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \cot(x + k\pi) = \cot x, k \in \mathbb{Z}$$

[P]
[SEP]د تريگونوميټريکي فنکشنونو صفر ځايونه دي $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \cos$$

[P]
[SEP]

$$y = \sin x \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, y = \tan x$$

[P]
[SEP]د $y = \cot x$ لپاره تانجنټ - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځايونه (ناپاڅايونه) لرييعني $y = \tan x$ په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ او $y = \cot x$ په $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ کې.

د تريگونوميټريکي فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوټوني ځايونه په پام کې ونيول شي. د بيلگي په توگه

فنکشن $y = \sin x$ په ايتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کې مونوټون جگيدونکی دی او په

$$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

کې مونوټون لويدونکی، او دا مونوټوني ځايونه په يوه پوره پړيو دې کې تکرارېږي. پس ويلی شو:

لپاره $y = \sin x$ جگيدونکی يا پورته کيدونکی دی[P]
[SEP]

د $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره لويدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi + 2k\pi \leq x \leq 0 + 2k\pi$ لپاره $y = \cos x$ پورته کيدونکی دی.

د $0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ لپاره لويدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره $y = \tan x$ جګيدونکی دی

د $0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ لپاره $y = \cot x$ جګيدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کې د قطب ځايونه د مونوتوني اينتروالونو ترمنځ پراته دي،

له دې امله دا مونوتوني ايتروالونه واز اينتروالونه دي. د ساين فنکشنونه د بيلګې په توګه

د وخت په پريودیکي انځور کې خپل استعمال مومي Schwingung (شوينګونګ):

رپيدنه = په عمومي ډول دلته خپلواک واريابل په t نڅبنه کيږي. فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي. $\begin{bmatrix} P & T & P \\ SEP & SEP & SEP \end{bmatrix}$

يادونه: فنکشن (۱۵. ۱۱ت) د پيژند (۱۵. ۱۵) له مخې تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. مور

ترڅيري لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواک واريابل t

او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواک (Argument) د کړنځيره باندې څه تاسير

اچوي.

۱- د فاکتور a تاثير په فنکشن $y = a \cdot \sin t$ د $y = \sin t$ فنکشن ارزښت باندې غزول يا

راکشول دی که $(|a| > 1)$ او يا پرسول دي که

$(|a| < 1)$ وي $y = a \cdot \sin x$ فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت

$y = \sin t$ دی، چيرته چي برسیره پردې د $a < 0$ لپاره په t - محور يوه

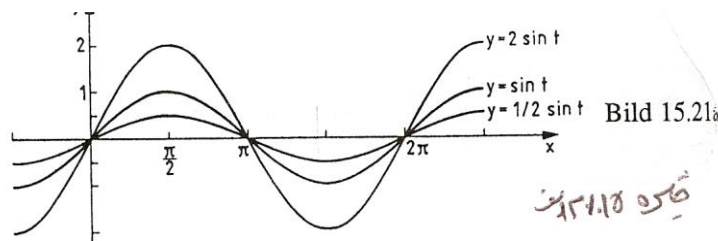
اينه څيرونه هم منځ ته راوړي (څيره ش. ۱۵ ۲۱ الف). $a = 2$, $a = 1/2$

په فنکشن کې a امپليټوډي Amplitude (جګوالی) نوميري او د شوينګونګ Schwingung

$\begin{bmatrix} P & T & P & P & P & P & P & P & P & P \\ SEP & SEP & SEP & SEP & SEP & SEP & SEP & SEP & SEP & SEP \end{bmatrix}$

رپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.

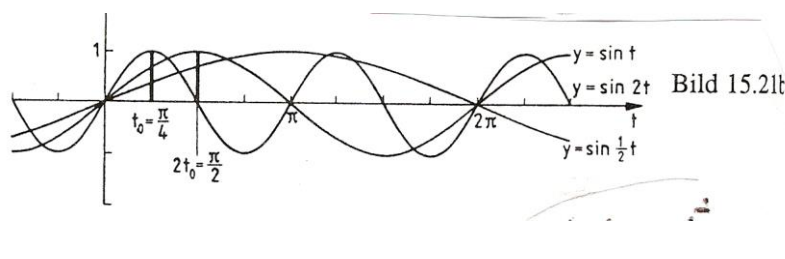
څيره شته



۲ - په فنکشن $y = \sin \omega t$ کې فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختي غزول که $|\omega| < 1$ یا پرسول که $|\omega| > 1$ وي تاثیر اچوي. چیرته چې د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردي یو په $-y$ محور اینونه هم ده. $\left[\begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

د یوه ټاکلي خپلواک $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin \omega t$ یوه فنکشن ارزښت، $y = \sin t$ خپلواک ω -خله، یعنې $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (خیره ؟؟ ش. ۱۵. ۲۱ ب.).

گردی فرکونخ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودی تاثیر اچوي او $y = \omega t$ پریودی $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.



۳ - زیاتیدونکی ϕ په فنکشن $y = \sin(t + \phi)$ کې د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنې تاثیر په $|\phi|$ له کینې لور $\phi > 0$ او یا له بني لور $\phi < 0$ اچوي.

د یوه ټاکلي خپلواک $t = t_0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t + \phi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y = \sin t$ لپاره.

د ϕ په کچه راکښل شوی (یعنې د یوه ځای څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعنې $t = t_0 + \phi$ لپاره، غوره کوي. (خیره، ۱۵. ۲۱ پ)

$$\left(\phi = \frac{\pi}{2}, \phi = -\frac{\pi}{2} \right)$$

په فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) = a \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right)$$

کی φ چی فازي نوميري يو د راکنبلو تاثیر په کړه $y = a \sin \omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

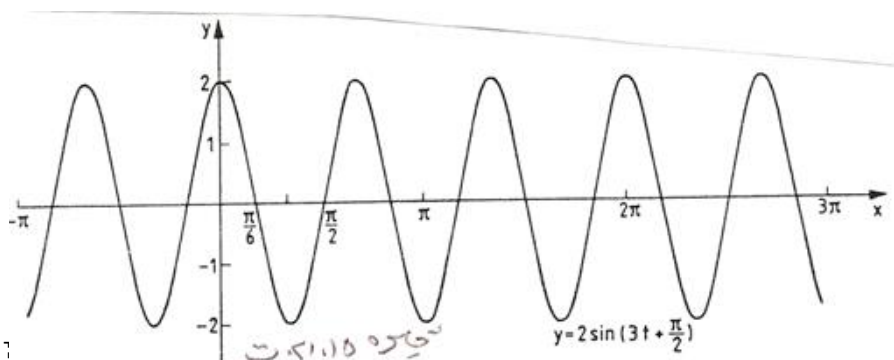
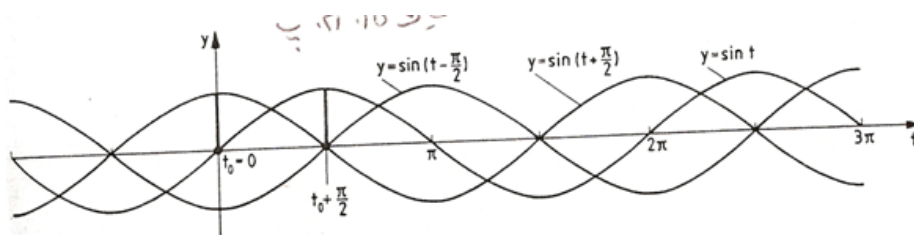
په شکل ۱۵. ۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{2} \right)$ انځور دی.

هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودی یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$

کی

د $\sin t$ و کین لورته راکنبل شوی دی.

څېره ۱۵. ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$



د تريگونوميټري فنکشنونو (یواځني) په معکوسوالي یا په څټوالي کی مورن په ځانگړو یو غبریزو یا مونوټوني اینټروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند. ۱۵. ۱۴: د لاندې فنکشنونو

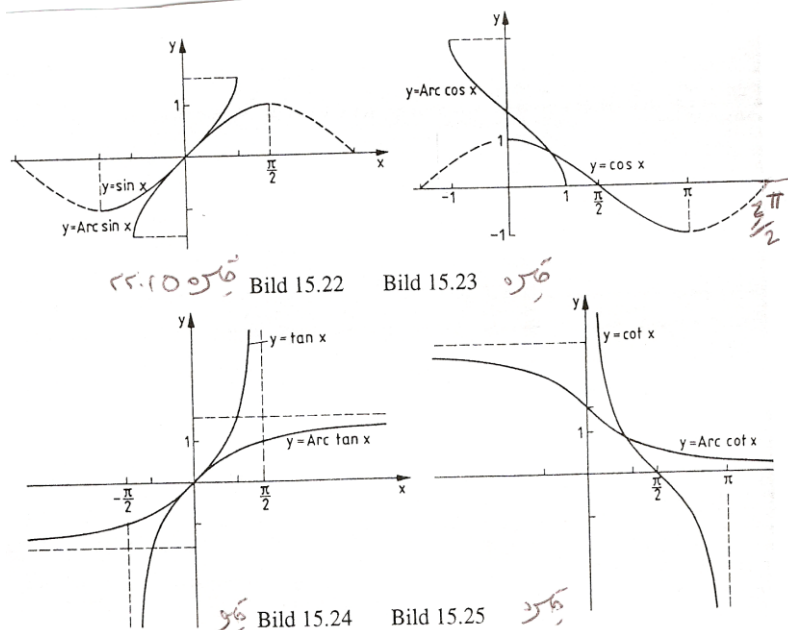
1. $y = \sin x$,	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x$,	$D = [0, \pi]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x$,	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x$,	$D = (0, \pi)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرخت يا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

P
SEP

1. $y = \text{Arc sin } x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \text{Arc cos } x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \text{Arc tan } x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \text{Arc cot } x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تریگونومتری فنکشنونو برخی په مونوټوني ایټروالونو (۱۲. ۱۵ الف (تر) ۱۲. ۱۵ ت (او د هغوي چپه) ۱۳. ۱۵ الف (تر) ۱۳. ۱۵ ت (په ځیرو ۱۵. ۲۲ تر ۱۵. ۲۵ پورې انځور دي.



۱۵. ۴. ۱۵ خنځيري (ترلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵. ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره

پر دې د $z \in W$ لپاره يو فنکشن $y = f(z)$ ورکړ شوی، نو

$$y = f(g(x)) \quad (15.14)$$

د x ترلي (خنځيري) فنکشن بلل کيږي.

يادونه: يو ترلي فنکشن کيدی شي چی زیاتو خنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلگي

په توگه $z = f(x)$

د $W \in D, z \in x$ لپاره او $w = h(z)$ د $W^* \in W, w \in z$ لپاره

او $y = f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y = f[h(g(x))]$ هم د x يو ترلي فنکشن دی

بيلگه ۱۵. ۱۶:

الف: د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلي فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب: په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننۍ - او $y = \sin z$ د باندنی

فنکشن دی. په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کی $z = \sin x$ د

ننۍ - او $y = z^2$ د باندنی فنکشن دی

پ: د

$$y = \cos w \quad w = \sqrt{z}, \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x+4}$ لاس ته راځي

ت: په ترلي فنکشن $y = \text{Arctan} 1/(x-1)$ کی $z = x-1$ دننۍ، $w = 1/z$ منځنی او

$y = \text{Arctan} w$ د باندنی فنکشن دی.

يادونه: د يوه ورکړ شوي x - ارزښت لپاره د خنځيري فنکشنونو د فنکشن

ارزښت شميرنی له « دننه » پيل کيږي.

بيلگي ۱۵. ۱۶ ته:

(ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z = x^2 = 0.5^2 = 0.25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0.25 = 0.24740$$

او

$$z = \sin x = \sin 0,5 = 0,47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0,47942^2 = 0,22984$$

[P T P T P T P T P T P T P]
[SEP SEP SEP SEP SEP SEP SEP SEP]

پ) د $x = 2$ لپاره دی $w = 1/z = 1/1 = 1$; $z = x - 1 = 2 - 1 = 1$

$$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y = f(x)$ تحليلي (شنيزه) وينا بلل کيږي، که $f(x)$ له رييل گڼونو او بستيزو فنکشنونو څخه د زياتون، کمون، ځل، ویش، له لارو تړلی يا ناتړلي (خنځيري يا نا خنځيري) جوړيږي

د بيلگي په توگه دې په پام کې وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوټنڅ بنسټ او همدارول راديکاند منفي نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چي د لوگاريتم نومروس بايد مثبت وي او $\text{Arc sin } f(x)$ همدارول $\text{Arc cos } f(x)$ ټيک د $x \in [-1, 1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلگه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفديږي پيدا کړی شي.

$$y = \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{الف} \quad [P T P T P T P T P T P T P] \\ [SEP SEP SEP SEP SEP SEP SEP SEP]$$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چي دا مان لري:

$$[P T P T P T P T P T P T P] \quad x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \quad (x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3})$$

$$D = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

ب) $y = \lg(x+2) + 1/(3+2x-x^2)$ له لمري زياتونی کی بايد $\text{Numerator} > 0$

نومروس وي دا په دې مانا چي : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ ،

$$D_1 = (-2, \infty)$$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ($0 \neq$) وي . د مات لاندې صفر ځايونه

$$\text{له } 3 - 2x - x^2 = 0 \text{ څخه لاس ته راځي او دي. } x_1 = 2, x_2 = -1.$$

$$\text{نو } D_2 = \mathbb{R} \setminus (2; -1) \text{ دی}$$

د فنکشن تعریفی باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفی وي

يعنی د

D1 او D2

$$D=D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2; -1\}$$

پ) $y = \text{Arc sin } (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفی په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D = [-4, 6]$$

$$t \quad (y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)})$$

رادیکاند باید له صفر لوی وي او مات لاندې دصفر سره نامساوي، دا په

دې مانا چی

$$x < -2 \text{ یا } x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x > 2$$

$$D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

۱۵. ۵ تمرینونه

۱ - د ایمپلیسیت توابعو ایکسپلیسیت انځورونه ورکړی

$$\text{الف - } 6x - 10y = 15 \quad \text{ب - } x + y/3 = 5$$

$$\text{پ - } 2x^2 - 3y + 3 = 0 \quad \text{ت - } x^2 - 4x + 2y - 8 = 0$$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

$$\text{a) } x=2t \quad y=t^2+3t \quad \text{b) } x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$$

$$\text{c) } x=1/t \quad y=2(t-3) \quad \text{d) } x=(2)t-1 \quad y=t^2$$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوټوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوټونراينټروالونه په

تعریفیو بیل (تجزیه) کړی، یا لږ څه کړی.

$$a) y = 2x - 3 \quad b) y = -2x + 3 \quad c) y = x^2$$

$$d) y = -2x^2 \quad e) y = 2x^2 + 1 \quad f) y = |x|$$

۴ - پریکړه وکړی چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دوو کوم نه دي:

$$a) y = x$$

$$b) y = x + 1$$

$$c) y = x - 1$$

$$d) y = 2x^2$$

$$e) y = 2x^2 + 1$$

$$f) y = (x-1)^2$$

$$g) y = x^2/2$$

$$h) y = x^5$$

$$i) y = |x|$$

۵ - د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

$$a) y = -2x + 3$$

$$b) y = (x-1)(x+2)$$

$$c) y = x^2 - x - 2$$

$$d) y = 2x^2 - 12x + 18$$

$$e) y = x^2 + 1$$

$$f) y = x^3$$

۶ - لاندې فنکشنونو ته په څې فنکشنونه پیدا کړی

$$a) y = -2x + 3$$

$$b) y = x^2 + 1, \quad D = [0, \infty), \quad W = [0, \infty)$$

$$c) y = (x+1)^2, \quad D = [-1, \infty), \quad W = [0, \infty), \quad d) y = x^3/2, \quad D = [0, \infty), \quad W = [0, \infty)$$

۷ - لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

$$a) y = 0,4x - 1,6$$

$$b) y = -x + 1$$

$$c) y = (1/5)(3x + 1,5)$$

$$d) y = 2$$

$$e) 3x - 3y - 7 = 0$$

$$f) 4y + x = -1$$

کړنې دې وکښل شي، جگوالې کونج ∞ دې پیدا شي، او صفر ځایونه x_N وگڼی!

۸ - کومه کرښه له لاندې ټکو تیرېږي

$$a) (2,3) \quad (5,5) \quad b) (1,1) \quad (3,7) \quad c) (-1,0) \quad (-2,-3) ?$$

۹ - لاندې مربع بلواک یا فنکشنونه ورکړ شوي

$$a) y = x^2 - 4x + 3$$

$$b) y = x^2 - 8x + 16$$

$$c) y = x^2 - 6x + 10$$

$$d) y = (x-5x)(x-1)$$

$$e) 2x^2 - 10x + 12$$

$$f) y = 3x^2 + 6x$$

$$g) y = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \quad h) y = x^2/4 + x + 2 \quad i) y = 5x^2 + 45$$

د ککړې کواور دینات دې پیدا شي، صفر ځایونه دې وگڼل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ - د لاندې ټولریشنل فنکشنونه دې دورکړشو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وگڼل شي. فنکشنونه د k د خلفورم باندې انځور شي

$$a) y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$b) y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; \quad x_1 = 1/5, \quad x_2 = 5$$

$$c) y = f(x) = x^3 + 2x + 2x; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0, 2$$

$$d) y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 + 32x + 40; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5$$

$$e) y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6; \quad x_1 = 1, 5, \quad x_2 = 2$$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي:

$$a) y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$b) y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$c) y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

$$d) y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$$

$$e) y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$$

صفرخایونه دې وگڼل شي، پول. تشخیصونه او د $x \rightarrow \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندې فنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

$$a) y = 2^{x-1}, D = \mathbb{R}, W = (0, \infty) \quad b) y = 2^x - 1, D = \mathbb{R}, W = (-1, \infty)$$

$$c) y = \log_3 x, D = (0, \infty), W = \mathbb{R} \quad d) y = \ln(x-1), D = (1, \infty), W = \mathbb{R}$$

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوټوني ایتروالونه ورکړی او برخه په څټ فنکشنونه:

$$a) y = (x-1)^2 \quad b) y = x^2 - 1 \quad c) y = (x+1)^2 + 1$$

$$d) y = x^2 - 4x + 5 \quad e) y = 4x^2 \quad f) y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دتنه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w), \quad w = h(z), \quad z = g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی. د تعریف او ارزښت د پیروړ کولو څخه کیدی شي تیرشو

a) $y = e^{(x+1)^2}$	b) $y = (e^{x+1})^2$	c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$
d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$	e) $y = \tan \sqrt{x-3}$	f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$
g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$	h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$	i) $y = \text{Arc sin } x^2 +$
j) $y = [\text{Arc cos}(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$	k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$	l) $y = \sin \ln(x + \frac{1}{3})$
m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$	n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$	o) $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$
p) $y = \text{Arc cote}^{2x+1}$		

۱۵- تړلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دې باندې او دته فنکشنونو

$$y = f(v), v = h(w), w = g(z), z = k(x)$$

بیل کړی (د تعریف- او ارزښته یري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = [\text{Arc cot}(e^x + 1)]^{\frac{1}{2}}$	b) $y = e^{\text{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$	c) $y = \sin \left[\cos \frac{x-4}{3} \right]^2$
d) $y = \sqrt{5 - \tan \sqrt{x}}$	e) $y = \cos [\ln(x^2 - 1) + 1]$	f) $y = \log_3 [\sqrt{2^x + 1}]$
g) $y = e^{\tan \sqrt{7x-1}}$	h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$	

۱۶- د لاندې شونیزو یا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریف یري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$	b) $y = \sqrt{3-x^2}$	c) $y = \sqrt{x^2-9}$
d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$	e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$	f) $y = \ln(2x+5)$
g) $y = \text{Arc cos}(2x-4)$	h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$	i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$

دريگونوميټري يا تريگونوميټري Trigonometrie

تعريفونه

د دريگونوميټري يا تريگونوميټري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريگونوميټري کچ کړي ، د ځانگړو بلواکو له لارې، دې په نامه تريگونوميټري بلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پريودیکي يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکي پېښې (مور يی تل راگرځيدوني بللی شو) خپل کيږي.

تريگونوميټري تر هپارچ (Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقيبیدي شي، وروسته له مصري پتوليمويس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندي او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختگ ورکړ شو. له پيل دا د کارونې يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريگونوميټري خپل کارونه په استرونومي او فزيک، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمک اندازه کولو، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیک Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.

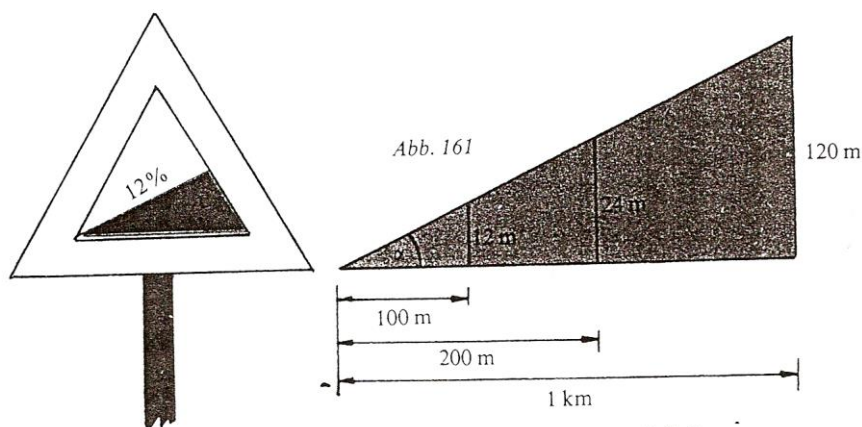
د تريگونوميټري مانا يا مهموالی په ځانگړي ډول په دې ريښتينوالی يا واقعيت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پايرنبلواکوالی، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي (پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

پيلبيلگه: د په مانا يا مهم جگوالي يا لويديز کړنو نڅښه لوحی يا په بله عبارت د زوړي او پيچومۍ ليکتختی (دې ته دې پام وي چې ما دا کليمی هر چيرې د زوړي او پيچومۍ په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي (وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

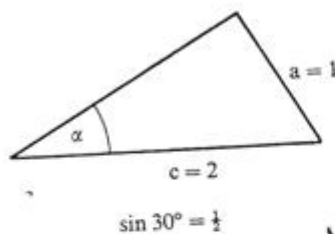
پیچومی یا جگوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جگوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جگوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توگه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جگوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جگوالی لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جگيږي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جگوالی کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هواری فاصلي ته تغیر خوري . د پایکړښو تناسب یا ځاننیونه ثابت یا ځای په ځای پاتیږي او د په سلو کی گڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جگوالی اوږدوالي معلومات نه



خیره ۱۹۴

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده اوکارونه یې څیرونه ده.

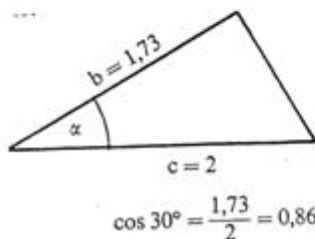
ساینبلواک sinusfunktion: بلیکه:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

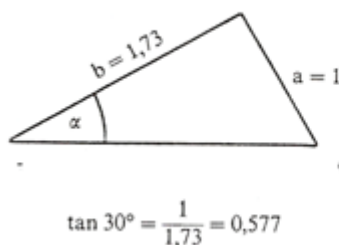
څیره ۱۹۶

کوساینبلوک Cosinusfunktion: بیلکه:



$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرتة کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

تنجنتبلواک Tangensfunktion: بیلکه:

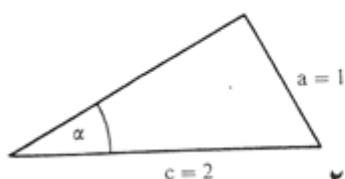


$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

څیره ۱۹۸

د کونجونو د پښونوموونې (دا ټول شته، خو بیا هم اړین دي).

کوسیکانسېلوک Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څیره ۲۰۱

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2}{1} = 2$$

مور به زیات وخت لمرنی درې یا په همدې توګه لمرنی څلور بلواکه د کارونې لپاره راونیسو یا وکاروو.

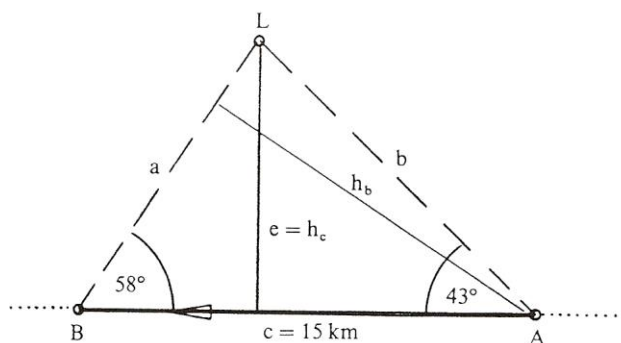
په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چې کونجېلوکي یواځې په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اڅرنی هنري، د مخکنی مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکړنې وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشو کونجونو.

پیلېلګه

یوه کینستی د رڼا زکړي (کله چې کینستی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کینستی یا یو بل څه ته که یوه کینستی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چې له هغی داسی ډز کیږي چې له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چې څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43^\circ$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

یوه تگ پایکرنې $c = 15 \text{ km}$ او کونج $\beta = 58^\circ$ وروسته.
 په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼا اور څخه څومره لرې ده؟
 د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډز رڼا اور څخه څومره لري دی؟
 په A کی له اور څخه څومره لرې وه؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ; \quad \sin \beta = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د h_b په لور اوبصول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12,959 \text{ km}$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12,959 \cdot \sin 43^\circ = 8,838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8,838}{\sin 58^\circ} = 10,421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونو a او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

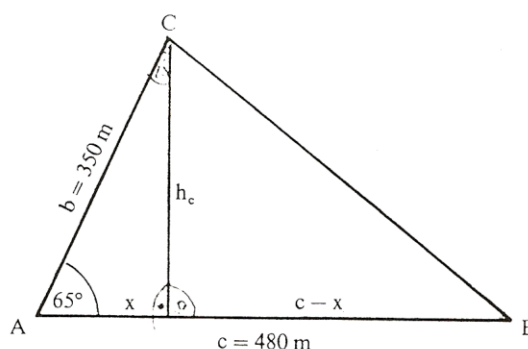
د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځاننیزه یا تناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیزه یا تناسب دی.

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= a / b & \sin \beta / \sin \gamma &= b / c \\ \sin \gamma / \sin \alpha &= c / a \end{aligned}$$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کې هم باور لري (تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي. سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغو تر منځ راگیر کونج؟

پیلېلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350 \text{ m}$
او $c = 480 \text{ m}$ دي او یو کونج $\alpha = 65^\circ$ څښکوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جگوالی یا جگۍ h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.

دلته دی $x = b \cdot \cos \alpha$ ،

ځکه چې $\cos \alpha = x / b$ دی . د پیتاگوراس د جلی له مخی

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

د اړخونو اوږدوالی نوموونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راگرځیدونکی (zyklisch) (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده گردی ډوله یا منظم بیرته راگرځیدونکی) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وايي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواک له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره، ترڅو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو. د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیدا شو:

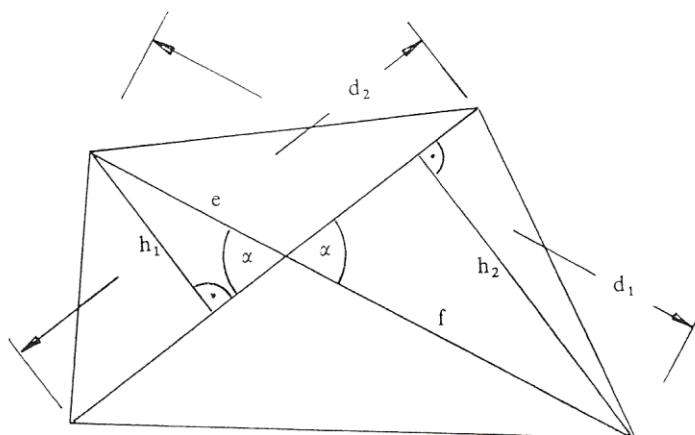
$$A = 0,5 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = w(d_1; d_2) \quad \text{چیرته چي}$$

$$A = 0,5(d_2 h_1 + d_2 h_2) \quad \text{اوبی یا حل :}$$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي، نو لرو

$$\begin{aligned}
 h_1 &= e \cdot \sin \alpha \\
 h_2 &= f \cdot \sin \alpha \\
 \Rightarrow A &= 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha \\
 \Rightarrow A &= 0,5 \cdot d_2 d_1 \sin \alpha
 \end{aligned}$$



څيره ۲۰۴

د په خوبښه کونجونو تريگونوميټريکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وويل، چي کونجبلواک، نه يواځي د دننه لورته تيرو درېگونديو لپاره، بلکه د هغو کونجونو لپاره چي له ۹۰ درجو لوي وي، هم هدفمند (موخور) تشرېحور دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه يا هدف تر لاس کړ.

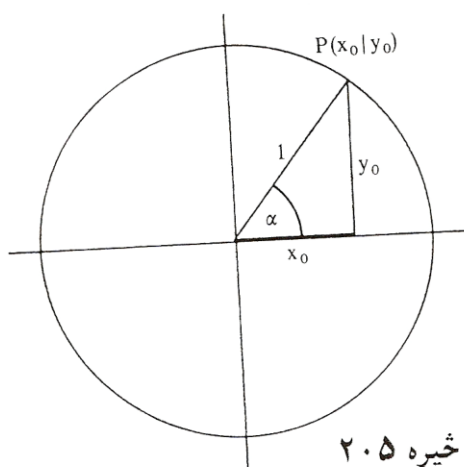
دا پراختيا څنگه تصور يا د خيالوړ کيدی شي؟

په ښه توګه داسې کیدی شي چې په یوه ولاړ پروت سیستم یا کوارډیناټ سیستم کې یوه گردۍ ووهي چې وړانګه یې ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چې وړانګه یې یو یوون دی) او د گردۍ منځته کې او د پروت ولاړ سیستم کوارډیناټ سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډۍ، چې د هغې یو کونج د گردۍ څنډریکونج دی، یعنی کونج یې د گردې په منځ یا څنډری پروت دی، (خیره ۱۴۲) کم له کمه یې یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډۍ په دننه کې شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړ کونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چې په لمړي لمړي څلورمه یا کوارډانټ (Quadrant) کې پروت دی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په گردۍ، د کونجته کې $P(x_0|y_0)$ په پام کې نیولو سره، باور لري:

$$\sin \alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos \alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښې د پریوسټون او یا د سیورېدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوونکي مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چې د محور غبرګي رڼا لاندې راشي.



خیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کې کیدی شي چې د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکی پیتاګوراس:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

چیرته چې $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$ په مانا دی.

کیدۍ شي ، چي پوښتنه وشي چي همدا « سيوري » بيا كله لاس ته راتلي شي.
دا حالت بيا ټيڪ هلته لاس ته راځي، چي وړانگه د منفي x -محور سره يو
كونج α جوړ كړي، يعني خنثريكونج يي $\alpha - 180^\circ$ وي.

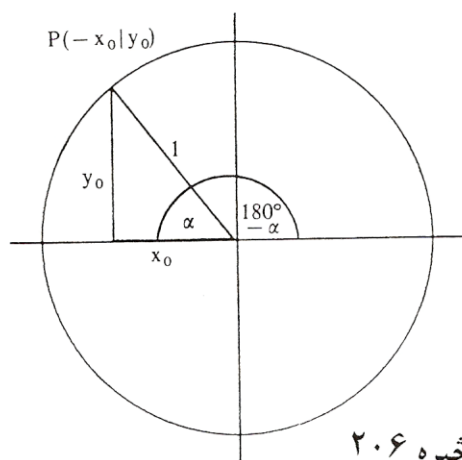
د « سيوروخيرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

ځكه چي دا سيوري همغومره اوږد
دي لكه د مخه، مگر اوس له صفر
پيل مخامخ (منفي) لور ښايي.

په ورته توگه لاس ته راځي :



څيره ۲۰۶

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \sin (-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

د كونج $\alpha + 360^\circ$ لپاره بيرته د سرچيني كونج اړيكي لاس ته راځي: همدا ډول

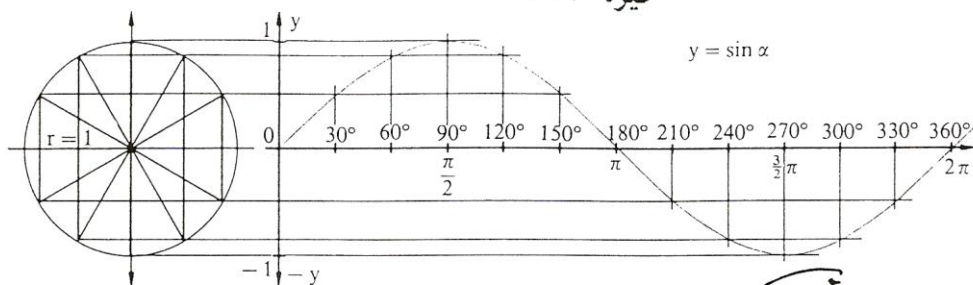
د $\alpha + 720^\circ$ لپاره اوهمداسي نور. په دې توگه د په خوښه كونجفنكشنونو يا

كونجبلواكو لپاره د ساين او كوساين بلواك تعريف دي.

د $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ له امله (مقايسه مخ | ۱۵ |) دا د تنجنت بلواك لپاره

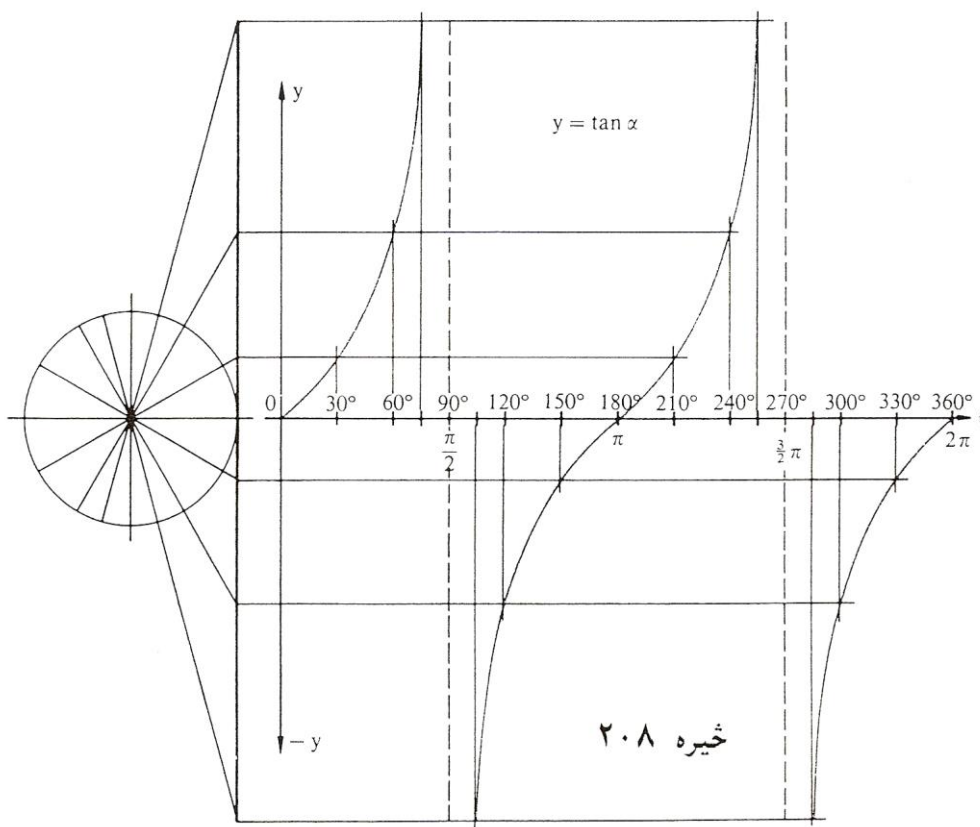
هم صدق كوي. له دې امله لاندې د بلواكگرافونه لاس ته راځي

څیره ۲۰۷



Die Sinuskurve: $y = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

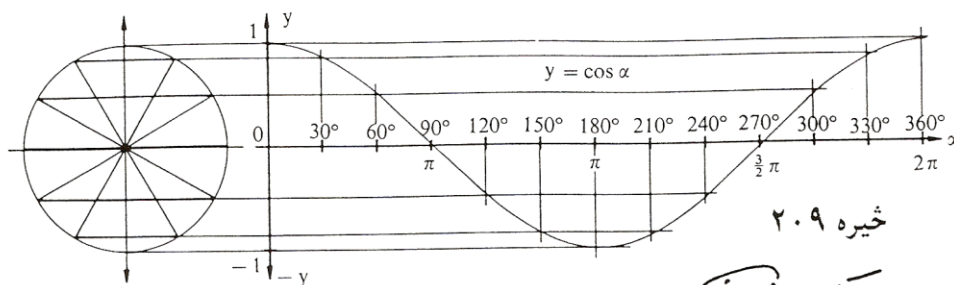
د سین جبهه



څیره ۲۰۸

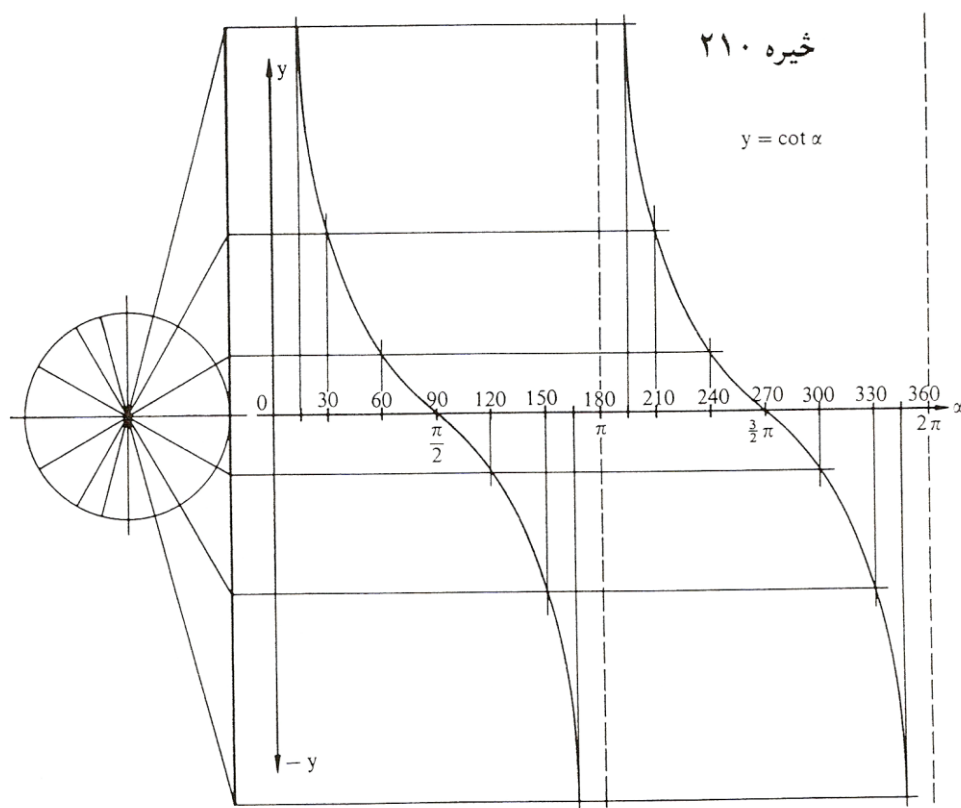
Die Tangenskurve: $y = \tan x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

د تانجنت جبهه



Die Kosinuskurve: $y = \cos x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

ڊکوسائين کي ۵

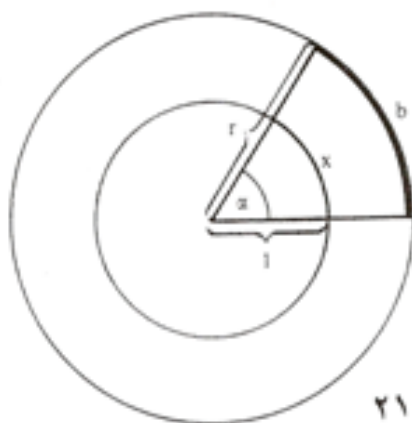


Die Kotangenskurve: $y = \cot x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

ڊکوتنجنت کي ۵

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا - اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره گردۍ ښایي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده، چې گردۍ په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچپوونونو یا کچواحدونو کې ګډ دي، چې په ګټونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتدیری ریلګټونه دي، په داسې حال کې چې وتل ګټونه (= د تعریف دیری ګټونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کې موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



څیره ۲۱۱

کونج لويي په واقعیت کې یوون «راد» (rad) « لري، مګر دا په کارونه یا عمل کې کیدي ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته موږ نه راهڅوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریګونومتريکي بلواکو کې ایښودل کیږي (د بیلګې په توګه $\sin$)

ارګومنټ (Argument تعریفدیری) بلل کیږي. په تعریفدیری کې کیدي شي چې نوې درجه، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جېشمیري کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي (راتلونکي دې وکتل شي)

په برخه گردیبرخوکی وښوول شو (گردیبرخی د مخه خپل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه گردیبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پورې 360° درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپیری کی $\frac{\alpha}{360^\circ}$ همداسی نیسي لکه په پیل کی α و 360° درجو ته . دلته گردیگن دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبللگه:

کونج $\alpha = 60^\circ$ له گردی د 10 سانتیمتره وړانگی سره یوه په لاندې ډول گردی لینده $b = 20\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 10,47 \text{ cm}$ غوڅوي یا بیلوي. د گردی

چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83 \text{ cm}$

همغه کونج α د 5 سانتی متره وړانگی سره گردیلینده

$$b = 10\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 5,236 \text{ cm}$$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري : $U = 10 = 31,416 \text{ cm}$.

له گردی د وړانگی $r = 1 \text{ cm}$ سره ددې په خټ یا برعکس کونج گردیلینده

$$b = 2\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 1,047 \text{ cm}$$

غوڅوي» د دې گردی چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلگی څرگندیري، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیري لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردي د وړانگی 1 سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردي د گردیلیندی اوږدوالي کچگن، چی په خنټریکونج

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi) 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګې څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه رییلګڼونه پریښوول شوي.
بیلګې:

$$\begin{aligned} \alpha = 1^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ} \pi = 0,0175 \text{ (rad)} & \alpha = 180^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \pi = \pi = 3,1416 \\ \alpha = 30^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236 & \alpha = 360^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ} \pi = 2\pi = 6,2832 \\ \alpha = 45^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854 & \alpha = 720^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{180^\circ} \pi = 4\pi = 12,5664 \quad \text{usw.;} \\ \alpha = 60^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472 & & \\ \alpha = 90^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708 & \alpha = -75^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{-5}{12} \pi = -1,309 \end{aligned}$$

ارکوسبلواکي Arcusfunktionen

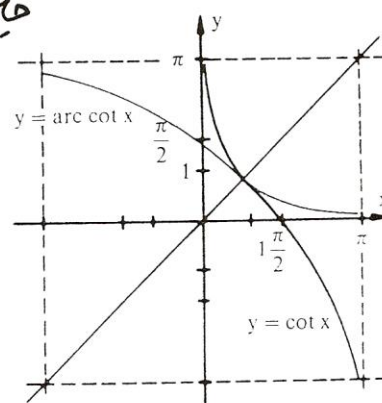
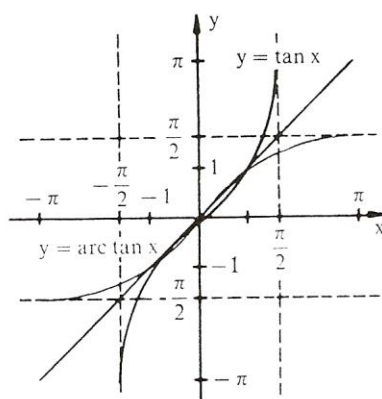
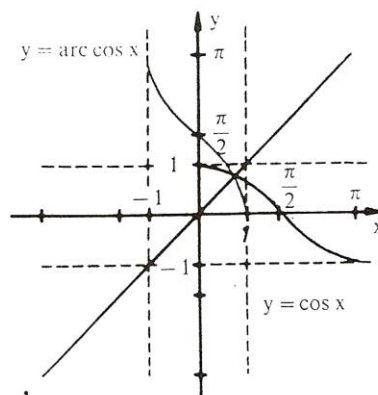
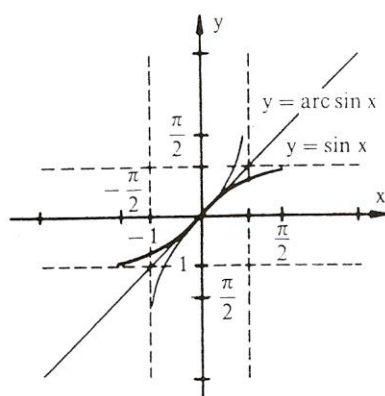
زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي، چې لکه په ورکړشو کرښخاننيونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومېږي یا څنګه راڅرګندېږي یا بهتره څنګه ځانونه نیسي. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیګی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونو لپاره یا

مختلفو واټنونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعريف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

تعريف: د یوه (رابند یا محدود) تريگونوميټريکي بلواک په څټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کېږي یا ځيکلوميټريکي بلواک (لاتین: ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته $\arcsin(x)$ لوستل کېږي «د x ارکوس ساين. د کونجبلواک تعريف ډیری دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښت ډیری دی او په څټ ارگومنت یا تعريف ډیری دلته تل یو ريلنگن دی.

Trigonometrische Funktion تريگونوميټريکي	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f: x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$f: x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



فایده ۱۱۲

بیلگی:

Beispiele:

1. $\arcsin(0,8) = 0,9273(\text{rad}) = 53,13^\circ$
2. $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0^\circ$
3. $\arctan(-100) = -1,5608(\text{rad}) = -89,43^\circ$
4. $\text{arccot}(-70) = -0,0143(\text{rad}) = -0,82^\circ$

۵- دا چی کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په ختې بلواک دې نو باور لري

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$

$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$

$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنی په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0,4)) = \sin(23,58^\circ) = 0,4$$

$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0,5) = 1,0472$$

$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88,5679^\circ) = -39,9999$$

$$\text{arccot}(\cot(60^\circ)) = \text{arccot}(0,5774) = 1,0472$$

د جشمیری کارونی یا استعمال لپاره

داجی پخوا معمول جدولونه د بلواک تعریفیږي او ارزښتپيږي شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یی ایلکترونيکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشميري استعمال په هکله هم څه ووايو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلک اختیار کی لري، چی د درجي اوږون په لینده کچ او په څپ کوي، مگر شمیردرځ په توگه باید د شمیرونکی په پروگرام کی ځای په ځای شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی

د <....> سره په نڅښه شی:

په قاعده کی دریی بلواک ورکړ شوي دي : $\langle \sin \rangle$; $\langle \cos \rangle$; $\langle \cot \rangle$ - کوټنجنټ
 بیا داسی شمیر لکیدی شي، د $\langle \tan \rangle$ $\langle 1/x \rangle$. د $\langle \text{INV} \rangle$ - توکمي سره سری
 ارکوسبلواک ته راځي: نو $\langle \text{INV} \rangle \langle \sin \rangle$ ارکوس ساین دی. په عمومی توگه
 کونج - بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي - باید د فنکشن له
 مخه ورکړ.

پیلکی

۱ لاندې جدول همغه د کارونې يا اعمال لپاره د جشميري چمتوالۍ ښای :

Winkelmaß کونجیج	TR-Modus په څښونه	Beispiel نېټکه
Altgrad زیر درجه	DEG	$\sin 45^\circ = 0,7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^\circ = 0,7071$
Bogenmaß لیندکج	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
$\sin 45^\circ$	45 <sin>	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	< π > <: > 6 <sin>	0,5	RAD
$\cot 30^\circ$	30 <tan> <1/x>	1.732050808	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	60(°)	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	$1,047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
$\operatorname{arccot} 2$	2 <1/x> <INV> <tan>	26.56505118°	DEG
$\sin 220^\circ$	220 <sin>	-0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه - یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د $\langle \text{DRG} \rangle$ څخه لاس ته راځی یا د بیلگي په توگه $\langle \text{MODE} \rangle$.

د ورکړشوي درجه گڼ اوږون په لینده کچ د $\langle \text{DRG} \rightarrow \rangle$ سره سورت نیسي. بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چی لړل مو- د $\langle \text{INV} \rangle$ - تکمی سره.

بیلگی

60°	<DRG>	60(rad)
60	<DRG>	60(grad)
60°	<DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<DRG →>	60°
60°	<INV> <DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<INV> <DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<INV> <DRG →>	60°

دلته گراد نښونه (gard) (نوی درجه ده یعنی گون (gon)).

ځنې جشمیرې په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجې یې په ګراد دقیقې، ثانیه او یا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تګمې $\langle \text{DMS-Dd} \rangle$ سره صورت نیسی:

26.75° 30°15'	$\langle \text{inv} \rangle \langle \text{DMS} - \text{Dd} \rangle$ $\langle \text{DMS} - \text{Dd} \rangle$	26°45' 30.25°

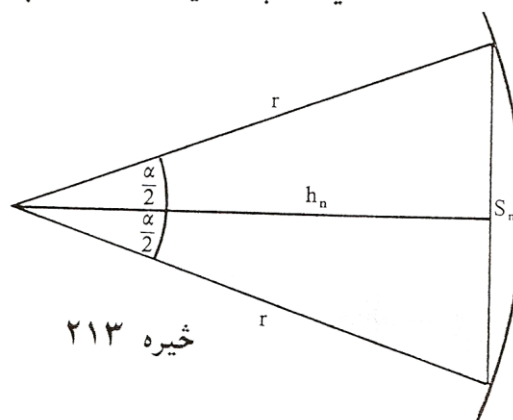
د " 30° 15' " ورکړه کیدې شي د جشمیرې سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جشمیرې د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چې داسې شیان موږ متأسفانه په خپل هیواد کې نه لرو ، خو په هر صورت یې لیکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پرېښوولی)

پیلېلګه: دلته دې S_n د یوه منظم n -ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په یوه ګردۍ کې چې وړانګه یې $r = 5 \text{ cm}$ ده، راګیر دی.

الف) وښایي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin \left(180^\circ : n \right)$$

ب) د یوه داسې n -ګوډي چاپیری U_n وشمیرئ ، چې $n = 8; 16; 32; 128$ وي، او په نزدې توګه یا تقریبي د دې ګردې چاپیری د دې وړانګې r سره وښایي .



پ (په همدې ډول n -گړې له هوارو A_n څخه په نژدې توګه یا تقریبي د گردۍ — هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n -گړې کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي .

د هغو د ځینتریکونج α لپاره باور لري $\alpha = 360^\circ / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایي د ځنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360^\circ / 2n = 180^\circ / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n / 2) / r = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

$$b) U = n \cdot S_n = 2r \cdot n \cdot \sin(180^\circ / n) = 10n \cdot \sin(180^\circ / n)$$

د ارزښتشمیرنو د غلطۍ مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپرلپسی تګمی وکارول شي یا استعمال شي .

$$\begin{array}{l} 180^\circ \langle \text{STO} \rangle \langle : \rangle \quad 8 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 8 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 30.614675 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 16 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 16 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.214452 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 32 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 32 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.365485 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 64 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 64 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.403312 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 128 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 128 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.412773 \end{array}$$

پ (د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځي

د هر دریګوډي هواره ده: $0, 5 \cdot S_n \cdot h_n$. د

$$h_n = r \cdot \cos(180^\circ / n)$$

$$S_n = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

او

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0,5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0,5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې پوښتنې (محاسبه کول) په

360° <STO> <: >	8 <=> <SIN> <· >	8 <· > 12.5 <=>	70.710678
<RCL> <: >	16 <=> <SIN> <· >	16 <· > 12.5 <=>	76.536686
<RCL> <: >	32 <=> <SIN> <· >	32 <· > 12.5 <=>	78.036129
<RCL> <: >	64 <=> <SIN> <· >	64 <· > 12.5 <=>	78.413712
<RCL> <: >	128 <=> <SIN> <· >	128 <· > 12.5 <=>	78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چي له یوې زخیږې زیاتې ولري ، لکه چي پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتې هم زخیږه کیدی شي» په یوه منظم پروگراموړ ماشین سره کیدی شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د گوډونو گڼې څخه تښتو شو یا د گوډونو گڼې باندې صرف نظر وشي .

د تریگونومتريکي بلواکو خویونه

دا چي کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي ، کیدی شي چي یوه کونج بلواک تعریفیږي یا α او یا x وي. ددې لپاره چي د یوه بلواک خوي باندې ټینگار وکړو ، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو .
د لاندې خویونو لمړۍ ډله یواځي له تعریف مساوات (د مخه راغلی) او د پیتاگوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x ; 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتريکي بلواکو کې هيله ده ، چې د پوتنځ لیکدود په پام کې ونیسی.

په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې $gegeben$ ورکړی او $gesucht$ غوښتونې یا پلټونې په مانا دي

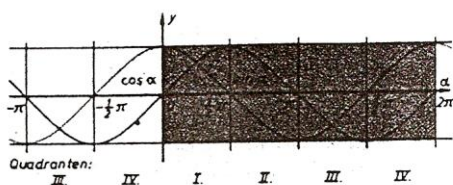
$\begin{matrix} gegeben \\ gesucht \end{matrix}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په گوته کړل، کیدی شي چې تریگونومتريکي بلواک د مختلفو گونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریگونومتريکي بلواک ټول پریودیګي یعنې بیرته راګرځیدونکي دي، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکرارېږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راګرځیدنه (یا 360° درجې) لري، کونجنتبلواک راګرځیدنه (یا 180° درجې) لري.

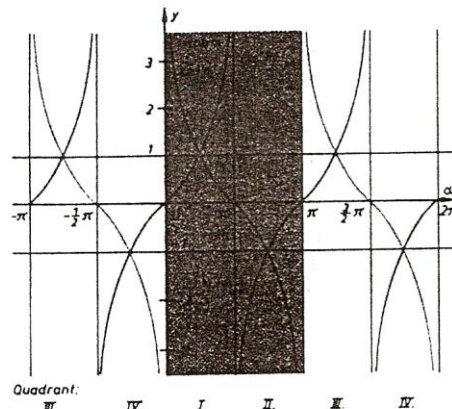
$$\left. \begin{aligned} \sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن
پروچود یا نن راگر چیرنه



د قنجنن او دو نیمت فنکشن پروچود
بیلیکې :

$$\begin{array}{llll}
 \sin 50^\circ & = \sin (50^\circ + 360^\circ) & = \sin (50^\circ - 720^\circ) & = 0,76604 \\
 \cos -30^\circ & = \cos (-30^\circ - 360^\circ) & = \cos (-30^\circ + 1080^\circ) & = 0,86603 \\
 \tan 2,5 & = \tan (2,5 - \pi) & = \tan (2,5 + 5\pi) & = -0,74702 \\
 \cot 10 & = \cot (10 + \pi) & = \cot (10 - \pi) & = 1,54235 \\
 \sin 35^\circ & = \sin (180^\circ - 35^\circ) & = -\sin (180^\circ + 35^\circ) & = -\sin (360^\circ - 35^\circ) = 0,573576 \\
 \cos 35^\circ & = -\cos 145^\circ & = -\cos 215^\circ & = \cos 325^\circ = 0,81952 \\
 \tan 0,6109 & = -\tan 2,5307 & = \tan 3,7525 & = -\tan 5,6723 = 0,700208 \\
 \cot 0,6109 & = -\cot 2,5307 & = \cot 3,7525 & = -\cot 5,6723 = 1,428042
 \end{array}$$

که د فنکشن گراف ته په خیر شو نو په دې برسيره په ټينگه روښانيږي :

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	-0,573576	-0,573576
cos	0,819152	-0,819152	-0,819152	0,819152
tan	0,700208	-0,700208	0,700208	-0,700208
cot	1,428148	-1,428148	1,428148	-1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جیشمیری یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin x$ bzw. $\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$ bzw. $\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
$\tan x$ bzw. $\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	-	0
$\cot x$ bzw. $\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

د نته ماچ د هداړل په مانا دس او کیدس تیږی یا هموی .

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا گوماني لاس ته راوړی شو

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) & \cos x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ \tan x &= \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) & \cot x &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)\end{aligned}$$

دا گومان کیدی شي په ولاړ کونجیز دریگوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$$\sin \beta = a / c \quad \text{او} \quad \cos \beta = a / c$$

د $\beta = 90^\circ -$ له امله لاس ته راځي :

$$\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$$

په ورته توګه نورې غوښتنې هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د سین او کوساین

بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنټ بلواکو گرافونه د $x = \frac{\pi}{2}$ کرښی

ته یو بل سره محوریو مترې ځغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین -، تنجنټ - او کوتنجنټ بلواک نا جفت دي « د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \tan(x) = -\tan(-x); \quad \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه: په دې نلواکو کي کیدی شي چې x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin (-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan (-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = 0,27762$$

د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چې کونجېلواک لایني نه دي (د فنکشنګراف کرښه نه ده، بلکه کرښه ده)، نو ډبل تعریفېرې پورې ساده ډبل بلواک ارزښت اړه نه لري. لکه

$$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$$

د داسې په نامه زیاتونمسئلي په مرسته ممکن کیږي، چې د بلواک ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابې کړی شو.

بیلگی:

$$1. \quad \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$1'. \quad \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$2. \quad \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$2'. \quad \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$3. \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$4. \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$5. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$6. \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$7. \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$$

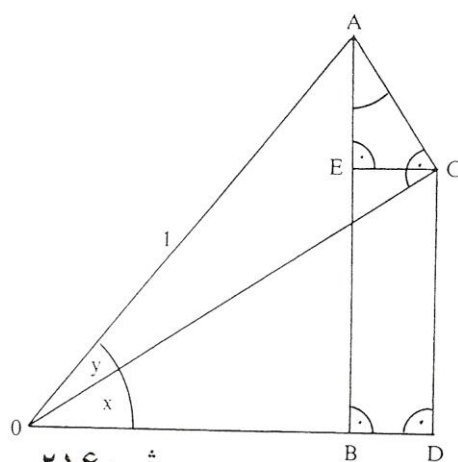
$$8. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$$

$$9. \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$9'. \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq -1$$

$$10. \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq -\cot y$$

$$10'. \cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq \cot y$$



خیره ۲۱۶

1. und 2.:

$$|OA| = 1$$

$$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$$

$$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر حسب دې لارو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د کای په کای کولو ټنډه ښودنه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$1'. \quad 2':$$

$$3. \quad 4. \quad x = y$$

$$5.: \text{ Setze } z+t=x; z-t=y \Rightarrow z=\frac{x+y}{2}; t=\frac{x-y}{2}$$

کېږد

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$

پس ښو

$$= \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

پس

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

6. ښودنه په ورته توګه مخ ته ځي

$$7.: \quad x = y = z/2$$

کېږد

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2 \frac{z}{2} - \cos z \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos z)$$

د ښه ښوونې له لارې ښودنه لرو

$$8.: \quad (*) \sin^2 \frac{z}{2} \text{ durch } 1 - \cos^2 \frac{z}{2}.$$

په (*) کې وليکله په لېږد

9-10: د 11 پرېکړه 1 او 2 او ښه ښوونې له لارې ښوونې لارې

بلواک یا فنکشن $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لکه چې په پیل کې مو وویل په طبیعت او تخنیک کې ډیرې پېښې شته دي چې تل بیرته راګرځي یا لنډ: راګرځي، یعنې پریودیګي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواک بسیا نه کوي.

دا زیات علتونه لري: لمری د ساینبلواک د -1 او 1 ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور داواقي د کونج په واک کې نه دي بلکه د وخت په واک کې دي د یوې راګرځیدنې سره، چې دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواک د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیکیشن شي یا یې بڼه واوړي. دا بڼه اوږون او د هغې تاثیر په لاندې لیدنه کې راټول شويدي، ګراف یې ورزیاتې څیړونې لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کې مګر یواځې د ساینبلواک (په همدې توګه د هغې مخامخ د کوساین بلواک چې په $\pi/2$ سره راګڼل شوی وي) د مانا ډک دي. (لوستل: له لږ لور څخه)

بیلګې	د کارونې ساحه	تاثیر	بلواک
څلورمه څلورمه ۲۱۷	ټولې تلپیرته راګرځیدونې تعاملونه		$y = \sin(x)$
څلورمه څلورمه ۲۱۸	د یوه مساوی او ډول شپاړتو ډول یو په بل مړل ډول	د -1 لور باندې راګڼنه	$y = \sin(x) + d$

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا های بدلون	په بدل بوښنه جریان د بوښنه او شیاؤونک تغییر د وښانوڼه	۲۱۹
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیټود د ټاکل بدلون فالتور - ۱ د 180° فاز های بدلون د	د یوه بندل خوږ بدنه	۲۲۰
$y = \sin(bx)$	د پریود تغیر یا بدلون سرعت $b > 1$ $0 < b < 1$ $b < 0$ په کرا کیدل په غټ کیدنه کم مخور د	د یوه بنسټیزې پورې تغییر د پوره وخت داوړنه او رهغی پورې لمنزه لکه په دغو الویه او ازولو کې	۲۲۱
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پړاوې جریان یا عمل	۲۲۲

تمرینونه

۱ - د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$$4^\circ 6' = 4,1^\circ \quad ; \quad 10^\circ, 5' = 10^\circ 30'$$

a) $6,75^\circ =$

b) $120,48^\circ =$

c) $-75,65^\circ =$

d) $52^\circ 16' =$

e) $97^\circ 13' =$

f) $44^\circ 44' 44'' =$

۲ - په درجه کچې وليکي

a) $x = \pi/3,$

b) $x = -\pi/4,$

c) $x = (2/3)\pi$

d) $x = 4$

e) $x = -3$

f) $x = 4,7$

۳ - په لینده کچې یې وليکي

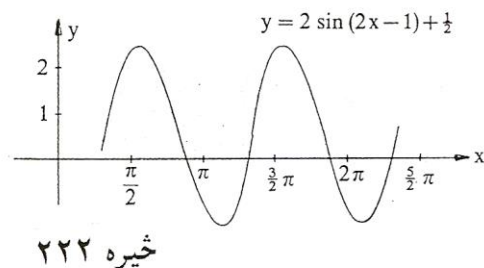
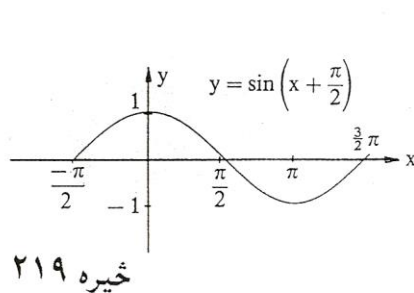
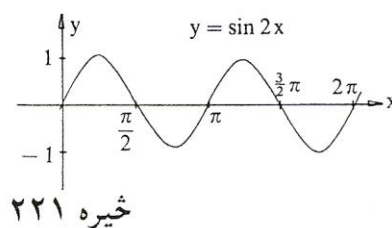
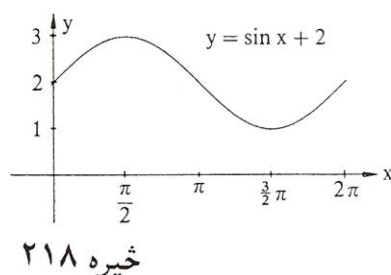
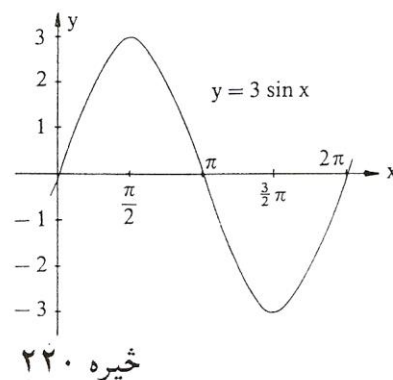
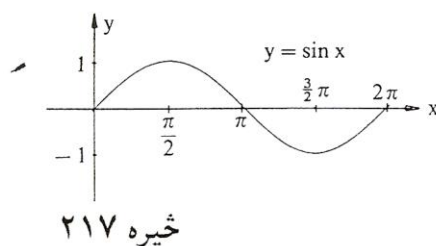
a) 15°

b) -60°

c) 540°

d) $20^\circ 15'$

e) $15,75^\circ$



د دې بلواک گراف د ساین کړې $y = \sin x$ څخه لکه چې گورو لاس ته راځي:

- ۱- د ارزښت دوه ځله کیدل
- ۲- د نیمې راگرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه
- ۳- په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه
- ۴- په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

۴ - وټاکي

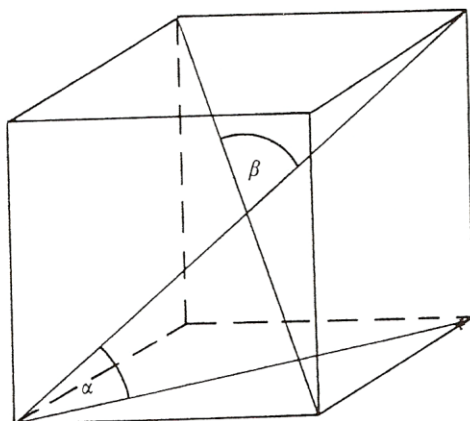
- a) $\sin 20^\circ$ b) $\sin(-30^\circ)$ c) $\sin 172^\circ$ d) $\sin 1^\circ 4'$
 e) $\cos 35^\circ$ f) $\cos 380^\circ$ g) $\cos(-27^\circ)$ h) $\cos 47,9^\circ$
 i) $\tan 11^\circ$ k) $\tan(-15^\circ)$ l) $\tan 33,33^\circ$ m) $\tan 13^\circ 13'$
 n) $\cot 870^\circ$ o) $\cot(-11^\circ)$ p) $\cot 14^\circ 14'$
 q) $\cot(-2^\circ 2')$
 r) $\sin \alpha = 0,8$ s) $\cos \alpha = 0,9$ t) $\tan \alpha = 2,5$
 u) $\cot \alpha = -1$ v) $\sin \varphi = 0,3$ w) $\cos \varphi = -0,13$
 x) $\tan \varphi = -4$ y) $\cot \varphi = 0,3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ - په يوه ولاړ کونجيز دريگوډي کې لرو $\angle = 90^\circ$ او په دې برسیره :

a) $a = 7 \text{ cm}$; $b = 6 \text{ cm}$

b) $a = 16 \text{ cm}$; $\angle = 66^\circ 45'$

c) $c = 5 \text{ cm}$; $a = 3 \text{ cm}$



خیره ۲۲۳

پاتی ټوټی وشمیری

۶ - په مساوي پښيز دريگوډي

کي ($a =$ پښه ده) دی

a) $a = 10 \text{ cm}$; $\alpha = 80^\circ 40'$

b) $a = 12 \text{ cm}$; $h = 8 \text{ cm}$

c) $\beta = 40^\circ$; $a = 7 \text{ cm}$

پاتی ټوټي وشميري

۷ - د يوه پڅکونجيز ($90^\circ < \alpha$)

دريگوډي لپاره ساين وشمیری

۸ الف (کوساين د يوه پڅ کونجيز

دريگوډي لپاره وشمیری) ($\alpha > 90^\circ$)

- ب (په يوه ولاړ کونجيز دريگوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟
 ۹ - په يوه مکعب کې د يوه هوا نيمې او بنسټهوارې ترمنځ کونج څومره لوي دی؟
 څيره . د دواړو هوا يا فضا يا بدن نيميو ترمنځ کونج څومره لوي دی؟
 ۱۰ - د دوه گردیو وړانگي

$$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 4 \text{ cm}$$

دي او همداسی د منځتکو واټن $|M_1M_2| = 8\text{cm}$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو گردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکي

او د کډې غوڅونی اوږدوالی .

- ۱۱ - په يوه دريگوډي کې د يوه

کونجني می مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی (څيره ۲۲۴).

- ۱۲ - که يوه بار ځاي ته،

چي ۱، ۵۰ متره جگ دی،

يوه زينه ورجگه شي

ميلانکونج دې زيات ترزيات 33° وي، زينه دې څومره لويه وي؟

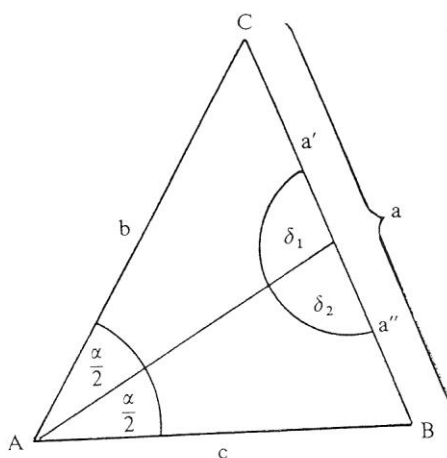
- ۱۳ - الف) د يوې پورته ختلی کوڅي جگوالي توپير دې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او ۱۲% جگه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جگوالي توپير څومره دی؟

پ) د يوه زوړندې پټيلار، چي ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی، که دا د جگوالی توپير ۵۰۰ متره ولري؟



څيره ۲۲۴

۱۴ - یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوگرامه) په یوه ډبره پورته خپژول کيږي، چی میلانکونج $\alpha = 25^\circ$ لري. د وزن زور په زوړند زور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشار زور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کيږي، دواړه زوره خومره لوي دی ؟ (۱ کیلوگرام = ۸۱ ، ۹ نیوتن $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$).

۱۵ - یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کيږي. درسیو میلانکونج 60° دی په پښه باندې په کوم جگوالی باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ - د یوې ۵۳ متره جگي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه

لمروړانگي په کوم جگوالی یوبل سره مخامخ کيږي؟

۱۷ - د یوه ۵ متره جگ کتونکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کيږي چی جگیدونکوج یی $\alpha = 18,5^\circ$ او پښتکی یی $\beta = 8^\circ$ لوید کونج ، برج خومره جگ دی ؟ د لیدتکي څخه یی پروت لریوالی خومره دی ؟

۱۸ - الف (د پیزا (Pisa) کور برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ، ۴ متره ور اوړي. دا برج خومره مایل دی ؟

ب (د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترگي جگوالی د برج بنسټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ (د ۵ ، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کيږي

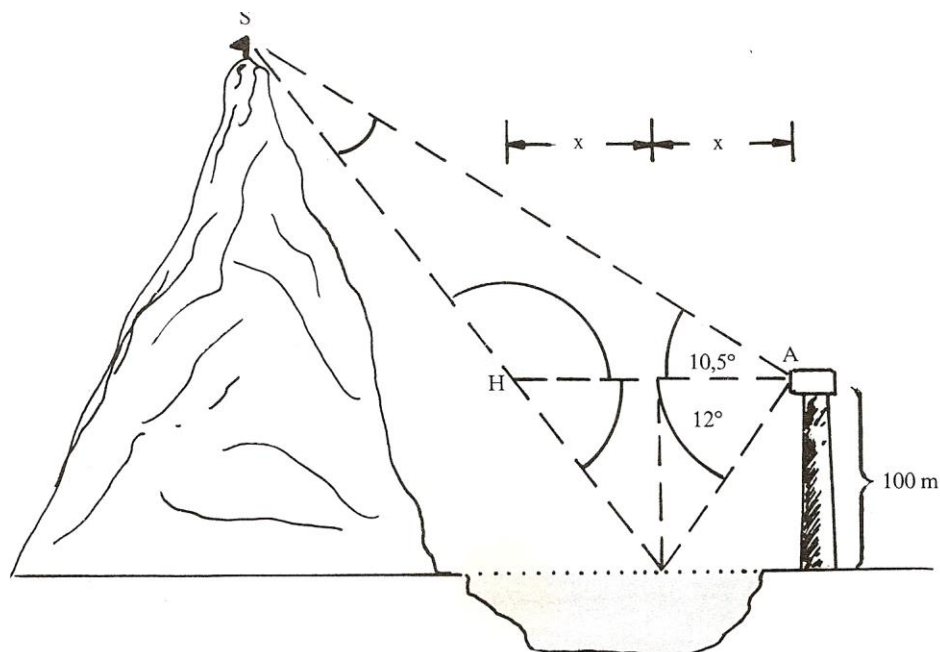
- که جگوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

- که جگوالی یی ۱۳۷ متره وي ؟

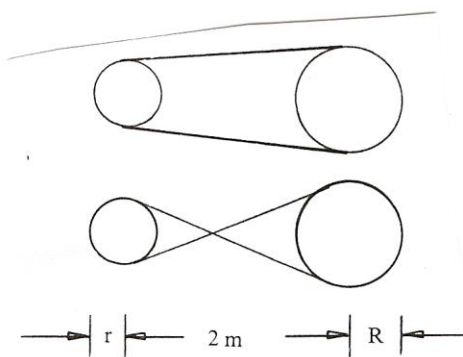
ت (د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

- د بل برج څوکه ښکارېږي چی جگوالی یی ۱۴۳ متره وي ؟

- د پاریس د ایفل برج ښکاریزې چې جگوالی یې ۳۰۰ متره دی ؟
- ۱۹ - د ښیپس اهرام (Cheops pyramide) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یې ۲۳۰ متره دی چې بنسټ یې مربع شکل لري
- (الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
- (ب) د ځنگهوارې دریواړه دنننې کونجونه څومره لوي دي؟
- ۲۰ - یو ژوری یا قبر -۸ ، ۱ متره ژور دی ، بنسټسور یې ۵ ، ۲ متره دی ، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
- (الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
- (ب) که ۱۰ متره اوږد وي ، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی یې ۵۰ ، ۱ متره وي؟
- ۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د بحیرې لور ته ۱۴° میلان لري ، د دننه لور ته ۲۸° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمې هواره څومره ده؟
- ۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهوړن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدتکي څخه چې ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي ، نو د غره د څوکی هندارونه د ۱۲° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج ۱۱° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جگه پروته ده؟
- خیره



څیره ۲۲۵



څیره ۲۲۶

۲۳ - الف) یوه د کښولو کړۍ،

چي په دوه د کښولو چیترو

باندې راتاو ده، څومره اوږده

ده، که لاندې اندازې ولري

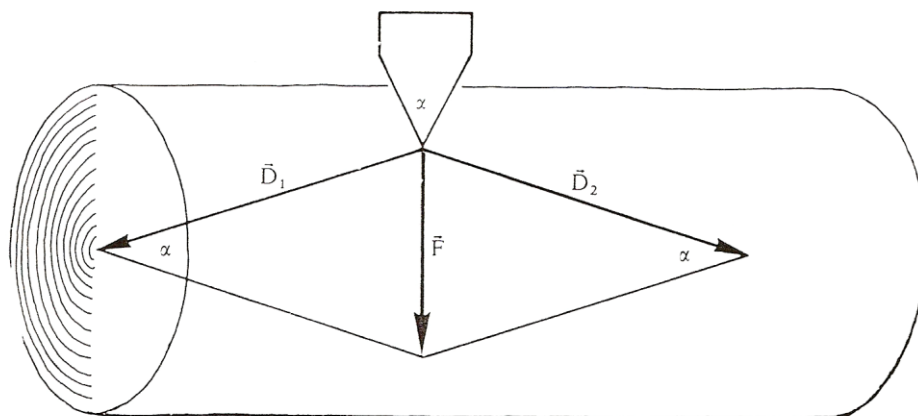
$$r = 22 \text{ cm}, R = 35 \text{ cm},$$

$$|M_1 M_2| = 2m?$$

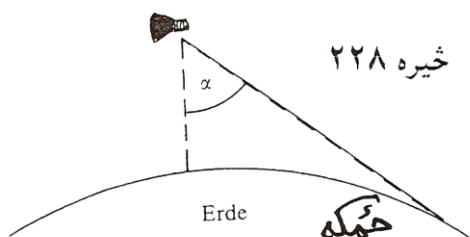
ب) دا کړۍ به څومره اوږدې وي

که د اټیران په څیر له پڅیترو گانو یا ټیکلیو راکی حیدل وي ؟

۲۴ الف (د ونی په سټه یو کایل)موری (په خټک د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه ، که د کایل یا تېرگي کونج $\alpha = 6^\circ$ وي. (خیره ۱۹۴) ؟
 ب (په کومکایلکونج یا تېرگیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷



خیره ۲۲۸

۲۵ - د یوه الوتماشین څخه

ځمکه د یوه α کونج لاندې

لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین

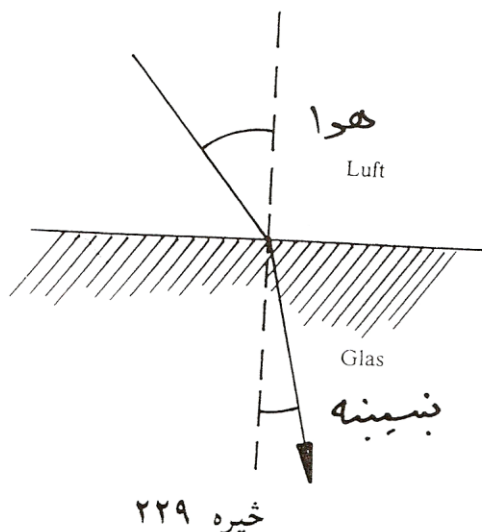
څومره جگ الوزی ؟ (د ځمکې

وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ - یو ګادی د $v = 120 \text{ km/h}$ سرعت

سره روان دی، نو د باران څاڅکی په

پټلی د تلنلور باندې په 115° کونج



د چیترو (مطلب د گاډې د اوسپنې
تیر یا گاډیل دی) مخامخ خغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکي ؟
۲۷ - که د لمروړانگه په دوه مختلفو
طبقو ولوړي، نو خپلی لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلوس Snellius
د ماتقاعدي له مخی کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وايي، چی پروتوړانگه ، ماتوړانگه او
ولاړکرنه یا عمود په بیلیدونکی هواری په یوه هواره پراته دي او برسيره پر
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

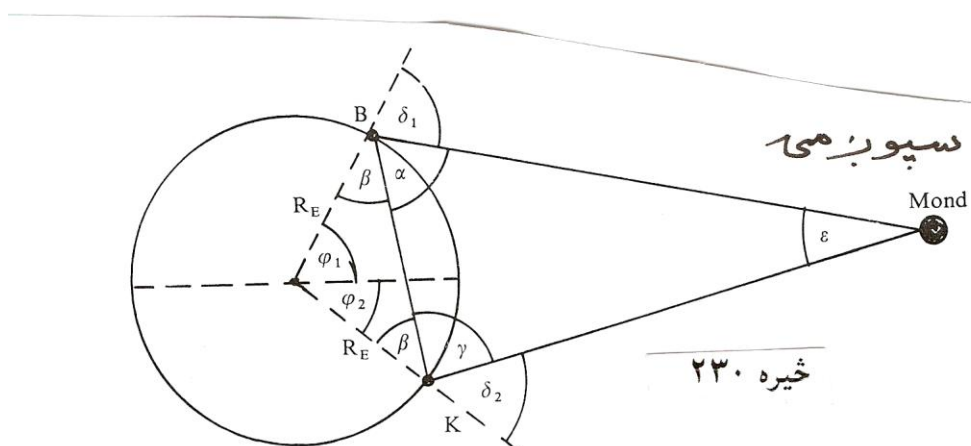
که د رڼاوړانگه په یوه بنسینه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5$ (1,33) دی. وښايي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$$10,5^\circ, 15,8^\circ, 27,3^\circ, 41,2^\circ, 67,6^\circ, 72,4^\circ, 81,9^\circ ?$$

۲۸ - په ۱۸مه میلادي پیړی کی د سپورمی لریوالی تریگومتريکي وټاکل
شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52, 52^\circ$) او لکه د ښو هیلو
په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93^\circ$)، کوم چی په همغه اوږدگراډ پراته دي، د
سپورمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:

$$\delta_1 = 32,08^\circ \text{ او } \delta_2 = 55,72^\circ$$

و شمیری $|BK|, \beta, |KM|$ او له دې څخه d_{EM} .



۲۹ - لږځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعنې د وخت t ترواک لاندې دي. دا د بلواک $y = a \cdot (\sin(2\pi/T)) \cdot t + k$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi/T)t = x$ هغه کونج دی، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1/T = f$ د یوه څرخون پریود یا راځړیدنی وخت په گوته کوي او د لږځیدنی دوام بلل کیږي « f فرکونڅ frequenz بلل کیږي».

۷ • گډوله ګڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنگه يوه ګڼډيری پر بله ګڼډيری ودانه شوې ده • که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \quad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند ليدل کيږي، چې دا په رييلګڼونډيری کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7, 1) د ګڼنو ډيری وغزول شي • له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \dots \dots (7, 2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چېرته، چې لرو: $i^2 = -1$

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \dots \dots (7, 3)$$

ليکو: دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \quad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = (-i)^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارګڼ (imaginär) لاتين: فقط خيالي) يوون (واحد) وايو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a, a > 0 \quad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i, \dots \dots \dots (7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a} \cdot i$$

دلته د (7,4) له امله باور لري

$$x_1^2 = ai^2 = -a, x_2^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \dots \dots \dots (5,7)$$

اوس د ايماجينار گڼ يوون (واحد) ټوليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 = -1, \dots \dots \dots (5,8)$$

ايماجيناريوون (واحد) $z = i$ يو ځانگړی ايماجينار گڼ $b=1$ دی

د ټوليزې څلورۍ (عمومي مربع) برابرې (مساوات) اوبی (حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \dots \dots \dots (7,9)$$

په لاندې ډول د څلورۍ پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

$\Rightarrow$ لاس ته راځی يالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) \quad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \quad (7, 11)$$

او که فورمال پسې وگڼل شي

$$\pm \sqrt{p^2/4 - q} = \quad_{1,2} (x + p/2)$$

نولرو

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \dots\dots\dots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره ریيل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو (7,12) دوه مختلف ریيل اوبيوني یا حلونه منځ ته راوړي •

که $p^2 < 4q$ وي، نو ریيل اوبی نه شته دی

د ایماجینار گڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{\left[q - \frac{p^2}{4}\right](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځای پر ځای کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيوني یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې گڼونه کمپلکس گڼونه (Komplexe Zahlen) (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi, i^2 = -1; a, b \in R \quad (7,13)$$

د کمپلکس گڼونو ډیری په C سره په نڅښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \dots\dots\dots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و (7.13) ته کنجوگيري کمپلکس گڼ بلل کيږي. لنډ کنجوگيري کمپلکس گڼ يا اوښتی گڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \dots \dots \dots (5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = \operatorname{re}(z) \Leftrightarrow b = \operatorname{Im}(z) \quad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنگه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسگونونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

مورن تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ ايښول شوي

گډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم (د گاوس د اعدادو سطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې: $i^2 = -1$

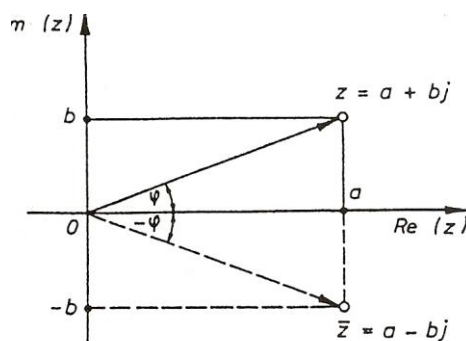


Bild 5.1

مورن دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وايو يا کواورديناټسیستم Koordinaten system

پورته څيره دې وکتل شي

پروتولار سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولار سیستم کې پروت څرخون (محور) د x - محور ته د هوارې یاسطخې ریبلبرخه او ولار محور یا د y - محور ته بیایماجینار برخه وایي لکه څنگه، انځور شوي دي. په دې توګه په پروتولار سیستم کې یو ټکی منح ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي. (مور دا اوس دا برخه نوره نه څیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونې یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه: هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنې د دې برخې سره بلدېږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یا کلمې په پام کې نه راځي، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنگه دی

۱۰۷ زیاتون او کمون:

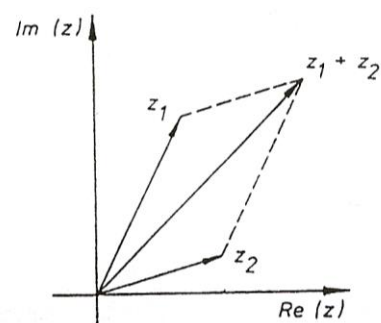
لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د $\text{Re}(z)$ او $\text{Im}(z)$ سره په نڅېنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \dots (7,17)$$

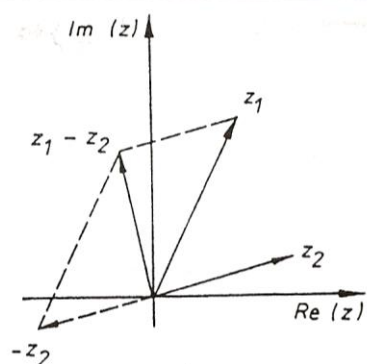
بیلګه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i \\ \Rightarrow z_1 + z_2 &= 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i \\ \Rightarrow |z_1| &= \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13} \\ -z_1 &= -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i \end{aligned}$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنی د $(-z_2)$ په زیاتون) کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

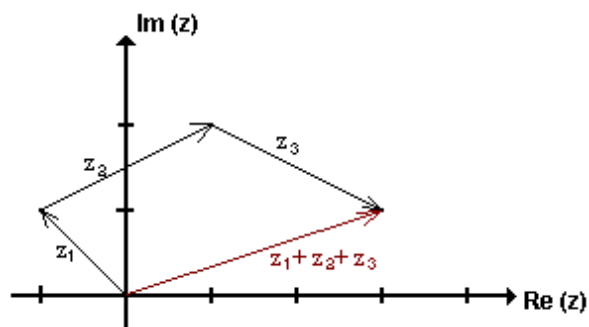


فهره 7.2
Bild 7.2

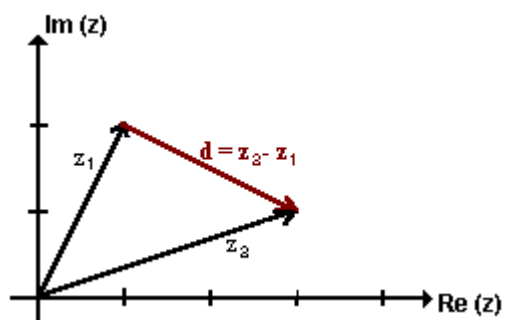


فهره 7.3
Bild 7.3

یا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کمپلکس گڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیري.



د کمپلکس گڼونو ارزښت

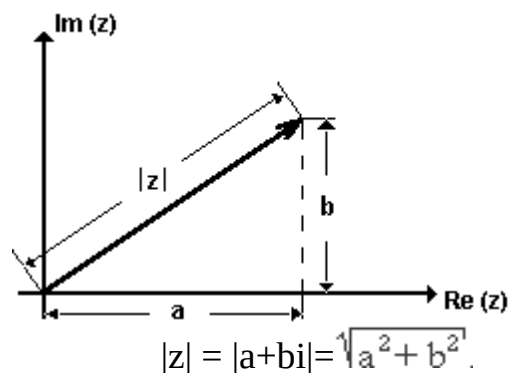
د وکتور z اوږدوالی د کمپلکس گڼونو ارزښت بلل کیږي.

دا د په $|z|$ سره ښایو او د پیتاگوراس (فثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي. مخامخ څیره موږ ته د کمپلکس گڼې

د ارزښت انځور ښايي



په درې گوډي کې د اړخونو ځانښوونه يا تناسب له امله باور لري

$$\|z_1| - |z_2| \| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \dots \dots \dots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷. ۲ د کمپلکس گڼو نوځل:

د ورسره بلد نوک ایشوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$

$\Rightarrow$

نو بارورل ري

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (7, 20)$$

گران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي، دا به راته گران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي. دا لاندې هم ساده ازمايل کیدی شي

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (7, 21)$$

بیلگه ۲۰۷

$$= (a+bi) (a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2 \quad \text{د } z \cdot \bar{z}$$

او (۷، ۱۵) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2 \quad (7, 22)$$

۳۰۷ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \\ (7, 23) \quad &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \end{aligned}$$

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\frac{\overline{Z_1}}{Z_2} \right) = \frac{\overline{\overline{Z_1}}}{Z_2} \quad (7,24)$$

بیلگه ۳.۷ :

د (۲۴.۷) د دویمې برخې ښوونه:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{Z_1}}{Z_2} &= \frac{\overline{Z_1} \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)} \end{aligned}$$

بیلگه ۴.۷ د: او Z_1 لپاره له Z_2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۴.۷. تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱. ۱ - لاندې په اریتمیتیکی یا شمیرنیزه توگه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په گاوس سېچه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$

b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$

d) $z = -1-i$

۱. ۲ - د گاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

$$\text{a) } |z| = \sqrt{2} \quad \text{b) } |z| < \sqrt{2} \quad \text{c) } |z| > \sqrt{2} \quad \text{d) } |z| = r$$

۲ - جمعه او تقریق (زاتون او کمون)

۲. ۱ - د شمیرني او کارني یا رسم کوني له لاري پیدا کړئ

$$\text{a) } (1+2i)+(2+i) \quad \text{b) } (-2+i)+1-2i$$

$$\text{c) } (1-2i)-(1-2i) \quad \text{d) } (-1-2i)+(2-i)$$

۲. ۲ - د شمیرني او کارني یا رسم کوني له لاري پیدا کړئ

$$\text{a) } (22 + 5i) + (2 + i) \quad \text{b) } (3 + 2i) - (5 + 2i)$$

$$\text{c) } (1 + 2i) - (1 + 2i) \quad \text{d) } i - (1 - 2i)$$

۳. ضرب (خل) او وېش:

په لاندې کې a, b, c, d, x, y حقيقي ګڼونه دي.

۳. ۲ - وشمیرئ

$$\text{a) } (2 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - 2i) \quad \text{b) } (3 + 2\sqrt{2}i) \cdot (3 - 2\sqrt{2}i)$$

$$\text{c) } (1 + \sqrt{5}i) \cdot (1 - \sqrt{5}i) \cdot (13 - 12i) \quad \text{d) } \sqrt{3 + 57i} \cdot \sqrt{3 - 57i}$$

۳. ۲ - وشمیرئ

$$\text{a) } (x + y i) (2x + y i) \quad \text{b) } (\sqrt{x} + \sqrt{y} i) (\sqrt{x} - \sqrt{y} i)$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right) \quad \text{d) } (c - \sqrt{d}i)(-c - 2\sqrt{d}i)$$

۳. ۳ - د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

$$3.3.1. \text{a) } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$$

$$\text{b) } \frac{1 - 20\sqrt{5}i}{7 - 2\sqrt{5}i}$$

$$\text{c) } \frac{56 + 33i}{12 - 5i}$$

$$\text{d) } \frac{63 + 16i}{4 + 3i}$$

$$3.3.2. a) \frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$$

$$c) \frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}i-2}$$

$$3.3.3. a) \frac{3a+4bi}{4a-3bi} + \frac{4a-3bi}{4a+3bi}$$

$$c) \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}i} - \frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}i}$$

$$d) (5-i)(6-i) + \frac{5-i}{6-i}$$

$$b) \frac{3-27\sqrt{5}i}{7-3\sqrt{5}i}$$

$$d) \frac{i}{8-i}(i+1)$$

$$b) \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}i} - \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}i}$$

۴. سره رايوخی شوي پوښتنې

کډوله گڼونه يا اعداد ورکړ شوي.

$$z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4} \quad \text{او} \quad z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$$

۳ - د لوگاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونو کې x وشمړئ.

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4}.$$

و شمیرئ:

$$4.1. \quad a) z_1 + z_2 \quad b) z_1 - z_2 \quad c) z_1 \cdot z_2 \quad d) \frac{z_1}{z_2}$$

$$4.2. \quad a) |z_1| \quad b) |z_2| \quad c) \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad d) \frac{\bar{z}_1}{z_2}$$

$$4.3. \quad a) |z_1 + z_2| \quad b) |z_1 - z_2| \quad c) \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad d) \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$4.4. \quad a) |z_1| \cdot |z_2| \quad b) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \quad c) |z_1 \cdot z_2| \quad d) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$$

۴. ۵ - د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

- a) $x^2 + (1 + i)x - 2(1 - i) = 0$
 b) $x^2 + (3 - 2i)x + 3(1 - i) = 0$
 c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}x + 1 = 0$
 d) $16x^2 + 8(i + 1)x + 2(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس گڼونه

خونديونه Inhaltsverzeichnis

- د ریپلو گڼونو بنسټونه او نیوني یا فرضیې
- [ایماجینار گڼونه](#)

کمپلکس گڼونه

- په گڼونو هواره کې د کمپلکس گڼونو انځورونه
- [د کمپلکس گڼونو سره شمیرنه](#)

- [د کمپلکس گڼونو زیاتون ، کمون](#)

- [د کمپلکس گڼونو ځل](#)
- د کمپلکس گڼونو ویش
- د کمپلکس گڼونو ټولگڼیز په توان
- د بېنوم درسي جمله
- [5.6 Die Moivreschen Formeln](#) د موفري فرمول
- [5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen](#) د کمپلکس گڼونو ریښه
- توان د مختلفو جگگڼونو سره
- [5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten](#)

د ریپلگڼونو بنسټونه

د رییلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د رییلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د رییل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ څلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو رییل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1},$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا څلوری یا مربع ریښه د i سره په نڅېنه کوو، چې له دې پر اېلم څخه ووتی شو او څلوری یې په 1 - سره په نڅېنه کوو .

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i .$$

که ګڼ i د رییلګڼونو سره زیات حل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګې په توګه :

$$2i, 3i, -i, 1+i, 2+i, 1+2i, -23+78i, 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

ټولیزه بڼه یې :

$$a + bi,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دی او a او b رییلګڼونه. له دې سره هم لکه د نورو ګڼونو سره ساده شمیرل کېږي، چیرته، چې د i^2 په ځای -1 لیکلی شو یا په څټ: لاندې کې یې بیلګې وگورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټولیزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

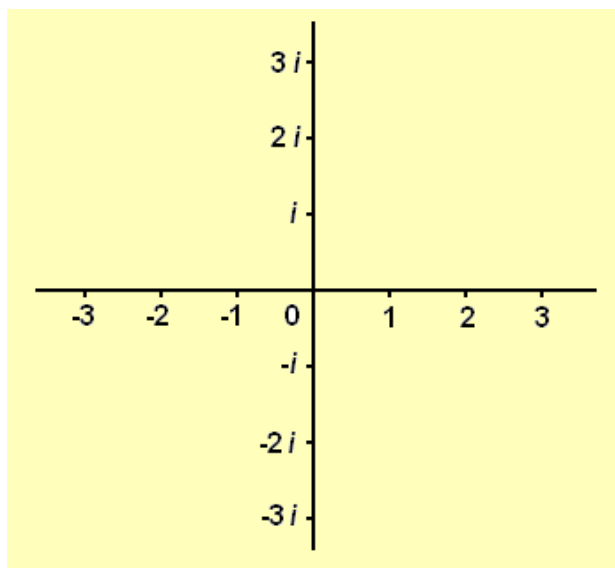
له دې سره ویش هم کړی شو، خدا، چې ستونځمن دی وروسته یې راوړو.

دا لاندې هم لرو

$$i, 2i, i, 0, -i, -2i, -3i, \dots$$

دا ایماجینار ټولګڼونه بلل کېږي یا بولو، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رییلګڼونو محور پوهیږو او ولار محور یا څرخونی یې د ایماجینار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زیاتون کمپلکس ګڼونه دي یا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي.



په لاندې کې یو کپلکس گڼ په یوه رییل گڼ یا پیدایښتي گڼ ویشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n}i .$$

په پورته کې m او n رییلگڼونه دي او ایماجینار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رییلگڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه یې یو ایماجینار گڼ دی.

د دوه ایماجینار گڼونو زیاتون او گمون:

$$ai \pm bi = (a \pm b) i .$$

خُل او ویش یې

$$\frac{i}{i} = 1 .$$

د دې سره لاس ته راځي

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q},$$

چیرته چې p او q ریللگونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګڼونو i یا ضرب او ویش څخه ریللګن لاس ته راځي، چې په لاندې کې یې ګورو .

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i, \dots$$

د ټولګن n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی یې

Error

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1, \dots$$

د سره شمیرل ورسته کېدونکي دي.

کملکس ګڼونه Komplexe Zahlen

ګډ یا مخطلت څلورۍ - یا مربع برابرې شمېرې

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

د څلورۍ پوره کوونې یا تکمیلونې له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i .$$

د دې برابرن اوبیونه نه رییل گڼ دی او نه ایماجینار . دې گڼ ته موږ کمپلکس گڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس گڼونو او د دې سره سره شمیرنه .

موږ دا لاندې کمپلکس گڼ لرو :

$$z = a + bi,$$

چیرته، چې a او b رییل گڼونه دي

د کمپلکس گڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه څلورۍ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه گران لوستکي پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لري کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه رییل اوبیونې لاس ته راځي .

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

لپاره اوبیوني په لاندې ډول لیکل کیږي

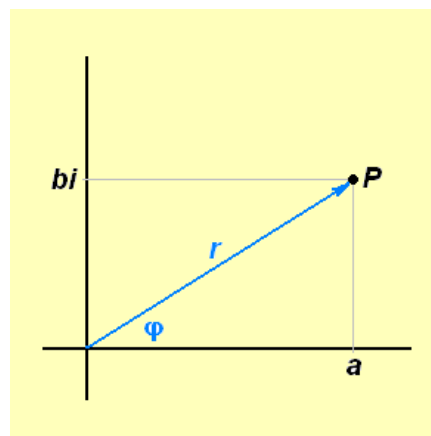
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

اوبیوني کنجوگيري کمپلکس دي، دا په دې مانا، چې یو له بل د مخنځینې له مخه توپیر کیږي.

په گڼو هواره یا گڼسطحه کې د کمپلکس گڼونو انځورونه

د کمپلکس گڼونو گرافیکي انځورونې لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې دریبل او ایماجینار گڼکرېسو څخه غزیدلي ده.

کمپلکس گڼونه $a + bi$ د ټاکنې له مخې (په بدل وار یا همغه وخت) د یوه ټکي P ، چې کواوردینات یا پروت ولاړ محورونه یې a او b ، چیرته، چې محور b ټکي bi په ایماجینار گڼکرېسې باندې په گوته کوي، یا د «بنوونکرېسې» OP سره انځور کیدی شي. دا دیوي اوږدې r سره بنایو او دریلي محور سره کونج ϕ جوړوي. (دا همغه د ټکي P انځورول دي په پولار کواوردینات کې، r د کمپلکس گڼ مطلق ارزښت دی، ϕ یې فاز بلل کیږي.)



د دواړو انځورینې لپاره لاندې ترانسفورمیشن ابرون باور لري (له دې څخه نوج زده کوونکي تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{له لاس ته راځي}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + k \cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګن دی .

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan \frac{b}{a}$$

د في φ اصلي ارزښت بلل کېږي . له دې نور ارزښتونه د k او $\pi 2$ له زیاتون څخه لاس ته راځي .

د دې له مخې کیدی شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي .

$$z = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

" وروسته د اوپلر فرمول "Eulerschen Formel" په مرسته ترې لاس ته راځي

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}.$$

د کمپلکس گڼ دا درې انځوروني په ترتیب داسې بلل کېږي اریتمیټیکي بڼه کونومتریکی (یا تریگونومتریکی بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کېږي، اکسپوننشل بڼه دې دلته راوړل شوي وي، خو د ښوونې لپاره دې ترې کار نه اخستل کېږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کمپلکس گڼونو سره شمیرنه

دوه کمپلکس گڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i.$$

د کمپلکس گڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبري قوانینو له مخې i هم داسې په کار اچول کېږي لکه هره بله کومه د تورو لویه، چې په کار اچول کېږي یا کارول کېږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

د کمپلکس گڼونو «ښوونکریښه» (دا هغه کریښه ده، چې د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور غزیږی وي، یانې د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور، ځکه لوریزه ده) لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس گڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

دا ځل ترلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري (یانې سملاسي ترې څه نه شو پوهیدلی) که د دې په څنټ «پولارکواودینات» وکارول شي، نو لاس ته راځي

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = r_1 r_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2).$$

او له دې سره

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

نو دی

$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2. \quad \text{او} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

د ځل - یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی. د ځل یا ارگومنټ یا فازي د ارگومنټ یا فازي د زیاتون سره برابر دی.

سملاسي پیژندل کيږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n. \quad \text{او} \quad |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

د کمپلکس گڼونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کيږي، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad \text{او} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

که کيږدو $1 = {}_1z$ او $z = {}_2z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} [\cos(0 - \varphi) + i \sin(0 - \varphi)] = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

او په ځانگړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس گڼونو توان (کپلکس گڼ د یوه ناکمیز توان سره د ریپل گڼونو په څیر دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس گڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون یا ضریب z لپاره تربلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

مور لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بینوم درسي جمله

د بینوم جملې لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زیاتیز جگ گڼ لپاره د بینوم جمله همغسې باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \dots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \dots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

Die Moivreschen Formeln د موډري قانون

له برابرې څخه (پورته دې وکتل شي)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1 : (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولګیز جګړې یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \cos^n \varphi + i \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi \\ &\quad - i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi + \dots + i^n \binom{n}{n} \sin^n \varphi. \end{aligned}$$

که د برابرې دوا

په خواوې برابر کېښودل شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې ریښ او ایماجینار برخه دواړه باید برابر وینو د موډري برابرې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi - + \dots,$$

او

$$\sin n\varphi = n \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - + \dots,$$

چیرته، چي بنی لور تر هغي پوره شي، تر څو چي ځله وونی یا ضریب صفر شي.

Wurzeln aus komplexen Zahlen د کمپلکس گڼونو ریښه

د برابرې اوبیونه

$$x^n = z \quad n \text{ positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولگن دی
د کمپلکس گڼ z n -مه ریښه بلل کیږي:

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ردو

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

او

$$x = \rho (\cos \psi + i \sin \psi),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسي

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

دي

په ویشنه کې باید په پام کې ونیول شي، چې ارگومنټ یا پروت محور φ پریودی یا تل بیرته راگرځیدونی دی د پریودی یا راگرځیدنی 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

پسې د ψ لپاره ټیک n مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، یانې

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانله د مخه ارزښتونه (له دویم پسې) تکراريږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس گڼ z د n -مې ریښه بلل کېږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په گڼهواره په یوې گردۍ په O په یوه منظم n - گوډي پرته ده ، د څلورۍ ریښې لپاره له

$$i = i \sin \frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4},$$

او د څلورۍ ریښې لپاره له

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیدا کړي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د ریيل گڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چېرته چې n یو پیداښتګر ګڼ او m یو په خوښه ټولګر دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګر یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو. اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګر دی .

توان د په خوښه ریيل جګګر سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r [\cos (\varphi + k \cdot 2\pi) + i \sin (\varphi + k \cdot 2\pi)],$$

چیرته چې

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

دی، نو د z^v (reell v) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^\nu [\cos \nu (\varphi + k \cdot 2\pi) + i \sin \nu (\varphi + k \cdot 2\pi)].$$

لارښود: د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرني بنسټیز قوانین باور لري، یانې

$$z^\mu \cdot z^\nu = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^\mu \cdot z_2^\mu = (z_1 \cdot z_2)^\mu, \quad (z^\mu)^\nu = z^{\mu \cdot \nu}$$

nicht mehr نور بس دی

۱۳ ترانسځنډنټ برابر ونونه په - مساوات

دلته یواځې هغه ترانسځنډنټ مساوات څیړل کیږي، کوم چې بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتو کې، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسې ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو (فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چې اړولی فرمول زیاتې اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابر ون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابر ون ټولې اوبیوني په پیل برابر ون کې ځای په ځای یا کیښوول شي او وکتل شي چې کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یې برابر ونونو یا مساواتو کې، دلته هم یواځې ریښه اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳. ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ مساواتو د حل (اوبی) پیدا کولو لپاره اړین یا ضرور (ضروري یا اړین شرایط) دی، چې د یو عدد (ګڼ) a لوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b > 1, b \neq 1 \dots \dots \dots (13,1)$$

د بنسټ $b = 10$ لپاره $(\lg a)$ او د بنسټ $b = e$ لپاره $(\ln a)$ کیدی شي (۱۳)
(۱).

سیده د جشمیری له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د $e| = b| = 10$ لپاره برابر ونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \dots \dots \dots (13.2)$$

د لوگاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (ټیپ) دا دی

$$\log_b x = c \dots \dots \dots (13.3)$$

دا برابرون د (۱.۷) ، (۲.۷) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \dots \dots \dots (13,4)$$

دا سی افاده هم د جشمیری سره شمیرل کیدی شي.

بیلگه ۱۳.۱: $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳.۳) بنی اویونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \dots \dots \dots (13,5)$$

دلته $f(x)$ یوه الجبري وینه یا افاده ده، د (۱۳.۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c \dots \dots \dots (13,6)$$

ټولي د (۱۳.۶) اویوني د (۱۳.۵) اویوني هم دي

بیلگه ۱۳.۲: لوگاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتو سره کټمټ دي

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x^2+x+6=2^3=8) \text{ (همداسی)}$$

او لاندې اوبيوني لري

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

يود (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرېون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور (اړخ) ته يود لوگاريتم ريشنل لايښ کمبينيشن الجبري ويينه يا افاده موجوده وي

$$r_1 \cdot \log_b g_1(x) + r_2 \cdot \log_b g_2(x) + r_3 \cdot \log_b g_3(x) + \dots = c \dots (13,7)$$

دلته ځلوني r_i راشنل گڼونه دي. د لوگاريتم قوانينو (۷ . ۷) ، (۷ . ۹) کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وگورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرېونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1} \cdot \{g_2(x)\}^{r_2} \dots (13,8)$$

بيلگه ۱۳ . ۳:

$$\text{لومړۍ له } 2 = \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 (x-1) + \frac{1}{2} \log_3 (x-1) \text{ څخه لاندې}$$

لاس ته راځي

$$\log \left[(x-1) \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

اوله دې څخه ريښه برابرېون $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلورۍ يا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$ د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تيك دا $x_1 = 9,515$ پيل برابرېون پوره کوي

. د $x=x_2 < 0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پيژندنه لري يا تعريف نه دي.

بیلگه ۱۳. ۴:

$$\log_b(2x+3) = \log_b(x-1) - 1 \quad \text{له څخه لاس ته راځي}$$

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

$$\text{او نور پسی } \frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b \quad \text{پس}$$

$$2x+3 = bx-b$$

$$b+3 = x(b-2)$$

$$x = (b+3)/(b-1)$$

پیل وینه یا افاده د $x > 1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $(b+3)/(b-2) > 1$ وي.

$$b > 2 \quad \text{یعني } b-2 > 0 \quad \text{څخه لاس ته راځ} \quad b+3 > b-2$$

له دې لرو $-2 < 3$ دا د ټولو b لپاره پوره دی

$$b \leq 2 \quad \text{لپاره د } b+3 \leq b-2 \quad \text{څخه } 3 \leq 2 \quad \text{لاس ته راځي}$$

اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله که د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوگاریتمي تیپ برابرېون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واپړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \quad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینه یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y = \log_b f(x) \dots \dots \dots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرېون اوبی کوو

$$F(y) = 0 \quad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y_1, y_2, \dots$ په $(13/10)$ کی ږدو، نو د هر y_i لپاره د تیپ $(13/5)$

لوگاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x) = b^{y_i} \quad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم برابر وون پوره کوي، نو ټول ددې برابر وونو اوبیوني یا ځوابونه باید په پیل برابر وون (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځای په ځای شي،

بیلگه ۱۳. ۵: برابر وون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستیځیوشن (بدلون)

$y = \lg x$ سره په څلورۍ برابر وون $y^2 - y - 2 = 0$ بدلیږي.

د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره له $\lg x = 2$ او $\lg x = -1$ لاس ته راځي.

$$x_1 = 10^2 = 100 \quad \text{او} \quad x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابر وون ځوابونه دي.

بیلگه ۱۳. ۶:

له برابر وون $(6 / (\lg x + 1)) + (8 / (\lg x - 1)) = 3$

د، $x > 0$ مگر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې

($\lg x - 1$) ($\lg x + 1$) سره حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) = 3(\lg^2 x - 1)$$

$$6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 = 3\lg^2 x - 3$$

$$0 = 3\lg^2 x - 14\lg x - 5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورۍ بنې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0, \quad y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; y_1 = \log x_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي. که په یوه برابرون کې لوگاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۲ . ۱۳) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلگه ۷ . ۱۳ :

$$\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(x-1) - 1 = 0, \log_2(x-1) = \frac{2}{3}, x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3} \log_2 4 + \frac{1}{3} \log_4 4 - 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جگړې برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون (مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \dots \dots \dots (13,14)$$

کیدي شي چی د لوگاریتم نیولو سره سملاسي حل شي (ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \quad (13, 15)$$

لاندني برابر ونونه په ساده ډول په (۱۳، ۱۴) ډول (رقم) (ټیوپ) برابر ونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلگه ۱۳. ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1 - 2^2) + 3^x(3^2 - 3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1,7095.$$

که په (۱۳، ۱۴) د الجبري ویني یا افادي (x) اکسپوننتونه یاجگگنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, |a|=1, b>0 \quad (13, 16)$$

په دې ډول د لوگاریتمولو له لارې یو الجبري برابر ون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b.....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳، ۱۴) ځوابونه هم دي.

$$2^{x^2+x-4} = 4 \quad \text{بیلگه ۱۳. ۹: مساوات}$$

مو لاندې څلورۍ برابر ون یا مربع مساوات ته بیایي (لارښودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2, x_2 = -3$ ځوابونو سره، کوم چې د پیل برابر ون اوبیوني یا

ځوابونه هم دي.

$$\text{بیلگه ۱۳. ۱۰: په برابر ون } \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ کې د یوه پوتنڅ بنسټ د}$$

بل پوتنڅ د بنسټ په څې ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3, x_2 = -4$$

$$16^{(3^x)} = 4^{(6^x)} \quad \text{بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات}$$

کې کیدی شي چې ناپېژندونکې د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \lg 0,5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2 \lg 2}{4 \lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0,5 = \lg 0,5 \quad \text{یا} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1$$

$$x = 1.$$

$$7^{\sqrt[3]{22}} - 15^{\sqrt[3]{25}} = 0 \quad \text{بیلګه ۱۳ . ۱۲ :}$$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، څکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[3]{22}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{15}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{15}{7}$$

اوله دې اړخ

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0,1677.$$

که د مساوات په کین اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننټونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشي.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} \dots}{b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)} \dots} = c; \dots (13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x) \lg a_1 + f_2(x) \lg a_2 + \dots - g_1(x) \lg b_1 - g_2(x) \lg b_2 - \dots = \lg c \quad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې
یوه الجبري وینه یا افاده F د الجبري اکسپوننٹ $f(x)$ سره رامنځ ته شي
 $F(a^{f(x)})=0$;.....(13,20)

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \quad (13.21)$$

د برابرېون

$$F(y) \quad (13.22)$$

د ټولو اوبيونو $y_1, y_2, y_3, \dots$ لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3,\dots \quad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i; i=1,2,3,\dots \quad (13.24)$$

اوبی شي

بیلگه ۱۳. ۱۳:

برابرېون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$
سره په څلوری

برابرېون یا مربع مساوات $y^2 + y - 2 = 0$ بیرته وارول شي. لاس ته راځي

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 \cdot \lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرېون $x_2 \cdot \lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

بیلگه ۱۳. ۱۴:

په برابرېون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \dots (13, 25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \dots (13, 26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-1}; \dots (13, 27)$$

له دې څخه د مربع کولو له لارې لاس ته راځي:

$$y + y - 1 - 2\sqrt{y(y-1)} = 2y - 1 \Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)} = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0$$

$$y_1 = 0; y_2 = 1$$

تيك $y_2 = 1$ (۱۳، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1} = 1; \dots (13, 28)$$

بايد اوبی . د لوگاریتمولو څخه تعقیبېږي:

$$x^2 - 1 = \ln 1 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي.

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخه ۱۳. ۱ او ۱۳. ۲ کې انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړۍ حل کیدی شي، په کوم کې اکسپوننشل افادې او لوگاریتم یوځای رامنځ ته کیږي.

بیلگه ۱۳. ۱۵:

له $2^{(\ln^2 x - \ln x + 1)} = 8$ څخه د بیلگې په توګه د بنسټ ۲ لوگاریتمولو

له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کیردو $y = \ln x$ ، نو دا څلورۍ برابرېون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي، د ځوابونو

$$y_1 = -1, y_2 = 2$$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1, \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e, x_2 = e^2$$

د ډاکټر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to
general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابررون (دا کتاب په دې څانگه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرېنیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د گروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اووم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).



د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لري د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومېږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library