

ریاضی (شمیرپوهنه)

برای صنف ۱۲ - م

پاکتر ماخان (میری) شینواری

لیکونکی

2016

Ketabton.com

۱	لومړۍ: لیمیت یا حد
۱۰	خواص حدود
۱۶	حد توابع
۲۰	حد اعداد کسري
۲۲	حد توابع
۲۷	حد برای
۳۱	حل به طریق
۳۳	متمادیف
۴۰	خواص تابع متمادی
۵۰	تمرینات فصل
۵۷	تغیر قیمت وسطی
۶۴	شمردن مشتق
۷۰	در جای x_0 مشتق تابع و تابع مشتق
۷۵	تعریفهای تانجنت و عمود و خواص ان
۸۱	قوانین شمارش مشتق
۸۵	مشتق توابع الجبري
۹۰	مشتق توابع مرکب(- زنجيري)
۹۵	مشتق توابع مثلثاتي
۱۰۰	استعمال مشتق در علوم طبيعي

۱۰۵	مشتق درجه بلند
۱۰۹	مشتق توابع اکسپوننشل
۱۱۳	مشتق لوگاریتم
۱۱۶	قابلیت مشتق یک تابع
۱۲۱	مشتق تابع معکوس
۱۲۳	مشتق توابع ایمپایثیت
۱۲۹	خلص فصل
۱۳۱	تمرینات فصل
۱۳۷	قضیه رول
۱۴۱	توابع همناخت
۱۴۱	توابع همناخت
۱۴۷	نقاط افراطی...
۱۵۱	انحنای....
۱۵۴	نقاط انعطاف
۱۶۳	بحث منحنی
۱۶۸	حد افاده های نامعین
۱۷۳	قاعده برنولی....
۱۷۸	مثال استعمال....
۱۸۱	قضیه مفاد بیشترین
۱۸۷	کوتاه فصل
۱۹۲	تمرینات فصل:
۲۰۱	تجزیه کردن به...
۲۱۲	پیشگفتار برای شمردن انتیگرال
۲۱۵	شمردن انتیگرال
۲۲۵	انتیگرال نامعین
۲۲۷	شمردن انتیگرال معین
۲۳۴	قاعده انتیگرال گرفتن

سرلیک

۲۳۷	انتیگرال کرفتن تابع لوگاریم
۲۴۰	قانون تعویضی
۲۴۶	انتیگرال قسمی
۲۴۰	انتیگرال نامتناهی
۲۴۴	تولگه
۲۴۷	د څپرکي تمرینونه

۲۵۳	استعمال شمیرنی اینتیگرال
۲۵۶	از دو خط محدود شده...
۲۶۴	بدنهای دورانی

۲۷۷	تولگه
۲۷۹	تمرینونه:

سوانح نوپسنده
اثر و ترجمه نوپسنده

سریزه

گرانو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لېساره دا د دولسم ټولګي د پښتو او درې کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووايم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندیونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او دلته یې گرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوي برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، ټول د ښوونځي کتابونه، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه گرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د گرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وگوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

گرانو هیوادوالو!

ماته به بڅښنه کړی، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنی، چې څنگه درته وړاندې کيږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

لیمیت یا حد ("The Limit")

ما ترادف زیل اعداد را داریم :

$$(I) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

$$(II) \quad \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$$

$$(III) \quad 2, 4, 6, \dots, 2n$$

اگر n به لایتنای تقریب کند، از ترادف های بالا (۱) به طرف صفر، (۲) به طرف یک و (۳) به طرف لایتنای می رود

معنی لیمیت Limit (لاتین) حد میباشد، که ازان عبور کردن اجازه نه دارد. در روم قدیم نام قلعه یک شهر هم Limit بود. در ریاضیات، طوری که در ترادف مشاهده نمودیم، لیمیت به معنی حد میباشد.

مفهوم استعمال حد درین نهفته است، که سلوک یا عمل تابع طوری مطالعه شود مثل که تابع به محور افقی (به x -محور یعنی (abscissa)) به یک حد (نقطه) نزدیک شود. طوری که در مثالهای ورودی بالا دیدیم که ترادفها بالای محور افقی به یک حد می رود.

خواهیم دید که حد در ریاضیات برای این استعمال میشود که مشتق را بشناسیم.

فعالیت :

-ایا شما در زندگي روزمره به کلمه حد اشنایي دارید؟

- ایا شما در زندگي روزمره یک مثال آورده میتوانید که به یک حد از هر دو طرف ، از طرف راست به طرف چپ و همین طور از طرف چپ به طرف راست نزدیک میشوید؟ - ایا مرز بین حیرتان و ترمز حد بین افغانستان و تاجکستان از هر دو طرف حد هست یا نه؟

- ایا این حد میباشد در یک جاي معین و یا چه طور؟

از فعالیتهاي بالا نتیجه زیر بدست مي آید:

«مثالهاي حد» که در بالا آورده شد در یک جاي معین حد توابع یا مثالهاي عملي میباشد، که ما هم در ریاضیات در یک جاي معین انرا لیمت یا حد مینامیم.

ما برای روشن ساختن شروع مثال زیر را می اوریم:

مثال ۱ : یک تابع $f(x)=2x$ و یک نقطه P_0 داده شده باشد، که در نقطه P_0 قیمتهاي وضعیه ان $(3,6)$ باشد، پس :

(۱) جدول تابع را بنویسید

(۲) گراف تابع یا شکل تابع را رسم کنید.

(۳) $f(3)$ را پیدا کنید و به حرکت $f(x)$ بحث کنید، وقتی که x به قیمت 3 نزدیک میشود.

(۴) تقارب تابع $f(x)$ به لیمت را در شکل روشن کنید.

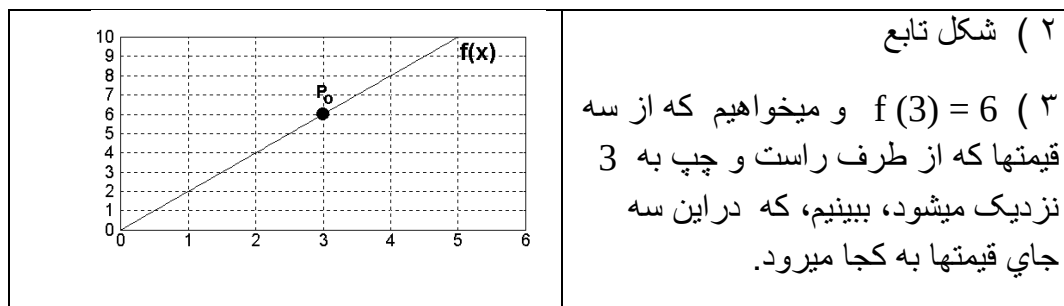
حل مثال :

(۱) جدول تابع (در ۳) آمده

سرلیک

۳

حد



برای این قیمت‌های پائین را در دوجداول مطالع میکنیم: جدول عمود:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

از جدول بالا میبینیم، که به قیمت‌های f از بالا به پایین از طرف چپ به 6 نزدیک میشویم و به همین طور از طرف راست از پایین به بالا به قیمت 6 نزدیک میشویم.

جدول افقی میآوریم:

از راست به طرف چپ از چپ به طرف راست

→ 3 ←

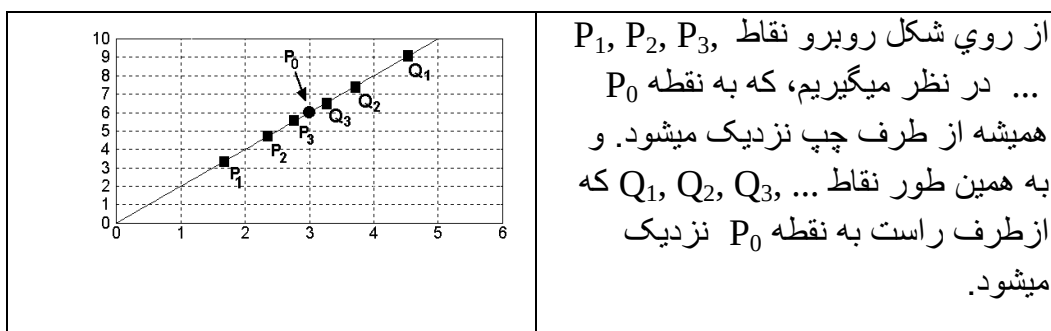
x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

→ 6 ←

در سه قدم که قیمت $f(3)$ به قیمت‌های $f(x)$ مقایسه میشود، وقت که x به "3" نزدیک میشود.

این حالت نشان میدهد که: اگر x به 3 نزدیک شود، پس لیمیت $f(x)$ برابر به 6 میشود و به اینطور مینویسیم: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

(۴) حالا گراف را قرار زیر رسم میکنیم و به طرف راست و چپ نقاط مطلوبه را - مثل که در جدول بالا - نشانی میکنیم.



دیده میشود: به هر اندازه، که نقاط بالا به نقطه P_0 نزدیک میشود، به همان اندازه قیمت‌های تابع به 6 نزدیک میشود (از بابت قیمت نقطه $(P_0(3,6))$)

اگر در گراف x به جای $x=3$ نزدیک شود، پس قیمت تابع به قیمت 6 نزدیک میشود.

میگوییم: ۶ لیمیت تابع $f(x)$ میباشد. برای $x \rightarrow 3$ (اینطور خوانده می شود: x به

طرف 3 میرود). و مینویسیم: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

از فعالیتها و مثال های بالا این تعریف را به دست میاوریم:

تعریف: تابع $f(x)$ یک حد L دارد، برای x اگر x متصل به طرف یک عدد حقیقی c برود و به این طور مینویسیم: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ خواندن: لیمیت $f(x)$ برابر به L است، برای $x \rightarrow c$.

در بعض توابع، مثل که پیش دیدیم، ، حد،، را به این سادگی بدست آورده نمیتوانیم.

یک مثال را می آوریم که دران سوالهای زیر حل شده باشد.

- آیا یک تابع، درجای که تعریف نه باشد، میتواند حد را داشته باشد؟

- اگر این کار شدنی باشد چه طور صورت گرفته میتواند؟

برای روشن ساختن این سوال ما مثال زیر را مطالع میکنیم:

مثال ۲ :

تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1$ داده شده است.

(۱) جدول و گراف تابع را بکشید.

x از راست به ۱ نزدیک میشود x از چپ به ۱ نزدیک میشود

				← 1 →			
1.02	1.01	1.001		0.999	0.99	0.98	x
2.02	2.01	2.001		1.999	1.99	1.98	$f(x)$

← 2 →

شکل	حرکت تابع $f(x)$ زیر بحث بگیرید اگر x به ۱ نزدیک شود یعنی $x \rightarrow 1$. از هر دویعنی ازگراف و از جدول ما مینویسیم که $f(x)$ به طرف عدد حقیقی ۲ میرود. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
--	--

از شکل فوق میتوان گفت که تابع در نقطه تعریف نه دارد، که در آن نقطه حد شمرده شده.

حل حسابی: اگر یک تابع که در صورت و مخرج برای قیمت‌های مربوطه صفر داشته باشد و این جای صفر از بین برده میشود - طور که در مثال ما دیده میشود- پس برای یافتن لیمیت یا حد قرار ذیل به پیش میرویم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

و میگوییم که این قسم تابع در جای صفر خالیگاه،، دارد (یعنی درین جا تعریف نیست).

	فعالیت: تخته رو برو طرف راست سرک داریم: - بگویند که این تخته چي مفهوم را دارد؟ به همین ترتیب طرف چپ سرک هم به همین قسم یک تخته موجود است این هم به همین مفهوم..
--	---

این سوال ما را به روشن ساختن زیر رهنمایی میکند.

مثال ۳: تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ را داده شده.

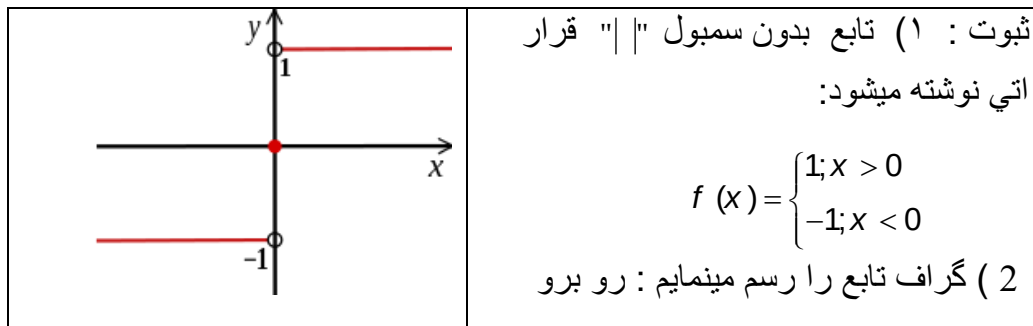
(1) تابع نوشته کنید ، بدون اینکه نشانه یاسمبول " | " را به کار ببرید:

(2) گراف تابع را رسم کنید.

(3) قیمت $f(x)$ را پیدا کنید، که در آن x از طرف راست به 1 نزدیک میشود.

4) قیمت $f(x)$ را دریابید، اگر x از طرف چپ به -1 نزدیک شود

5) نشان دهید، که تابع فوق $f(x)$ چند حد دارد.



3) قیمت $f(x)$ اگر x از طرف راست به 1 نزدیک شود، لیمیت زیر را به ما میدهد

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

4) لیمیت $f(x)$ ، اگر x از طرف چپ به -1 نزدیک شود، قرار زیر میباشد.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

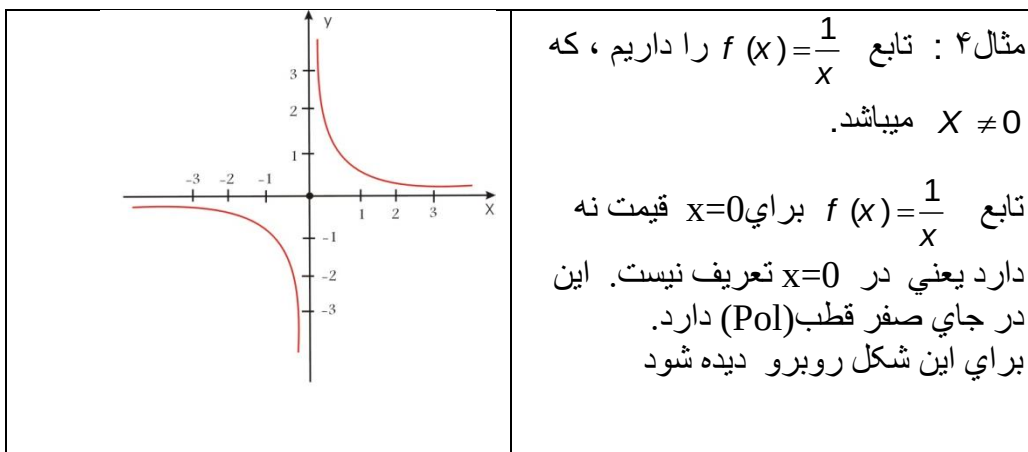
5) مشاهده میشود، که اگر x به دو قیمت 1 و -1 نزدیک شود ، دو لیمیت دارد،

یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، پس ازین قرار $f(x)$ لیمیت نه دارد.

نتیجه از مثال بالاله:

در مثال بالا برای $x \rightarrow -1$ تابع لیمیت راست دارد و برای $x \rightarrow 1$ لیمیت چپ دارد.

برای این میتوان گراف رسم شده در بالا هم دیده شود.



یادداشت: تابع، که مخرج آن صفر باشد و صورت آن صفر نمی باشد، میگوییم که تابع درین جای صفر مخرج قطب (Pol) دارد.

برای نزدیک شدن به $x=0$ ترادف $(x_n) = \frac{1}{n}$ را تعیین مینمایم.

$$\text{ترادف قیمت مربوطه تابع } (x_n) = \left(\frac{1}{n} \right) \text{ میباشد.}$$

این برای $n > 0$ یک ترادف نامحدود صعودی میباشد، و برای $n < 0$ ترادف نزولی- یا متناقص میباشد.

این به معنی، که تابع $f(x)$ در جای 0 حد نه دارد. این در آن جای یک قطب دارد.

برای لیمیت توابع دست آورد زیر داریم:

تابع $f(x), x \in D_f$ در جای x_0 یک لیمیت $a_l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ سمت چپ داریم، اگر برای

هر ترادف (x_n) ، که n اعظمی شان طرف چپ x_0 واقع باشد و قیمتهای توابع $f(x_n)$ به سمت a_l میکوشد.

به تور مشابه لیمت سمت راست:

تابع $f(x), x \in D_f$ در جای x_0 یک لیمیت $a_r = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ سمت چپ داریم ، اگر برای

هر ترادف (x_n) ، که n اعضای شان طرف راست x_0 واقع باشد و قیمت‌های توابع $f(x_n)$ به سمت a_l میکوشد.

اگر تابع $f(x)$ همان حد L داشته باشد ، اگر x از طرف راست یا چپ به c نزدیک شود ، پس حد موجود است و مساوی به L میباشد.

و به اینطور مینویسیم: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

تمرین

به هر یک از تابع باین ناحیه تعریف (domain) و ناحیه قیمت (range) یا (codomain) را پیدا نماید ، گراف توابع را رسم نمایند و حد تابع را پیدا نمایند.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x) \quad 3) \lim_{x \rightarrow -2} 2x + 3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} |x| \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} 7$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}} \quad 8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$$

$$10) \text{ اگر باشد : } f(x) = \begin{cases} 2 + x; & x < 1 \\ x^2 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

الف) گراف تابع را رسم کنید

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ را پیدانمائید

خواص حدود : " Properties of Limits "

میفهمیم: در ریاضیات تمام توابع که داریم ترکیب combination توابع ساده میباشند و مثل که جمع، تفریق، ضرب، تقسیم (مخرج به صفر مساوی نمیباشد) و توابع زنجیری combination F. ما دو توابع منتخب و ساده $f(x) = c$ و $g(x) =$ را داریم. اگر هر دو توابع با هم جمع کنیم بدست می آید:

$$h(x) = x + C, \text{ یا } L(x) = cx, \text{ یا } m(x) = x \cdot x = x^2 \text{ و دیگر و دیگر.}$$

خواهیم دید که درینجا هم تمام عملیه چهارگانه صدق میکند مثل که در عملیه ترادف اعداد.

فعالیت :

درین حصه حدود توابع اختیاری ثابت و – مشابه Identity function از طریق جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (که مخرج شان صفر نه باشد) را بشمارید (پسان خواهیم دید که این توابع زیر نام خواص توابع لیمیت مطالعه میشود)

- حد یک تابع پولینوم اختیاری را پیدا نمایند.
-- از توابع $f(x) = x, g(x) = x - 2$ استفاده نمایند، که سه توابع دیگری از ان بدست بیاورید. لیمیت‌های این توابع را دریاید. این لیمیت‌ها را جمع، ضرب و تقسیم (که مخرج صفر نه باشد) نمایند. -- اگر ممکن باشد لیمیت یک تابع را از حل تابع بدست آورده بتوانیم، یعنی اگر به طور مثال داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$ پس این تابع چي

قسمی خواهیم نوشت؟

-- ایا مثل عملیه بالا این عملیه برای هر تابع ثابت و مشابه صدق میکند؟

ما از بالا نتیجه زیر را میگیریم:

یادداشت: به طور عملیه فوق همین مساوات برای هر تابع ثابت صدق میکند.

حد یک ثابت: اگر a و c ثابت می باشد، پس $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ صدق میکند.

به همین ترتیب توابع مشابه یا ایدنتیک $f(x) = I(x) = x$ را هم داریم، اگر c یک عدد حقیقی باشد، پس x به c نزدیک میشود. این در واقعیت همینطور است مثل که $f(x) = I(x)$ به c نزدیک شود.

فعالیت:

1) اگر $g(x) = 2, f(x) = x$ باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

2) اگر $h(x) = f(x) + g(x)$ باشد، پس داریم: $h(x) = x + 2$

3) گراف $h(x)$

حد تابع از راه جدول 4)

————→ 1 ←————

0	.5	.8	1	1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

————→ 3 ←————

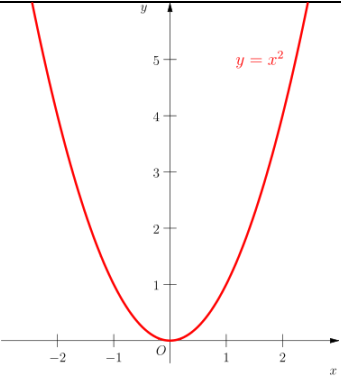
به یاد داشته باشید: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$

از بالا خاصیت اول لیمیت را بدست می آید:

اول: خاصیت جمع لیمیت: لیمیت جمع دو یا چند توابع مساوی به جمع لیمیت همان دو یا

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{چند توابع می‌باشد:}$$

دم: خاصیت تفریق لیمیت: این حل دارد که مشابه بالا می‌باشد. این وظیفه را شاگردان عزیز به عهده بگیرد

	مثال 1: اگر $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ باشد، پس دریابید: (الف) $f(x) \cdot f(x) = g(x)$ (ب) شکل تابع را رسم کنید (پ) دریابید $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (ت) دریابید: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
---	--

حل: (الف) $f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x)$

(ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

(ت) از گراف بدست می‌آید: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

پس اوین بابت داریم: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = \lim_{x \rightarrow 2} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \cdot 2 = 4$

از بالا نتیجه زیر بدست می آید:

سوم: خاصیت ضرب لیمیت:

لیمت ضرب توابع دو یا زیاد مساوی است به ضرب لیمیت‌های توابع مربوط.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2$$

مثال:

اگر باشد $f(x) = x$ ، $g(x) = x^2$ ، لیمیت‌های زیر را دریابید:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) , \lim_{x \rightarrow -1} g(x) & b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \\ c) h(x) = g(x) \cdot f(x) & d) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x) = -1 \end{array}$$

دریابید: $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

حل: الف: $a) f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$

$$c) h(x) = x^2 \cdot x = x^3 , d) \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1$$

مثال:

تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ را داریم، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را دریابید.

حل: $f(x)$ تقسیم دو توابع $g(x) = x^2 - 2x + 5$ و $L(x) = 2x^2 + 1$ است.

اگر x به 3 نزدیک شود میتواند لیمیت از طریق حل تابع در $x = 3$ یافت شود:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{2 \cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}\end{aligned}$$

از مثال بالا نتیجه زیر بدست می آید:

چهارم: خاصیت تقسیم لیمیت (که مخرج به صفر مساوی نه باشد):

لیمیت یک تابع کسری (یعنی یک تابع که از تقسیم دو توابع) مخرج به صفر مساوی نیست) بدست آمده باشد) برابر است به تقسیم لیمیت صورت و لیمیت مخرج (که مخرج مساوی به صفر نه باشد).

مثال: گراف $g(x) = \sqrt{3-x}$ را رسم کنید و دریابید:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \quad , \quad b) \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \quad , \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

حل: به طور زیر به پیش میرویم:

(الف)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

(ب) از گراف: $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2$

یاد داشت: $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (3-x)} = 2\sqrt{4}$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

(برای $f(x) \geq 0$ و برای تمام قیمت‌های x ، که به c نزدیک می‌شود).

از بالا نتیجه زیر بدست می‌آید:

پنجم: خاصیت جذری لیمیت: لیمیت یک تابع که زیر جذر باشد مساوی است به اگر تابع و لیمیت هر دو زیر جذر گرفته شود.

سوال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ باشد، پس $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^n$ را دریابید.

یادداشت: لیمیت یک پولینوم به طور شمرده می‌شود، مثل لیمیت یک تابع. در پیش گفتیم که یک پولینوم از عملیات مختلف توابع ساده بدست می‌آید.

تمرینونه.

اگر $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = -2$ پس دریابید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} (f + g)(x) \quad , \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{g}{f} \right)(x) \quad , \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} (fg)(x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} (h(x)) \quad , \quad 5) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{g}{f} \right)(x) \quad , \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} (2h - 3g)(x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} (f \cdot h(x)) \quad , \quad 8) \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2h}{3f - g} \right)(x) \quad , \quad 9) \lim_{x \rightarrow 4} (h(x) + f^2(x))$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 - 2x + 5x - 3) \quad , \quad 11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

لیمیت توابع کسری یا ناطق "Limit of Rational functions"

ما تقسیم زیر پولینومها را داریم:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}; P_m \neq 0$$

و در باره لیمیت شان فکر میکنیم و با $b_0 \neq 0$ بدست می آید $\frac{a_0}{b_0}$.

فعالیت :

اگر ما پولینوم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ داشته باشیم. حد این پولینوم را

برای قیمتهای مختلف x به چطور دریافت کرده میتوانیم ؟

- اگر $x \rightarrow 0$ به طرف صفر برود یا به صفر نزدیک شود.

- اگر $x \rightarrow 1$ به یک عدد معین نزدیک شود.

- اگر $x \rightarrow \infty$ به سوی لایتناهی برود.

- اگر پولینوم $5x^3 + 3x^2 + 3$ درجه سه را داشته باشیم، پس حد این پولینوم برای چهار قیمت دلخوا دریافت کنید.

میدانیم، که حد توابع پولینومی - برای یک قیمت داده شده x ، طوری که در توابع ساده دیگر، که به قسم جمعی، تفریق، ضرب و تقسیم (که مخرج شان صفر نه باشد) داده شده شمار کرده میتوانیم. میخواهیم حد توابع ناطق یا -کسری را دریابیم.

برای این که حد توابع ناطق را ، در صورت که موجود باشد، دریابیم، پس از طرق مختلف استفاده میکنیم:

اگر داشته باشیم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

پس خواص تابع برای $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ساده میسازیم، که حد تقسیم پولینوم بالا، که تابع کسری میباشد، بشماریم.

فعالیت : اگر $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ داشته باشیم در صورت که $x \neq -2$ باشد.

- حد این تابع در صورت که $x > -2$ باشد دریابید.

- حد این تابع را دریابید اگر $x \rightarrow 1$ باشد.

- حد این تابع را دریابید در صورت که $x \rightarrow -1$ باشد.

- ساحه تعریف تابع را بنویسید!

- این تابع به چه قسم ساده کرده میتوانید، که حد شان برای $x \rightarrow -2$ بدست آورده بتوانیم؟

به اساس فعالیت بالا میتوانیم، که حد توابع کسری برای اعداد مختلف دریابیم و همین طور یک تابع کسری، اگر ممکن باشد ، به همان جاهای که در نزدیک شان باشد هم دریابیم ، در کدام شان که تابع تعریف نه باشد.

برای وضاحت موضوع چند مثال از توابع ناطق را مطالعه میکنیم:

مثال ۱: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2}$ را دریابید

اگر $x = 1$ باشد، پس تابع تعریف است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{(1)^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

اگر $x = 1$ جا به جا کنیم (Substitute) پس به دست می آید: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

را دریابید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$ مثال :

حل : تابع برای $x = 0$ تعریف است، پس داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$

دریابید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$ مثال ۳ :

حل : برای $x = 1$ تابع تعریف است، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

اگر در یک جایی یا برای یک عدد که تابع تعریف نه باشد، پس از طریق مختلف استفاده میکنیم، که حد را دریابیم، اگر موجود باشد.

مثال ۴: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$ دریابید.

حل : برای این که تابع $f(x)$ برای $x=2$ تعریف نیست، پس برای حل حد تابع طریقه نمی توانیم دریابیم. حد را میتوانیم پیدا کنیم ، که تابع به ضریبها تجزیه نمایم .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)(x - 2)}{(x - 2)}$$

سرلیک

۱۹

حد توابع

حد تابع اگر x به 2 نزديکي شود، به اين معني است، اگر $x \neq 2$ باشد.

اين تابع کسري به $\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)$ کرته ميشود:

$$(x-4) = 2-4 = -2 \lim_{x \rightarrow 2}$$

مثال ۵: $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$ را دريابيد.

مشاهده ميشود، که تابع براي $x = 16$ تعريف نيست، بدین معني که $x \neq 16$.

به ياد داشته باشيد که : $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ به $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ مزدوج یک ديگر ميباشد

حل: صورت و مخرج تابع فوق به مزدوج $\sqrt{x}-4$ يعني $\sqrt{x}+4$ ضرب مينمايم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

مثال ۶: دريابيد : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع به $x=3$ تعريف نيست ، پس مخرج و صورت به مزدوج مخرج ضرب مي نمايم و داريم:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -(\sqrt{3+1}+2) = -4
 \end{aligned}$$

را در يابيد. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1}$ مثال ۷ :

حل : تابع در $x = 1$ تعريف نيست، پس به طريق زير حد اين تابع را در مي يابيم:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)} \\
 &= \frac{10}{-2} = -5
 \end{aligned}$$

ليميت اعداد کسري از طريق کلاسيک :

حالا يک تابع ديگري زر مطالع مي گيريم، که انرا $g(x)$ مي ناميم: $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

درینجا هم سوال میکنیم، که اگر $x \rightarrow 1$ نزدیک شود، پس تابع $g(x)$ کدام قیمتهای تابع را اختیار میکند: ما باز جاي را در فکر میگیریم، که $x \rightarrow 1$ از طرف پیش (طرف چپ) بسیار نزدیک افتیده باشد و به همان جاي، که $x \rightarrow 1$ از پشت سر یا طرف راست بسیار نزدیک افتیده باشد:

$$\begin{aligned} g(1-h) &= \frac{(1-h)^2 + (1-h) - 2}{(1-h) - 1} \\ &= \frac{(1-2h+h)^2 + (1-h) - 2}{-h} = \frac{-3h+h^2}{-h} = 3-h \\ g(1+h) &= \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{(1+h) - 1} \\ &= \frac{(1+2h+h)^2 + (1+h) - 2}{h} = \frac{-3h+h^2}{h} = 3+h \end{aligned}$$

این هردو نتایج را حالا قرار زیل تشریح میکنیم: اگر h لاینتاهی کوچک تعیین نمایم یعنی جايها را در نظر بگیریم که $x \rightarrow 1$ لایهنتاهی نزدیک شود، پس قیمتهای تابع هم به قیمت 3 لاینتاهی نزدیک میشود. عدد 3 برای جاي $x=1$ حد تابع $g(x)$ میباشد. برای این مینویسیم: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

تمرینها: در صورتیکه موجود باشد لیمیتهای زیر را دریابید.

1) $\lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^7 + 2x - 5)$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-3)^2 - 9}$

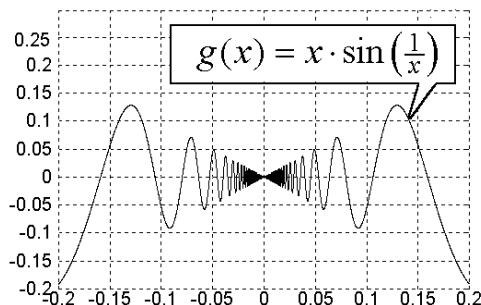
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{x-4}\right)$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

حد توابع مثلثاتی Limit of trigometric function



فعالیت:

- حدساین $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$ برای قیمتهای مختلف x دریابید،
- اگر $x \in [0; 2\pi]$ باشد. - اگر که $x \rightarrow 0$ باشد. - اگر که $x \rightarrow 30$ باشد
- اگر $x \rightarrow 45$ باشد - اگر $x \rightarrow 60$ باشد - اگر $x \rightarrow 90$ باشد - اگر $x \rightarrow 135$ باشد
- اگر که $x \rightarrow 270$ باشد - اگر $x \rightarrow 2\pi$ باشد

فعالیت:

برای قیمتهای که بالا داده شده حد $\cos x$ دریابید.

قضیه: اگر x به رادیان داده شده باشد، پس داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

ثبوت: برای $x=0$ تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعریف نیست و شکل مبهم $\frac{0}{0}$ دارد.

سرلیک

۲۳

حد توابع

ما میخواهیم برای $x \rightarrow 0$ و $\frac{\sin x}{x}$ طور زیر یک جدول بنویسیم (در مساوات بالا x به رادیان اندازه میشود):

x		$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
په درجه	په رادیان		
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
$30'$	0.00872664	0.00872653	0.99999
$6'$	0.00174532	0.00174532	≈ 1
$3'$	0.00087266	0.00087266	≈ 1
$1'$	0.000291	0.000291	≈ 1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

در جدول بالا میبینیم، که برای x قیمت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ میباشد.

حل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ به طریقه ریاضی طور زیر به پیش میبریم: یک دایره را در نظر

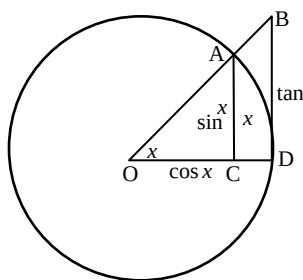
میگیریم، که مرکز شان (0) و شعاع آن OD و $\overline{OA} = \overline{OD} = 1$

باشد. (16-3) شکل از نقطه A به $\overline{OD}$ یک عمود رسم میکنیم، که این شعاع را در

نقطه C قطعه مینماید.

از نقطه D بالاي دایره یک مماس رسم میکنیم. این مماس از OA خط دراز شده در نقطه B قطعه میکند

ما داریم :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

این که x به رادیان اندازه میشود، پس داریم: $\hat{AD} = x$

از شکل بالا نا مساوات پایین داریم:

$$\hat{OBD} > \hat{AOD} > \hat{AOC}$$

به همین طور داریم:

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2} \overline{OD}^2 \cdot x < \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \tan x$$

در نامساوات بالا $\overline{OD} = 1$ جا به جا میکنیم و تمام اطراف نامساوات به دو ضرب

میکنیم پس داریم: $\cos x \cdot \sin x < x < \tan x$

یا به همیم طور نوشته میتوانیم: $\cos x \cdot \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

سرلیک

۲۵

حد توابع

اگر تمام اطراف نامساوات به $\sin x$ تقسیم نمایم، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \text{یا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

ازین که $x \rightarrow 0^+$ پس برای $\cos x \rightarrow 1$ بدست میاید:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

می بینیم که در عین وقت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ بزرگتر و کوچکتر از 1 میباشد، نتیجه میشود که :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

دقت : اگر $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ بنویسم ، نتیجه زیر بدست می اید:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

از هر دو مساوات فوق نتیجه زیر بدست می آید: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

حل نمایند $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ مثال ۱ :

حل : اگر $2x = \alpha$ و اگر $x \rightarrow 0$ باشد، پس $\alpha \rightarrow 0$ و $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sin 2x}{2x}$ داریم.

از مساوات بالا نتیجه زیر داریم :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

نشان دهید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$ مثال ۲ :

اگر $y = 5x$ باشد، و $x \rightarrow 0$ ، پس $y \rightarrow 0$ و هم داریم

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{2} &= \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{2x} \\ &= \frac{5 \sin y}{2 y} \end{aligned}$$

بدین اساس داریم

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{5}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

تمرین:

این قضیه منتخب را ثابت کنید.

اگر x به رادیان داده شده باشد، پس داریم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ و اجرات زیر را انجام دهید:

الف) تانجنت $\tan x$ به ترمهای $\sin x$ و $\cos x$ بنویسید.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ به ترمهای $\sin x$ و $\cos x$ بنویسید.

پ) لیمیت قضیه بالا را دریابید.

ت) آیا قضیه راست است؟

لیمیت‌های زیر را بشمارید.

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}, \\ & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3x \\ & 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}, \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} + \sin^2 x \end{aligned}$$

لیمیت برای $x \rightarrow \pm\infty$

لیمیت‌ها برای توابع کسری $\frac{Q(x)}{P(x)}$; $P(x) \neq 0$ را شمردیم، که x اختیاری اختیاری بود.

حالا می‌خواهیم لیمیت را برای $P(x) \neq 0$; $\frac{Q(x)}{P(x)}$ بشماریم، اگر $x \rightarrow \pm\infty$ باشد.

فعالیت :

شاگردان اشکال توابع زیر را رسم نمایند، و دقت نمایند که چي طور گرافها در ساحه تعریف حرکت میکند.

اول : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2}$

نتیجه تقسیم عدد ۵ به یک عدد لایتنه‌ای مثبت (منفی) یک عدد بسیار کوچک مثبت (منفی) میباشد یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.

گراف G_f یک اسیمپتوت - یا مجانب افقی $y=0$ دارد، که او بالا و پایید به گراف نزدیک میشود.

دوم : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ لیمیت را بشمارید

نتیجه تقسیم عدد -3 به یک عدد لایتنه‌ای مثبت (منفی) عدد بسیار کوچک مثبت (منفی) میباشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.

گراف G_f یک اسیمپتوت (مجانب) $y=0$ دارد، که از بالا و پایین به گراف نزدیک میشود.

سوم : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2-2x}$ دریابید

در مخرج فقط x^2 رول بزرگ را بازی نیکند. از طریق مربع ساختن هر عدد مثبت میشود. اگر 5 به یک عدد لایتنه‌ای مثبت تقسیم شود، یک عدد بسیار کوچک

مثبت بدست می‌آید، یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$

سرلیک

۲۹

حدبرای

گراف G_f یک اسیمپتوت افقی (مجانِب افقی) $y=0$ دارد، به نزدیک فقط او طرف بالا .

چهارم : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2}$ بشمارید

به مربع ساختن مخرج ، اعداد منفي هم مثبت میشود. به تقسیم 3- به یک عدد لایتنه‌ای مثبت، یک عدد بسیار کوچک منفي را بدست می‌آوریم، یعنی

$$.- \square \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$$

گراف G_f یک اسیمپتوت $y=0$ دارد، که فقط به گراف پائین نزدیک می‌شود.

اصول صرفنظر کردن

اول : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2}$ دریابید

در صورت اکسپوننت x ، در مخرج اکسپوننت x^2 در نظر می‌گیریم و همین‌طور از تمام اعداد ثابت صرف نظر می‌کنیم و باز x را کوتاه می‌کنیم. اگر ۱ به یک عدد لایتنه‌ای مثبت (منفي) تقسیم شود. پس از آن $\square\square$ بدست می‌آید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$$

شکل G_f اسیمپتوت (مجانِب) افقی $y=0$ دارد، که از بالا به به پایین به او نزدیک می‌شود.

دوم : حد تابع $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2}$ را می‌خواهیم دریابیم.

حل : در صورت تمام توانهای (اکسپوننت) x^2 و در مخرج تمام توانهای x در

نظر مي گيريم او از تمام ثابت صرفنظر مي كنيم و بعداً به x اختصار كنيم . به تمام وضاحت حدود $\pm \infty$ بدست مي ايد يعني $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x = \pm \infty$

شکل G_f مجانب مایل را مي دهد، براي اين که در صورت درجه نسبت به مخرج به اندازه ۱ بزرگ است.

$$\text{سوم : } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} \text{ دريابيد}$$

در صورته و مخرج تمام توان x^2 در نظر مي گيريم و از تمام ثابت صرف نظر مي كنيم و بعداً به x^2 اختصار مي كنيم.

$$\text{تمام حدود به طور واضح } -2/3 \text{ راميدهد يعني}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

شکل G_f اسيمپتوت افقي را مي دهد ، که $y = -2/3$ مي باشد.

$$\text{چهام : } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} \text{ دريابيد}$$

در صورت از تمام توانهاي که کوچکتر از x^2 باد و در مخرج از تمام توانهاي که کوچکتر از x^3 و به همين ترتيب از تمام ثابتو صرف نظر ني منيم . اگر به لایتناهي تقسيم شود، یک عدد کوچکترین مثبت یا منفي را بدست مي آوريم يعني

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm \infty} = 0^\pm \text{ را مي دهد.}$$

شکل G_f یک مجانب افقي $y = 0$ را مي دهد، که از طرف بالا به پايئن به او نزديک مي شود.

حل به طریق شمارش:

اول : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x-1}{x^2-2}$ رادریابید

در صورت و مخرج x^2 را از قوسها بیرون می آوریم و بعدا به x^2 اختصار می نمایم. بعد از اختصار مخرج به طرف 1 میرود و صورت به طرف صفر میرود، یعنی ترمها صورت به صفر نزدیک میشود.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm$$

شکل G_f یک مجانب مایل دارد، ازان که درجه صورت از درجه مخرج به 1 کوچک است.

دوم: بشمارید: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

در صورت و مخرج عدد توان بزرگ x یعنی x^4 از قوس بیرون می گیریم و بعدا به ترتیب عملیه حسابی را به پیش می بریم، ازا بدست می اید:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

روشن است .

خواص عمومی :

مثال ۱: بیابید: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

در مثال بالا به طور پیش رفته ایم ، که در مخرج از همه اعداد صرف نظر می نمایم، که توان متحول مستقل از ۱ کوچک باشد یعنی صفر باشد و در صورت از همه اعداد که توانشان از ۲ کوچک باشد صرف نظر می میکنیم. می بینیم، که در صورت x به کدام ضریب می ماند، ازین دلیل تابع تابع بالا به سوي لايتناهي مثبت-منفي ميرود.

مثال ۲ : دریابید: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$ در مثال بالا در په صورت

از ۱ و در مخرج از ۲ صرف نظر می شیم و بعداً صورت و مخرج به x تقسیم میکنیم، نتیجه شان بدست آمدن یک عدد ثابت است ، که به x تقسیم میشود ، که به

تابع به $0 \pm$ میرود یعنی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = 0 \pm$

مثال ۳ : دریابید: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x}$ در صورت از ۲ و در مخرج از $2x$ صرف نظر

میکنیم و به x^2 اختصار می نمایم و به همین طور نتیجه زیر را بدست می اید :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} = -\frac{2}{3}$$

تمرینونه: حدهای تمرینات زیر را از راه های مختلفکه اده شده بالا بشمارید

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

متماديت "Continuity"

درين قسمت درس مي خوانيم، كه يك تابع در يك نقطه يا يك اينتروال كدام حالت را به خود اختيار ميكند. ايا تابع در كدام جاي خيز ميزند، يا قطع ميشود و يا به صورت متمادي در داخل اينتروال حركت ميكند.

ما درين موضوع متماديت يك تابع را مطالعه ميكنيم و متماديت را تعريف مينمايم.

فعاليت: ما توابع زير را داريم:

$$f(x) = x^2 - 1, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

- اشكال اين سه توابع را رسم كنيد.

- تماشا كنيد، كه گراف توابع چي قسم حركت ميكند. در كدام تابع گراف بسته حركت كوي او در كدام قطع ميشود، خيز ميزند و يا ...

از فعاليت بالا نتيجه زير داريم:

متماديت تابع Continuous functions

درين موضوع ما متماديت يك تابع را مالع ميكنيم و تعريف متماديت را ميديهم.

تعريف:

b يك عدد حقيقي در ساحه تعريف يك تابع f باشد. تابع f در b متمادي ناميده ميشود، اگر در نزديك نقطه $(b, f(b))$ گراف f رسم گردد، بدون اين كه پنسل از روي كاغذ بلند شود.

ازین دلیل تابع $f(x) = x^2 - 1$ و تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x=b$ متمادي است.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در $x=0$ متمادي نیست یعنی قطع میشود و یا بهتر خیز میزند.

تابع در $x=a$ متمادي نیست، اگر قطع شود (خالیگاه داشته باشد)، خیز بزند و یا بشکند.

داریم $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ پس ازین دلیل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ در $x=0$ موجود نیست.

نتیجه: چون لیمت دست راست و چپ با هم مساوي نیست پس تابع در $x=0$ لیمت ندارد، یعنی تابع در نقطه $x=0$ تابع متصل (متمادي) نیست.

مثال ۱ :

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 1-x & ; x < 1 \end{cases} \text{ باشد، پس:}$$

الف) گراف تابع را رسم کنید

گراف

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را دریابید

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را دریابید

اگر تابع در $x=3$ و $x=1$ متمادي باشد

حل :

الف (گراف طرف چپ رسم شده

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (2x + 1) = 7 \quad \text{ب (}$$

$$f(3) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 \quad \text{پ}$$

از ب (و پ) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

ازین دلیل تابع در $x = 3$ متمادي و در $x = 1$ نامتمادی است.

مثال ۲ :

$$\text{اگر} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x}{x} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 0 \end{cases} \quad \text{باشد}$$

الف) فنکشن رسم کنید

رسم را شاگردن عزیز بکشد

ب) زیر بحث بگیرید، که تابع در $x = 2$ و در $x = 0$ متمادي است یا خیر؟

حل: الف) برا گراف تابع

x_-	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	3	2	5

$$(ب) f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

ازین که حد f موجود است و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ، پس تابع در $x = 2$ متمادي است.

باشد $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = 1$$

$f(0) = 3$. و به این مهوم است که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ این بدین معني است که

این بدین معني است ، که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

تابع در $x = 0$ غیرمتمادي است

مثال ۳ :

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ ، $x \neq -3$ باشد.

ایا تابع در $x = -3$ متمادي است؟

حل (تابع $f(-3)$ تعريف نيست، ازین علت تابع در $x = -3$ متمادي نيست.

از جمله بالا و درسهاي گذشته تعريف زیر را داریم:

تعريف :

اگر f یک تابع باشد، که براي تمام x در همه اینتروال هاي باز، که $x=c$ داشته باشد، تعريف باشد، پس تابع f در $x = c$ متمادي نامیده میشود ، اگر شرایط زیرین را پور کند.

(۱) اگر $f(x)$ تعريف باشد.

(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود باشد

(۳) اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ صدق کند.

اگر تابع براي تمام $x \in (a, b)$ متمادي باشد ، پس تابع در اینتروال باز (a, b) هم متمادي است.

مثال ۴ :

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1; & x \leq 1 \\ 4 + x; & x > 1 \end{cases} \text{ باشد.}$$

ببینید، که تابع در کجا متمادي و در کجا نامتمادي است.

حل : تابع f در $x = 1$ تعريف نيست

$$f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (4 + x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

ازین دلیل تابع در $x = 1$ نامتمادي است

مثال ۵ :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ x + 3 & ; x > 2 \end{cases}$$

اگر $x = 2$ در $f(x)$ پس متماديت تابع $f(x)$ در $x = 2$ مطالعه کنید.

حل : تابع $f(x)$ در $x = 2$ تعريف است و $f(2) = 3$ داریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 3) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

دا چي $f(x) = 3$ دی، نو له دي امله $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

به این معني است، که تابع در $x = 2$ نامتمادي است .

مثال ۶ :

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} 2 \sin x & ; x \leq \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ باشد،}$$

a طوري دريابيد، که f در $x = \frac{\pi}{2}$ متمادي باشد.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = a \frac{\pi^2}{4} + \pi ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2$$

$f(x)$ متمادي است، پس ازین بدست مي آيد :

$$a \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4} \pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a \pi^2 = 8 - 4 \pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرین

(۱) یک تابع دلخواه را بنویسید و گراف تابع را رسم نمایید و ببینید، که تابع در کجا تعریف است و متمادیت انرا ثبوت نمایید.

در تمرينهاي زیر مطالعه نمايد، که تابع در نقطه داده شده متمادي يا غير متمادي است.

$$2) f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 ; x=3 \qquad 3) f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)} ; x=-1$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} ; x=-2 \qquad 5) f(x) = \frac{1}{(x-3^3)} ; x=3$$

$$6) f(x) = |x-3| ; x=3 \qquad 7) g(x) = \frac{|x|}{x} ; x=0$$

خواص توابع متمادي

درينجا خواص متماديت همان خواص ليमित است

فعاليت:

۱) جمع توابع f و g را دريابيد

$$(f+g)(x) = \dots\dots\dots$$

۲) در $x=2$ توابع f و g متمادي است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots \& \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$$

۳) از حد توابع استفاده نمايئد

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) \\ &= \dots : \dots \\ &= \dots : \dots = (f + g)(a)\end{aligned}$$

ازین دلیل $(f+g)$ در $x=a$ متمادی است.

اگر تابع f و g در $x=c$ متمادی باشد، پس از توابعو زیر هره کدام در $x=c$ متمادی است

(۱) جمع توابع $f+g$

(۲) تفریق توابع $f-g$

(۳) ضرب توابع $f.g$

تقسیم توابع $\frac{f}{g}; g \neq 0$

مثال ۱ :

اگر باشد $g(x) = x^2 + 3x - 2$ و $f(x) = \sin x + 1$.

پس (۱) f و g در $x=1$ متمادی است.

(۲) تحلیل نمایند، که ایا

و $f(x) + g(x) = \sin x + x^2 + 3x - 1$ (الف)

(ب) $(\sin x + 1)(x^2 + x^2 + 3x - 1)$ در $x=1$ متمادی و یا غیرمتمادی است

حل :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

پس f در $x = 1$ متمادي است

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2$$

پس g در $x = 1$ متمادي است

$$\begin{aligned} a) \sin x + x^2 + 3x - 1 &= (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2) \\ &= f(x) + g(x) = (f + g)(x) \end{aligned} \quad (2 - \text{الف})$$

جمع توابع متمادي در $x = 1$ متمادي است

$$\begin{aligned} (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (f \cdot g)(x) \end{aligned} \quad (2 - \text{ب})$$

پس ضرب توابع متمادي در $x = 1$ متمادي است

مثال ۲ :

اگر $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = 3x - 2$ باشد، مطالعه نمايد، که ايا $f(x) \cdot g(x)$ در $x = 2$ متمادي است.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3 \cdot 4 = 12$$

از بالا بدست می آید، که $f(x) \cdot g(x)$ متمادی است

به طرف چپ در اینتروال محدود $[a, b]$ گراف متمادی تابع را نشان دهید، در جایی که $f(a) \neq f(b)$ باشد.

اگر $f(a) < k < f(b)$ داشته باشیم، گراف از نقطه $(b, f(b))$ ترسیم نمی شود تا که خط افقی $y = k$ به ثابت k قطع نه نماید.

از بالا میتوانیم جمله مهم را بنویسیم:

اگر تابع f در اینتروال محدود یا بند $[a, b]$ متمادی و k در بین a و b باشد، پس در آنجا کم از کم یک عدد c در بین $f(a)$ و $f(b)$ موجود است، طور که $f(c) = k$ است.

مثال ۳: اگر $f(x) = x^3 + 4x$, $x \in [1, 2]$ باشد.

نشان دهید، که یک $c \in (1, 2)$ طور موجود است، که $f(c) = 11$ می باشد.

حل: $f(x)$ یک پولینوم است، پس f در اینتروال محدود $[1, 2]$ متمادی است.

زیر را داریم:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$

$$5 < 11 < 16 , \quad f(1) \neq f(2)$$

از این دلیل یک عدد $c \in (1, 2)$ موجود است، طور که $f(c) = 11$ میباشد

مثال ۴ :

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} 2x+4 & ; -1 \leq x < 2 \\ |x-10| & ; 2 \leq x \leq 20 \end{cases} \text{ باشد ، پس}$$

الف (امتحان کنید، که تابع متمادي است.

ب (امتحان کنید، که یک $c \in (-1, 20)$ موجود است، طور که $f(c) = 6$ می باشد و قیمت c را بیا بید.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2x + 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

بدین اساس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

می بینیم، که تابع در $[-1, 20]$ متمادي است

$$b) f(-1)2x - 1 + 4 = 2$$

$$f(20)|20-10|=10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

به دین اساس داریم $2 < 6 < 10$ به این اساس داریم $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$ قیمتهای c قرار زیل است 1, 4, 16 .

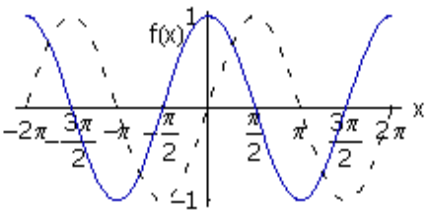
سرلیک

۴۵

خواص تابع متمادی

مثال ۵: اگر باشد: $f(x) = 2 \sin x + 3; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، پس

نشان دهید که $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ موجود است، برای آن که صدق میکند $f(c) = 4$ و c را دریابید.

حل: تابع f تابع سین می باشد، پس بدین اساس f متمادی است $f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ ما داریم: تابع f متمادی است و داریم: $1 < 4 < 5$	 نقطه نقطه گراف سین می باشد. اگر این گراف در ۲ ضرب و ۳ به آن علاوه شود مان گراف مثال ما می باشد.
--	--

این به معنی است، که $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ موجود است، برای آن که $f(c) = 4$ صدق میکند.

برای این که c پیدا نمایم، پس به دست می آید: $f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

از گراف واضح دیده میشود، که f در انتروال $[a, b]$ متمادي است، $f(a)$ و $f(b)$ علامات متضادي دارد، پس c در بين $f(a)$ و $f(b)$ به اساس جمله قيمت وسطی به $K=0$ کم اوکمه یک C در بين a و b موجود است، که ازان نتیجه مي گیریم $f(c) = 0$.
این به معني است، که $x=c$ یک حل مساوات $f(x) = 0$ میباشد.

مثال ۶ :

اگر باشد: $f(x) = x^3 + 5x - 23$ ، پس نشان دهید، که تابع f ، x —محور را در اینتروال $(2, 3)$ قطع میکند.

حل : f تابع پولینوم است، پس f در اینتروال $[2, 3]$ متمادي است.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

به علامات متضاد $f(2) \neq f(3)$

بدین اساس $c \in (2, 3)$ داریم، که $f(c) = 0$ است

کوتاه: توابع غیر متادي انست، که در کوام جای تعریف نه باشد.

تمرین ۱ - ۶

نشان دهید، که تابع در نقطه داده سده متمادي است.

$$1) f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$$

$$2) g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$$

$$3) h(x) = \frac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$$

۴. (تشریح نماید، که چرا تابع $f(X) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ در $x = 0$ نامتمادي است.

۵. (اگر $\frac{18}{x} f(x) = 2, x \in [2, 3]$ باشد، نشاد دهید، که $c \in (2, 3)$ موجود، طور که $f(c) = 10$ می باشد و c را پیدانماید.

۶. (ثبوت نماید، که برای مساوات زیر یک حل موجود است:

$$x^3 - 4x + 1 = 0; x \in [1, 2]$$

باشد $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; $f(x) = \sin x + \cos x$ (۷) اگر

ثبوت نماید، که مساوات $\sin x + \cos x = 0$ در اینتروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ یک حل دارد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ 13 - 2x & ; 3 < x \leq 7 \end{cases} \text{ باشد: (۸)}$$

الف) (آیا f در $x = 3$ یک تابع متمادی است؟

ب) (یک $c \in (-1, 7)$ طور پیدا نماید. که $f(c) = 0$ باشد.

تعریف:

تابع $f(x)$ یک حد L دارد، اگر x بسته به یک عدد حقیقی c برود. این به معنی است، که اگر $f(x)$ بسته به L می‌رود x بسته به c برود، و به طور زیر مینویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

قصیه: اگر $f(x)$ همان حد L داشته باشد، اگر x از طرف راست یا چپ به c برود، پس حد موجود است و برابر به L است.

این را بدین طور مینویسیم: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

خواص حد:

که f و g توابع وی، L و c ؛ M حقیقی اعداد وی داسی چي $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

و $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو دا په لاندې توگه لیکلی شو:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(برای $f(x) \geq 0$ و بجای تمام قیمتهای x ، که به c نزدیک میشود.

قضیه : اگر x به رادیان داده شده باشد، پس داریم : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه : اگر x به رادیان داده شده باشد، پس داریم : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

تعریف :

f یک تابع باشد، که برای تمام x در همه اینتروال های باز، که $x=c$ داشته باشد تعریف می باشد.

تابع f در $x=c$ متمادی نامیده میشود ، اگر شرایط زیرین را پور کند.

(۱) اگر $f(x)$ تعریف باشد. (۲) اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود باشد

(۳) اگر $f(x) = f(c) \lim_{x \rightarrow c}$ صدق کند.

اگر تابع برای تمام $x \in (a, b)$ متمادی باشد ، پس تابع در اینتروال باز (a, b) هم متمادی است.

اگر تابع برای تمام $x \in (a, b)$ متمادی باشد، پس تابع در تمام انتروال (a, b) متمادی می باشد.

تعریف : میگویم که یک تابع در یک انتروال محدود $[a, b]$ متمادی است، اگر تابع از طرف راست در $x=a$ متمادی باشد و از طرف چپ در $x=b$ و در انتروال واز

(a, b) در هر قیمت متمادی می باشد.

خواص توابع متمادي: اگر f و g در $x = c$ متمادي باشد، پس توابع زیر هرکدام شاد در $x = c$ متمادي ميباشد.

اول (جمع توابعو يعني $f+g$ تابع

دم) تفریق توابعو يعني $f-g$

سوم) ضرب توابعو يعني $f.g$

چهارم) تقسیم توابعو يعني $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

قضيه قيمت وسطي: اگر تابع f در انتروال محدود $[a,b]$ متمادي باشد و k در بين $f(a)$ و $f(b)$ يك عدد باشد، پس كم از كم در بين a و b يك عدد c موجود است، براي ان كه $f(c)=k$ صدق ميكند.

تمرينات فصل

جواب صحيح را انتخاب نمايند.

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ باشد، پس $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 20)(x + 1)$ است:

- a) -5 b) 4 c) 3 d) 3

ب) دريابيد: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 2}$

سرلیک

56

d) $\frac{1}{2}$

c) 1

b) 2

a) 1

1- لیمیت را دریابید $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

d) -5

c) -1

b) 5

a) 1

2- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ است.

d) 2

c) 1

b) -1

a) -2

3- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ است.

d) 3

c) 1

b) -2

a) 2

4- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ است.

a) $-\frac{5}{3}$

b) $\frac{5}{3}$

c) 0

d) 1

5- $\lim_{x \rightarrow 1.4} [2x + 0.3]$ است.

d) نشده

c) 0

b) 3

a) 1

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ است.

a) 1

b) 0

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{2}{3}$

7- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ است.

$$\text{a) } 2 + \sqrt{2} \quad \text{b) } 2 \quad \text{c) } \sqrt{2} \quad \text{d) } 4$$

$$\text{-8} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} \text{ است.}$$

$$\text{a) } 1 \quad \text{b) } \frac{1}{2} \quad \text{c) } \frac{1}{4} \quad \text{d) } 4$$

9- توابع زیر را جمع نمایند.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x) = -2$$

10- اگر $f(x) = x^2 + 1$ باشد، دریابید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

11- تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \leq 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ در $x = 3$ متمادي است، b را دریابید.

12- نشان دهید، که تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ در اینتروال $(1, 2)$ حل دارد.

۱۳ - لیمیت‌های توابع ۱ - ۹ را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} 2x + 3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} 7$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$$

$$۱۴ -- اگر باشد: $f(x) = \begin{cases} 2 + x; & x < 1 \\ x^2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$$

سرلیک

الف) گراف تابع را رسم کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ دریابید .

15: توابع که در یک عدد به طور مثال در صفر تعریف نه داشت باشد، چي نامیده میشوند.

16 دریابید: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1}$

17-- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2}$ بشمارید.

18--

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ x + 3 & ; x > 2 \end{cases}$ باشد، پس متادیت تابع $f(x)$ را $x = 2$ بشمارید.

۱۹- یک تابع اختیاری بنویسید و گراف تابع را رسم کنید و ببینید، که تابع در کجا تعریف است و متادیت شاد را نشاد دهید.

۲۰- در پرسانهای زیر ۲ - ۷ مطالع میکنیم، که ایا تابع در ساحه داده شده متادی یا غیرمتادی است.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7$; $x = 3$ 3) $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)}$; $x = -1$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}$; $x = -2$ 5) $f(x) = \frac{1}{(x-3^3)}$; $x = 3$

6) $f(x) = |x-3|$; $x = 3$ 7) $g(x) = \frac{|x|}{x}$; $x = 0$

۲۱- تشریح نمایند، که چرا تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ در $x = 0$ غیرمتادی است؟

۲۲- اگر $x \in [2, 3]$ ، $f(x) = \frac{18}{x} + 2$ ، باشد، نشان دهید که $c \in (2, 3)$ موجود است طوري که $f(c) = 10$ می باشد و c را دریابید.

۲۳- نشان دهید که برای مساوات زیر یک حل موجود است:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1, 2]$$

۲۴- باشد: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ؛ $f(x) = \sin x + \cos x$ نشان دهید که مساوات

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \text{در اینتروال } (\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ یک حل دارد.}$$

۲۵- وي دي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

الف) آیا f در $x = 0$ یک تابع متمادي می باشد؟

ب) $c \in (-1, 7)$ ذوري دریابید که $f(c) = 0$ باشد.

کوتاه: توابع غیر متمادي ان هستند، که در ندام جاي تعريف نه باشد.

۲۶- اگر $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ؛ $f(x) = 2\sin x + 3$ ، باشد، پس نشان دهید که

$c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ موجود است، دریابید که برای این $f(c) = 4$ و c صدق میکند

۲۵ الف: مطالعه نمایند، که آیا توابع زیر در جاي x_0 مغمادي می باشد.

$x_0 = 1$ $x \leq 1$ لپاره $x_0 = 1$ $x > 1$ لپاره		$x_0 = 0$ $x \leq 0$ لپاره $x_0 = 0$ $x > 0$ لپاره $x_0 = 0$ $x \leq 0$ لپاره	
---	--	--	--

سرلیک

$x_0 = 1$ د $x \leq 1$ لپاره $x_0 = 1$ د $x > 1$ لپاره	b) $f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{f} \\ \ln x & \text{f} \end{cases}$	$x_0 = 0$ د $x > 0$ لپاره	a) $f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$
---	---	---------------------------	--

۲۶-- اگر $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = 2 \sin x + 3$ ؛ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ باشد، پس نشان دهید، که

موجود است، برای ان که $f(c) = 4$ صدق کند و c را دریابید.

۲۷: حد هاي زیر را بشمارید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 2x}{x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^3 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + \frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x \cos 3x}{x}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$$

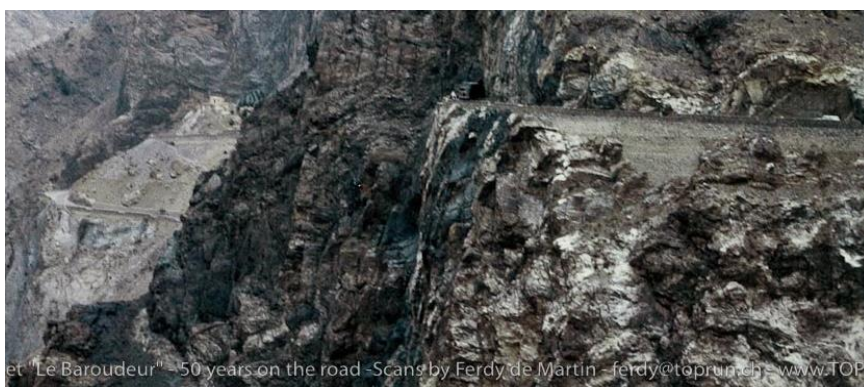
$$32) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{\sin 2x}$$

تغیر قیمت وسطی تابع Average rate of change

د ماهیپر یا د سالنگ سرک خېره (دا خېره که د کمپیوترکارانو سره **وي ور** وادي چول شي)



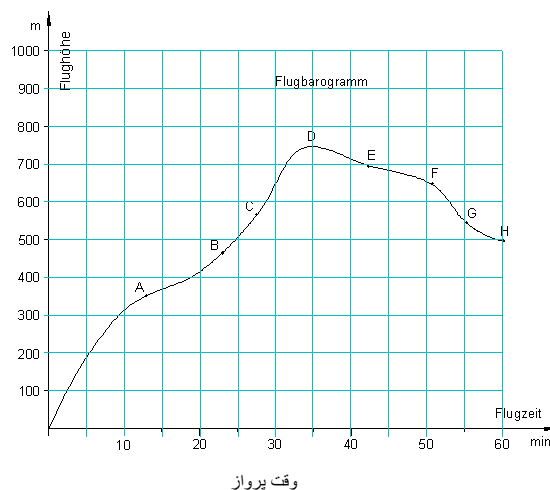
درین قسمت کتاب موضوع مهمي ریاضیات را مطالعه میکنیم، که میتوان ان را هسته ریاضیات بنامیم. پس لازم دیده میشود، که این شی بحث به حیث یک یادداشت بیاوریم:

اگر از یک جاي به جاي دیگر از تغییر قیمت وسطی (Averagerate of change) حرف میزنیم ، هدف ازین میل و یا بلندی تانجنت تابع میباشد، دریک نقطه معین (هر کدام این دو کلمه به یک معنی هستند) یا دو نقطه و می بینیم، که به همین طور تقسیم تفاضل (Difference quotient) هم.

این کلمات را در انگلیسی slop میگوید، که در ادبیات ما به اسم میل یاد می شود.

میل گراف تابع در یک نقطه (بلندی)

هوایما یک اله به نام (Flight barogramm) (اله نوشتن پرواز در طیاره) ساخته شده، که بلندی طیاره را رسم میکند و این بلندی در اختیار زمان میباشد، یعنی تابع که بلندی پرواز را رسم میکند در اختیار زمان است.



در گراف بالا ارتفاع پرواز یک تیاره در اوقات مختلف نشان داده شده.

فعالیت :

- در شکل بالا میل گراف را در نقطه A با نقطه B مقایسه کنید. به همین ترتیب میل گراف را در نقطه E با نقطه G مقایسه کنید.

- در شکل بالا ارتفاع نقطه A را با ارتفاع نقطه B و ارتفاع نقطه E را با ارتفاع نقطه G مقایسه کنید.

- روشن سازید، که چرا در یک نقطه باید از بلندی، میل یا تانجنت حرف میزنیم؟

- کوشش کنید، که برای یافتن میل گراف در یک نقطه یک طریق یا یک متود تعریف کنید و از شکل در نقاط A و B میل را تعیین نماید.

- ایا فکر می کنید، که میل در نقطه B نسبت به میل در نقطه A زیاد می باشد؟

- ایا فکر می کنید، که در نقاط E و G میل منفی است. درینجا در نقطه E از روی قیمت، میلان زیاد است نسبت به نقطه G ؟

- ایا بلندی یک خط و به همین ترتیب یک منحنی در هر جای فرق دارد یا نه؟

نتیجه:

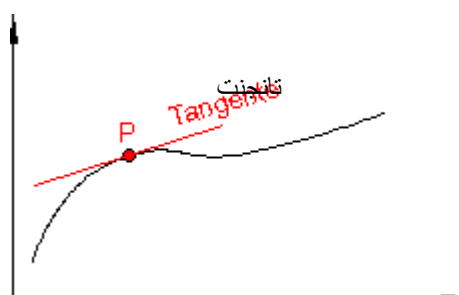
می بینیم، که در یک منحنی میل (بلندی) گراف در هر جای یا هر نقطه برابر نیست ازین سبب باید نقطه را نشان دهیم، که در آن جا میل مطالع میشود.

در مثال زیر روشن می سازیم، که تنها میل خط مستقیم در هر جا مساوی است، بدین اساس درینجا ما از میل یک خط صحبت می کنیم.

دیده میشود، که تعریف زیر عاقلانه است.

تعریف:

میل گراف یک تابع در یک نقطه P در همان نقطه به میل تانجنت گراف مساوی است.



دیده میشود، که در این جا تانجنت تعریف خط را دارد، که در احاطه نقطه به امکانات موجود، به مماس خوب نزدیک میشود.

از روی این تعریف میل یک گراف میل یک خط می باشد.

تغیر قیمت وسطی

۶۰

برای تعیین گراف در نقاط A و B در هریک یک خط (تانجنت) رسم میکنیم، که به گراف بسیار نزدیک شود یا تقرب کند.

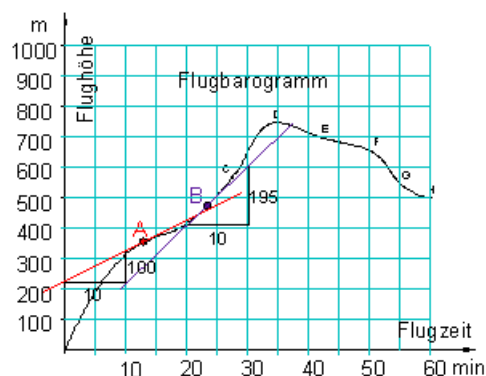
به کمک مثلث میل، میل به طور ساده شمرده میشود:

میل در نقطه A:

$$\frac{100 \text{ m}}{10 \text{ min}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

میلان در نقطه B:

$$\frac{195 \text{ m}}{10 \text{ min}} = 19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$



برای مثال ما میل در یک نقطه معین به معنی میل سرعت لحظی می باشد.

در نقطه A: وقت پرواز نزدیک به 12,5 min می باشد، میلان سرعت نزدیک به

10 m / min می باشد.

در نقطه B: وقت پرواز نزدیک به 23,0 min می باشد، سرعت میلان تقریباً 19,5 m / min می باشد.

تانجنت تا به حال فقط از روی چشم‌دید تعریف شده، که در ساحه یا محیط نقطه مماس بسیار نزدیک میشود. به این دلیل ممکن بود، که میل گراف در نقاط A و B هم تنها به طور تقریبی تعیین گردد، این در عمل قابل قناعت نیست.

میل (بلندی) گراف یک تابع در یک نقطه :

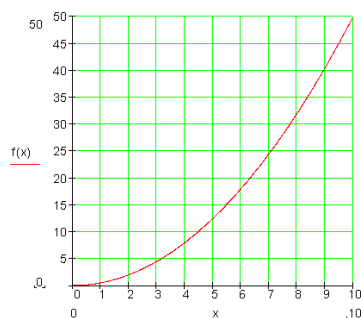
می فهمیم، که یک ریل بعد از حرکت از استادگاه سرعت خود را آهسته آهسته زیاد میکند. راه طی شده (از استادگاه) همیشه زیاد میشود. دور شدن از استادگاه در اختیار (تابع) سرعت میباشد

عمل از طریق مساوات زیر تابع نوشته کرده میتوانیم.

در اینجا وقت x برای ثانیه و راه s را برای متر تعیین گردیده و مینویسیم:

$$s = f(x) = 0,5x^2$$

شکل مقابل یا پایین : گراف تابع



فعالیت:

۱ - حالا باید تغییر وسطی **Averagerat of change** (میل وسطی) در بین ثانیه ۳ - م و ۷ - م شمرده شود.

۲ - برای این قاطع یا سیکانت مربوط ترسیم شود و میل آن را شمرده شود.

۳ - حالا قیمت تغییر (میل وسطی) در بین ثانیه ۳ - م و ۴ - م شمرده شود.

۴ - نشان دهید که در ثانیه سوم قیمت تغییر یا میل چي قدر مي باشد؟

تقسیم تفاضل Difference quotient

میل یک خط بدون گرفتن مشتق تعیین شده مي تواند.

خط $y=f(x) = mx+a$ را داریم.

فرمول میل یا بلندي (ارتفاع) یک خط قرار زیر میباشد:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع (secante) :

قاطع خط است که منحنی را در دو نقطه P_0 و P_1 قطع میکند.

میل یا بلندي قاطع (secante):

این که قاطع هم یک خط است، پس ،، میل (بلندي) ،، هم به طور میل شمردن میشود. در زیر m_s برای بلندي نوشته میشود.

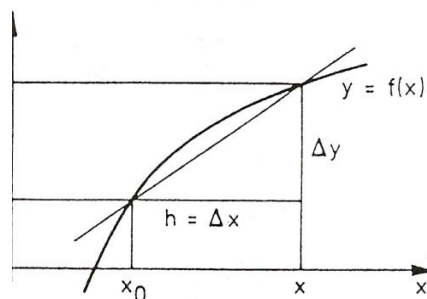
$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

تعریف:

یک تابع $y = f(x)$ در یک احاطه x_0 و در خود x_0 یک تابع تعریف شده باشد، x جدا از x_0 مگر در محیط یک جاي دلخواه است (شکل دیده شود).

پس تقسیم تفاضل یا Difference quotient یا میل سیکانت موجود است، که قرار زیر مینویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$



فرمول برای تابع f : $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

این فرمول در گراف f در بین دو نقطه شمردن میل میباشد. این نقاط بالای محور x نقاط x ، $x+h$ میباشد.

تقسیم تفاضل برای تعریف مشتق به کار می آید.

مثال:

تابع $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ داده شده باشد. تقسیم تفاضل این تابع را دریابید.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\ &= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x + 3h - 5 \end{aligned}$$

تمرین:

۱ -- قیمت تقسیم تفاضل در نقاط P و Q را تعیین نمایند.

$$a) P(3,2), Q(5,4) \quad b) P(2,4), Q(3,1)$$

۲- در جاي $x = x_0$ بلندي تانجنت تابع f را تعيين نمايند..

$$a) f(x) = x^2, x_0 = 2, \quad b) f(x) = 0.5x^2, x_0 = 3$$

۳- -- زير تقسيم تفاضل و مشتق چي مي فهميم و در بين اين چه فرق موجود ميباشد؟

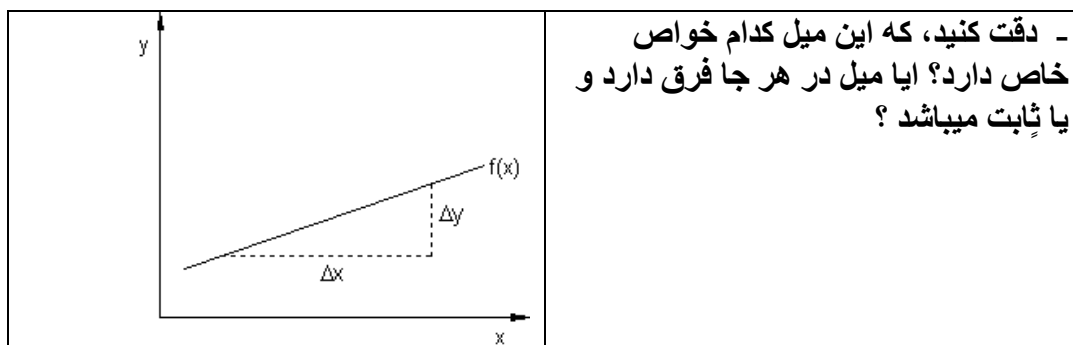
۴- -- زير سيکات (قاطع) يک تابع چي مي فهميم و زير بلندي تانجنت چي مي فهميم؟ و در بين اين کدام روابط برقرار است؟

شمردن مشتق Differentialcalculation

فعاليت:

فکرکنيد، مثل که در يک ميل ثابت $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{constant}$ ، به طور مثال در يک

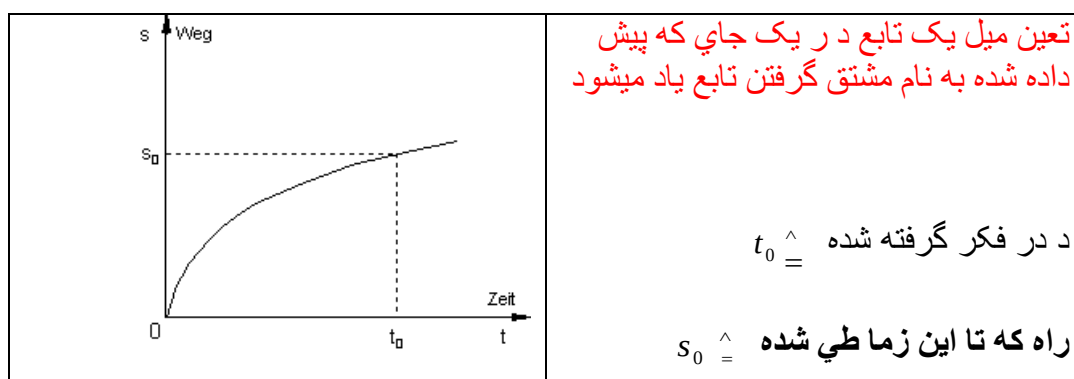
تابع خطي يا لاييني $f(x) = a_1x + a_0$ ميل هست يا نه؟



ایا در اوقات مختلف ضرور میبینید ، که درحالت تغیر (حالت میل) حالت حرکت تابع را تحقیق کنید؟

- و یا ازین سبب سرعت لحظوی $v(t_0)$ در دیاگرام فاصله- وقت تحقیق نماید؟

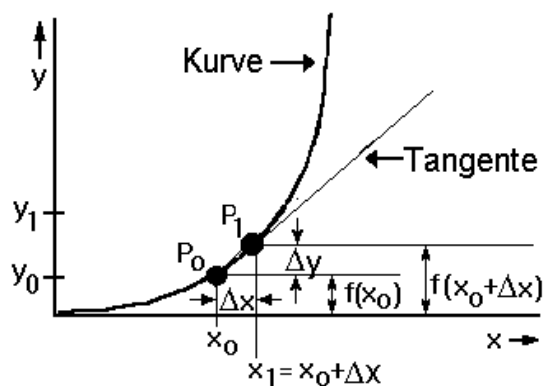
-ایا به کمک شمردن مشتق این پرابلم حل میشود؟



یادداشت: در شکل فوق Zeit به معنی وقت و Weg به معنی راه میباشد.

مشتق = میل یک منحنی (Differential calculation)

تانجنت: اگر نقطه P_0 و P_1 به یکدیگر لایتنه‌ای نزدیک شود، پس ازسیکانت تانجنت جور میشود.



ميل تانجنت: ميل تانجنت حد ،، ليمت، Limit، ميل سيكانت مياشد.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعاليت :

۱ - از شکل بالا و از تحقيق مربوطه براي مشتق چه فکر مي کنيد ؟

۲ - زير کلمه derivative (مشتق) چه مي فهميم ؟

و اين به دري ساده چي معني دارد؟
 ۳ - از تقسيم تفاضل چطور به مشتق مي ايم؟ درين بابت به استفاده از شکل بالا نظر خود را اظهار نمايد.

۴ - از فعاليت ۲ بگويد، که چرا اين حساب يا شمارکردن جدا کردن يا مشتق ناميده ميشود؟
 دقت: مثل که در پيش اشاره کردم، کلمه derivative نو است، پس ازين بابت اين چند نقاط را در نظر ميگيريم : derivative به معني مشتق يا جدا کردن است، که ما اين را مشتق مي ناميم.

اگر در تقسيم تفاضل تابع $x > x_0$ و (همينطور) $x > 0$ و يا (به همين ترتيب) $h > 0$ يک حد داشته باشد، پس تابع $y = f(x)$ در جاي $x = x_0$ قابليت مشتق دارد، و براي اين مينويسيم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \dots$$

این لیمیت را به اینطور نشان میدهم: $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x)$;

در جای x_0 مشتق (Derivativ) تابع $y = f(x)$ ، یک راه دیگر مستقیم یا منحنی طور دیگر را جدا میکند.

برای شمردن ساده مشتق یک مثال:

مشتق تابع $f(x) = x^2 - 3x + 2$ را میخواهیم پیدا نمایم:
تقسیم تفاضلی این قرار زیل میباشد:

$$\begin{aligned}\frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3\end{aligned}$$

همراه حد $\Delta x \rightarrow 0$ مشتق بدست می آید:

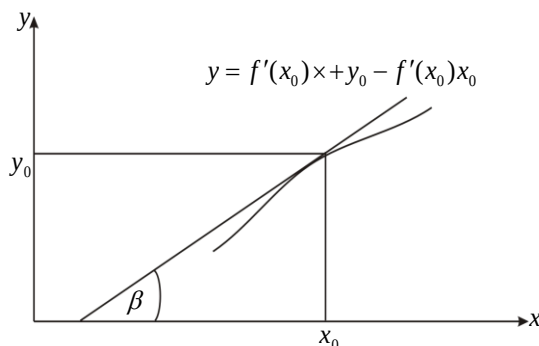
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

برای این تعریف زیر را میدهم:

اگر یک تابع $y = f(x)$ در جای x_0 قابلیت مشتق داشته باشد، پس خط زیرکه از نقطه (x_0, y_0) میگذرد و میل شان $f'(x) = \tan \beta$ باشد قرار زیل نوشته میکنیم:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

و در نقطه (x_0, y_0) تانجنت منحنی داده شده $y = f(x)$ نامیده میشود (مقایسه شکل)



در پایین شمردن مشتق چند توابع ساده و اساسی را زیر بحث میگیریم.

مثال ۱:

مشتق یک ثابت :

ما تابع زیر را داریم، که قیمت شان یک ثابت میباشد.

ثابت، پس برای هر جای x_0 داریم: $y = f(x) = c = \text{Const}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

مثال ۲: یک تابع خطی $f(x) = x$ داده شده باشد

در جای x_0 می‌خواهیم مشتق تابع را دریابیم و تابع مشتق هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 = 1 \end{aligned}$$

پس $f'(x_0)=1$ در جای x_0 مشتق تابع است و تابع مشتق $f'(x_0)=1$ است یعنی یک ثابت میباشد.

مثال ۳:

مشتق تابع $y = f(x) = c \cdot u(x)$ همراه یک ثابت c .

قانون ثابت:

یک تابع، که از ضرب یک تابع ساده و یک ثابت بدست آمده باشد، برابر است به مشتق تابع ساده، که به یک ثابت c ضرب شده باشد یعنی از $y = f(x) = c \cdot u(x)$ داریم:

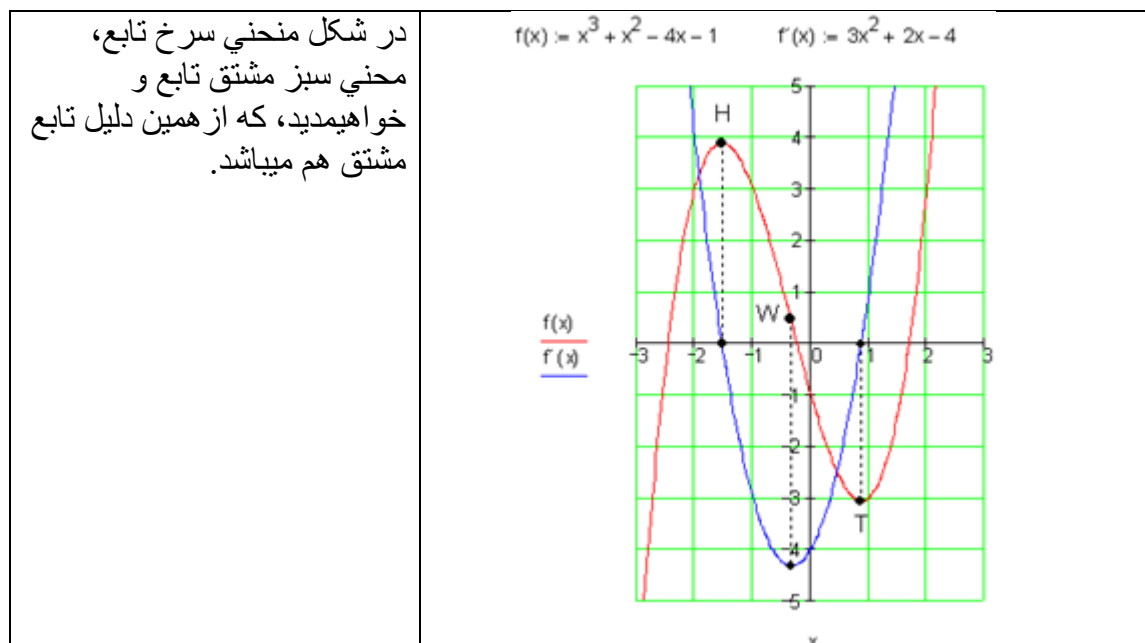
$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x_0) &= c \cdot u(x_0) \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{c} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}} \end{aligned}$$

تمرین:

- زیر تقسیم تفاضل و زیر مشتق چه می فهمیم؟
- روابط بین تقسیم تفاضل و مشتق را نشان دهید.
- زیر میل قاطع (سکانت) و تانجنت چه می فهمیم؟



فعالیت :

۱ - در جاي x_0 مشتق تابع يعني چه؟

۲ - بعد از مشتق گرفتن يك تابع اين مشتق را چه میناميم يا چه بناميم؟

۳ - اگر مشتق تابع را تابع مشتق بناميم، واضح نمايند، که چرا تابع است و درجه اين تابع به درجه تابع اول مقایسه نمايند.

ايا از اين فرق کلمه مشتق واضح کرده ميتوانيد؟

براي واضح ساختن اين از مثال زير کار ميگيريم:

مثال ۱: تابع $y = f(x) = x^2$ داده شده باشد.

میخواهم در جاي $x = x_0$ و بالخصوص در جاي $x_0 = 2$ پیش از همه چیز تقسیم تفاضل را دریابیم.

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 : \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x
 \end{aligned}$$

حالا از طریق بدست آوردن لیمیت به ضریب مشتق می ایم:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

پس $f'(x_0) = 2x_0$ داریم و برای $x_0 = 2$ قیمت $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ صدق میکند.

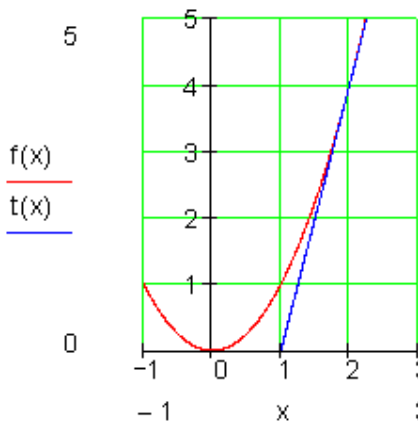
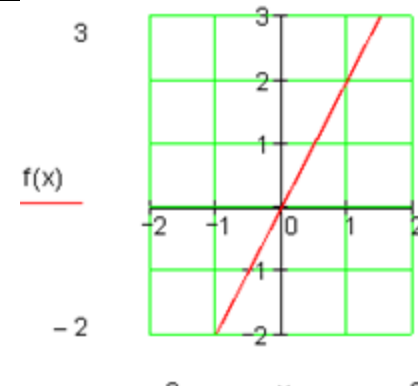
در جاي $x_0 = 2$ مشتق اول تابع $y = f(x) = x^2$ به 4 مساوي است، این به این معنی که تابع در جاي $x_0 = 2$ میل 4 دارد.

نتیجه شان:

میتواند از طریق گراف تابع امتحان شود، طور که تانجنت در نقطه

$$P_0(x_0 | y_0) = P_0(2 | 4)$$

ترسیم کنیم و از مثلث میل، بلندي (میل) بدست بیاوریم.

	در مثال بالا : $y = f(x) = x^2$ در هر جاي دلخواه x_0 تابع را پیدا میکنیم: $y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$ <table border="1" data-bbox="841 693 1198 809"> <tr> <td>x_0</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$f'(x_0)$</td> <td>-4</td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> </table>	x_0	-2	-1	0	1	2	$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4
x_0	-2	-1	0	1	2								
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4								
	گراف یک خط رسم میکند، و $f'(x) = 2x$ مشتق تابع نامیده میشود یادداشت : اگر مشتق یک تابع گرفته شود، پس بار دیگر هم یک تابع بدست می آید و این تابع مشتق نامیده میشود.												

تابع مشتق : قیمتهای تابع در هر نقطه، تابع داده شده (اساسی) را ترسیم میکند، ازین لحاظ این تابع میل هم نامیده میشود.

مثال ۲ : تابع $f(x) = x^3$ داده شده باشد.

فعالیت: شاگردان عزیز گراف تابع $f(x) = x^3$ را رسم کند.

ما میخواهیم مشتق تابع بالا را در نقطه x_0 دریابیم و به همین طور تابع مشتق.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad \begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2
 \end{aligned}
 \right.$$

پس $f'(x_0) = 3x_0^2$ در نقطه x_0 مشتق تابع $f(x) = x^3$ میباشد.

تابع مشتق به این قرار است: $f'(x_0) = 3x_0^2$

مثال ۳ یک تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ داده شده.

الف: گراف تابع زیر را به یاد بیاورید.

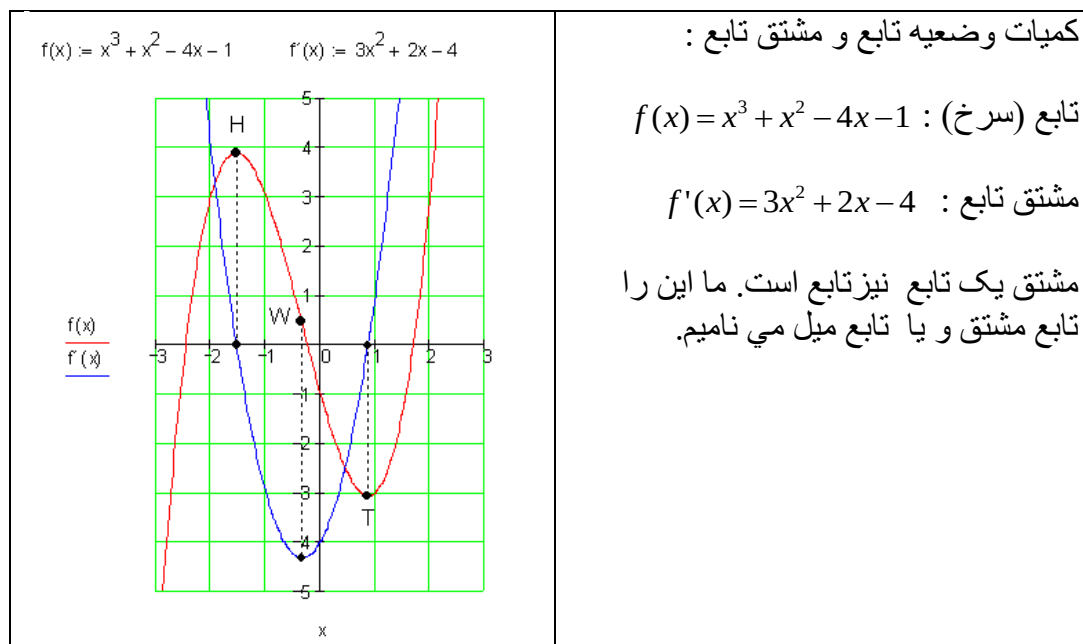
در نقطه x_0 مشتق تابع را پیدا می کنیم و تابع $ \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x} \end{aligned} $	مشتق:	$ \begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \end{aligned} $
--	-------	---

براي $\Delta x \rightarrow 0$ ليميت مساوات با لا ميگيريم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

پس داريم: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ در جاي x_0 مشتق f ميباشد.

پس تابع مشتق قرارزيل است: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$



تمرينات:

در معدلات زيل مشتق توابع و توابع متق را دريابيد

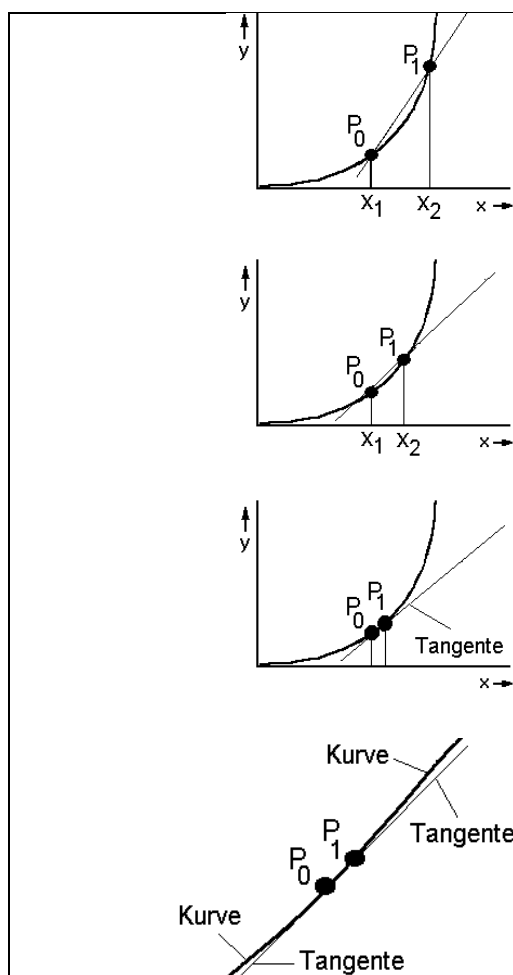
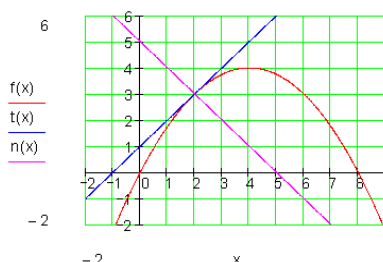
a) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$

b) $f(x) = x - \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

تعریفهای تانجنت و عمود و خواص آن



شکل رو برو در نقاط P_0 و P_1 یک منحنی و یک قاطع را نشان میدهد

که نقطه P_0 به طرف نقطه P_1 حرکت دهیم.

یادداشت: به این صورت قاطع میل خود را تغییر میدهد.

بالاخره میخواهیم، که نقطه P_1 به نقطه P_0 لایتنهای نزدیک شود، قاطع درینجا به تانجنت نزدیک میشود.

اگر مکمل شناخته شد، که اطراف نقاط P_1 و P_0 را بزرگ میسازیم: اگر نقطه P_1 به P_0 لایتنهای نزدیک شود، پس دیده میشود، که تانجنت در نقطه P_0 همین حالت را اختیار میکند، مثل که منحنی در نقطه P_0 .

فعالیت:

۱ - اشکال بالا را به هم مقایسه کنید و در باره میل فکر کنید، که کدام بلندی زیاد مییاشد؟

۲ - تانجنت را تعریف نماید و در شکل بالا نشان دهید.

۳ - قاطع (سیکانت) را تعریف کنید و در شکل بالا انرا نشان دهید.

در زیر فرمول عمومی تانجنت و نورمال (عمود) را برون نویس میکنیم:

شروع: تانجنت گراف $f(x)$ را در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ لمس کند. عمود (نورمال) گراف $f(x)$ را در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ عمود قطع کند.

مساوات تانجنت: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

به $m_t = f'(x_0)$ نوشته میکنیم: (1) $t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t$

برای این که $P(x_0, f(x_0))$ یک نقطه تانجنت مییاشد، پس این نتیجه را میگیریم:

$$\begin{aligned} t(x_0) = f(x_0) &\Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{aligned}$$

در (۱) جا به جا میکنیم، پس داریم:

$$\begin{aligned} t(x) &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

عمود (نورمال) به منحنی در همان نقطه، که تانجنت در آن واقع است، عمود می افتد.

میل نورمال:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

مثال :

تابع $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ را داریم.

تانجنت و عمود(نورمال) تابع را بیابید:

حل:

مشتق تابع را قرار زیل می‌شماریم و گراف شان را (در زیر رسم شده) رسم می‌کنیم:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

میل تانجنت در نقطه x_0 قیمت 3 دارد.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

در نقطه $P(-2, -5)$ تانجنت بالای $f(x)$ قیمت 3 دارد.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

در جاي $x_0 = 2$ داریم:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

دریافت عمود یا نورمال:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2 | f(2))$$

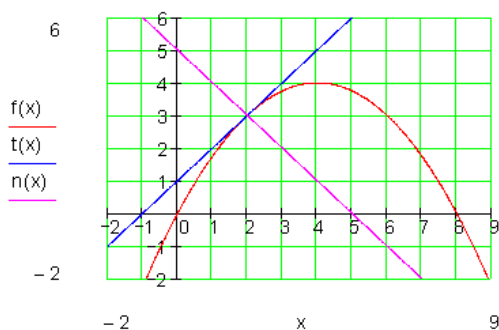
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

در $x_0 = 2$ زیر را میدهد:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



مساوات عمومي تانجنت و عمود:

مثال (یا قضیه؟): تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

ميل تانجنت :

ميل گراف يك تابع در يك نقطه $P(x_0 | f(x_0))$ همان معني دارد، مثلي كه ميل تانجنت درين نقطه.

ما تابع $f(x)$ و مشتق تابع را دقيق در فکر ميگيريم.

ما مربع تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ را داريم.

مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

جدول قيمتها:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

از جدول قيمتهاي $f(x)$ خوانده ميشود، كه رأس مربع تابع $S(-1, 0,75)$ است.

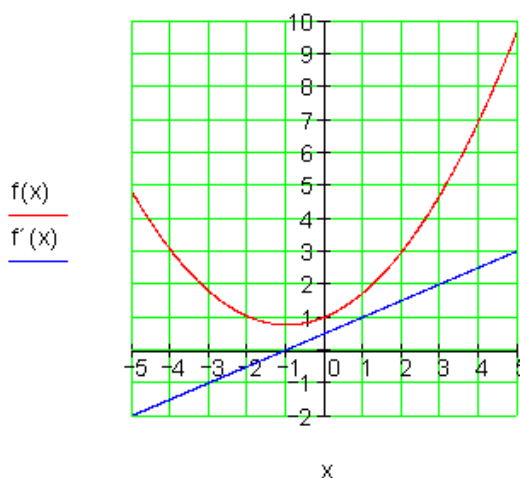
براي قيمت $x=-1$ قيمت ميل تابع $f'(-1) = 0$ ميباشد :

اين به معنی است، كه در نقطه رأس ميل $f'(x)$ صفر ميباشد.

تانجنت در S هم اين معنی دارد، كه صفر است، اين درانجا افقي حركت ميكند. يعنی به محور x موازي حركت ميكند.

گرافها:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \quad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



مثال:

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \text{ تابع لرو:}$$

تانجنت را پیدا شود، که گراف $f(x)$ را در نقطه $P(-2, f(-2))$ لمس میکند،

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$

$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$

$$\Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

نتیجه: در گراف تابع $f(x)$ تانجنت و عمود در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ شکل زیر را دارد.

تعریفهای تانجنت و عمود و خواص آن ۸۱

مساوات تانجنت

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{ارتفاع}}(x - x_0) + f(x_0)$$

مساوات عمود

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{ارتفاع}}(x - x_0) + f(x_0) ; f'(x_0) \neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو گرافونه وکارئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + 3 \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

قوانین شمارش مشتق

قوانین شمارش مشتق طور که در اعداد، ترادفها، و لیمیت اجرا گردیده، په همین ترتیب در مشتق هم این قوانین اعتبار درارد.

نشان خواهیم داد، که جمع، تفریق، مشتقها، مشتقهای جمع، ... میباشد (در حالت تقسیم مخرج باید غیر مساوی به صفر باشد)

فعالیت :

اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = x^3 + 2$ داشته باشیم، $(f(x) + g(x))'$ در باره د

ریافت $(f(x) \cdot g(x))'$, $(f(x) - g(x))'$ و $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ $g(x) \neq 0$ فکر کنید.

مساوات عمود

مساوات تانجنت

قضیه (قاعده جمعی):

اگر یک تابع $f(x)$ حاصل جمع دو توابع $u(x)$ و $v(x)$ تشکیل شده باشد، پس مشتق شان هم از حاصل جمع هر دو تابع تشکیل شده، یعنی:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

حل:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x) + v'(x)}}$$

مثال:

اگر توابع $f(x) = 5x^2 + 3x$ ، $u(x) = 5x^2$ ، $v(x) = 3x$ داشته باشیم مشتق شان را دریابید.

$$f(x) = 5x^2 + 3x, \quad u(x) = 5x^2, \quad v(x) = 3x$$

$$\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$$

فعالیت: اگر $f_1, f_2, \dots, f_n$ توابع و $k_1, k_2, \dots, k_n$ اعداد ثابت باشد، پس نشان دهید که داریم بون ثبوت):

$$\begin{aligned} & [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\ & = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \end{aligned}$$

قضیه (قاعده ضرب): اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو توابع باشد، پس نشان میدهم که:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

ثبوت:

به اساس تعویض فورم مناسب یعنی اگر در صورت $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$ جمع نمایم، زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

از بالا بدست می آید عنی لیمیت هر دو طرف را کیگیریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

مثال:

اگر $g(x) = x^2 - 1$ و $h(x) = \sqrt{x}$ داشته باشیم، پس مشتق $f(x) = g(x)h(x)$ را میخواهیم دریابیم.

ثبوت: طور زیر به پیش میرویم:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه تقسیم (قانون تقسیم):

f و g دو توابع باشد. می‌خواهیم ثبوت کنیم که:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad g(x) \neq 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]$$

می‌خواهیم $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$ به صورت جمع نمایم، پس داریم:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال:

مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ (که $x^2 - 4 \neq 0$ باشد) را میخواهیم دریابیم.

حل: اگر $g(x) = x^2$ و $h(x) = x^2 - 4$ وضع شود، پس بیدست می آید:

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

و از قانون تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2 - 4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2} \end{aligned}$$

تمرینها:

اگر $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ و $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ داشته باشیم، پس مشتق جمعی، ضرب و تقسیم ($f(x) \neq 0$) توابع را از راههای مختلف، اگر ممکن باشد، دریابید.

- مشتق توابع از روی قانون توان دریابید.

مشتق توابع الجبري

تعریف توابع الجبري و توابع غیره :

۱ - یک تابع اساسی الجبري نامیده میشود، اگر قانون ترتیبش از طریق مساوات داده شده باشد، که در ترمها به مساوات متحول فقط عملیه های الجبري (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) که مخرج شان صفر نه باشد، طاقت، جذر گرفتن (که اکسپوننتهای طاقت و

مثبت و اعداد تام میباشند) به کار برده شد..

۲ - توابع غیر الجبري ترانسسندنت نامیده میشود، مثل توابع اکسپوننشل،- ولوگاریمی و توابع زاوایا(توابع مثلثاتی).

۳ - یک تابع الجبري راشنل یا کسري نامیده میشود، اگر قانون ترتیب شان به یک مساوات داده شده باشد، در آن که قوانیم تا لایتناهی عملیات شمردن ((جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(که مخرج شان صفر نه باشد) طاقت و جذ گرفتن(اکسپوننتهای طاقت و جذر باید مثبتو اعداد تام باشد) () « به کار برده شده باشد.

فعالیت :

- تابع $f(x)$ اگر به شکل

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

به $n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in \mathbb{R}$ نوشته شده باشد، چي نامیده میشود.

- داریم : $u(x) = x^2 + 4x + 4$ و $v(x) = 3x + 6$ به شکل تقسیم دو توابع u و v مثل $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ به $v(x) \neq 0$ نوشته کنید.

- ساحه تعریف تابع را نشان دهید و باز مشتق هر یک از تابع u ; v را بگیرید و بعداً تقسیم مشتقها را نشان دهید و تقسیم مشتق به مشتق مقایسه کنید.

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ داده شده. در نقطه x_0 مشتق تابع را دریابید و تابع مشتق را نشانی کنید.

ثبوت:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

پس در جاي x_0 مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق تابع میباشد: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

به اسشس درسهاي گذشته $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ تابع مشتق میباشد.

مشتق توابع قسم $f(x) = x^q; q \in Q$:

از طریق شمردن نتایج زیر بدست می آید:

تابع

تابع مشتق تابع

$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

اگر پنج مشتقهاي بالا را به همدیگر مقایسه نمایم، پس حدس زده میشود، که قوانین ساختار زیر بدست می آیدکه:

د توان قانون (بدون ثبوت):

۱ - اکسپوننت پیشین متحول x به شکل ضریب نوشته میشود.

۲ (اکسپوننت جدید همان اکسپوننت پیشین منفي یک میباشد.

$$q \in Q \text{ با } f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1}$$

مثال : مشتق $f(x) = \frac{1}{x^2}$ را دریابید.

ثبوت: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

مثال : مشتق تابع $f(x) = 3x^4$ را دریابید.

ثبوت:

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

مثال: میخواهیم مشتق تابع $f(x)$ را در جای $x = 2$ دریابیم:

حل:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 2u + \Delta x$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ در جای $x = 2$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x+1} \\
 x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{1}{3(3+\Delta x)} \\
 f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}} \\
 x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} \\
 f'(u) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u+1)^2}}}
 \end{aligned}$$

مثال:

مشتق یک توان ، که اکسپوننت شان عدد طبیعی میباشد:

ما تابع $y=f(x)=x^n$, $n = 1, 2, 3$... را داریم و میخواهیم مشتق شان را دریابیم:

ثبوت: ما قرار زیر به پیش میرویم.

به اساس جمله بینوم در هر جاي x_0 اعتبار دارد:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
 &= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h} \\
 &= \frac{1}{h} \left(x_0^n + nx_0^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x_0^n \right) \\
 &= nx_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1}
 \end{aligned}$$

برای $h \rightarrow 0$ تابع $y = x^n$ در هر جاي x_0 ، به مشتق زیر، قابلیت مشتق دارد :

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ثبوت دیگرگون مثال بالا به حیث تمرین باشد.

تمرین: _ اگر یک پولینوم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ با $n \in N \wedge a_1 \in R$ داده شده باشد، مشتق شان را دریابید.
- مشتق توابع زیر را از روی قانون توان دریابید.

$$a) f(x) = x^5$$

$$b) f(x) = x^6$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$e) f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$h) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

مشتق توابع مرکب (- زنجیری)

میتواند به تابع v بسته شود، اگر تابع بیرونی (قاعده زنجری) $D(u)$ به $W(v)$ عناصر مشترک داشته باشد.

برای این مینویسیم:

$$u \circ v(x) = u(v(x)) \text{، اگر تابع } f \text{ به } y = f(x) = u(z) \text{ و } z = v(x) \text{ باشد.}$$

فعالیت:

_ در تابع زنجیری $f(g(x))$ ساحه تعریف و به همین قسم در باره ساحه تعریف تابع نظر خد را ابراز دارید.

_ بگویند که قیمت تابع $f(g(x)) = (x^2 + 2x + 1)^2$ در جای $x = 3$ کدام است و ساحه های تعریف کدام است و در باره مشتق گرفتن فکر کنید.

در تابع مرکب (زنجيري) دلخوا در باره ساحه تعريف و به همين طور ساحه تابع نظر خود را اظهار نمايئد.

حالا در جاي $x = x_0$ قابليت مشتق تابع مرکب يا زنجيري $y = f(g(x))$ را خواهيم مطالعه کرد:

$$f(x) = f[g(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

مشتق داخلي مشتق بيروني

براي اين فرض ميکنيم که:

۱ - تابع داخلي $z = g(x)$ در جاي $x = x_0$ قابليت مشتق را دارد. اين بايد در یک ساحه تعريف شده معلوم x_0 متمادي باشد وي.

ما داريم: $g(x_0) \rightarrow g(x+h)$ براي $h \rightarrow 0$.

به هميد طور $(\Leftrightarrow) g(x_0 + h) = g(x_0) + k$

طور که $k \rightarrow 0$ براي $h \rightarrow 0$.

۲ - اگر تابع بيروني $y = f(z)$ در $z = z_0 = g(x_0)$ مشتق داشته باشد.

تقسيم تفاضل $y = f(g(x))$ ميتواند به طور زير داده شود و فورم شان هم تغير شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0 + k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

اگر $h \rightarrow 0$ برود (به همين ترتيب $k \rightarrow 0$ ميرود) ، پس اين روايط به مشتق ميرود:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}; \dots (*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

اگر برای جا به جا (فیکس) $x = x_0$ را x انتخاب کنیم، میتوان، که فرمول (*) به قسم زیر به طور کوتاه داده شود و برای $z = g(x)$ ، $y = f(z)$ صدق کند:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}; \dots (**)$$

در نظر

داشته باشیم، که dy/dx برای جاي $z = g(x)$ باید ترتیب (تنظیم) شود.

این فرمول (*) فرمول قاعده مرکب نامیده میشود و با فرضیه های بالا اعتبار دارد. این به طور ساده میتوانیم به یاد داشته باشیم، زیرا که طرف راست از طرف چپ به طور فورمال به زیاد شدن dz بدست آمده.

از ثبوت بالا جمله زیر بدست می آید:

قاعده مرکب داریم: $f(z) = f(g(x))$ ، پس تابع $z = g(x)$ در x و تابع $y = f(z)$

در $z = g(x)$ قابلیت مشتق را دارد، پس متصل به تابع $y = f(g(x))$ هم در x

قابلیت مشتق را میباشد و این اعتبار دارد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dg} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

کوتاه: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

مثال :

$$f(x) = (x^2 + 2)^2$$

$$\text{Substitution: } z(x) = x^2 \quad \boxed{\text{بدلون}}^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$$

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = 2z \cdot 2x = 2(x^2 + 2) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

مثال ۲ . ۱۱ : تابع $y = \sin x^2$ به طور زیر یک تابع داده شده مرکب می باشد:

$$y = \sin z, \quad z = x^2$$

این هر دو توابع در هر جای قابل مشتق است. پس ازین دلیل در هر جای اعتبار دارد:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

مثال : تابع $y = \sin^2 x$ به طرو زیر متصل داده شده.

$$y = z^2, \quad z = \sin x$$

درین جا هم هر دو توابع در هر جا قابلیت مشتق را دارد. پس بدین لحاظ در هر جا اعتبار دارد:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

مثال : مشتق تابع $f(x) = (x^5 + 4)^8$ را بینمایید!

حل: هرگاه که $g(x) = x^8$ و $h(x) = x^5 + 4$ را وضع میکنیم، پس داریم:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$g'(x) = 8x^7$ $h'(x) = 5x^4$ است، پس داریم:

$$f(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4$$

تمرینها:

۱ - $h(x) = \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

۲ - اگر $f(x) = (3 - 2x + x^2)^4$ باشد f' را دریابید

مشتق توابع زیر را هم بگیرید

1: $f(x) = (1 - 2x^3)^4$

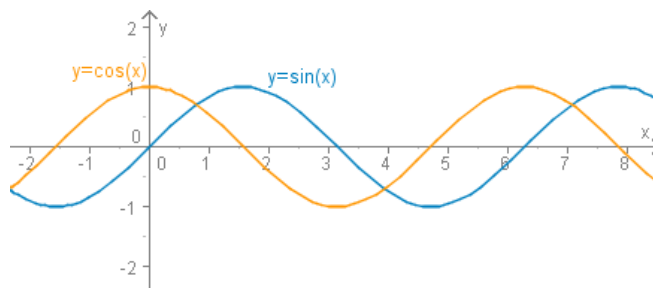
2: $f(x) = (2x^2 + 1)^{-2}$

3: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

4: $h(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$

5: $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

مشتق توابع مثلثاتی



$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots I$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots II$$

فعالیت:

ایا میدانید ، که مساوات زیر مشتقهای توابع اند.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad :b$$

$$f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ما در زیر سه حالت مساوات بالا را ثبوت میکنیم و ثبوت باقی مانده دیگران را به شاگردان عزیز می گزاریم.

قضیه : مشتق تابع سین را میخواهیم دریابیم، $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ است:

برای ثبوت این قضیه در ورودی بالا دو فرمول اول به کار می آید.

تابع سین $y=f(x)=\sin x$ برای هر x تعریف دارد ، پس برای تعیین دلخواه x_0 بدست می آید:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} = \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\end{aligned}$$

با در نظر داشت حصه لیمیت داریم :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0.$$

تابع سین در هرجای، با مشتق زیر، قابل مشتق است:

$$\left(\frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0, \quad (X \text{ به قوس یا رادیان})$$

قضیه: به همین طور ثبوت می شود، که تابع کوسین هم در هرجای قابل مشتق است، با مشتق زیر:

$$\left(\frac{d \cos x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0, \quad X \text{ به رادیان}$$

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad : b$$

از فرمول دوم ورودی داریم:

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right]\end{aligned}$$

از قاعده ضرب لیمت بدست می آید :

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

از مساوات بالا بدست می آید: $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$

قضیه : می خواهیم ثابت کنیم، که تابع تانجنت $f(x) = \tan x$ قابلیت مشتق را در آن میباشد و مشتق شان $f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ است.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

فعالیت : شاگردان عزیز مشتق تابع $f(x) = x^2 \sin x$ را دریابید!

یاد داشت: $g(x) = x^2$ و $h(x) = \sin x$ را وضع کنید.

مثال: می خواهیم مشتق تابع $y = \cos \frac{\pi x}{180}$ را دریابیم.

حل: عوض میکنیم: $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، پس y به طور زیر نوشته میشود:

$$y = f(g(x))$$

حالا به اساس قاعده مرکب داریم:

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \cos'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)' \\ &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180} \end{aligned}$$

مشتق توابع زیر را دریابید!

$\tan^4 x$	: b	$\cos^2 2x$	: a
$\sin(3x-1)$	: d	$\sec x \cdot \cot ax$	: c
$\sec(\sec(x))$	: f	$\sin^2 x - \cos x$	: e

حل a: به اساس قاعده مرکب و یک فرمول تابع طاقت داریم:

$$\begin{aligned} (\cos^2 2x)' &= 2 \cos(2x) \cdot \cos'(2x) \\ &= 2 \cos(2x) (-\sin(2x)) \cdot 2 \\ &= -4 \cos 2x \cdot \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tan^4 x)' &= 4 \tan^3 x \cdot (\tan x)' & : b \\ &= 4 \tan^3 x \cdot \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sec x \cdot \cot x)' &= (\sec x)' \cot x + (\cot x)' \sec x & : c \\ &= (\sec x \cdot \tan x) \cot x + (-\csc^2 x) \sec x \\ &= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x \\ &= \sec x (1 - \csc^2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sin(3x-1)]' &= \cos(3x-1) \cdot (3x-1)' & : d \\ &= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3\cos(3x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\sin^2 x - \cos x]' &= (\sin^2 x)' - (\cos x)' & : e \\ &= 2\sin x (\sin x)' - (-\sin x) \\ &= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x \\ &= \sin x (2\cos x + 1) \end{aligned}$$

مثال :

۱ - چهار مشتق اول تابع $f(x) = \sin x$ را دریابید.

$$f'(x) = \cos x ; f''(x) = -\sin x ; f'''(x) = -\cos x ; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

۲ - مشتق تابع $f(x) = x \cdot \sin x$ را دریابید:
از قانون صرب بدست می آید.

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

۳ - برای پیدا کردن مشتق تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x} ; x \neq 0$ از قانون مرکب را میگیریم:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \text{ و } u(z) = \sin z \text{ و } z = \frac{1}{x^2} \text{ از } \text{نُست می آید:}$$

تمرینها:

مشتق توابع زیر را دریابید.

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

c) $f(x) = \sin^2 x$

d) $f(x) = \tan x + 2 \sin 2x$

e) $f(x) = \sin x^2$

f) $f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}$

-- برای تابع $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$ فرمول مشتق اول را نشان دهید.

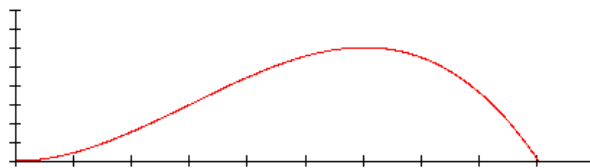
-- برای تابع تانجنت به کوسین قانون سین و کوساین قانون مشتق را نشان دهید.

-- نشان دهید که برای $f(x) = \tan x$ هم صدق میکند: $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

-- از روی قانون تقسیم قانون کوتانجنت را دریابید و او هم از روی قانون تانجنت.

-- چرا تابع سین و تابع کوساین اختیاری بسیار قابل مشتق میباشد.

استعمال مشتق در علوم طبیعی



اوقات زیاد در ریاضیاتو توابع آورده میشود، که در اختیار یک متحول x میباشد.

در علوم طبیعی اوقات زیاد توابع را بررسی میکنیم، که در اختیار وقت میباشد.

مثل که در شکل راه زده شده انداختن یک توپ (این پسانتر روشن میشود)

فعالیت:

شاگردان عزیز از درسهای فزیک تعریف سرعت و عجله را بدهد و فرمولهای ره و وقت، سرعت و عجله را بدهد..

سرلیک

۱۰۱

استعمال مشتق در علوم طبیعی

مثال: برای تعجیل طور مساوی یک شیء پرتاب شده با سرعت $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ و با

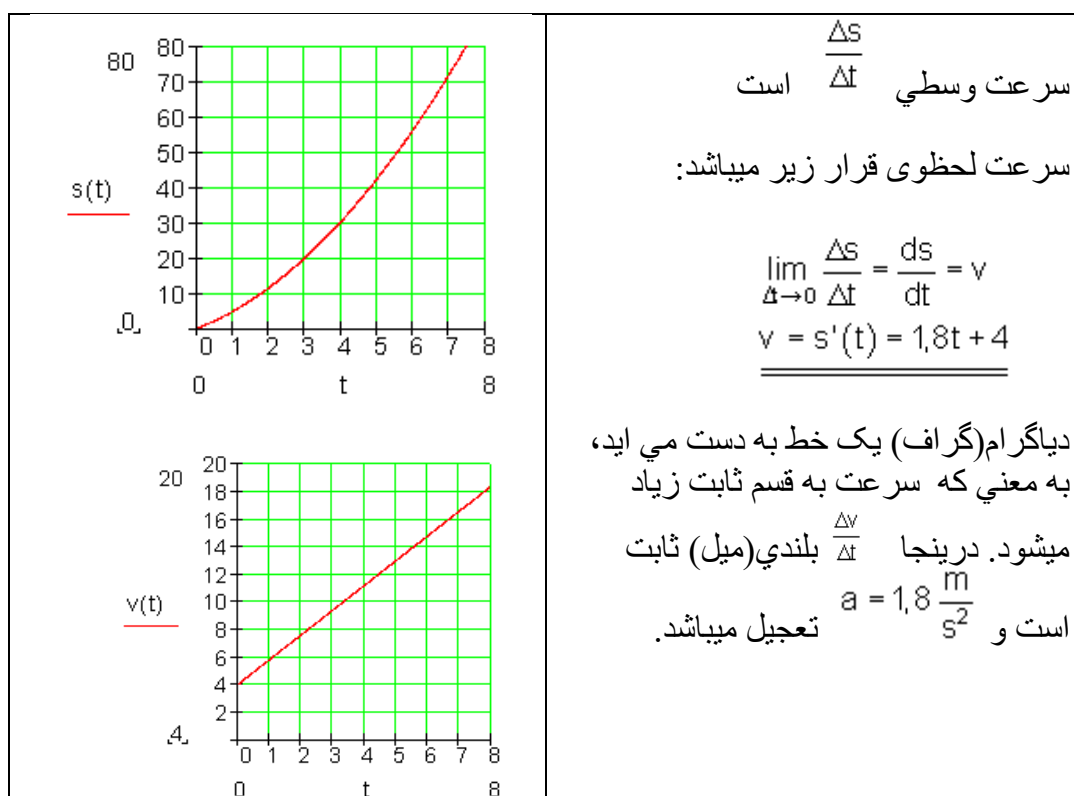
تعجیل $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$ قانون

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

راه - وقت قرار زیر میباشد:

$$S(t) = 0,9t^2 + 4t \quad v_0 \text{ که در بالا داده شده اعتبار دارد:}$$

(s به (ثانیه) ، s(t) به (متر))





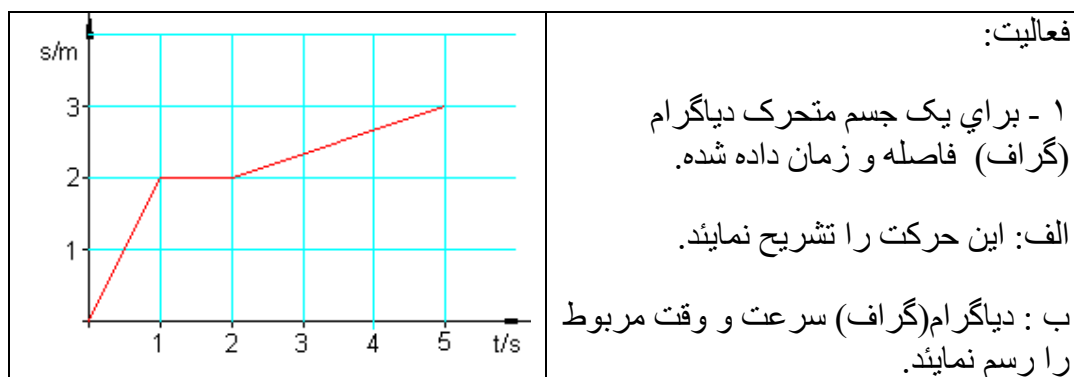
در نظر داشته باشید: برای یک حرکت تعجیلی ثابت داریم:

$$|s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t| \quad v(t) = s'(t) = at + v_0 \quad a(t) = v'(t) = a$$

برای یک سرعت v در زمان برای مشتق راه $v(t)=s'(t)$ داریم. برای به طور زیر هم

$$v(t) = s'(t).$$

مینویسیم:



۲) یک سنگ به سرعت اولیه $v_0 = 7 \frac{m}{s}$ عمود به طرف بالا انداخته میشود.

قانون فاصله-زمان است: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$ به $g = 10 \frac{m}{s^2}$ رونداف (را گردول

Round ot)

الف) بعد از کدام زمان سرعت سنگ صفر مییابد؟

ب) بلندی میل که بلندی اعظمی باشد بشمارید.

سرلیک

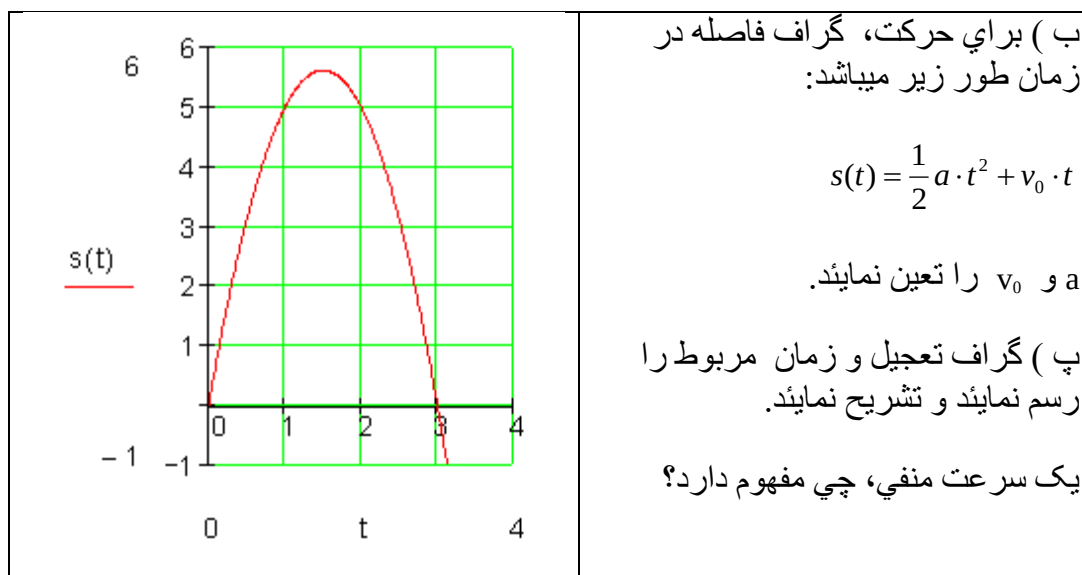
۱۰۳

استعمال مشتق در علوم طبیعی

۳ - گراف فاصله-زمان را نشان میدهد.

الف) از زندگی روزمره یک مثال را بیاورید، که برای ان این حرکت درست باشد.

حرکت منحنی برای $t > 3$ چي مفهوم فزیکي دارد؟



۴) یک جسم که ازاد به طرف بالا انداخت میشود طور حرکت میکند، که در زمان t فاصله $s(t) = 5 \cdot t^2$ را میزند.

در زمان $t=1;2;3$ سرعت لحظوي را نشان دهید.

حل:

سرعت لحظوي به قیمت تغییر لحظوي به معني زیر میباشد:

$$t=1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

$$10 + 5\Delta x \rightarrow 10$$

$$10 + 5\Delta x \rightarrow 10$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

اعتبار دارد یا صدق میکند:

برای

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

$$20 + 5\Delta x \rightarrow 20$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

صدق میکند:

برای

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

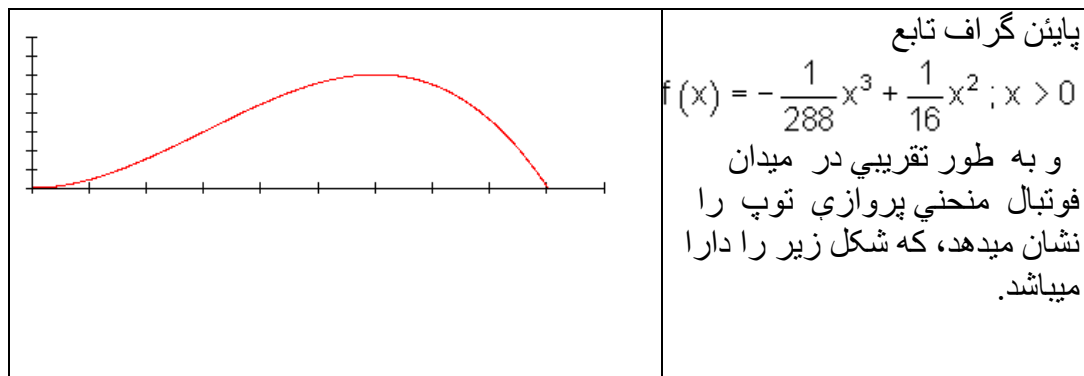
$$30 + 5\Delta x \rightarrow 30$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

صدق میکند:

برای

تمرین :



پرسانهای زیر را جواب دهید

- الف: توپ کدام بلندي اعظمي را دارد و از نقطه شوت کدام فاصله را دارميباشد؟
- ب : توپ از نقطه شوت شده به کدام فاصله پس به زمين مي افتد؟
- پ : دديوار دفاع از جاي توپ زدن ۹ متره دور است و ۲ متره بلند. ايا توپ از اين جا بلند پرواز ميكند؟
- ت : توپ از تورلاين (محور x) به ۲ متر بلندي دارد. به کدام فاصله اين اين شوت ازاد از گول زده شده؟

مشتق درجه بلند

بر علاوه مشتق درجه اول مشتقهاي درجه بلند هم موجود است، که از مشتق بعدي بدست مي ايد.

به باز مشتق گرفتن $f'(x)$ تابع مشتق $f''(x)$ بدست مي ايد، که تابع مشتق دوم ناميده ميشود.

مثال:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

باز مشتق گرفتن $f''(x)$ به مشتق سوم و دوام اوداسي نور.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

از تابع $f(x) = \frac{x^3}{3}$ ۴ دفعه مشتق گرفته شود

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$

گراف تابع :

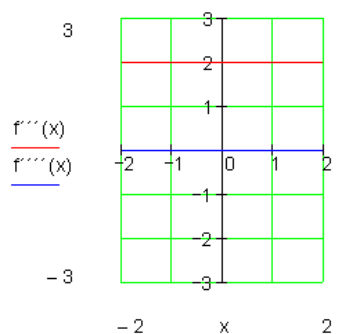
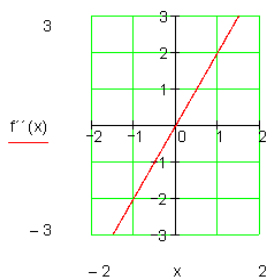
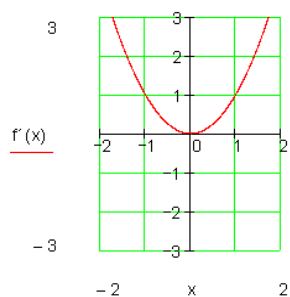
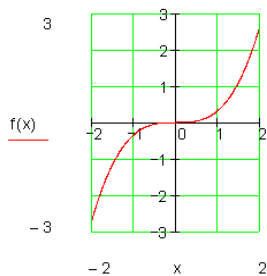
رسم کردن یک تابع به تابع مشتق مربوط:

$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

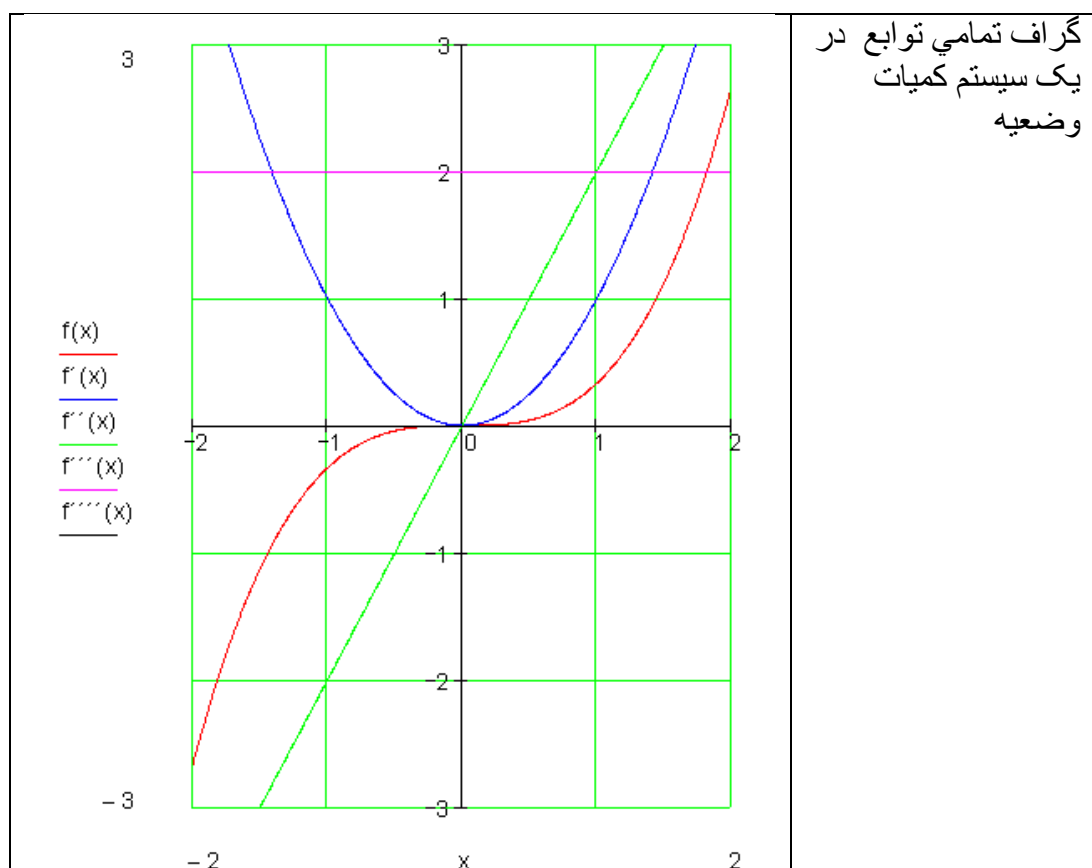
$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$



سرلیک

۱۰۷

مشتق درجه بلند



مثال:

اول : مشتق تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ را سه مرتبه دریابید

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

دوم: مشتق تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ را سه مرتبه دریابید

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

مجموعه: مشتق اول $f(x)$ تابع مشتق $f(x)$ يعني $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ میباشد.

مشتق دوم $f(x)$ تابع مشتق $f''(x)$ يعني $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ میباشد.

مشتق سوم $f(x)$ تابع مشتق $f'''(x)$ يعني $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ میباشد.

به طور خاص: یک تابع دلخواه کسري $f(x)$ قابلیت مشتق دلخواه را دارد.

تمرین: سه دفعه مشتق توابع زیر را بگیرید:

$$f(x) = 3x + 4 \quad -1$$

$$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 \quad -2$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad -3$$

$$f(x) = (2x + 1)^3 \quad -4$$

$$f(x) = x - x^4 + 3 + x \quad -5$$

$$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 \quad -6$$

$$f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x \quad -7$$

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \quad -8$$

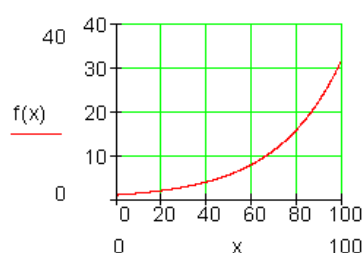
مشتق توابع اکسپوننشل

ساختار مساوات تابع

کولي باکتريا Coli - Bakterien در روده انسان کار را تکمیل میکند. اینها از طریق تقسیم حشرات تکثیر مییابد و زیر شرایط مساعد اینها در هر ۲۰ دقیقه خود را تجزیه میکند. برای این عملیه یک جدول قیمت میسازیم و یک گراف را رسم میکنیم. درینجا متحول x برای وقت به دقیقه میباشد.

متحول یا متغیر y برای تعداد باکتريا میباشد.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32



فعالیت : د دې تابع ولیکی

قضیه : هر تابع اکسپوننشل $y = b^x, (b > 0)$ برای تمام اعداد ریئل قابل مشتق میباشد

و صدق میکند: $f' = b^x \ln b$

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \quad x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

از بالا داریم $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$ و حالا ازین بدست می آید

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

از قانون لوگاریتم داریم: $n \cdot \log x = \log x^n$ و بدست می آید

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

از بالا بدست می آید

$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e}, \quad \log_b e = \frac{1}{\ln b} \\
 &= b^{x_0} \cdot \ln b; \quad x_0 \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}^{>0} \\
 \Rightarrow f' : f'(x) &= b^x \cdot \ln b; \quad D(f) = \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}^{>0} \\
 f'(x) &= b^x \cdot \ln b
 \end{aligned}$$

قضیه: مشتق $y = f(x) = e^x$ را دریابید.

ثبوت:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

ما این دسته را در فکر می گیریم: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

ما برای قیمت کوچک شده همیشه Δx مطاعه میکنیم $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

	Δx				
Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

به اساس این ما بدست می اوریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

به اساس شمردن ما این این معنی دارد:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{4x} - 1}{\Delta x}}_1 = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

اگر x_0 به جای x جا به جا کنیم، پس داریم:

$$f'(x) = e^x \quad \text{و} \quad f(x) = e^x$$

اکسپوننشل تابع $y = f(x) = e^x$ در حقیقت $y' = f'(x) = e^x$ مشتق دارد

یعنی از مشتق تابع e^x پس تابع e^x بدست می آید.

بیلگه: لرو :

$$f : f(x) = b^{3x^2 - 10}; D(f) = IR; b \in IR^{>0} \quad \blacksquare$$

د پورته تابع مشتق ونیسی.

$$D'(f) = D(f) = IR \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2 - 10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2 - 10} \cdot \ln b \cdot 6x; x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}}}; D(f) = IR; b \in IR^{>0}$$

تمرینها

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

a) $f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$

b) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

c) $f(x) = (x-1) \cdot e^x$

d) $f(x) = \sqrt{e^x}$

e) $f(x) = x^n \cdot e^e$

f) $f(x) = e^{kx}$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{2x}}$

h) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$

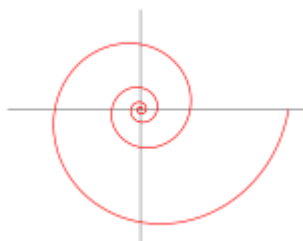
i) $f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$

k) $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

l) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$

m) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

مشتق لوگاریتم



فعالیت:

- لوگاریتم را تعریف نمایند
 - توان را تعریف نمایند.
 - روابط بین لوگاریتم و توان را نشان دهید
- قضیه:

مشتق تابع لوگاریتم:

قضیه: هر تابع لوگاریتم $y=f(x)=\log_b x$ برای $b>0, b \neq 0, x>0$ قابل مشتق است و

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_e = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{صدق میکند:}$$

ثبوت: تابع $y=f(x)=\log_b x$ تنها برای $x>0$ تعریف دارد. در هر جایی که $x>0$ باشد،

پس این پابین صدق میکند:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_b(x_0+h) - \log_b x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_b \frac{x_0+h}{x_0} = \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

و از روی حصه اول این پلین بدست می آید:

$$\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \left[\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} \rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

و ازین بابت

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_b e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_b e$$

تابع لوگاریتم بذای مشتق داده شده در تمام ساحه تعریف قابل مشتق میباشد.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_b e \quad \text{به هین قسم} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln b} \quad \text{این که } \ln e = 1, \text{ پس صدق میکند:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{چپوی که باید نشان داده میشد.}$$

به طور خاص این پلین را صدق میکند:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$$

مثال: مشتق $f(x) = \log \sqrt{x^3}$ را؛ پشمارید.

ثبوت: به طور زیر به پیش میرویم:

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2} \log_{10} x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

$$= 0.6514 \cdot \frac{1}{x}; \quad D(f') = IR^{>0}$$

مثال: مشتق تابع $y = \ln \frac{x-2}{x+2}$ را دریاند.

ثبوت: ما میتوانیم بنویسیم:

$$y = \ln \frac{x-2}{x+2}$$

$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

این که $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$ و $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ است، پس داریم:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{4}{x^2-4}$$

مثال:

داریم: $f(x) = \log_2(x)$

میخواهیم دریابیم: ۱. مشتق $f'(x)$

مشتق در جای $x_0=16$

ثبوت: برای ثبوت از فرمول بالا کار میگیریم: $f'(x) = 1/(x \cdot \ln 2)$

حالا در جای $x_0=16$ مشتق را تعیین میکنیم:

$$f'(x_0) = 1/(16 \cdot \ln 2) = 1/(16 \cdot 0.69) = \underline{0.09}$$

تمرینات:

مشتق اول تابع را دریابید و یا تعیین نمایند.

a) $f(x) = \ln \sqrt{x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

c) $f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$

d) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$

e) $f(x) = x \cdot \log_2 x^2$

f) $f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$

g) $f(x) = \frac{\ln}{x+2}$

h) $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$

قابلیت مشتق یک تابع

ما دیدیم، که یک تابع دهرجا تعریف نه درد، درهرجا حد نه دارد و همین طور در هر جا متمادي نیست. به مین ترتیب در هر جا قابیلین مشتق نه دارد.

تابع $f(x) = |x|$ در جاي 0 تعریف نه دارد:

براي تمامی $x > 0$ اعتبار دارد: $f(x) = x$
و با این

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

براي تمامی $x < 0$ برعکس بالا $f(x) = -x$ اعتبار دارد و یا این

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

می بینیم که حد چپ و راست به هم دیگر سر نمیخورد، پس حد وجود نه دارد. درین جاي آورده شده قابلیت مشتق نه دارد

در تمام جاها تا به حال مشتق گرفتن تابع همیشه داد هشده.

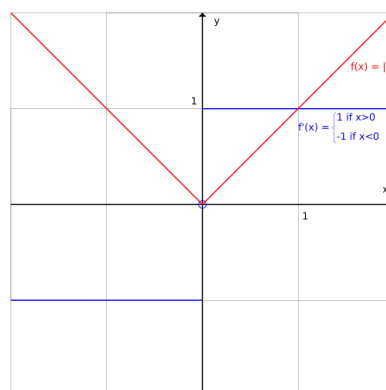
مشتق کپنده په نورو تولو خایونو کی تر اوسه تل ورکر شوی.

باز هم درین جا مشتق طرف راست داده شده، یعنی داریم:

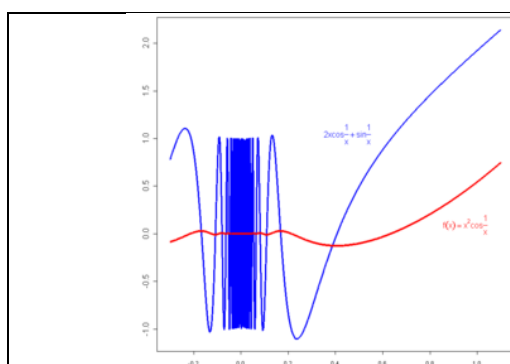
$$f'_{+}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = 1$$

و مشتق طرف چپ

$$f'-(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$



اگر به گراف بالا دیده شود، خواهیم فهمید، که یک تابع قابل مشتق باید شکسته نه باشد یا به عباره دیگر زاویه را تشکیل نه کند.



مثال برای یک تابع غیر متمادی قابل مشتق:

یک تابع متمادی قابل مشتق نامیده میشود، اگر مشتق آن متمادی باشد.

اگر یک تابع در هر جا قابل مشتق باشد، باید نیست که مشتق شان هم متمادی باشد به

طور مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

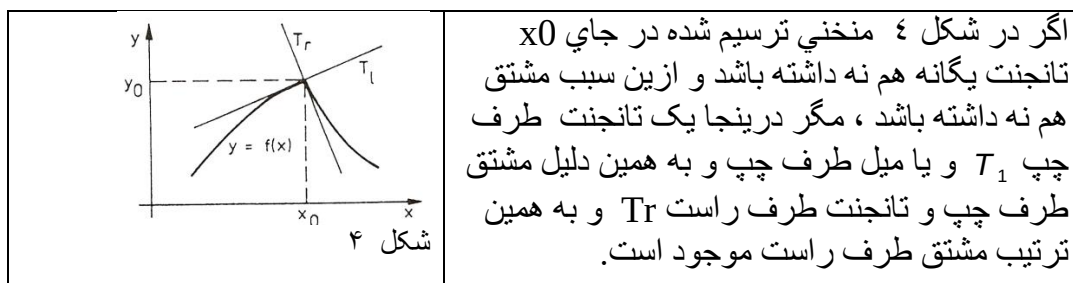
تابع در هر نقطه حتی در $x = 0$ قابل مشتق است. مشتق شان

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

بر خلاف در جای 0 متمادی نیست.

مشتق به فرضیه های ممکن و ازین سبب درانجا هدفمند است، درجای که به حد رفتن ان ممکن باشد یعنی درجای که تقسیم تفاضل یک حد داشته باشد برای $x \rightarrow 0$.

اگر منحنی در کدام جای شکسته باشد (شکل ۴)، میبینیم که درانجا تانجنت نیست و به همین ترتیب بلندی و تقسیم تفاضل هم موجود نیست. پس قابلیت مشتق خواص مخصوص یک تابع میباشد، مثل متمادیت.



در یک تابع نامتمادی پرسیان تانجنت و یا مشتق بی معنی میباشد.

حالا این مسئله کی درینجا ترسیم شده زیر فرمول درست می اورویم

دیده شد اگر در جای x_0 که تابع غیر متمادی باشد، پرسیان مشتق بی معنی است. فرض میکنیم، که این ثبوت شده باشد. این روشن است، که هر تابع متمادی حتماً باید قابل مشتق نباشد. به طور مثال اگر تابع زاویه داشته باشد.

به این ضرورت است نشان دهیم، که تنها توابع متمادی قابلیت مشتق را دارا میباشد، این باز به معنی است که هر تابع قابل مشتق کم از کم باید متمادی باشد و به دین ترتیب مشتق متمادیت را در خود پنهان دارد. این به معنی است، که متمادیت برای قابلیت مشتق شرط ضروری میباشد.

جمله ۲. ۱ :

اگر تابع $y=f(x)$ در جاي x_0 قابل مشتق باشد، درانجا ضرور متمادي ميباشد.

ثبوت : از تعريف مشتق بدست مي آيد ، که ليميت موجود است، يعني

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

حد تنها درجاي ميتواند موجود باشد، که براي $x \rightarrow x_0$ همراه مخرج صورت هم به صفر تقرب کند يعني $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ برود.

پس اعتبار دارد: $f(x) \rightarrow f(x_0)$ براي $x \rightarrow x_0$

اين تعريف متماديت ميباشد

اين تقسيم تفاضل به طور ديگري هم تشکيل شده ميتواند، اگر $x = x_0 + \Delta x$ به کار ببريم.

درينجا مشتق $f'(x)$ به طور زير داده شده:

قابليت مشتق یک تابع براي دفعه اول یک خواص مربوط به جاي (lokal) است يعني در یک جاي $x=x_0$ تعريف ميباشد.

مثل که در متماديت (حصه اول ديده شود) قابليت مشتق و مشتق به یک انتروال باز امتداد بياد.

تعريف :

یک تابع $y=f(x)$ در یک اينتروال باز (a,b) قابل مشتق ناميده ميشود، با مشتق زير

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) ; a < x < b$$

اگر اين در هر جاي $x = x_0 \in (a,b)$ قابليت مشتق داشته باشد با مشتق $f'(x_0)$. اين در اينتروال محدود $[a,b]$ قابل مشتق ناميده ميشود، اگر اين بر علاوه در جاي a طرف راست و در جاي b طرف چپ قابل مشتق ميباشد.

مثال ۲. ۶ :

قابلیت مشتق یک تابع

۱۲۰

تابع طاق $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ در هر جاي قابلیت مشتق را دارا میباشد با مشتق زیر:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

تابع ساین $y = \sin x$ و تابع کوساین $y = \cos x$ در هر جاي کی قابل مشتق است، با مشتقهاي زیر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

تابع قابل مشتق در یک انتروال باز سپس تابع $y = f(x)$ میباشد، پس به این طور پرسان قابلیت مشتق شان و متمادیت شان شده میتوانند.

تعریف ۲. ۴:

تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در ساحه $x = x_0$ در جاي $x = x_0$ دو مرتبه قابلیت مشتق را دارد، اگر مشتق $y' = f'(x)$ ان در انجا قابلیت مشتق را دارا میباشد. مشتق $f''(x)$ مشتق دوم تابع $y = f(x)$ نامیده میشود و برای این مینویسیم:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

در یک انتروال باز یک تابع $y = f(x)$ قابل مشتق $y = f(x)$ در ان جا دو مرتبه قابل مشتق میباشد اگر مشتق $y' = f'(x)$ شان در انجا قابل مشتق میباشد.

برای این مینویسیم:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

نشان دهید، که ایا $y = c$; $y = x^n$; $y = \cos x$ در هر جا دو مرتبه قابییت مشتق را دارد؟

مشتق تابع معکوس

فعالیت:

- تابع معکوس یک تابع را تعریف نمایند.
 - ساحه تعریف تابع $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ را نشان دهید.
 - مشتق اول و دوم تابع بالا را بشمارید.
 - معکوس تابع بالا را با ساحه تعریف نشان دهید.
- حالا تابع معکوسه را بررسی شود. درینجا فرض شود، که $y = f(x)$ در $x = x_0$ به $f(x) = 0$ و در یک ساحه x_0 متزاید است ($f'(x_0) > 0$ و یا متناقص قوی (واضح) ($f'(x_0) < 0$) مییاشد و بدین لحاظ معکوس شدنی هم است، یعنی $x = f^{-1}(y)$ ، پس برای تقسیم تفاضل تابع معکوس بدست می آید.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

و حالا که $x \rightarrow x_0$ و از لحاظ متمادیت $f(x)$ هم $y \rightarrow y_0$ ، و اعتبار دارد.

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}}$$

اگر برای جاي نقطه $x = x_0$ به طور ساده پس x بنویسیم، پس برای ()
 فزرم کوتاه میتوانیم بنویسیم: برای $y = f(x)$ اعتبار دارد:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

از فرضیه داده شده بالا پس تقسیم تفاضل را بدست می آوریم، که به انها به قسم تقسیم مروج میتوان شمرد، طوری که

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

جمله 2-7: معکوس تابع مشتق:

اگر تابع $y = f(x)$ در یک محیط x به تابع $x = f^{-1}(y)$ معکوس و در انجا به $f'(x) \neq 0$ قابل مشتق باشد، نو تابع معکوس به $y = f(x)$ قابل مشتق است و اعتبار دارد:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل:

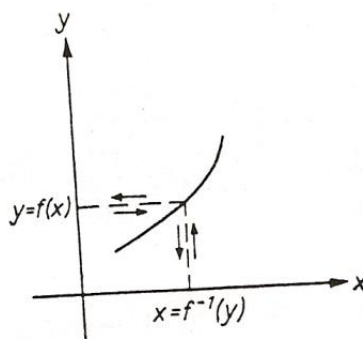
میتوانیم که از مشتق تابع f مشتق تابع معکوس f^{-1} بدست بیاوریم. ازین لحاظ از $x > 0$ و هم از $y > 0$ و از معکوس به $y = f(x + \Delta x) - f(x)$ بدست بیاوریم:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{به}$$

بالاخره داریم:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



تمرین:

-- برای تابع $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4, \dots$ اگر $x \geq 0$ تعیین شود و به همین ترتیب تابع معکوس $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ ، پس مشتق تابع معکوس را بشمارید.

-- مشتق تابع معکوس تابع $y = x^{\frac{m}{n}}, m, n \in N$ را بگیرید.

مشتق توابع ایمپلیسیت Implicit

یادونه: ایمپلیسیت (منطقی تری لاس ته راتلنه) اشکال استعمال زیاد تابع از روی مساوات تابع و به دادن ساحه تعریف تابع به طور اکسپلیسیت Explicit، که متحول تابع در یک طرف مساوات جدا شده باشد و متحول مستقل طرف دیگری تابع قرار داشته باشد.

به طور مثال: $Y = 3x^2 + 7x$

اشکال تابع وقت زیاد از روی مساوات تابع، طور ایمپلیسیت Implicit به داده شدن ساحه تعریف مییابد. به طور مثال: $Ex^2+7x+y=0$ فعالیت:

- اگر $Ex^2+7x+y=0$ داشته باشیم، چطور میتوانیم، که مشتق این تابع را بیابیم؟ قضیه:

یک تابع داریم به طرو ایمپلیسیت $x^2+xy-y^2=1$ ، میخواهیم $\frac{dy}{dx}$ دریابیم:

ثبوت:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy - y^2) = \frac{d}{dx}(1) \quad (1)$$

$$2x + (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx}$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx}(2y - x)$$

$$\frac{2x + y}{2y - x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{-x + 2y} \quad \vee \quad \frac{2x + y}{2y - x}$$

مشتق ایمپلیسیت یک امکان است برای گرفتن مشتق یک تابع، که نایمپلیسیت به یک ترم داده شده باشد، بلکه ایمپلیسیت یعنی به شکل یک مساوات داده شده باشد. این طریقه برای این هم به کار برده میشود، که یک تابع به صورت اکسپلیسیت داده شده باشد، مگر گرفتن مشتق شان مشکل باشد.

مثال :

مشتق تابع $f(x) = x^x$ را به طریق قوانین مشتقگرفتن اشنا گرفته نمیشود، ازین بابت که در اساس و در اکسپوننت شان متحولها به جا شده. به طریق لوگاریتم گرفتن ممکن است اکسپوننت متحول از بین برده شود: $\ln f(x) = x \ln x$

حالا این را ایمپلیسیت حل میکنیم، طوری که به هر دو طرف شان پسی متجول x مشتق میگیریم:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

مشتق این مساوات از طریق قانون زنجیری صورت میگیرد:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} f'(x) = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

درینجا $y = f(x)$ است.

از قانون مشتق لوگاریتم و ضرب به دست می آید:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

اگر پسی $f(x)$ حل شود و برای y دوباره (پس) $f(x) = x^x$ جابه جا کنیم، پس این حل بدست می:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

مثال:

دایره به شعاع r مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ را دارد. ازین بابت بعضی جا های شان به گراف تابع $y = f(x)$ نوشته شده میتواند مشتق این از طریق مشتق ایمپلیسیت به طور زیل حل میشود.

در مساوات تعریف شده $y = f(x)$ جابه جا میکنیم:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

از طریق مشتق این مساوات داریم: $2x + 2f(x)f'(x) = 0$

از راه طریق حل $f(x)$ بدست می آید:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

همراه این مساوات به طور مثال بدست می آید، که تانجنت به دایره در نقطه (x,y) بلندی $-\frac{x}{y}$ دارد.

مثال: انتیگرال گرفتن ایمپلیسیت فرمول بیضوی.

یک تابع $y = f(x)$ ایمپلیسیت یعنی از روی مساوات به x و y داده هشده، پس هر دو طرف پیوسته پس x مشتق میشود.

درین جا تنها به این افاده ها یعنی به $y = f(x)$ قانون زنجیری استعمال شود. مثال:

مشتق به $E : x^2 + 3y^2 = 7$ داده شده الیپسی گرفته شود.

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

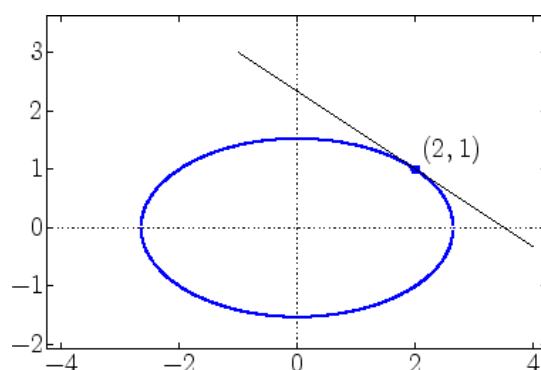
$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

به هین طور

میتواند به یک نقطه مسطوی E به $y \neq 0$ بلندی تانجنت شمردن شود.

به طور مثال برای $(2, 1)$ بدست می آید:

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



به طور مشابه مشتقهای بلند هم شمرده میشود. برای yy' از رو استعمال قانون ضرب داریم:

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

ازین بدست می آید:

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

$y'(x)$

به یک نقطه E جا به جا کردن قیمت‌های وضعیه و به وضع کردن هردو قیمت
میتواند قیمت‌های معین شمرده شود.

تمرین:

جدول مشتق‌های اساسی

فرضیه	$f'(x)$	$f(x)$	Nr.
	0	$c = konst$	1
$n = 1, 2, 3, \dots$	$n \cdot x^{n-1}$	x^n	2
x عدد تام و $x \neq 0$	$n \cdot x^{n-1}$	x^n	3
r rational, $x > 0$	$r \cdot x^{r-1}$	x^r	4
$n = 1, 2, 3, \dots, x > 0$	$\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot x} \sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	5
$x > 0, a$ reell	$a \cdot x^{a-1}$	x^a	6
$x > 0, a \neq 1$	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	a^x	7
	e^x	e^x	8
$a > 0, a \neq 1, x > 0$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x$	9

سرلیک

134

$x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	10
	$\cos x$	$\sin x$	11
	$-\sin x$	$\cos x$	12
$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	13
$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot x$	14

به کومک جدول بالا می‌تواند که کم از کم فورمال اختیاری برای هر افاده تحلیلی به طور تحلیلی مشتق را بدست آورده شود با وجود این باید فرضیه های مربوطه در فکر گرفته شود.

خلص فصل

تقسیم تفاضل **Differenzenquotient** (بلندی قاطع) یا تغییر قیمت وسطی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق **Differetialquotient** (بلندی تانجنت یا قیمت تغییر لحظی)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قانون ثابت

$$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{constant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

قانون جمعی

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

قانون ضرب

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

قانون تقسیم

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

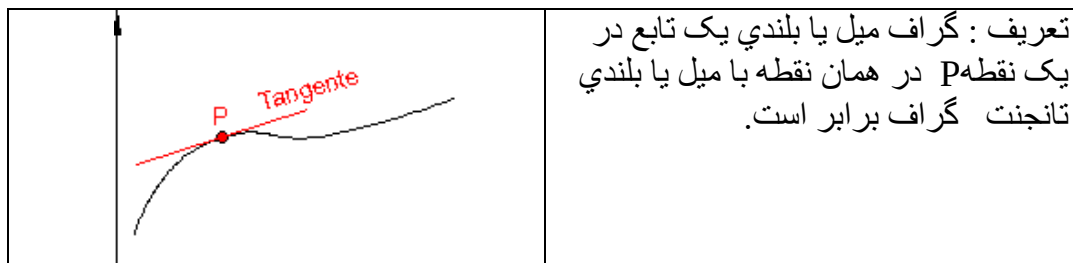
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

قانون زنجیری

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$



تقسیم تفاضل Difference quotient

بلندي یک نقطه بدون مشتق گرفتن تعیین شده:

خدي $y=f(x) = mx+a$ داریم

قرمول بلندي خط قرار ذیل میباشد:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

تمرینات فصل

(۱) کمبنتویش (د تفاضل ویش) ارزبست د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) $P(3,2)$, $Q(5,4)$ b) $P(2,4)$, $Q(3,1)$

(۲) د $x = x_0$ په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = 0.5x^2$, $x_0 = 3$

(۳) د کمبنتویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او ترمنځ یې توپیر څه دی

(۴) د یوه تابع د سکانت () لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگېدو لاندې څه پوهیږو؟
او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

(۵) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

a) $f(x) = x^5$	b) $f(x) = x^6$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$	d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$	f) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(۶) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیدا کړئ.

$$a) f(x) = 0.2x^5 - 3$$

$$b) f(x) = 2x^4 + 1$$

$$c) f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{3}{x^3} + 2$$

$$e) f(x) = 6\sqrt{x}$$

$$f) f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - 5$$

(۷) د تابع د گراف په مرسته وښایئ، چې ټول $g(x) + c$ ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

(۸) وښایئ، چې د $a.g(x)$ د مشتق سره د a ضریب (خله وونی) ساتلی پاتې کیږي.

(۹) د f تابع مشتق د جمعې قانون سره وښایئ

$$a) f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$$

$$b) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$d) f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$$

(۱۰) د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$$a) f(x) = x^3(x^2 - 2x + 1)$$

$$b) f(x) = (2x^2 + 1)(x - 1)$$

$$c) f(x) = (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x)$$

$$d) f(x) = (4x^2 - x + 4)(3x + 2)$$

(۱۱) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{4 - x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1}$$

$$c) f(x) = \frac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

(۱۲) د وېش قانون له مخې په څټ ارزښت (پر عکس ارزښت) وټاکئ.

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

د $g(x) \neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځیر قانون له مخې وټاکئ.

$$a) f(x) = (4x^4 - x)^2 \qquad b) f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^2$$

$$c) f(x) = (2x - 7)^3 \qquad d) f(x) = (5 - 3x^3)^4$$

(۱۴) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{1}{(2x^2 + x)^3} \qquad b) f(x) = \frac{1}{(x - 5)^4}$$

$$c) f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 \qquad d) f(x) = \sqrt{1 - x^3}$$

(۱۵) د لاندې توابعو درې واړه مشتق ونیسئ.

$$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \qquad b) f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 5$$

$$c) f(x) = \frac{3x - 4}{x} \qquad d) f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - x}$$

(۱۶) د یو n -م درجې تابع باید څو واره مشتق ونیول شي چې یوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \sin 3x & b) f(x) = \sin x \cdot \cos x & c) f(x) = \sin^2 x \\ d) f(x) = \tan x + 2 \sin 2x & e) f(x) = \sin x^2 & f) f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

(۱۸) د $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون وښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د $f(x) = \tan x$ لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیدا کړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقور دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1} & b) f(x) = e^{x^2+2x-1} & c) f(x) = (x-1) \cdot e^x \\ d) f(x) = \sqrt{e^x} & e) f(x) = x^n \cdot e^e & f) f(x) = e^{kx} \\ g) f(x) = 2^{\frac{1}{2x}} & h) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} & i) f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}} \\ k) f(x) = \sqrt{e^x + 1} & l) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} & m) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

(۲۴) د $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \ln \sqrt{x} & b) f(x) = \ln(x^2 - 4) & c) f(x) = \ln \frac{2}{x^3} \\ d) f(x) = \ln \frac{x+1}{x} & e) f(x) = x \cdot \log_2 x^2 & f) f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log \\ g) f(x) = \frac{\ln}{x+2} & h) f(x) = \frac{x^4}{\ln x} & \end{array}$$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو (ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

د تعریف سټ (ډېری) هغه ورشو (ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقور دي.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sqrt{x+3} & b) f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)} \\ c) f(x) = x\sqrt{x} & d) f(x) = \sqrt{x^2+2} \end{array}$$

(۳۶) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوگاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ریښه توابعو ته؟

(۳۷) ۹۰ — مه پوښتنه د لوگاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$$a) f(x) = \ln(x^4 - 1) \quad b) f(x) = \ln(2x + 4)$$

(۳۸) — د لاندې توابعو لومړی مشتق پیدا کړئ.

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

a) $f(x) = \sin^n$

b) $f(x) = (\ln x)^n$

c) $f(x) = s + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

(۴۰) - د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

(۴۱) - په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

-(۴۲)

الف: د کوم f تابع لپاره $f'(x) = 2f(x)$ دی؟ب: د کوم f تابع لپاره $f'(x) = -f(x)$ دی؟(۴۳) - د $f(x) = \sin x$ خوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(۴۴) - د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

a) $f(x) = e^{ax}$

b) $f(x) = \ln(x+1)$

.
.
.

قضیه رول (Theorem of Rolle)

اگر یک تابع f در اینتروال بند $[a, b]$ متمادي و k در بین a و b واقع باشد، پس درانجا کم از کم یک عدد c در بین $f(a)$ و $f(b)$ موجود است، طوری که $f(c) = k$ است.

فعالیت:

اگر تابع f در یک اینتروال محدود $[1, 3]$ ثابت می باشد، این به یک تابع چي معني خواهد داشت، که چي قسم حرکت میکند؟ آیا این تابع نقطه عظمي یا نقطه اصغري خواهد داشت و یا چي طور؟ این را روشن سازید و در سه نقاط دلخوا وسطی انتروال قیمتها با یک دیگر مقایسه نمایند.

ثبوت کنید، که تابع $f(x) = -x$ در انتروال $[-1, 1]$ نقاط عظمي و اصغري در کجا دارد و در بین یک و منفي یک برای سه قیمت x در گراف قیمتهای f نشان دهید و نشان دهید، که بین از دیگر تفاوت دارد نه؟

از طریق رسم نشان دهید، که x^2 کدام نقاط عظمي یا اصغري دارد و یا چطور و اگر داشته باشد در کجا؟

قضیه وایر شتراس Weierstrass

اگر یک تابع f در انتروال محدود $[a, b]$ متمادي باشد، پس f درین انتروال کم از کم یک قیمت اعظمي و یک قیمت اصغري دارد.

درینجا جواب تحلیلي داده نمیشود، این افاده دیدني معقول معلوم میشود.

میتواند قیمت همنواخت (مونوتون یا اعظمي-اصغري) در انجام لنتروال هم واقع باشد.

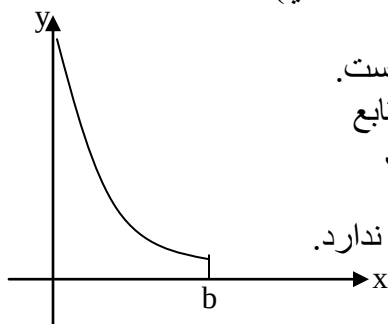
محدود بودن انتروال بی قید و شرط حتمي است.

به طور مثال در انتروال نیم محدود $(0, b]$ تابع

$$y=f(x)=\frac{1}{x}$$

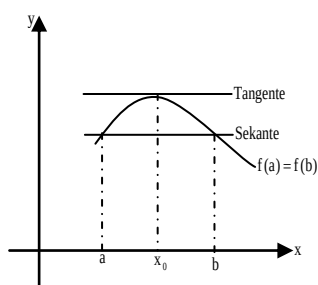
متمادي است، مگر طرف بالا

محدود نیست، که بدین لحاظ نقطه اعظمي را ندارد.



قضیه قیمت وسطی مشتق

در بین تانجنت و قاطع و به همین قسم در بین مشتق و تقسیم تفاضل روابط نزدیک موجود میباشد، که در قضیه های قیمت های وسطی انالیز تشریح میشود. از خواص تابع و انحراف تابع اولاً پیوسته قضیه رول بدست می آید.



قضیه رول (Rolle) :

یک تابع f بالای انروال محدود $[a, b]$ متمادی باشد با $f(a)=f(b)$ و بالای انروال باز (a, b) قابل مشتق، پس کم از کم یک جایی $c \in (a, b)$ موجود است با $f'(x_0)=0$

حل :

- ۱) اگر f ثابت باشد فوراً بدست میاید $f'(x)=0$
- ۲) اگر f ثابت نه باشد، پس از روی قضیه وایرستراس کم از کم یک قیمت اعظمی و یک قیمت اصغری تابع موجود می باشد. این قیمت ها با هم فرق دارد، از لحاظ که f ثابت نمی باشد.

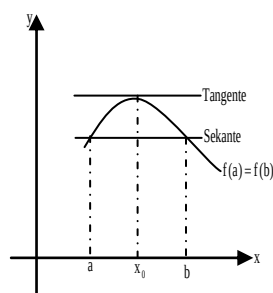
پس ازین لحاظ کم از کم یک قیمت نامساوی با $f(a)=f(b)$ موجود میباشد. بدین اساس در داخل انتروال یک جایی مونوتون (اعظمی- اصغری) x_0 موجود است. موجودیت مونوتونی به یکنواخت بودن (قیمت اعظمی- اصغری) یک تابع قابل مشتق از روی قضیه شرایط ضروری بدست می آید: $f'(x)=0$

تا به حال نشان دادیم، که زیر شرایط لازم به یک قاطع افقی یک تانجنت افقی هم موجود میباشد.

این پرابلم هندسی میتواند عمومی شود.

پرسان در بین می افتد، که آیا به یک قاطع مائل به همین قسم یک تانجنت به همان میل میتواند تشکیل شود؟

جواب شان قضیه زیر میدهد.



قضیه قیمت وسطی مشتق :

اگر تابع $y=f(x)$ بالایی انتروال محدود $[a,b]$ غیر متمادی و بالایی انتروال باز (a,b) قابل مشتق باشد، پس در اینجا یک جایی $x \in (a,b)$ موجود می باشد، که برای آن داریم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

حل:

این پرابلم به یک تابع کمکی به این طور تعریف می شود، که قضیه رول استعمال یابد. برای این مساوات قاطع را به پیش می آوریم:

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

به طور تابع کمکی تابع مشتق تشکیل می شود:

$$h: h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a),$$

پس اعتبار دارد: $h(a) = h(b) = 0$. بر علاوه این h بالایی (a,b) قابلیت مشتق را دارا می باشد و بالایی $[a,b]$ متمادی است. بدین لحاظ فرضیه قضیه رول داده شده، این به معنی است که یک جایی $x \in (a,b)$ موجود است با $h'(x) = 0$ ، که از روی آن داریم:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ یعنی } h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

دست آورد بالا با مثالها زیر روشنتر خواهد شد.

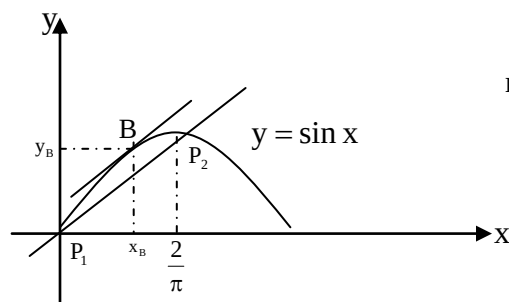
مثال:

یک تابع $f(x) = \sin x$ به طور داده شده باشد، که در یک نقطه $B(X_B, Y_B)$ تانجنت مماس منحنی می باشد و کدام که در نقاط $P_1(0,0)$ و $P_2(\frac{\pi}{2}, 1)$ همان میل داشته باشد مثل قاطع.

حل: میل یا بلندی سیکانت

قضیه رول

۱۴۰.



$$m = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$

میل منحنی در نقطه $B(x_B : y_B)$: $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

بدین لحاظ بدست می آید: $x_B = \arccos \frac{2}{\pi} = 0,88$ و $f(x_B) = f(0,88) = 0,77$

نقطه مماس: $B(0,88 : 0,77)$

مساوات تانجنت: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$

از عمومیت قضیه وسطی بدست می آید:

قضیه وسعت یافته قیمت‌های وسطی:

اگر $u = f(x)$ و $v = g(f)$ توابع متمادی بالایی اینتروال محدود $[a, b]$ باشد و بالایی اینتروال باز (a, b) قابل مشتق و $g'(x) \neq 0$ صدق کند، پس برای تمام $x \in (a, b)$ ، کم از کم یک جایی $x_0 \in (a, b)$ موجود می‌باشد که از آن بدست می آید:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: از لحاظ $g'(x) \neq 0$ تابع g معکوس شدنی می‌باشد و مساوات $v = g(x)$ به طرف

$x = g^{-1}(v)$ انعکاس نشان می‌دهد، یعنی

اگر در تابع f هم متحول نو جا به جا شود، پس یک تابع مرکب بدست می آید:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

از لحاظ قاعده ترکیبی مشتق زیر بدست می آید:

$$\text{اگر بالایی تابع } u=h(x) \text{ با } V_1=g(a) \text{ و } V_2=g(b)$$

قضیه قیمت وسطی استعمال شود، پس جای $V_0 \in (V_1; V_2)$ به طور زیر موجود می باشد:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

ازین با $h(v)=f(x), v=g(x)$ و $x_0 = g^{-1}(v_0)$ بدست می آید:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینها:

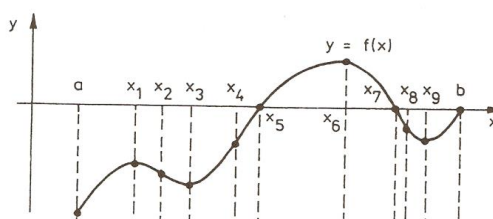
توابع زیر دوتا جاهای صفر دارد. همان قیمت های بحرانی را دریابید، که در بین هردو جا های صفر واقع باشد.

$$a) f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$$

$$b) f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$$

توابع همنواخت (Monotony) (یونانی: همنواخت، قسم مساوی)

توابع متزاید و متناقص



فعالیت:

- در شکل بالا تمام جاهای را نشان دهید، که در آن تابع متزاید می باشد.
 - در شکل بالا تمام جاها را نشان دهید، که در آن تابع نزولی می باشد.
 - در شکل بالا تمام جاها را نشانی کنید، که در آن میل تابع افقی می باشد.
- اگر یک تابع f در یک انتروال $f(x_1) \leq f(x_2)$ (یا $f(x_1) \geq f(x_2)$) باشد برای تمام $x_1 < x_2$ ، پس تابع درین انتروال مونوتون متزاید (متناقص) نامیده میشود، اگر $f(x_1) = f(x_2)$ اجازه نه داشته باشد، پس این $f(x_1) < f(x_2)$ (یا $f(x_1) > f(x_2)$) مونوتون متزاید (متناقص) قوی نامیده میشود.

قواعد زیر، که از هماهنگی بدست می آید، برای حالت هماهنگی مفید می باشد.

یک تابع f فقط در جایی که D مونوتون متزاید می باشد، اگر برای x_1 و x_2 اختیاری، که در D واقع باشد، اعتبار داشته باشد یا صدق کند:

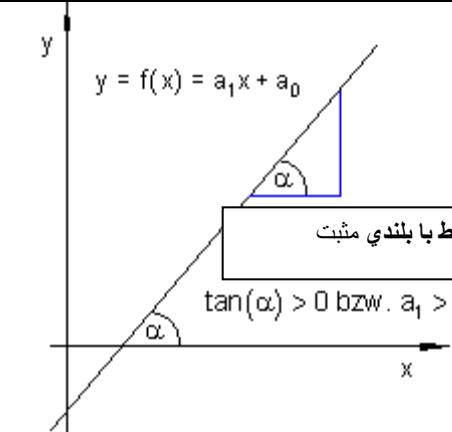
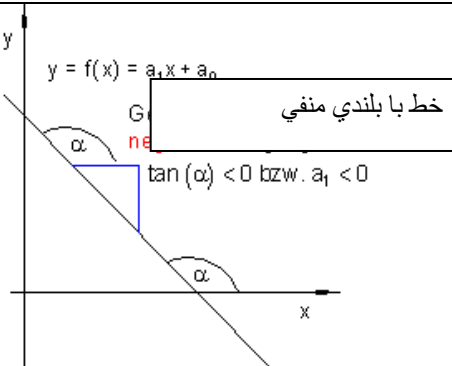
$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

یک تابع f که در D واقع باشد، فقط در آنجایی مونوتون متناقص است در x_1 و x_2 دلخواه، که در D واقع باشد اعتبار داشته باشد:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یکنواخت بودن Monotony جمله متزاید و متناقص

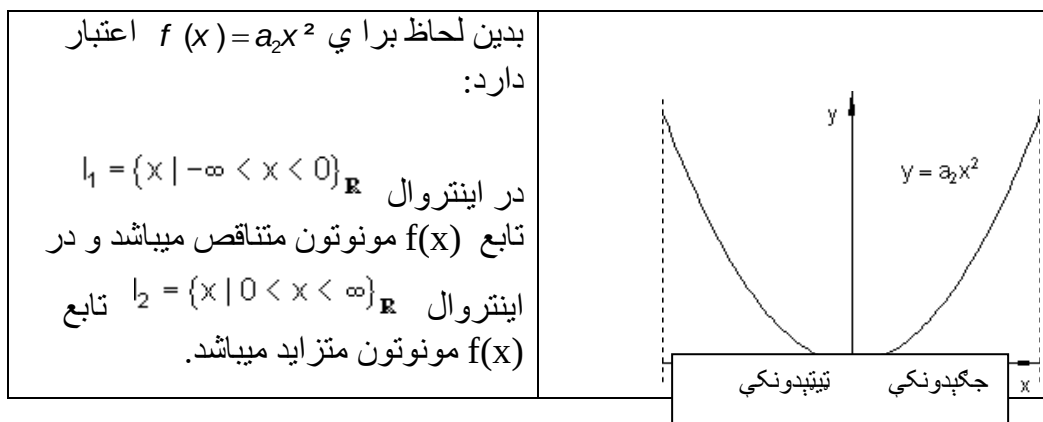
سرلیک

این تابع $f(x) = a_1x + a_0$ خطی (لاینیز)، تابع بسیار ساده می باشد، که انحنای ندارد. برای این متزاید بودن یا بلندی ثابت، $a_1 = \tan(\alpha)$ مسئول می باشد، در حال که α یک زاویه در بین خط و طرف مثبت محور x می باشد. در شکل روبرو: خط با میل مثبت $a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan \alpha > 0$	
اگر $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ باشد، به این معنی که $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$، پس خط بلند می شود. و این به معنی است، که به بلندی x ارزش تابع $f(x)$ هم بلند می شود. در شکل رو برو: خط با بلندی منفی: $\tan \alpha < 0$ همین تور ($\Leftrightarrow$) $a_1 < 0$	 بالا به این قسم می باشد: $\tan \alpha < 0$ همیتور $a_1 < 0$

اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ باشد، این بدین معنی، که $\alpha < 0$ همین تقسم $a_1 < 0$ ، پس خط متناقص می باشد. این بدین معنی، که با x متزاید قیمت تابع $f(x)$ کوچک می شود.

در هر دو حالت تابع مونوتون (تابع بلند یا باین شدنی) حرف میزنیم و از یم تابع مونوتون بلند شدنی، اگر $a_1 > 0$ باشد. و از یک تابع مونوتون متناقص حرف است اگر $a_1 < 0$ باشد.

این کلمه مونوتونی در آن توابع هم استعمال می شود، که حرکت منحنیها میدهد، اگر فکر شود، که به طور عموم به نقطه گراف منحنی یک تانجنت کشده می شود.



مثل که در گراف خطی، که بلندی شان ثابت بود، حالا این حالت را در پیش نه دارم، یعنی بلندی ثابت نیست، بلکه این از یک نقطه منحنی به نقطه دیگر تغیر می‌خورد.

بلندی تانجنت $0 <$ ← منحنی مونوتون بلند می‌شود

بلندی تانجنت $0 >$ ← منحنی مونوتون پایین می‌شود

بلندی تانجنت، اگر صفر می‌باشد، به همان حالت باقی می‌ماند.

اشکار است که مشتق اول تابع $f(x)$ میل تابع $f'(x)$ را می‌دهد. به همین قضیه مونوتونی قضیه به طور زیر فرمولبندی می‌کنیم.

قضیه:

تابع $f(x)$ در اینتروال I قابل مشتق باشد.

-- اگر تابع $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متزاید می‌باشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \geq 0$ به تمام $x \in I$

-- اگر $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متناقص می‌باشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \leq 0$ برای تمام $x \in I$.

- اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، برای تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متزاید می‌باشد.

- اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، برای تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متناقص می‌باشد.

- اگر $f'(x) > 0$ باشد، برای تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متزاید قوی می‌باشد

- اگر $f'(x) < 0$ باشد، برای تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متناقص قوی می‌باشد.

تعیین ساحه تعریف مونوتونی

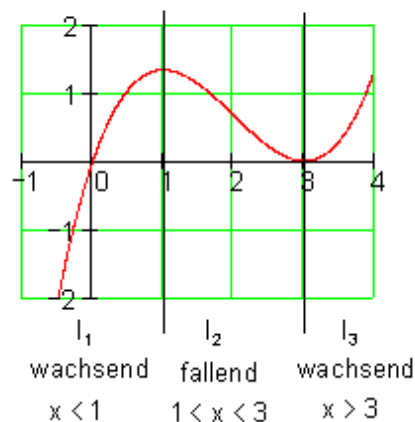
مثال : اوقات زیاد می‌تواند از گراف تابع ساحه مونوتونی صحیح خوانده شود.

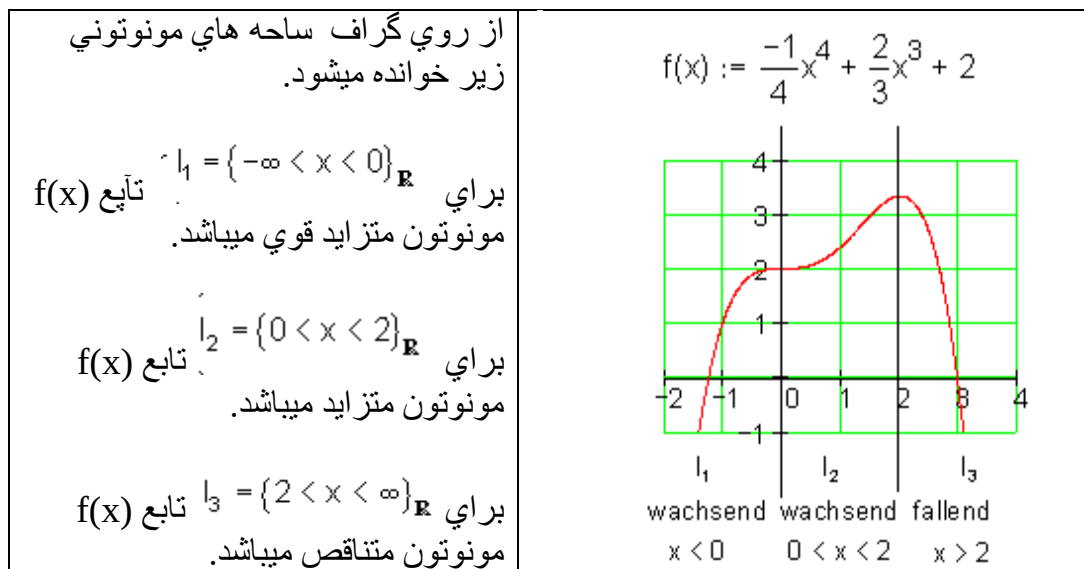
برای $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ تابع $f(x)$ مونوتون متزاید قوی می‌باشد.

برای $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ تابع $f(x)$ مونوتون متناقص می‌باشد.

برای $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ تابع $f(x)$ مونوتون متناقص قوی می‌باشد.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$





تمرین:

---توابع راشنل زیر را به خواص همنوایی تحلیل نمایید.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

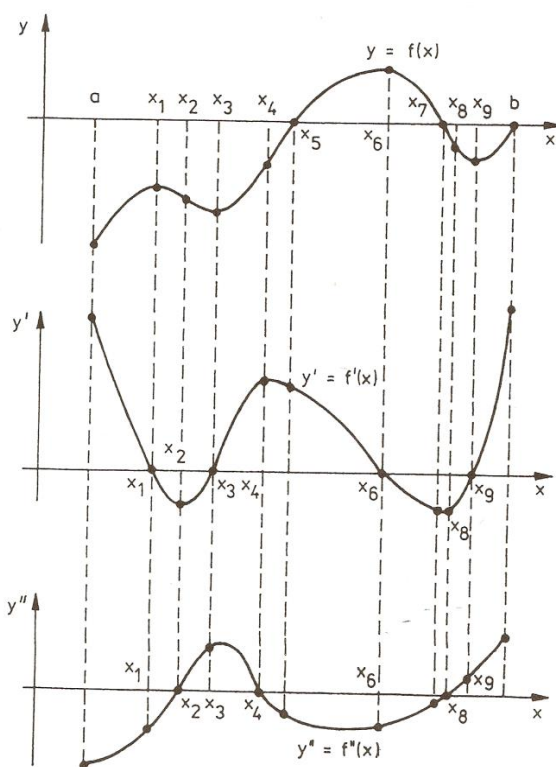
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

--- حالت مونوتوني توابع کسري راشنل زیر را در تابعیت a بدهید.

a) $f(x) = \frac{1}{ax+2}$

b) $f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

نقاط افراطي مربوط به جاي (local extrema)



ما بعضي اوقات برای نقاط افراطي بحراني نوېشتم، توجه برایش باشد.

فعالیت:

گرافهاي توابع مختلف و در باره ان بحث، که در کجا نقاط پخراني دارد.

- در شکل بالا براي تابع نقاط نسبي اعظمي، - اصغري و مطلق نقاط اعظمي و - اصغري را نشان دهید.

- در شکل بالا نشان دهید، که نقاط عظمي نسبي و به همين قسم نقاط اعظمي مطلق، نقاط اصغري نسبي و به همين قسم نقاط اصغري مطلق منحنی به هر دو طرف چطور حرکت میکند؟

- اگر یک تابع $2x^2 + 12x + 8$ داشته باشیم

- در شکل بالا به نقاط کي بحراني باشد متوجه شوید که تابع در آن جا چه خواص دارد؟

- به همين نقطه تابع ببینید، که مشتق اول شان کدام قیمت دارا میباشد؟

ما از تحلیلهای بالا بدست می آوریم:

اگر در جای x_0 برای $f(x)$ ما $f'(x) = 0$ داشته باشیم، پس یک نقطه اصغري نسبي در پیش داریم.

اگر برعکس این $f'(x) = 0$ و $f''(x) < 0$ داشته باشیم، پس یک قیمت اصغري نسبي در پیش داریم.

نقاط بحراني (مینیموم یا ماکسیموم) خاصیت دارد، که $f'(x) = 0$ می باشد و علامه $f''(x)$ یعنی $+$ ، $-$ به این فیصله میکند که آیا نقطه اعظمي و یا -اصغري در پیش داریم.

برای روابط بالا یادداشتهای زیر ضروري میباشد:

۱ - این روابط تنها برای x_0 قابل ارزش است، که در داخل ست تعریف واقع باشد و در آنجا تابع دفعه زیاد قابل مشتق باشد، برای نقاط و جاهای که در آن تابع $y = f(x)$ کم یا هیچ قابل مشتق نه باشد، برای تحلیل جداگانه ضرورت دارد.

۲ - شرایط که $f'(x) = 0$ باشد (تابع قابل مشتق) تنها برای یک قیمت افراطي ضرور است

۳ - شرایط که $f'(x) = 0$ و $f''(x) \neq 0$ باشد، برای قیمت بحرانی تنها تکمیلکننده است و نه ضروری

مثال: گراف تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم نمایید و اگر قیمتهای انحرافی داشته باشد، آنها را از طریقه گراف و مشتق تعیین نمایید.

حل:

از گراف مثال روشن است، که تابع در جای $x=0$ نقطه مطلق اصغری دارد.

شرایط ضروری برای نقطه بحرانی:

۱ - مشتق اول تابع است: $f'(x) = 2x$. درین مساوات مشتق تابع برای x_0 جای صفر دارد، یعنی درینجا یک نقطه بحرانی موجود است.

۲ - مشتق دوم تابع: $f''(x) = 2$. بدین لحاظ که $f''(x) > 0$ ، پس یک نقطه اصغری نسبی را در پیش داریم.

مثال: تابع $y = x^4$ برای $x = x_0 = 0$ نقطه اصغری نسبی دارد و صدق میکند:

$$f'(x) = 4x^3 = 0, f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2, f''(0) = 0$$

میبینیم که مشتق دوم نه از صفر کلان و نه از صفر کوچک است.

از تحلیل بالا تعریف زیر بدست می آید:

تعریف :

تابع $y = f(x)$ که در ناحیه $x = x_0$ تعریف شده باشد. یک نقطه اعظمی به همینطور یک نقطه اصغری دارد، اگر برای x که به تمام x_0 نزدیک باشد صدق کند:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\Leftrightarrow) \quad \text{به همینطور} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

جمله :

(شرایط ضروری برای یک نقطه افراطي):

اگر یک تابع $y = f(x)$ قابل مشتق یک نقطه افراطي در x_0 داشته باشد پس داریم:

$$f'(x) = 0$$

این جمله برای ما نشان میدهد (یادداشت ۲ مقایسه شود): جایی که $f'(x) \neq 0$ باشد، پس در آنجا نقطه اکستریم موجود نیست، برای نقطه بحرانی تنها جایی x_0 در پیرامون می‌آید، که برای آن $f'(x) = 0$ داریم،

مگر حتمی نیست که $y = f(x)$ باید یک نقطه بحرانی داشته باشد.

جمله ۲۰. ۱۳: (شرایط تکمیل‌کننده برای یک نقطه افراطي(بحرانی)):

اگر برای یک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و داشته باشیم:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

پس تابع $y = f(x)$ در آنجا یک اکستریموم دارد.

نقطه اصغری به پیش داریم، اگر داشته باشیم: $f''(x) > 0$

نقطه اعظمی به پیش داریم، اگر داشته باشیم: $f''(x) < 0$

تمرین:

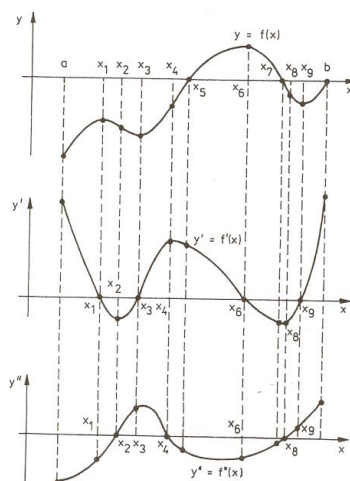
نقاط افراطي (انحرافي) توابع را دریابید

$$1) f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$2) f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$$

$$3) f(x) = 7x^7 - 6x^6 + 4x^4x^3 + 2x + 1$$

انحنا از طرف راست و انحنا از طرف چپ (مقعر و محدب)



فعالیت:

- در شکل بالال مقعریت و محدبیت را نشان دهید.

- در شکل بالا از روی مشتقها مقعریت و محدبیت را نشان انگشتنما کنید

اگر در اینتروال از تابع قابل مشتق f مشتق دوم $f'' > 0$ میباشد، پس درین اینتروال گراف چپ خم شده یا انحنی چپ دارد و اگر دویم مشتق دو $f'' < 0$ میباشد، پس گراف تابع راست خم شده یا انحنی راست دارد.

مثال:

تمام توابع غیر ناطق (راشئل تابع) f به $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ در کدام ساحه چپ خم یا انحنی چپ دارد (یا مقعر است) و در کدام ساحه راست خم است (انحنی راست دارد) (محدب است)؟

مشتق دوم: (از مشتق اول):

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

برای $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ خم بودن چپ (انحنی چپ (یا مقعر))

برای $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ خم بودن راست (انحنی راست (یا محدب))

مثال:

گراف تابع کسری راشئل $f(x) = \frac{1}{x+2}$ یک های پارابول است. کدام طرف های پارابولا چپ خم است یا انحنی (مقعر) چپ دارد، و کدام یک راست خم است انحنی راست دارد (محدب است)؟

مشتق دوم: $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$ صورت همیشه مثبت است.

برای $x < -2$ مخرج و به همین طور قیمت کسر منفي میبایشد. شاخه های پارابول خمی راست دارد یا انحنی دارد (محدب است).

برای $x > -2$ مخرج و به همین طور تمام کسر مثبت میبایشد.

های بارابول [پ خم است یا انحنی چپ دارد (یامقعر است).

مثال: انحنی از هر دو توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x^3}$ از هر دو طرف باهم مقایسه شود.

هر دو توابع برای $x > 0$ تعریف است.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad g''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

مشتقها دوم برای $x \in \mathbb{R}^+$ تعریف هستند.

درین ساحه $f''(x) < 0$ است. گراف مربوطه انحنا راست دارد، این یکی به طرف راست پارابول باز را نشان میدهد.

در همین ساحه $g''(x) > 0$ میبایشد. گراف مربوطه انحنا چپ دارد. گراف مربوط یک انحنا چپ درارد، این طرف بالا پارابول باز میبایشد.

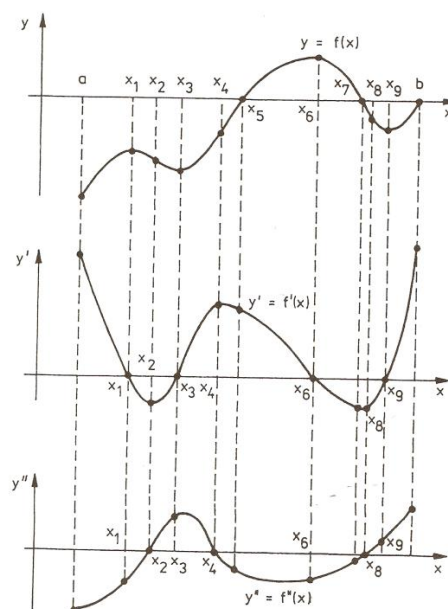
تمرینها:

نشان دهید، که توابع مقعریت و مخدبیت توابع زیر کدام است؟

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x$

b) $g(x) = 2x^3 + 3x - 2$

نقاط انعطاف Inflection Points



فعالیت :

- شکل بالا را بدقت ببینید و نشان دهید، که در کجا یا در کدام نقطه منحنی سمت حرکت خود را (از طرف چپ به راست) تبدیل میکند؟
- در اطراف نقاط انعطاف هم فکر کنید، که کدام نقاط نقاط برجسته هستند و از خواص آن خواص نقطه انعطاف را تعیین نماید.
- در شکل فکر کنید، که در اطراف نقطه انعطاف منحنی چگونه حرکت میکند.
- در باره شکل از فکر خود چیزی بگویید و به اسش فکر خود دلایل خود را روشن سازید.

ما از شکل بالا حدث زده میتوانیم که: اگر در جا x_0 این زیر داشته باشیم

$$f''(x) = 0, f'''(x) > 0$$

پس یک نقطه انعطاف راست – چپ در پیش داریم.

برعکس:

اگر داشته باشیم: $f''(x) = 0, f'''(x) < 0$ پس یک نقطه انعطاف چپ – راست در پیش داریم.

تعیین کننده خاصیت نقطه انعطاف است، که $f''(x) = 0$ باشد، برای این که نقطه انعطاف راست-چپ و یا چپ-راست می باشد، انرا علامه پیشرو(طرف چپ) $f''(x)$ تعیین میکند.

۴ – شرایط $f''(x) = 0$ برای نقطه انعطاف تنها ضروری است.

برای $y = x^4$ می باشد $f''(0) = 0$ ، مگر نقطه انعطاف در پیش ندارم.

۵ - شرایط $f''(x_0) = 0$ و $f'''(x_0) \neq 0$ برای نقطه انعطاف تکمیل کننده است.

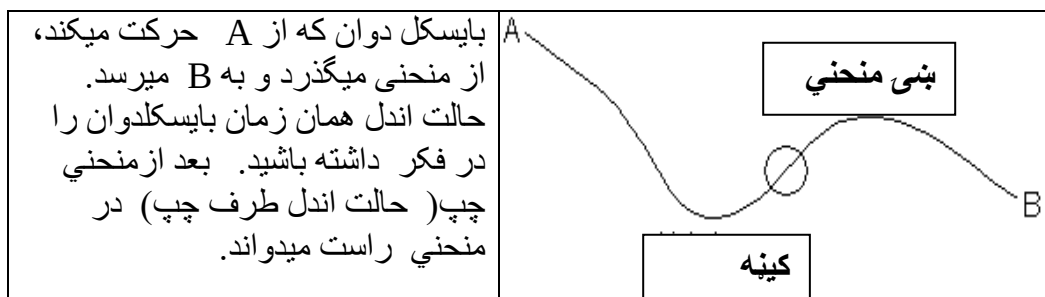
می بینیم که تابع $y = f(x) = x^5$ در جای $x = x_0 = 0$ یک نقطه انعطاف دارد و صدق میکند:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4, & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 20x^3, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 60x^2, & f'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

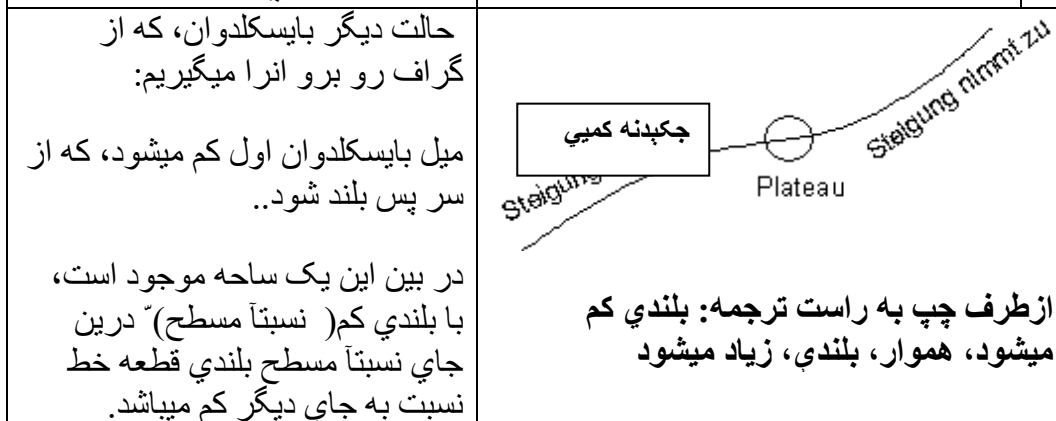
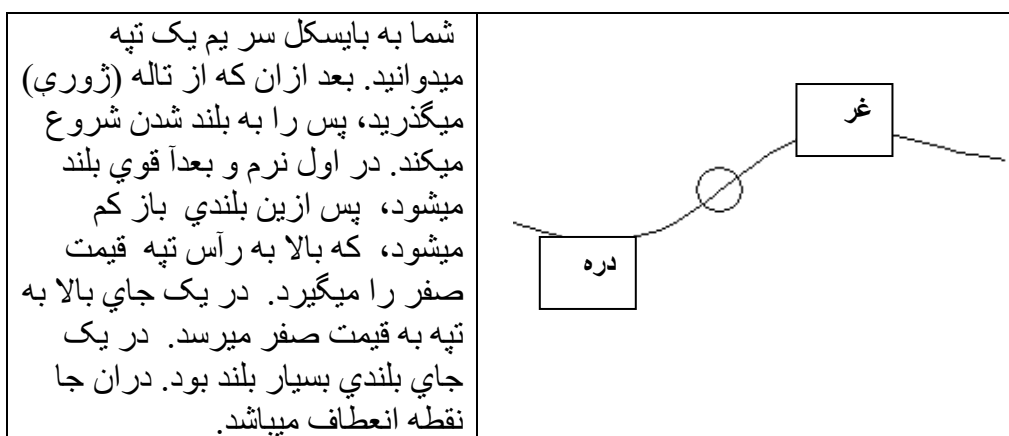
نقطه اصغری، زیرا که مشتق سوم $f'''(x)$ نه از صفر خورد و نه بزرگ است.

پیشگفتار و روشن ساختن کلمه:

برای روشن ساختن بیشتر این کلمه طور زیر به پیش میرویم:



در بین منحنی چپ - راست باید اندل بایسکل سیده استاده باشد (عمود باشد)، که عوض اندل می باشد از طرف چپ به راست. این عوض بین منحنی چپ و راست و یا نقطه انعطاف نامیده میشود.



درانجا نقطه انعطاف واقع می‌باشد.	
۱۵۷	نقاط انعطاف

می‌فهمیم، که مشتق اول یک تابع، بلندی تابع می‌باشد، که بلندی شان از گراف خوانده می‌شود. برای این که نقطه انعطاف نقطه بزرگ یا خورد می‌توان باشد، طوری پیدا می‌شود، که قیمت‌های افراطی بحرانی تابع مشتق را دریابیم.

این عمل کرد همانطور است، مثل که برای تابع اولیه $f(x)$ تعیین کردیم. حالا به تابع مشتق $f'(x)$ این عملکرد اجرا می‌شود.

شرایط نقطه انعطاف را قرار زیر جمع اوری می‌کنیم:

$$\text{شرایط ضرور برای قیمت بحرانی: } f'(x_E) = 0 \text{ و } f''(x_E) \neq 0$$

$$\text{شرایط تکمیل‌کننده برای قیمت بحرانی: } f''(x_W) = 0 \text{ و } f'''(x_W) \neq 0$$

پیش ازین که یک سلسله جملات برای نقاط بحرانی و نقاط انعطاف بررسی می‌کنیم، می‌خواهیم این کلمه را تعریف نمایم.

هر دو کلمه را به شکل نقطه بحرانی نسبی خواهیم جمع اوری کرد.

تعریف: تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در یک ساحه $x = x_0$ یک نقطه انعطاف چپ - راست و به همین قسم نقطه انعطاف راست - چپ دارد، اگر مشتق آن درانجا یک نقطه اعظمی و یا یک نقطه اصغری داشته باشد.

جمله: (شرایط ضرور برای یک نقطه بحرانی):

اگر یک تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در x_0 نقطه بحرانی داشته باشد، پس داریم: $f'(x) = 0$

این جمله به ما نشان میدهد (یادداشت ۲ مقایسه شود): در جایی که $f'(x) \neq 0$ باشد، پس در آنجا نقطه بحرانی موجود نیست، برای نقطه بحرانی تنها جایی x_0 در پیرامون می.

نقاط انعطاف

۱۵۸

ایده، که برای آن $f(x)=0$ داریم، اما حتمی نیست که باید $y = f(x)$ یک نقطه بحرانی داشته باشد.

از استعمال جمله بالا به $y' = f'(x)$ جمله زیر بدست می آید.

جمله ۲. ۱۲: (شرایط ضروری برای نقطه انعطاف):

اگر یک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و در آنجا یک نقطه انعطاف داشته باشد، پس بدست می آید: $f''(x) = 0$

در اینجا هم قابل اعتبار است (یادداشت ۴ را مقایسه شود): جایی که $f''(x) \neq 0$ باشد، پس در آنجا میتواند یک نقطه انعطاف موجود باشد. اگر $f''(x) = 0$ باشد، میتواند نقطه انعطاف موجود باشد، اما ضرور نیست که در آنجا نقطه انعطاف موجود باشد. از بالا جمله زیر بدست می آید:

جمله: (شرایط تکمیل کننده برای نقطه انعطاف): اگر برای یک تابع $y = f(x)$ که سه دفعه در $x = x_0$ قابل مشتق باشد، داشته باشیم:

$$f''(x) = 0 \text{ , او } f'''(x) \neq 0$$

پس در آنجا یک نقطه انعطاف موجود است. اگر $f'''(x) < 0$ ، پس یک نقطه انعطاف چپ-راست به پیش داریم. برای $f'''(x) > 0$ یک نقطه انعطاف

راست- چپ به پیش داریم.

مثال تحلیلی:

۱۵۹

نقاط انعطاف

۱ - مساوات تابع با مشتق ان

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

۲ - مشتق دوم را صفر کنید

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_W = 2$$

۳ - ثبوت از روی نقطه انعطاف، که

ایا نقطه انعطاف موجود است؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

۴ - تعیین نقطه انعطاف از طریق جا به

جا کردن جا های انعطاف در $f(x)$

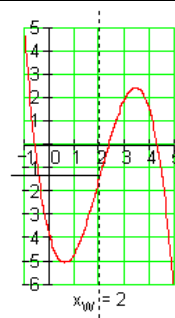
$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)}}$$

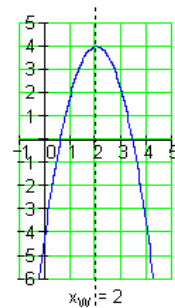
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f(2) = -\frac{4}{3}$$

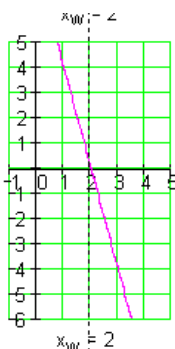
$$P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$$



$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

Extremwert von $f'(x)$
bei $x_W = 2$ 

$$f''(x) = -4x + 8$$

Nullstelle von $f''(x)$
bei $x_W = 2$ 

$P_w(2 -1,33)$	یا
----------------	----

دقت: در جاي انعطاف x_w گراف $f(x)$ انحنی می یابد.

در یک نقطه دلخواه x_0 برای انحنی صدق میکند:

نقاط انعطاف ۱۶۰

$F''(x) > 0$ بدین معنی است، که $f(x)$ طرف چپ انحنی میکند

$F''(x) < 0$ بدین معنی است، که گراف تابع $f(x)$ به طرف راست انحنی میکند

Der Sattelpunkt نقطه زین

یک حالت استثنائی نقطه انعطاف نقطه زین میباشد. این نقطه انعطاف است که میل (بلندی) آن صفر میباشد. اگر از طرف چپ به آن نزدیک شویم فکر میشود، که نقطه عظمی نسبی را در پیش داریم. اگر از طرف راست به آن نزدیک شویم، فکر میشود که یک نقطه اصغری نسبی را در پیش داریم.

حالا این حالت را از رو ریاضیات بررسی میکنیم:

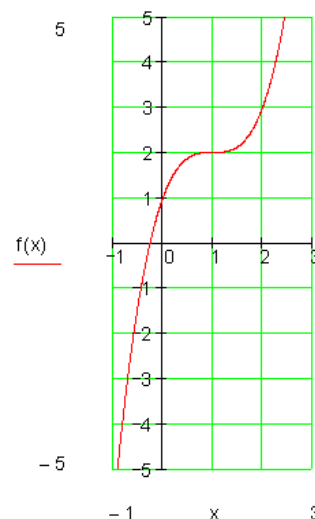
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$



سرلیک

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	$x=1$ به $x=1$ نقطه انعطاف $\leq$ به $x=1$ نقطه زین
---	---

شرایط برای نقطه انعطاف تکمیل است.

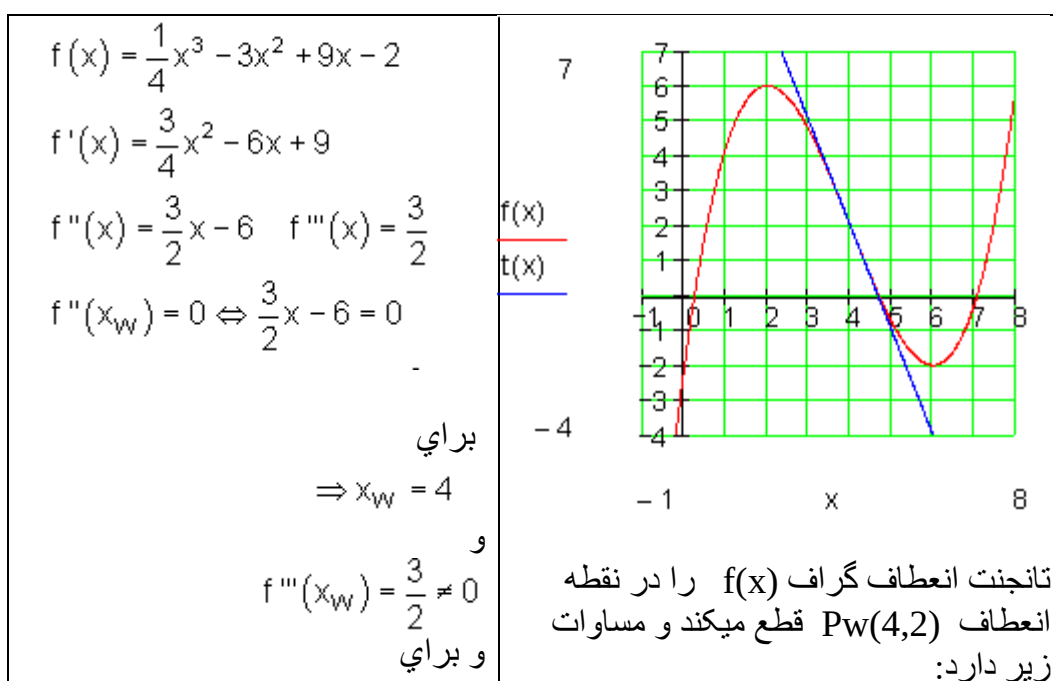
۱۶۱

نقاط انعطاف

بنابراین از لحاظ $f'(1) = 0$ نقطه انعطاف در پیش داریم، پس این نقطه انعطاف همان نقطه زین می‌باشد.

یافتن نقطه انعطاف:

تانجنت بالای گراف تابع در نقطه انعطاف تانجنت انعطاف نامیده می‌شود. تانجنت انعطاف به همان تور یافته می‌شود مثل که تانجنت در یک نقطه گراف تابع، که مساوات تانجنت تعیین می‌شود.



$f(x_w) = f(4) = 2 \Rightarrow P_w(4 2)$ مساوات تانجنت صدق میکند. برای x_w مساوات تانجنت $t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$ با $f'(x_w) = f'(4) = -3$ تور زیر میباشد $t(x) = -3(x - 4) + 2 = \underline{\underline{-3x + 14}}$	$t(x) = -3x + 14$
--	-------------------

نقاط انعطاف

۱۶۲

یافتن تانجنت انعطاف:

تانجنت گراف تابع در نقطه انعطاف، تانجنت انعطاف نامیده میشود

مساوات تانجنت انعطاف به همان طور تعیین میگردد مثل که مساوات تانجنت بالا نقطه
 دلخوا گراف

حالتهاي ، مثل $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ درین جا بررسی نمیشود

تمرین:

۱: نقاط انعطاف تابع f با $x \neq 1$ $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$ را دریابید.

۲ - نقاط انعطاف توابع زیر را دریابید.

$$a) f(x) = \frac{2x - 2}{x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3}{3(x - 1)^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x}$$

سرلیک

۳ -- نشان دهید، که تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}e$ نقطه زین نقطه انعطاف میبشد.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پیدا کړئ.

$$a) f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

$$b) f(x) = \ln \frac{1}{x^2+1}$$

۱۶۳

بحث منحنی

بحث منحنی (Kurven Diskussion):

یک تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ داریم. بع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نڅېته کړئ، رښانه کړئ، چې انحنای چیرته له کینې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کینې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، تیت ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا کړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$
- جدول و شکل تابع ورودي را بکشید.
- ایا میتوانید، که شکل تابع را به طور ساده رسم کنید، بدون این که از جدول استفاده به عمل بیاید؟
- نقاط برجسته تابع کدام نقاط میبشد؟ نشان دهید.

- ایا خواهید توانست که ازین نقاط تابع را رسم نماید. درین کار میتوانید، که از شکل ترتیب شده تان استفاده به عمل بیاورید، که از کدام نقاط استفاده به عمل می آید.

برای این که یک تابع را رسم کرده بتوانیم، ساده خواهد بود که نقاط برجسته تابع را بشناسیم. این بحث را بحث منحنی مینامیم. ما به این قسم بحث به تور سیستماتیک به پیش خواهیم رفت.

کاربرد یا عمل کرد به طریق زیر مفید خواهیم یافت:

ساحه تعریف: بررسی تابع تنها درین ساحه هدفمند است.

۱۶۴ . بحث منحنی

متناظر **Symmetrien** : تعیین باید شد، که تابع متناظر محوری ویا متناظر نقطه است.

برای متناظر محوری صدق میکند: $f(-x) = f(x)$

برای متناظر ن؛ قده صدق میکند. $f(-x) = -f(x)$

برای هر دو حالت بالا باید فقط $x \geq 0$ بررسی شود.

به صورت عموم برای توابع حقیقی به یاد میگیریم، که اگر اکسپوننت (ورجه بولینوم) جفت باشد، پولینوم متناظر محوری میباشد و اگر اکسپوننت پولینوم طاق (درجه پولینوم طاق) باشد، پولینوم نظر به نقط متناظر میباشد.

نقاط افراطی **Extrema** : تعیین نقاط بحرانی نسبی (نقاط اعظمی، نقاط اصغری)

شرایط تکمیل کننده نقطه اعظمی نسبی:

$$f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) < 0$$

نقطه انعطاف Inflection Point :

شرایط تکمیل کننده برای تعیین کردن نقاط انعطاف و به همین قسم نقاط زین:

$$f''(x_w) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_w) \neq 0$$

نقطه انعطاف نقطه زین میباشد به تانجنت افقی.

نقطه تقاطع محور: نقطه تقاطع با محور x : $P_y(0|y_s) \Rightarrow f(0)$ با محور y نقطه تقاطع (جای صفر) را تعیین میکند. $P_{xi}(x_i|0) \Rightarrow f(x) = 0$

رسم گرافها: با تمام معلومات که تا به حال جمع اوری شده، میتوانیم گراف را رسم کنیم. برای این اول یک جدول قیمتها ترتیب میشود. این جدول برای ما نشانی خواهد کرد، که کدام قیمتهای دیگری شمرده میشود.

۱۶۵

بحث منحنی

حالت انحنی و یکنواخت بودن:

در نقطه انعطاف x_w گراف $f(x)$ تغییر میخورد.

در یک نقطه دلخواه x_0 برای انحنی صدق میکند:

$f''(x_0) > 0$ بدین معنی است، که گراف تابع $f(x)$ انحنی چپ دارد (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ بدین معنی است، گراف تابع $f(x)$ انحنی راست دارد (کونکاو)

یکنواخت بودن

۱ - اگر $f''(x) \geq 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متزاید است.

اگر $f''(x) \leq 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متناقص است.

۲ - اگر $f''(x) > 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ در اینتروال I متزاید یکنواخت قوی میباشد.

اگر $f''(x) < 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ در اینتروال I یگنواخت متناقص قوی می‌باشد.

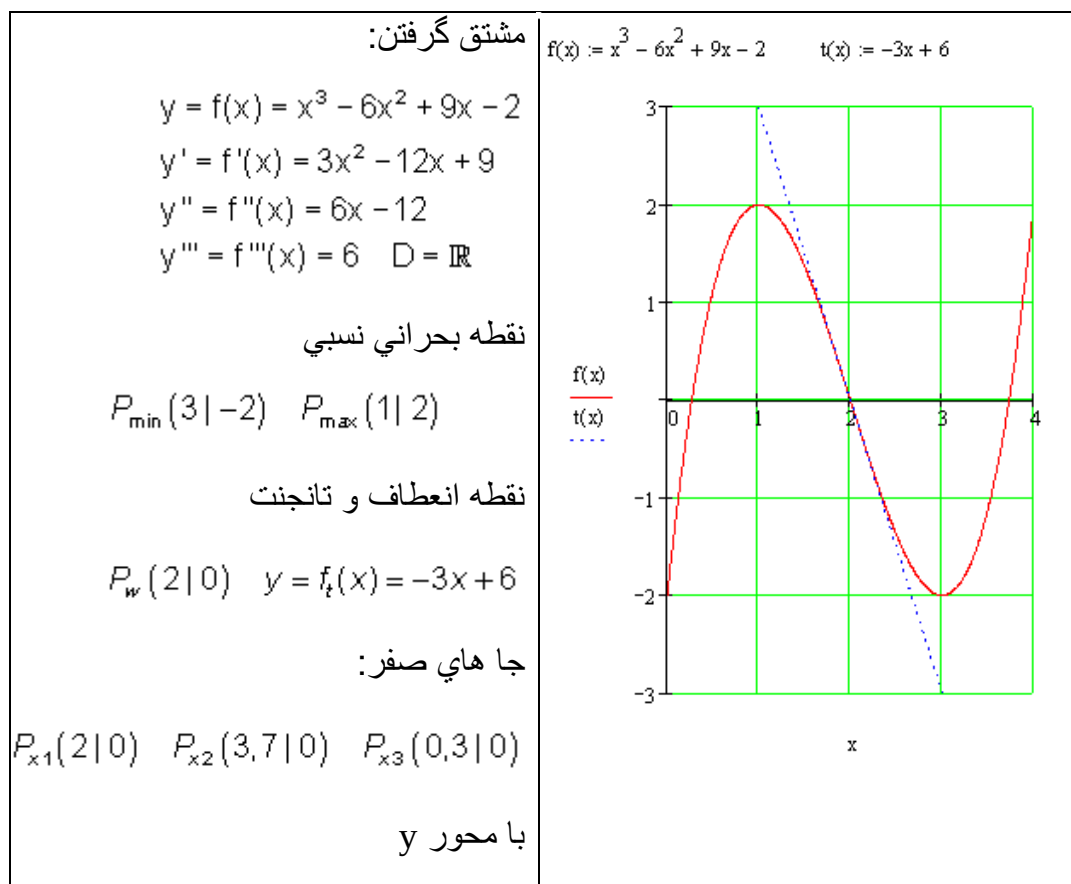
ساحه تعریف نقطه کنار:

مطالعه کنار تابع در نقطه ساحه تعریف. اگر ساحه تعریف نامحدود باشد، پس حدود $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ قابل تعیین می‌باشد.

مثال: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

بحث منحنی

۱۶۶



سرلیک

نقطه تقاطع: $P_y(0 -2)$	
-------------------------	--

یکنواخت بودنی (مونوتونی) در $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ متزايد بودن یکنواخت. در $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ یکنواخت بلند میشود.	حالت تابع در $x \rightarrow \infty$ و $x \rightarrow -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$ تناظر (سیومتري): نه دارد
---	---

حالت انحنای:

انحنای راست (محدب): $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{\mathbb{R}}$

انحنی چپ (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

تمرین:

به توابع زیر بحث کنید و به نقاط برجسته:

اول (از طریق شمردن نشان دهید.

دوم (در شکل نشانی کنید.

a) $2x^3 + x^2 + 1$

b) $x^3 + x^2 + 3x$

c) $x^3 + 2x^2 + x + 3$

نامعین های افاده حد

۱۶۸

حد افاده های نامعین

$$0, \infty, \frac{0}{0}, 0^{\infty}, \frac{\infty}{\infty}, \dots$$

اگر داشته باشیم $x \neq 5$ ؛ $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ ، دیدیم، که لیمیت این قسم توابع را دریافت کرده میتوانیم.

این قسم تابع افاده های معین نامیده میشود، ازین که مشتق شان شمرده میشود، یعنی حد تقسیم تفاضل را تعیین کرده میتوانیم.

اگر تابع $\frac{\sin 2x}{5x}$ داشته باشیم، پس مشتق تابع را به طور معمول یافته نمیتوانیم، که ازین بابت ان را افاده های نامعین مینامیم.

فعالیت:

- بکوشید که مشتقهای توابع بالا در ورودی را دریابید.
- اگر داشته باشیم $\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ ، پس مشتق تابع در کجا گرفته میشود، اگر مشتق شان برای $x = 5$ ممکن باشد، مشتق شان را بگیرید.

مطاعات اوی: حالت $\frac{0}{0}$:

..

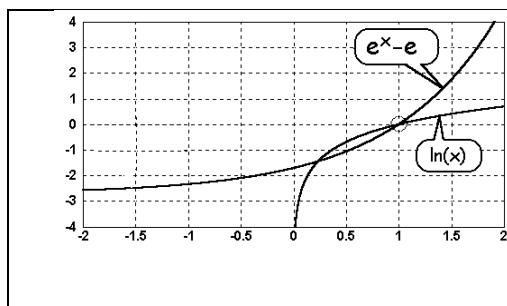
۱۶۹

نامعین های افاده حد

اگر در تشکیل حد یک کسر به وجود بیاید، که دران صورت و مخرج هر دو به صفر تقرب کنند یا صفر شود، پس این حد را افاده غیر معین مینامیم.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$



در شکل حصه توابع رسم شده، یعنی
گراف های صورت و همینطور مخرج.
میبینیم: قیمتهای توابع صورت و مخرج
هر دو به صفر میرود. (اگر x به طرف ۱
برود)

طرز نوشتن: برای افاده

$$\frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

در شمارش حد به طور کوتاه مینویسیم:

$$\frac{0}{0}$$

این در حقیقت دقیق نیست، مگر به صورت عموم بدین قسم معمول است.

روشن ساختن :

افاده های غیر معین چی میباشد؟

نامعین های افاده حد

۱۷۰

این سوال در بین می افتد، که این کلمه غیر معین اسم خود را از کجا میگیرد. این
غیرمعین نامیده میشود، زیرا که حد شان از طرق عادی شمرده نمی شود. این شمارش
با ریاضیات بالامکن شد(به طور مثال از روی قانون دی لو پیتال، که بعداً بررسی
خواهد شد)

تشریح به روشن ساختن:

حالا نشان میدیهم، که شمردن چرا ناممکن است.

ما باز مثال صفحه قبلی را بدست میگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow \boxed{\text{صورت}}}{\text{Nenner} \rightarrow \boxed{\text{مخرج}}}$$

۱ - اگر کوشش شود، که حد را دریابیم، و برای $x=1$ در کسر جا به جا کنیم، پس افاده 0:0 به دست می آید، که بدین لحاظ این کسر تعریف نیست، زیرا که تقسیم به صفر اجازه نه دارد.

۲ - ما پیش برای شمردن افاده های نامعین، یعنی شمردن حد کسری ناطق از چل ول کار گرفتیم. حالا ازین چل کار گرفته نمیتوانیم، مثل که در مثال بالا دیده شد.

۳ - قیاس حد هم ناممکن است: در مرحله اول ممکن است که به فکر بیایم، که اگر صورت و مخرج به صفر برود، پس کسر ممکن به طرف ۱ حرکت کند. یعنی:

افاده های نامعین حد

۱۷۱

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

اگر صورت و مخرج به صفر نزدیک شود، این فقط معنی خواهد داشت، که هر دو از روی قیمت تقریباً برابر خواهد شد. این به معنی نیست، که نسبت صورت و مخرج به هم مساو میشود:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001} = 100$$

طور که میبینیم صورت و مخرج از روی قیمت تقریباً مساوی میباشد (این به معنی، که هر دو به طرف صفر میرود)، مگر نسبت در بین اینها بسیار بزرگ است یعنی (100)،

حدود نامعین یا لیمیت افاده های نامعین

$$0.\infty, \frac{0}{0}, 0^\infty, \frac{\infty}{\infty}, \dots$$

که و لرو $x \neq 5$ ؛ $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ ، و مو لیدل، چي د داسي توابعو لیمیت په پیداکولی

شو. دا ډول تابع ته ټاکلي افادې وايي، ځکه چي مشتق يې نیول کېدی شي، یعنی د کمښتونو ویش (د تفاضلونو ویش) حد يې ټاکل کېدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع و لرو، نود $x = 0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه

شو نیولی، چي له دې امله ناټاکلي افادې ورته وايو.

حد افاده های نامعین

۱۷۲

فعالیتونه:

۱- اگر تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + x}$ داده شده.

سرلیک

اول - حد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + x}$ را یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + x}$ از درس لیمت که در

حصه اول

خوانده شده دریابید.

۲ -- بالا در ورودی کوشش کنید که مشتق هتای توابع را دریابید.

۳- اگر داشته باشیم $\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$ ، پس مشتق د تابع در کجا گرفته میشود، اگر برای $x=5$

ممکن مشتق شان را بگیرید.

در تعیین یا بررسی حدود توابع تقسیم طور $\frac{f(x)}{g(x)}$ رول مخصوص بازی میکند.

این حالت به طور مخصوص در آنجا ظهور میکند، که مخرج و صورت در همان جای x_0

صفر داشته باشد. این افاده نامعین $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$ هذفننده نیست. میتواند که حد تقسیم

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ بررسی شود، که برای آنها صورت و مخرج به طرف صفر میرود. به طور

عموم برای این مناسب است که ترمهای توابع را بطلبیم. به طور مثال تابع

$$f: y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

در صورت و مخرج همان جای صفر $x_0 = -2$ دارد، با وجود این هم حد موجود میباشد.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$$

این طور حدود به کمک مشتق شمرده میشود، که از نتایج توابع صورت و مخرج بدست می آید. این قسم قاعده به نام تطبیق قضیه قیمت وسطی وسعت یافته نیز یاد میشود.

Bernoulli and de l'Hospital

اگر در یک ساحه $U(x_0)$ در جاي x_0 توابع $u=f(x)$ و $v=g(x)$ قابل مشتق باشد با $g'(x) \neq 0$ و برای تمام $x \in U(x_0)$ و x_0 جاي صفر f و g باشد، با $f(x_0)=g(x_0)=0$ ،

پس صدق میکند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

تا که حد طرف راست موجود باشد.

به همین قسم بدست میاید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل: تابع فرضیه های قضیه قیمت وسطی وسعت یافته را تکمیل میکند. برای هر

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)} \quad \text{با } x_m \in (x_0, x) \text{ موجود است، طور که:}$$

از لحاظ $g(x_0)=0 \wedge f(x_0)=0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بنأاً به $x \rightarrow x_0$ هم $x_m \rightarrow x_0$ حرکت میکند.

در حالت $x \rightarrow 0$ ما $x=1/z$ جا به جا میکنیم و به کمک قضیه مرکب (-زنجیری) بدست می اید:

$$u=f\left(\frac{1}{z}\right)$$

با مشتق $du/dz = f(1/z) \cdot (-1/z^2)$ و مشتق $(\frac{1}{z}) \cdot (-\frac{1}{z^2})$ ، داریم:

قاعده برنولی..... ۱۷۴

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

یاد داشت: اگر در حالت بالا $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم باشد، این قاعده باز به تقسیم از سر استعمال میشود. اگر کسی بعد از قدم n -م موفق باشد پس قاعده زیر را داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

جای که $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ به معنی مشتق n -م تابع میباشد.

رقم یا تیپ: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{مثال:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{مثال:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{مثال:}$$

تیپ یا رقم: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0.$$

برای اکسپوننت یک عدد حقیقی مثبت α ، یک توان دلخواه x^α برای $x \rightarrow \infty$ قوی بلند میشود و نسبت به لوگاریتم تابع $\ln$ دیوه مثبت حقیقی اکسپوننت (جگعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^α $x \rightarrow \infty$ لپاره په کلکه جگيري، نسبت به تابع لوگاریتم $\ln$ برای $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

این تابع $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$ بعد از چند دفعه استعمال قاعده دو لو، پیتال بدسا می اید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

اکسپونشل تابع e^x برای x از هر تابع اکسپوننت قوی بلند میشود:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

حالتهاي ديگري ميتوان به صورت يا تيپ $\frac{0}{0}$ و يا $\frac{\infty}{\infty}$ پس عوض شود.

از صورت يا تيپ $\infty - \infty$ به صورت يا تيپ $\frac{0}{0}$

برای این حالت تابه زیر میتوان به حیث مثال آورد:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

برای $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

سرلیک

از این بابت که درینجامشتق سپس به صورت یا تیپ $\frac{0}{0}$ است، پس قاعده لو، پیتال استعمال میشود.

از قسم $0, (\pm\infty)$ به قسم $\frac{\pm\infty}{\infty}$:

حالت صورت $0, (-\infty)$ به طور مثال تابع $f(x)=x \cdot \ln x$ را نشان میدهد برای $x \rightarrow 0$.
حالت تیپ $0, (-\infty)$ به طور مثال تابع $f(x)=x \cdot \ln x$ است برای $x \rightarrow 0$ ، دران که ضرب به قسم تقسیم نوشته میشود، بس به استعمال قاعده دو لو، پیتال زیر بدست می آید:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

از شکل 0^0 به e^0 :

درینجا ما به نور مقال تابع $f(x)=x^x$ برا $x \rightarrow 0$ بررسی میکنیم.
تبدیل شکل یا فورم به قاعده e به کمک یک تشکیل زیر به صورت موفقانه بدست می آید:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

از شکل 1^∞ به شکل $e^{0.\infty}$

به طور مثال حل حد تابع $f(x) = (1 + \frac{\mu}{x})^x$ کیباشد برای $\mu \in R^+$ و $x \rightarrow \infty$ با $x \in R^+$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln(1 + \frac{\mu}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln(1 + \frac{\mu}{x}))}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{\mu}{x})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{x}} \cdot \frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{x}}} = e^\mu$$

برای $\mu=1$ بدست می آید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

از شکل ∞^0 به شکل $e^{0,(\pm\infty)}$

این عمل ذریع یک مثال واضح میسازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \cdot \ln \frac{1}{x})} \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1 \text{ با}$$

جدول زیر اشکال ثبوت شده بالا مطالعه عمومی تبدیل اشکال را ممکن می سازد.

نوع (تیپ)	$f(x) \rightarrow$	$g(x) \rightarrow$	تبدیلی شکل یا کوتاه: تبدیلی
$-\infty$	0		$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$
∞	0		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$ ^ (Or) $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$ به $f(x) > 0$

قاعده برنولی.....

تمرینها:

در بالا مثالهای زیاد حل شده. از انهای باید چند تا مثالها برگزیده شد.

۱) قیمت حدهای زیر را بشمارید:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

برای $x \rightarrow \infty$ حدهای توابع راشنل را به قاعده دو، لو، پینال بشمارید.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$$

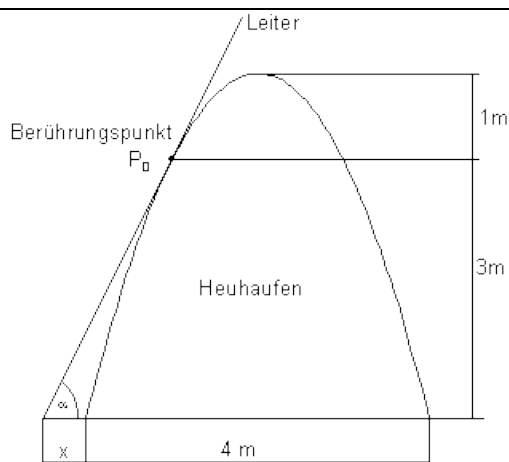
$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

مثال استعمال یک تابع برای تانجنت:

بالا زمین به انبار علف یک زینه را میگذاریم. این زینه به ارتفاع سه متر به انبار تماس میگیرد.

انبار علف شکل یک پارابول فشار آورده شده داشته باشد، که قاعده شان ۴ متر عرض دارد و ارتفاع شان هم ۴ متر می باشد. می خواهیم به ان یک زینه بمانیم، که با انبار علف تانجنت تشکیل کنه تانجنت بسازد. این زینه به کدام زاویه باید جابه جا شود؟

این زینه به کدام فاصله از قاعده انبار علف بالایی زمین باید گذاشته شود؟



ما محور y پارابول را طور رسم میکنیم، که از رأس پارابول بگذرد.

پارابول مساوات زیر تابع را دارد:

$$f(x) = a_2 x^2 + 4$$

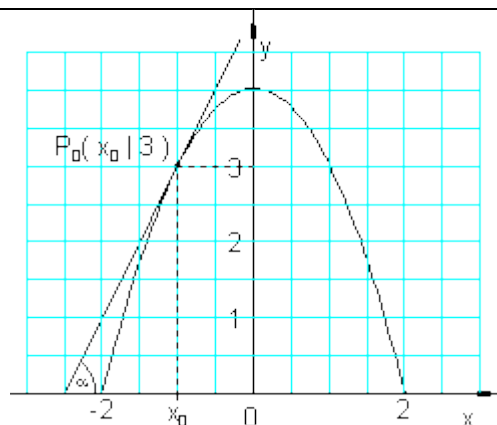
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

ما قیمت را برای x_0 تعیین میکنیم:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$



شمردن :

ما برای شمردن دیگر قیمت $x_0 = -1$ به کار میبریم. زینه مماس انبار در نقطه $P_0(-1, 3)$ می باشد. ما مساوات تانجنت را در نقطه $P_0(-1, 3)$ تعیین میکنیم:

مثال استعمال.....

سرلیک

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

با $f'(x) = -2x$ بدست مي آيد:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

زاویه تشکیل شده: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63,4^\circ}}$

فاصله بین انبار علف و زمین فاصله بین جاي صفر تابع $f(x)$ و جاي صفر تانجنت $t(x)$ میباشد.

جاهاي صفر:

داریم:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

فاصله در بین -2 و قیمت هاي x که -2,5 است 0,5 میباشد.

زینه باید از انبار علف به فاصله نیم متر گزاشته شود.

ما از این بحث یاد گرفتیم، که چه طور مساوات تانجنت تعیین میشود، که در جاي تعریف شده یک گراف مماس باشد.

قضیه مفاد بیشترین

این، قضیه مفاد یا نفع بیشترین، معنی عملی بزرگ دارد، که به طور زیر ذریعه چند مثال بررسی خواهد شد.

تقریباً در تمام پروسه های که در عمل به کار برده میشود، محتاج به استعمال معین یک جنس هستیم، که در عمل به کار می آید، آنان که ما در حدود مخصوص در اختیار میتوانیم داشته باشیم.

ما تنها پروسه های بررسی میکنیم که تابع یک مجهول x میباشد.

این در اختیار دیگر، ذریعه یک تابع $y = f(x)$, $x \in D$ بررسی کرده میتوانیم.

اگر y تمام مصارف را نشانی کند، پس x باید طوری تعیین گردد، که $f(x)$ مینیمال یا اصغری (بسیار کم) شود.

اگر برعکس y مفاد باشد، پس x باید طور بدست آورده شود، که $f(x)$ ماکسیمال (اعظمی یا بسیار بزرگ) باشد. در قاعده **مؤثره لویه** یا به عبارت دیگر، واریابل مستقل x در بین حدود $-\infty$ و ∞ تعیین کننده مستقل نیست، بلکه از لحاظ تخنیک یا علم تخنیک، تنها در حدود معین میباشد یعنی

$$a \leq x \leq b \quad (*)$$

بدین اساس مسئله مفاد عملی دلخواه مربوط این است، که این مفاد است و یا مصارف.

$$y = f(x) = \max! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

سرلیک

این روابط عمیق دارد با پرابلمهای حصه قیمتهای بحرانی یا به آنها بسته‌گی محکمی دارد.

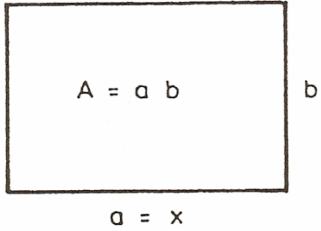
درینجا علاقه ما به طور خصوص به کار بردن پرابلمهای زیر میباشد:

۱ - پیدا کردن روابط مشترک توابع $y = f(x)$ ، متصل به دادن وظیفه (پرابلم شکل و رقم یا پرابلم مودالیتی)

۲ - در یاد داشتن حدود علم تخنیک (*)

این از طریق دو مثال ثبوت شود.

مثال: برای احاطه زمین یک سیم خاردار داریم، که تمام درازی شان L میباشد. ذریعه این سیم باید یک مستوی مربع شکل احاطه شود که تا حد ممکن باید بزرگ باشد. این وظیفه یا به عباره دیگر خواست است.

حالا پرابلم مودالیتی: مطلب ما پیدا کردن یک چهارضلعی میباشد. به طور معمول یک ضلع این چهارضلعی را به a نشانی میکنیم و دیگر شان به b نشانی میکنیم (شکل مقابل).	
--	--

این در شروع یا اول دو کمیت‌های موثر a و b میباشد. از دلیل $L = 2a + 2b$, $b = a - (L/2)$

ما به یک کمیت موثر ضرورت داریم، به طور مثال $a = x$ ، این مفاد (سطح A) قرار
زیر میباید:

$$A = ab = x((L/2)-x)$$

این روشن که صدق میکند. $0 \leq x \leq L/2$

ازین دلیل پراپلم مفاد ب.رگ قرار اتي میباید:

$$y = f(x) = x((L/2)-x) = \text{Max!} \quad (0 < x < L/2)$$

از بابت $f(0) = f(L/2) = 0$ باید ماکس در بین 0 و $\frac{L}{2}$ موجود باشد برای ماکس
ضرور است:

$$y' = f'(x) = \frac{L}{2} - 2x = 0$$

برای ماکس تنها $x = \frac{L}{4}$ زیر سوال میاید.

برای این میباید: $y'' = f''(x) = -2 < 0$.

در حقیقت یک ماکس در پیش داریم. درین حدهای علم تخنیک 0 و $\frac{L}{2}$ رول بازی.

پس صدق میکند: $a = b = L/4$.

استعمال مشتق در تولید

سرلیک

فعالیت : یک فابریک تولید میکند. به این تولید مصارف میشود، که این را تابع تولید مینامیم و آن را به $K(x)$ نشاندی میکنیم.

چی قسم میتوانیم، که برای تولید زیاد مصرف را پایین بیاوریم؟

تابع مصرف $K(x)$ رابطه بین ست تولید و تمام مصارف قایم میکند.

اگر تولید در حدود Δx زیاد شود، پس مصارف هم در حدود ΔK زیاد میشود.

تقسیم تفاضل $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ زیاد شدن مصارف وسطی را نشان میدهد، با تغییر تولید Δx (تغیر وسطی)

در جای x_0 قیمت تغییر لحضوی قیمت مشتق نامیده میشود. این به قیمت لیمیت $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ تعین میشود، این به معنی ، که مشتق تابع مصارف K .

تعریف : مشتق تابع مصارف $K(x)$ به نام قیمت مشتق $K'(x)$ یاد میشود و یا انرا مصارف قیمت های حد $K'(x)$ هم مینامیم.

مثال: قیمت تابع مصارف $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ داده شده باشد.

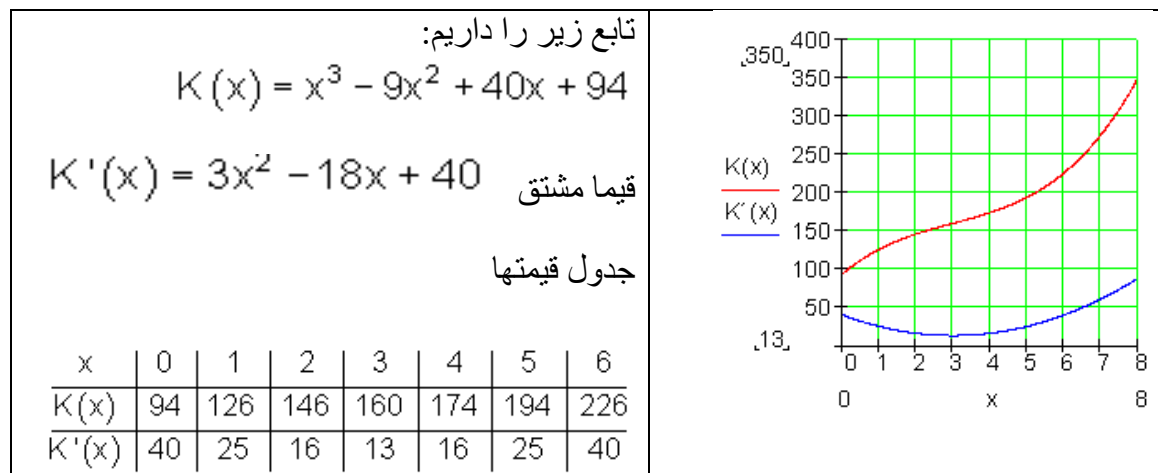
الف: قیمت مشتق را تعین نمایند، یک جدول مصارف را برای $K(x)$ و $K'(x)$ ترتیب کنید و در سیستم قیمت وضعیه گراف انرا بکشید.

برای $I = [0 ; 6]$ قیمت لیمیت به وسعت ۱ قدم.

ب : زیاد شدن مصارف بسیار کمی را تعین نمایند:

.

.



زیاد شدن مصارف بسیار کمیدر رأس پارابول $K'(x)$ قرار دارد، یعنی در انجایی که دتانجنت $K'(x)$ افقی افتاده باشد

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

برای افقیّت تانجنت :

یاد داشت: این موضوع بالا در موضوع افراطیت روشن شده.

تمرینها : از این کارتون مربع (د کلک کاغذ خخه جور) که ۲۶ سانتیمتر درازی ضلع دارد یک بکس می سازیم که بلندی x دارد.

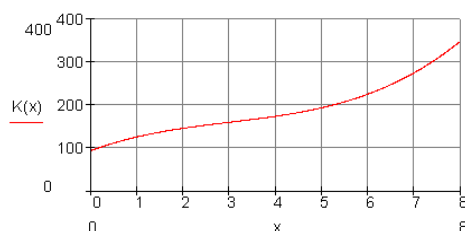
الف: ترم یک تابع را تعیین نمایند، که حجم بکس V در تابعیت x نشان میدهد.

ب - گراف را رسم نماید و به قسم فقریبی حجم ماکزیمال را تعیین نماید.

سرلیک

- در یک شفاخانه د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو گڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې $x = 1$ د 100 ناروغانو معنی او $y = 1$ دی معنی چې 1000 € / Tag د روځي زر یورو (1000 € / Tag).

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : تابع مصارف در کتایچه خود بنویسید.

ب: مشتق تابع مصرف به نام مشتق مصرف یا حد مصرف یاد میشود. شما زیاده شدن مصرف در تابعیت مریضان تشریح کنید. بلند شدن $K(x)$ را تعیین نماید و گراف شان را در سیستم وضعیه رسم نماید.

پ: به کدام تعداد مریضان زیاد شدن مصارف بسیار به پین میاید؟ این قیمتها را بشارید.

ب : د لگښت تابع مشتق د مشتق لگښت (-مصرف) یا د حد مصرف په نامه یادیري. تاسو د لگښت زیاتېدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړی. د $K(x)$ جگېدونه. $K'(x)$ وټاکي او گراف یې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړی.

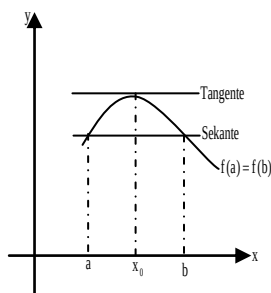
پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لگښت زیاتوال خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمېری.

ټولگه:

قضیه رول (Theorem of Rolle)

اگر یک تابع f در اینتروال بند $[a, b]$ متماذي و k در بین a و b واقع باشد، پس در انجا کم از کم یک عدد c در بین $f(a)$ و $f(b)$ موجود است، طوری که $f(c) = k$ است.

قضیه قیمت وسطی مشتق :



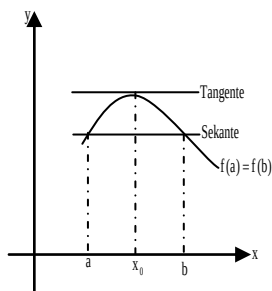
اگر تابع $y=f(x)$ بالاي اینتروال محدود $[a, b]$ غیر متماذي و بالاي اینتروال باز (a, b) قابل مشتق باشد، پس در انجا یک جاي $x \in (a, b)$ موجود میباشد، که برای ان داریم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

قضیه وسعت یافته قیمتهاي وسطی:

اگر $u = f(x)$ و $v = g(x)$ توابع متماذي بالاي اینتروال محدود $[a, b]$ باشد و بالاي اینتروال باز (a, b) قابل مشتق و $g'(x) \neq 0$ صدق کند، پس برای تمام $x \in (a, b)$ ، کم از کمه یک جاي $x_0 \in (a, b)$ موجود میباشد که از ان بدست مي آید:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$



قضیه قیمت وسطی مشتق :

اگر تابع $y=f(x)$ بالاي اینتروال محدود $[a, b]$ غیر متماذي و بالاي اینتروال باز (a, b) قابل مشتق باشد، پس در انجا یک جاي $x_0 \in (a, b)$ موجود میباشد، که برای ان داریم:

مشتق باشد، پس در انجا یک جاي $x \in (a,b)$

موجود میباشد، که براي ان داریم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

قضیه:

تابع $f(x)$ در اینتروال I قابل مشتق باشد.

-- اگر تابع $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متزايد میباشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \geq 0$ به تمام $x \in I$

-- اگر $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متناقص میباشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \leq 0$ براي تمام $x \in I$.

- اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متزايد میباشد.

- اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متناقص میباشد.

- اگر $f'(x) > 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متزايد قوي میباشد

- اگر $f'(x) < 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اینتروال I مونوتون متناقص قوي میباشد.

تعریف: تابع $y = f(x)$ که در ساحه $x = x_0$ تعریف شده باشد. یک نقطه اعظمي به همینطور یک نقطه اصغري دارد، اگر براي x که به تمام x_0 نزدیک باشد صدق کند:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\Leftrightarrow) \quad \text{به همینطور} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

جمله :

(شرایط ضروري براي یک نقطه افراطي):

اگر یک تابع $y = f(x)$ قابل مشتق یک نقطه افراطي در x_0 داشته باشد پس داریم:

$$f'(x) = 0$$

جمله ۲۰ . ۱۳ : (شرایط تکمیلکننده براي یک نقطه افراطي(بحراني)):

اگر براي یک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و داشته باشیم :

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

پس تابع $y = f(x)$ در آنجا یک اکستریموم دارد.

نقطه اصغري به پیش داریم، اگر داشته باشیم: $f''(x) > 0$

نقطه اعظمي به پیش داریم، اگر داشته باشیم: $f''(x) < 0$

مشتق دوم: (از مشتق اول):

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

براي $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ خم بودن چپ(انحنی چپ (یامقعر))

براي $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ خم بودن راست(انحنی راست (یامحدب))

تعریف: تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در یک ساحه $x = x_0$ یک نقطه انعطاف چپ - راست و به همین قسم نقطه انعطاف راست - چپ دارد، اگر مشتق آن در آنجا یک نقطه اعظمی و یا یک نقطه اصغری داشته باشد.

جمله: (شرایط ضرور برای یک نقطه بحرانی):
اگر یک تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در x_0 نقطه بحرانی داشته باشد، پس داریم: $f'(x) = 0$

جمله ۲ . ۱۲ : (شرایط ضروري برای نقطه انعطاف):

اگر یک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و در آنجا یک نقطه انعطاف داشته باشد، پس بدست می آید: $f''(x) = 0$

جمله: (شرایط تکمیل کننده برای نقطه انعطاف): اگر برای یک تابع $y = f(x)$ که سه دفعه در $x = x_0$ قابل مشتق باشد، داشته باشیم:

$$f''(x) = 0, \text{ او } f'''(x) \neq 0$$

پس در آنجا یک نقطه انعطاف موجود است. اگر $f'''(x) < 0$ ، پس یک نقطه انعطاف چپ-راست به پیش داریم. برای $f'''(x) > 0$ یک نقطه انعطاف راست-چپ به پیش داریم.

متناظر **Symmetrien**: تعیین باید شد، که تابع متناظر محوري و یا متناظر نقطه است.

برای متناظر محوري صدق میکند: $f(-x) = f(x)$

برای متناظر ن؛ قده صدق میکند. $f(-x) = -f(x)$

برای هر دو حالت بالا باید فقط $x \geq 0$ بررسی شود.

یکنواخت بودن

۱ - اگر $f'(x) \geq 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متزاید است.

اگر $f'(x) \leq 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متناقص است.

۲ - اگر $f'(x) > 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ در اینتروال I متزاید یکنواخت قوی می‌باشد.

اگر $f'(x) < 0$ برای تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متناقص قوی می‌باشد.

قاعده برنولی و دو لو، پیتال:

Bernoulli and de l'Hospital

اگر در یک ساحه $U(x_0)$ در جای x_0 توابع $u=f(x)$ و $v=g(x)$ قابل مشتق باشد با $g'(x) \neq 0$ و برای تمام $x \in U(x_0)$ و x_0 جای صفر f و g باشد، با $f(x_0)=g(x_0)=0$ ، پس صدق میکند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

تا که حد طرف راست موجود باشد.

به همین قسم بدست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تعریف: مشتق تابع مصارف $K(x)$ به نام قیمت مشتق $K'(x)$ یاد میشود و یا انرا مصارف قیمت های حد $K'(x)$ هم مینامیم.

تمرینات فصل:

۱ -- حالت مونوتوني توابع کسري زیر را در تابعیت a بدهید.

$$a) f(x) = \frac{1}{ax+2} \qquad b) f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$$

۲ -- مطالعه کنید، که آیا توابع زیر در ساحه تعریف خود مونوتون و یا قوي مونوتون دي.

$$a) f(x) = \frac{e^x}{2+e^x} \qquad b) f(x) = 2x^5 - 7$$

۳ -- توابع نا راشنل یا کسري زیر را به خواص همنوایی مطالعه کنید.

$$a) f(x) = e^{x^2} \qquad b) f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

۴ -- تمام نقاط لوکال انحرافي توابع زیر را دریابید.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= e^{-4x^2} & b) f(x) &= (x^2-3) \cdot e^x \\ c) f(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & d) f(x) &= \ln(x^2+1) \end{aligned}$$

۵ -- تمام قیمتهای افراطي لوکال (مربوط جاي) در انتروال زیر دریابید

$$-2\pi \leq 2\pi.$$

$$a) f(x) = \sin^2 x \qquad b) f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۶ -- تمام نقاط لوکال و گلوبال انحرافي توابع زیر را دریابید.

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$c) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$d) f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$$

۷ -- اول قیمت مطلقه را بشمارید و بعداً تمام قیمتهای افرازي را تعیین نمایند.

$$a) f(x) = |x| + x^2 \quad b) f(x) = |x^2 + 2x - 8|$$

۸ -- از تابع f با $x \neq 1$ $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$ نقاط انعطاف را دریابید.

۹ -- برای $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ قیمتهای تابع را بشمارید و هم بلندي تابع f را با

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$$

۱۰ -- در جای صفر تابع $\varepsilon f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ کدام بلندي را دارد.

۱۱ -- گراف $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ بلندي $f'(x) = 1$ در کدام نقاط دارد؟

۱۲ ---- در جای $x_0 = -1$ میخواهیم قیمت تابع

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$$

و بلندي گراف را دریابیم.

۱۳ -- به کمک قاعده لو، پیتال برای $x \rightarrow \infty$ قیمتهای حد توابع را بشماریم.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱۴ -- برای توابع زیر بحث تحلیلی را پیش ببرید و گرافهای شاد را رسم نمید.

سرلیک

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4 & b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2 \\ c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \end{array}$$

۱۵ - برای توابع زیر بحث مکمل منحنی ها را مطالعه و گرافهای شان را رسم نمایند.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} & b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} \\ c) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} & d) f(x) = \frac{9}{x^2 + 3} \end{array}$$

۱۶ - جا های صفر توابع زیر را دریابید.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3 & b) f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \\ c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x & d) f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} \\ e) f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & f) f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100 \end{array}$$

۱۷ -- د دریمی درجی تام راشنل گراف د x -محور د $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ او $x_3 = 4$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې گراف د $P(2, -8)$ ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د $x_1 = 0, 5$ او $x_2 = 3$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع برابرېون څنگه دی، که پرسېره پردې گراف د y - محور د $P(0, 9)$ په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع گراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له

$P(\frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$ ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنگه دي، که گراف د x - محور هم د

1- x_1 سره لمس کړي او په $x_2 = 2$ کې غوڅ کړي.

۲۰ -- جا هاي صفر توابع زیر را دریابید.

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5}$$

$$d) f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}$$

۲۱ - از یک تابع مسهې راشنل f با $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$ اعداد ثابت a, b, c و d را دریابید، اگر با $x_1 = -2, x_2 = -(1:2)$ جا هاي صفر واقع باشد و تابع در $x=0$ یک جاي خالي داشته باشد.

$$\text{it } f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$$

۲۳ - تابع کسري راشنل f تابع در $x_1 = 1$ با سه جاهاي صفر دارد.

به کومک تقسیم یک ساحه مطالع کنید که در همین ربع جاهاي صفر حرکت دارد و یا جاهاي صفر ربع را تغیر میدهد.

۲۴ -- یک ترم را طوري تعین نمایند، که جاهاي صفر پریډیکي زیر توابع را بدهد.

از طریق شمردن جاهاي صفر بنامین که در انتروال $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ واقع باشد.

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$b) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) f(x) = 1 - \sin^2 x$$

$$d) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۲۶ - چرا توابع زیر جاهاي صفر نه دارد؟

تمرینونه

۱۹۶

سرلیک

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x}{x+1} \qquad d) f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- چرا ممکن است که یک تابع بسیار جاهای صفر داشته باشد، ولی به محور y تنها یک جای صفر دارا مییابد؟

۲۸ -- در باره تعداد جاهای صفر چیزی گفته می‌توانید، که برای یک تابع f در ساحه تعریف شان یک تابع معکوس f^{-1} هم موجود مییابد؟

۲۹ -- با محور y نقاط تقاطع توابع زیر را دریابید.

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1 \qquad b) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2} \qquad d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$e) f(x) = (x-2) \cdot e^{x-1} \qquad f) f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

۳۰ -- از تابع تام راشنل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ با $a_0 \neq 0$ می‌تواند نقطه تقاطع با محور y از طریق خواندن تعیین شود. بدین رابطه دلایلی را بیاورید.

۳۱ -- برای $x_1=1$ و $x_2=2$ قیمتهای تابع را بشمارید و هم بلندی تابع f با $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$

۳۲ -- تابع $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ در جای صفر کدام بلندی دارد.

۳۹ -- توابع زیر در کدام جاها تانجنت افقی دارد؟

$$a) f(x) = x^2 e^{-x} \qquad b) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

۴۰ -- برای کدام قیمت‌های a گراف $f(x) = (x + a) \cdot e^x$ در جای $x_0 = 0$ بلندی ۲ دارا می‌باشد؟

۴۱ -- تمام نقاط اعظمی لوکال توابع زیر را نشان دهید.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 & b) f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 \\ c) f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7 & d) f(x) = x^4 - 4x^2 + 5 \\ e) f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x & f) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2 \end{array}$$

۴۳ -- یک تابع تام راشنل درجه n -م چند جاهای لوکال انحراف که بسیار زیاد باشد میتواند داشته باشد؟

۴۴ -- چرا برای نقطه اعظمی شرایط $f''(x) < 0$ ضرور نمی باشد؟

۴۵ -- جاهای لوکال انحرافی توابع زیر را تعیین نمایید.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1 & b) f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1 \\ c) f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x & d) f(x) = x^4 - 4 \end{array}$$

۴۷ -- تمام قیمت‌های افراطی تابع f در انتروال جستجو شود.

$$-2\pi \leq 2\pi.$$

$$a) f(x) = \sin^2 x \quad b) f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۴۸ -- تمام نقاط لوکال و گلوبال توابع زیر را پیدا شود.

سرلیک

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $f(x) = x - \sqrt{x}$

d) $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$

- نقاط انعطاف تابع f با $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$ را دریابید.

۵۳-- تمام جاهای انعطاف در انتروال $0 \leq x \leq 2\pi$ یافته شود.

a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = 2(1 - \sin 2x)$

۵۴-- توابع زیر را در x_0 به قابلیت مشتق مطالع شود.

a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

۵۵-- چرا متمادیت برای قابلیت مشتق شرط ضروری، مگر قابلیت مشتق برای متمادیت لپاره شرط تکمیل کننده است؟

۵۶-- به کدام دلیل توابع تام راشنل برای $x \in \mathbb{R}$ قابل مشتق میباشد؟

۵۹-- تحلیل کنید، که آیا توابع زیر در ساحه تعریف خود دقیقاً مونوتون میباشد.

a) $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$

b) $f(x) = 2x^5 - 7$

۶۰-- در کدام ساحه توابع تام راشنل زیر یک خمی چپ دارد و در کدام خمی راست دارد.

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$$

$$b) f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۶۱-- حالت توابع زیر را تحلیل نمایند، اگر $|x| \rightarrow \infty$ به سوی برود.

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$b) f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$$

$$d) f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$f) f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$$

۶۲ چرا برای $x \rightarrow +\infty$ به طور ساده در باره لیمیت پیش از پیش چیزی گفته نمی تواند شود:

$$a) f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x}$$

$$b) f(x) = x \cdot e^{-x}$$

۶۳-- با اکسپوننت جفته توابع تام راشنل کدام قسم سیومتری دارد؟

۶۴-- با اکسپوننت طاق یک تابع تام راشنل فقط در جایی با نقطه شروع نقطه سیومتری میباشد، که قیمت مطلق صفر شود؟

۶۵-- توابع زیر خواص سیومتری که در اساس خوانده شده نه دارد. نشان دهید که این باز هم سیومتری یک میباشد.

$$a) f(x) = (x + 2)^2$$

$$b) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

$$d) f(x) = 2 + \frac{1}{x - 4}$$

۶۶-- توابع تام راشنل به محدودیت مطالعه نمایند.

تمرینونه

۲۰۰

سرلیک

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$

c) $f(x) = -(x+3)^2 + 1$

d) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

۶۷-- به کومک قاعده دو لو، پیتال برای $x \rightarrow \infty$ قیمت لیمیت توابع کسری راشنل شمردده شود.

a) $f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

۶۸-- برای تابع راشنل تام نقاط انعطاف و نورمال یا عمود را بنویسید.

a) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$

۶۹-- نقاط انعطاف مساوات تابع f_t را بنویسید.

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

۷۰-- برای توابع زیر بحث تحلیلی منحنیها را کنید و گرافهای شان را رسم نمایند.

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$

b) $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

تجزیه کردن به کسور قسمی

الف) کسور اصلی، که مخرج شان ضریبهای مختلف خطی دارد.

اساس: اگر پولینوم مخرج $P_n(x)$ یک پولینوم اصلی $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ به ضریبهای مختلف

خطی $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$ قابل تجزیه میباشد، پس پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

به طور زیر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} \dots \frac{N}{x-x_n}$ عوض میشود.

به این قسمی شکل تجزیه به کسور قسمی نامیده میشود، اعداد $A, B, C, \dots, N$ اعداد حقیقی میباشد.

فعالیت: در ورودی بالا نشان دهید که این کسور قسمی در کجا تعریف دارد؟

- برای یک کسر دلخواه تجزیه یک کسر قسمی و ساحه تعریف شان داده شود.

مثال: پولینوم اصلی $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ به کسور قسمی تجزیه نمایند.

حل: حل اول مساوات $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ که $x_1 = 1$ است از راه امتحان پیدا میکنیم.

تجزیه کردن به...

۲۰۲

تقسیم پولینوم $(x-1)(x^2-3x-10) = x^3-4x^2-7x+10$ ما را به تجزیه
 $x^3-4x^2-7x+10 = (x^2-3x-10)(x-1)$ رهنمایی میکند مساوات $x^2-3x-10$
 حالا حل‌های دیگری دارد: $x_2 = -2$ و $x_3 = 5$.

بدین اساس داریم: $x^3-4x^2-7x+10 = (x-5)(x-1)(x+2)$.

تجزیه کسر اصلی به کسور قسمی: $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$

از طریق قاعده شمردن پولینوم می‌تواند کسر داده شده به سه قسمت جمع کسور قسمی
 تجزیه شود، مخرج‌های شان ضریب‌های خطی می‌باشد:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

جمع کسور قسمی با وسعت:

د غزب‌نی سره د توت‌ه کسر جمعه:

مخرج اصلی مخرج پولینوم کسر تجزیه شده می‌باشد.

$$\begin{aligned}\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)} \\ \frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3-4x^2-7x+10} \\ \frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}\end{aligned}$$

تعیین قیمت صورت‌ها A, B و C از طریق مقایسه ضریب‌ها:

در کسر مخرج‌های مساوی کفایت میکند که صورت‌ها با هم مقایسه شود. درین حالت باید
 توان‌های ضریب‌های مساوی، به این معنی که x, x^2 و x_0 باید مساوی باشد.

$$A + B + C = 4 \quad \text{I}$$

$$A - 3B - 6C = -1 \quad \text{II}$$

$$-2A - 10B + 5C = 39 \quad \text{III}$$

ضرب مساوات I و II به فاکتور 2 و جمع هر دو با III سه مساوات بالا را به دو مساوات پایین با دو متحول کوتاه میسازد:

$$-8B = -72 \quad \text{V}$$

$$-16B - 7C = -41 \quad \text{IV}$$

مساوات IV.V مساوی کیشود به: $B = 3 \Rightarrow -24B = -72$

جا به جا کردن $B = 3$ در V: $C = -1 \Rightarrow -16.3 - 7C = -41$

جا به جا کردن $B = 3$ و $C = -1$ در I: $A = 2 \Rightarrow A + 3 - 1 = 4$

به جا به جا کردن در فرمول تجزیه کسر قسمی مطلوب بدست می آید:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ما این را به یک امتحان می‌توانیم امتحان کنیم.

امتحان:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

تمرینها:

کسور پولینومهای اصلی پایین را به کسور قسمی تجزیه نمایند.

تجزیه کردن به...

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x + 6}, \quad b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}, \quad c) \frac{4x + 10 + 12}{x^2 + 6x + 8}$$

کسور پولینوم اصلي، که مخرج شان فاکتورهاي مساوي خطي دارد.

اگر مخرج $P_n(x)$ پولینوم اصلي $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ توان فاکتور خطي $x - x_0$ يعني

$$\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^n} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$$

ميباشد، پس براي اين فاکتورهاي خطي پولینوم

شکل زیر را به خود اختيار میکند:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

کسور قسمي تمام فاکتورها خطي که به طور ساده بدست آمده به شیوه (شکل) آشنا داده میشود.

مثال:

براي کسر پولینوم اصلي $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ تجزیه به کسور قسمي داده شود.

تجزیه مخرج به فاکتورهاي خطي:

حل اول $x_1 = 1$ پولینوم $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ از طریق امتحان دریافت میشود.

تقسیم پولینوم $(x^3 - 4x^2 + 4x - 2) : (x - 1) = x^2 + 3x + 2$ مارا به تجزیه زیر رهنمایی میکند.

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

مساوات $x^2 - 3x + 2 = 0$ حل $x_2 = 1$ و $x_3 = 2$ را دارد. پس ازین بابت برای مخرج

$$\text{حل دبل است: } x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$$

شروع کسر قسمی:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

جمع کسر قسمی از طریق وسعت (امتداد):

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2} \\ \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{(A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (A + 2B - 2C)}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \end{aligned}$$

قیمت صورتهای A, B و C از طریق مقایسه کردن ضریبها:

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -2A - 3B + C = -6 & \text{II} \\ A + 2B - 2C = 2 & \text{III} \end{array}$$

ضرب مساوات II به 2 و جمع به III همراه با I دوو مساوات را میدهد به دو متحول:

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -3A - 4B = -10 & \text{II} \end{array}$$

ضرب I به 4 و جمع شان به IV : $A = 2$

تجزیه کردن به...

جا به جا کردن $A = 2$ در I : $B = 1 \Rightarrow 2 + B = 3$

جا به جا کردن $A = 2$ و $B = 1$ در III : $C = 1 \Rightarrow 2 + 2.2 - 2C = 2$

از فرمول تجزیه کسور قسمی بدست می آید:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرینونه:

تجزیه کردن پولینوم اصلی اتی را به کسور قسمی بدهید:

$$a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

پ (کسور پولینوم اصلی، که مخرج شان به فاکتور های خطی تجزیه نمی شود.

اساس:

اگر پولینوم مخرج $P_n(x)$ یک پولینوم اصلی کسری $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ دیگر به ضریب حقیقی

تجزیه نه شدنی $ax^2 + bx + c$ در پیش داریم، پس برای تجزیه کردن به شکل

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \text{ آورده شود.}$$

مثال:

برای کسر پولینوم $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ تجزیه به کسور قسمی داده شود.

تجزیه مخرج به ضریبها خطی :

حل اول $x_1 = -1$ مساوات $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$ از طریق امتحانی دریاف میشود

تقسیم بولینوم $(x^3 + 3x^2 + 6x + 4) : (x + 1) = x^2 + 2x + 4$ ما را به پایین رهنمایی میکند:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x + 1)(x^2 + 2x + 4)$$

ازین بابت که مساوات $x^2 + 2x + 4$ حل حقیقی نه دارد، پس در ساحه اعداد حقیقی تجزیه زیادی ناممکن است.

ازین بابت کسر پولینوم شکل زیر را دارا میباشد:

$$\frac{Ax}{x^2 + 2x + 4}$$

یکجا با کسر فورم $\frac{C}{x+1}$ مارا به تجزیه کردن کسر قسمی میبرد:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+4} + \frac{C}{x+1}$$

ازز طریق امتداد جمع کسور قسمی:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} &= \frac{(Ax+B)(x+1) + C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4} \\ \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+2C)x + (B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4} \end{aligned}$$

تعیین ضریبها A, B, C از طریق مقایسه کردن:

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

$$A + B + 2C = 8 \quad \text{II}$$

$$B + 4C = 9 \quad \text{III}$$

از طریق تفریق III از مساوات II همراه با I دو مساوات بدست می آید، که دو متحول را دارد:

$$A - 2C = 5 \quad \text{IV}$$

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

مساوات III منقی از مساوات II: $C = 2$: $-3C = -6 \Rightarrow$

با جا به جا کردن $C = 2$ در I: $A + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

با جا به جا کردن $C = 2$ در III: $B + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

اگر این بالا را در فرمول تجزیه کردن جا به جا کنیم، پس به دست می آید:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

تمرین:

تجزیه پولینومهای کسری زیر را به کسور قسمی بدهید:

$$a) \frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$$

$$b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$$

$$c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

ج (کسور پولینوم نا اصلي

اگر درجه پولینوم صورت یک پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ از درجه پولینوم مخرج بزرگ باشد، پس این پولینوم به یک پولینوم ناطق تام و یک پولینوم کسري اصل میتواند تجزیه شود.

مثال:

پولینوم کسري $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ به کسور قسمي تجزیه نمایند.

درجه صورت پولینوم سه است و از مخرج دو. پس بدین اساس یک پولینوم نا اصلي را در پیش داریم.

تقسیم پولینوم:

$$(3x^3 - 6x^2 - 20x - 1) : (x^2 - 2x - 8) = 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\frac{-(3x^3 - 6x^2 - 24x)}{4x - 1}$$

برای کسر باقیمانده $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ عملیه تجزیه به کسور قسمي را به پیش میبریم.

مخرج را به ضریبهاي خطي تجزیه مینمایم:

برای مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ حل $x_1 = -2$ و $x_2 = 4$ را داریم.

پس است: $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

برای تجزیه کسور قسمی جا به جا میکنیم:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

جمع کردن کسور قسمی از طریق امتداد:

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)} \\ \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{(A+B)x + (2A-4B)}{x^2-2x-8} \end{aligned}$$

تعیین A و B به کمک مقایسه کردن ضریبها:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 & \text{I} \\ 2A - 4B &= 4 & \text{II} \end{aligned}$$

ضرب I با 2 و تفریق از II: $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

در II جا به جا کردن: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

$$\text{دست آورد وسطی: } \frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

متحول را تجزیه کردن به کسور قسمی شکل زیر را به خود اختیار میکند:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

تمرینونه:

تجزیه به کسور قسمی کسور زیر را بدهید.

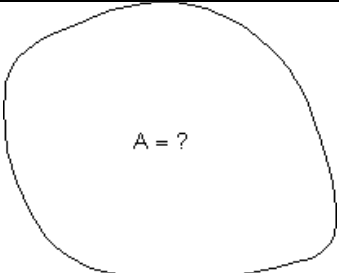
a) $\frac{3x^2 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8}$

b) $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3}$

c) $\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$

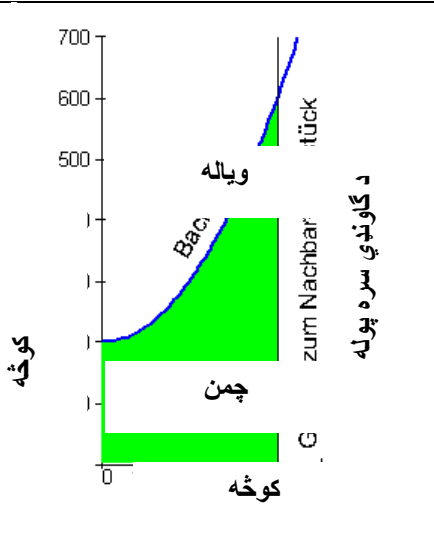
d) $\frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

پیشگفتار برای شمردن انتیگرا

به یونانیهای قدیم شمردن سطح محدود از منحنی معلوم بود. این شمردن مستقیم، که ما حالا به آن سروکار داریم، بسیار پسان (رد) اواخر قرن هفده از سوی علما علوم طبیعی لایبنیخ و نیوتن اختراع شد.	
--	--

فعالیت:

- برای شمردن سطح محدود شکل بالا را پیشنهادها کنید.
 - آیا شما به شمردن این قسم مستوی اشنایی دارید؟
 - آیا شما مساحت مستوی نزدیک به این شمردی؟
 - اگر بلی پس انرا بنویسید.
 - این مستوی بالا از طریق قیمت وضعیه به چهار حصه تقریباً مساوی تقسیم کنید و در باره انتیگرا ان فکر کنید.
- مثال:

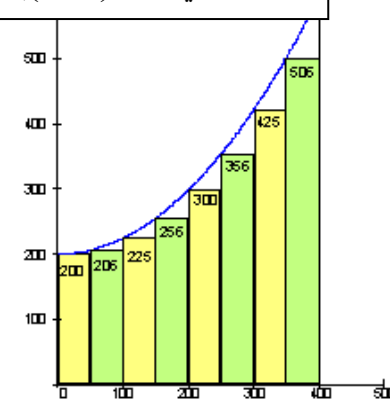
این چمن تصویر شده به فروش میرسد. از طرف بالا به جویچه محدود است، از طرف راست زمین همسایه است، طرف چپ کوچه و از طرف پایین هم زریعه یک کوچه محدود میباشد. برای این که چمن فروخته شود باید سطح مستوی شناخته شود. سطحی فروشنده باید تقریباً پوره مگر به هیچگاه کم شمردنه شود. گیرنده هم برای خود شان فکر میکند که پول باید	
---	--

تادیه شود، مگر به هیچگاه قیمت زمین باید از اصل زیاد شمرده نشود.	
---	--

بعد ازین که فروشنده و گیرنده سطح چمن را تعیین کرد، هر دو برای تادیه پول یکجا میشوند و به این مطلوب به موافقه میرسند.

جویچه مساوات تابع $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ را دارد.

حل ممکنه برای گیرنده.

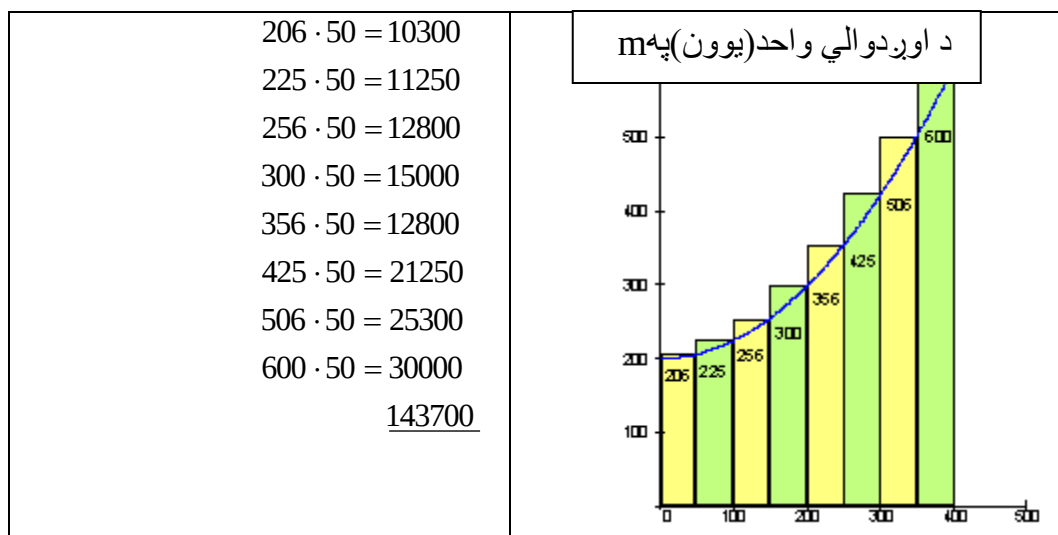
هر قسمت (زمین مستطیلی) 50m عرض دارد و بلندی در رسم داده شده دارد. سطحی تمام مستوی را یکجا میشماریم. $200 \cdot 50 = 10000$ $206 \cdot 50 = 10300$ $225 \cdot 50 = 11250$ $256 \cdot 50 = 12800$ $300 \cdot 50 = 15000$ $256 \cdot 50 = 12800$ $425 \cdot 50 = 21250$ $506 \cdot 50 = 25300$ <u>123700</u>	زمین به طور زیر به قسمتهای دراز (پارچه زمین) تقسیم میشود د اوردوالی واحد (یون) په m 
---	---

برای گیرنده تمام سطحه تقریباً 123700 m^2 است.

حل ممکنه برای فروشنده :

هر قسمت (زمین مستطیلی) 50m عرض دارد و بلندی در رسم داده شده دارد. سطحی تمام زمین مستوی را یکجا میشماریم.	
---	--

سرلیک



برای فروشنده مساحت تمام مستوي تقريباً $143700 m^2$ است.
 فروشنده و گیرنده هر دو باید به قیمت وسطی بیایند، این به معنی که هر دو شان قیمت
 $\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{ unt}^2$ یعنی قیمت وسطی زمین، که

است:

این پسانتر در حصه انتیگرال معین شمرده خواهد شد، که قیمت حقیقی $133333.3 m^2$ میباشد.

حساب کردن این قسمی برای گیرنده ،، جمع پائین،، نامیده میشود.
 حساب کردن این قسمی برای فروشنده ،، **جمع بالایی**،، نامیده میشود.
 این قیمت اصلی زمین کدام جا در وسط واقع است.
 برای این باید یک راه ره بیافیم، که ازان قیمت حقیقی را بدست بیاوریم. برای این کار
 یک کمی راه امادگی موجود است.

تمرینها

گراف تابع $3x^2+1$ را رسم کنید.

در بین انتروال $[1,3]$ سطح تابع را نشانی کنید.

جمع بالا سطح داده شده را تشکیل کنید.

جمع پائین سطح را تشکیل کنید.

شمردن انتیگرال Integral calculation

پیشگفتار برای تابع مستوی:
این مفهوم هندسی انتیگرال هم است.
در سیستم قیمت وضعیه در شروع گراف یک خط را رسم میکنیم. میخواهیم که سطح را دریابیم، که بین گراف تابع و محور x در اختیار یا تابعیت x واقع باشد.

انتیگرال (معین) ریمن

دلته دې یوه څېره راوړل (د یوه ډنډ او یا.....)

فعالیت:

- یک شکل دلخواه هندسی را رسم کنید، که به ترتیب از سه، پنج و هفت خط محدود باشد. سطح این اشکال را به قسم که به آن آشنا هستید بشمارید.
- در سیستم قیمت وضعیه یک منحنی را رسم کنید و بکشید، که مساحت سطح را بین منحنی و محور x قرار دارد، به طور تقریبی دریابید.

یادداشت: انتگرال چیست؟

انتیگرال گرفتن Integration به معنی یکجا کردن است، مثل که یک شخص در یک اجتماع خارجی یکجا میشود یعنی خواص اجتماع بیگانه را به خود میگیرد، یعنی این شخص به این اجتماع زیاد میشود. درینجا هم این موضوع به همین معنی به مطالع پیش میشود، که چه قسم از یک تابع درجه پایین به تابع درجه بالا میرویم.

تعریف هندسي انتیگرال

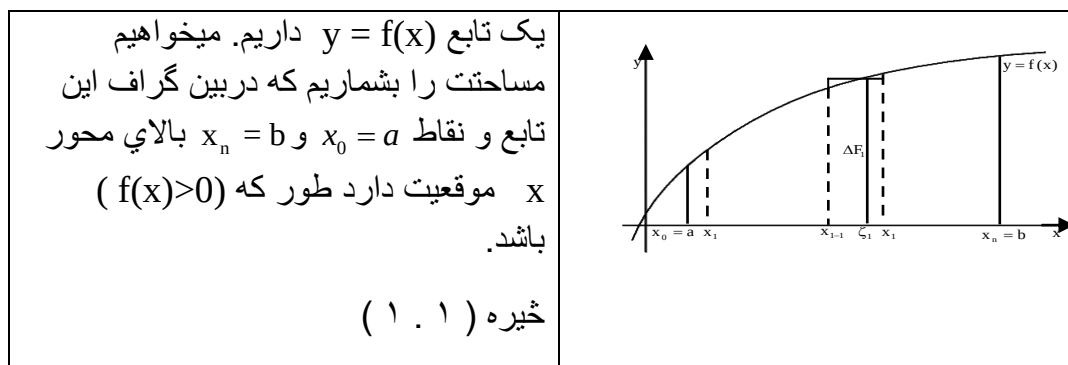
مستوي جهتدار - تعريف انتیگرال:

اگر یک تابع f داشته باشیم، پس در بین محور x و تابع سطحي که شمردن میشود از راه انتیگرال صورت میگیرد. درین مستوي طرف بالا محور x مستوي علامه مثبت و طرف پایین محور x علامه منفي دارد.

تعریف تحلیلي:

تعریف: یک تابع f داده شده، که بالاي یک انتروال $[a, b]$ تعریف شده، پس از a تا b از انتیگرال تابع به محور x در بین گراف f و خط $x=a$ و $x=b$ یک مستوي جهتدار میفهمیم.

درین حصه میخواهیم، که به کلمه انتیگرال توسعه دهیم. از اندازه کردن سطح میتوانیم به شمردن انتیگرال بیاییم، ازین بابت انتیگرال شمردن عملیه معکوس مشتق میباشد.



برای حل این وظیفه انتروال $[a, b]$ را به n پارچه (نا ضروري) برابر انتروالهاي $[x_{i-1}, x_i]$ تجزیه میکنیم.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

در اینتروال $[x_{i-1}, x_i]$ دلخواه $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ تعیین میکنیم.

سطح در بین $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ سطح مستطیل پایین موجود است.

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,1)$$

از تمام سطوح کوچک قسم مستطیلی بالا، به طریق جمع تقریباً تمام سطح مطلوبه بدست می آید.

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum f(\xi_i) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,2)$$

این تقرب تاحدی بهتر میشود تا حدی که تقسیم اینتروال $[a, b]$ نازک میشود یعنی $(\max \Delta x \rightarrow 0)$ ، تا هر حد که شمار اجزا جمع زیاد شود $(n \rightarrow \infty)$.

اگر (2.4) همیشه لیمت F داشته باشد، مرب، ط به این نه که اینتروال $[a, b]$ چپ طور تقسیم شده و $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ چپ قسم تعیین شده، پس $f(x)$ در اینتروال $[a, b]$ قابل اینتیگرا می باشد. این حالت، به طور مثال، تمام اجزا پارچه، متمادی و محدود توابع $y = f(x)$ می باشد.

تعریف ۴.۱ : اگر لیمیت

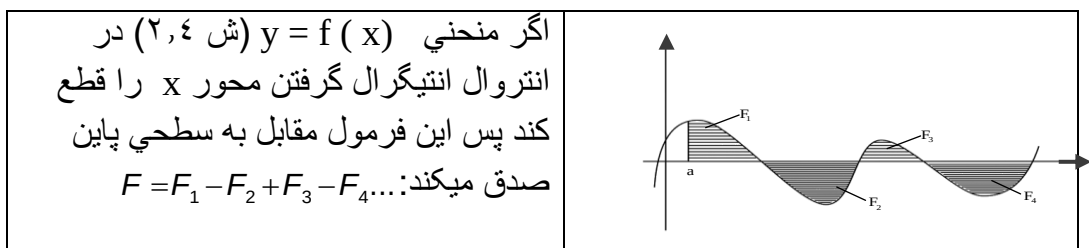
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots \dots (4,3)$$

در اینتروال $[a, b]$ موجود باشد، پس این را انتیگرا معین $f(x)$ مینامیم یا F - Riemann (سطح ریمن). درینجا a حد پایین انتیگرا و b حد بالای انتیگرا نامیده میشود و $[a, b]$ انتروال انتیگرا و $f(x)$ (Integrand) (انتیگرا شدنی) و x متحول انتیگرا (Integrationsvariable) نامیده میشود.

یاد داشت ۱: متحول انتیگریشن میتواند دلخوا تعیین شود (علامه شان دلخوا تعیین شود).

$$\text{داریم: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

یاد داشت ۲: تعریف ۴. ۱ بالا میتواند به حالت کشیده شود، درجای که $f(x) > 0$ صدق نکند. اگر $f(x) < 0$ باشد پس این اینتگرال معین باز زیر محور x سطی منفی دارد.



متصل تعریف ۴. ۱ جمله زیر را داریم:

جمله ۴. ۱: اگر $f(x)$ در $[a, b]$ قابل اینتگرال باشد و $c \in [a, b]$ باشد، پس صدق میکند:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

برای این که مساوات بالا به قیمتها c کشیده بتوانیم، باید c در بیرون اینتروال $[a, b]$ افتیده نه باشد. یعنی باید نقاط a, b و c در یک اینتروال واقع باشد، که دران تابع $f(x)$ قابل اینتگرال باشد. ما تعریف پایین را داریم:

پیژند یا تعریف ۴. ۲: اگر $f(x)$ در یک انتروال محدود $[a, b]$ قابل اینتگرال

باشد، پس صدق میکند: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

از روی تعریف ۴. ۱ همیشه صدق میکند: $\int_a^a f(x) dx = 0$

تمرینها:

گراف توابع زیر را رسم کنید و در بین گراف و محور x جهت سطح مثبت و منفی را نشانی کنید:

الف: $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2 - 4x + 16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

تابع اساسی یا اولیه

$$F'(x) = f(x)$$

فعالیت

- در مساوات بالا $F(x)$ چي طور نوشته کرده میتوانیم؟

سرلیک

- $F(x)$ نسبت به $f(x)$ چي نامیده میشود و برعکس $f(x)$ از $F(x)$ چي نامیده میشود؟

در هر دو سوال بالا فکر کنید، که پايين نتیجه شان میباشد:

براي اينکه روابط دربين انتگرال گرفتن و مشتق گرفتن بدست بياوريم، کلمه تابع اوليه را قرار زيل تعريف ميکنيم:

تعريف 3.2:

تابع $y = f(x)$ در يك اينتروال باز I تعريف باشد. هر يك تابع $F(x)$ درانجا موجود وقابل مشتق میباشد، که شرايط $F'(x) = f(x)$ را صدق کند، تابع اساسي، ساده و يا

اوليه $f(x)$ نامیده میشود.

به طور ساده ديده میشود که براي يك تابع $f(x)$ نه تنها يك تابع $F(x)$ موجود است:

به طور مثال توابع $F_0(x) = x^2$, $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 + 2$ به صورت عموم $F(x)$ $x^2 + C =$ ، که تمام اينها مشتقهاي مساوي $f(x) = 2x$ دارد.

دست آورد ثبوت بالا که کسي چطور تابع اوليه يك تابع متمادي $f(x)$ را پيدا ميکند، به طور زير میباشد:

جمله: $y = f(x)$ در يك اينتروال باز I تابع متمادي باشد، پس براي $a \in I$ ،

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

يك تابع اوليه براي تابع اوليه $f(x)$ است، براي تمام $c \in I$.

هر تابع اولیه دیگر تابعه $f(x)$ شکل زیر را دارا می باشد:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

جواب: ثبوت می کنیم که $F_a(x)$ تابع اولیه $f(x)$ می باشد. برای ثبوت این نشان می دهیم که $F_a(x)$ برای تعریف بالا صدق می کند. مشتق $F_a(x)$ برای $x \in I$ و $x \neq a$ طور زیر می باشد.

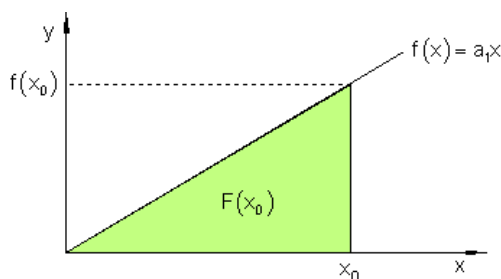
$$\begin{aligned} F_a'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

(از روی لیمیت قضیه قیمت وسطی یک ξ این طوری موجود می باشد)
(از روی متمادیت $f(\xi) \rightarrow f(x)$)
 $= f(x)$

مستوی و تابع اولیه:

برای تابع سطح پیشگفتار:

گراف تابع $f(x) = a_1 x$ در شروع سیستم قیمت وضعیه یک خط ترسیم می کند. ما می خواهیم یک تابع را پیدا کنیم، که در بین گراف و محور x ، در تابعیت x_0 مستوی را نشانی کنیم. نظر به این که مستوی بدست آمده یک مثلث است، پس حل شان به فرمول سطح



سرلیک

مثلاً $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده دریافت میشود: برای مسئله ما متحول را قرار زیل تغییر میدییم: $A \rightarrow F(x_0); g \rightarrow x_0; h \rightarrow f(x_0) = a_1 x_0$	$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ به $f(x_0) = a_1 x_0$ قرار زیل میباشد: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$
---	---

تابع $F(x_0)$ سطح در بین گراف و متحول x که در تابعیت x_0 باشد تشریح میکند. ما این تابع را تابع مستوی مینامیم.

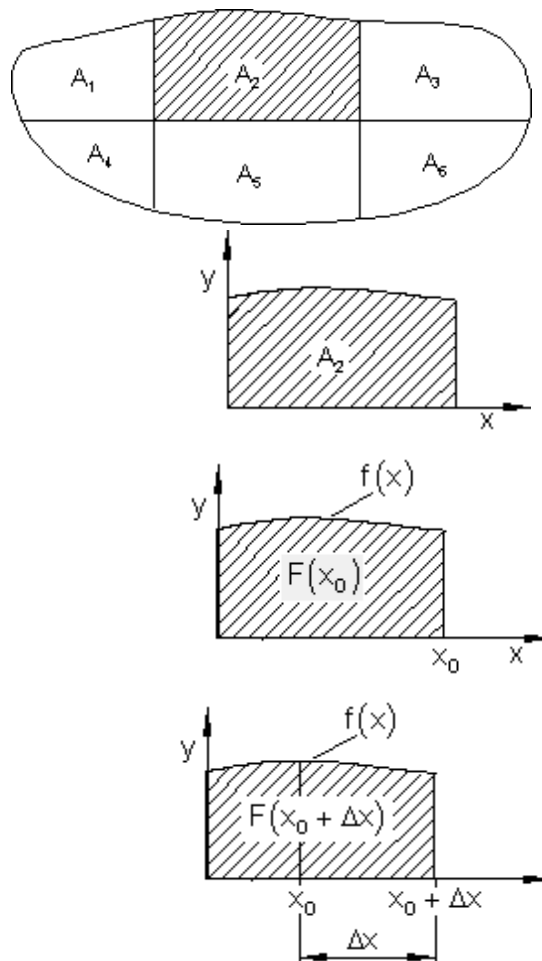
پراپلم سطح:

هر مستوی محدود از منحنیها در قدمهای متناهی، که در آن فقط یک خط منحنی به بین میاید، تمام محدودیتهای دیگر خطوط مستقیم میباشد.

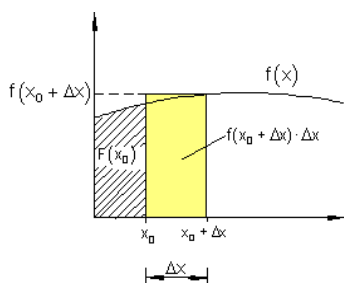
هر یک قطعه مستوی (به طور مثال در اینجا A_2) میتواند در سیستم قیمت وضعیه به شکل یک سطح ترسیم شود، که در بین خط منحنی و محور افقی قرار دارد.

اگر گراف خطوط منحنی محدود از تابع متمادی $f(x)$ باشد، پس سوال به وجود میاید که آیا یک تابع موجود است که x_0 محور افقی را به سطح $F(x_0)$ تنظیم کند مثل که در مثال شروع آمده بود.

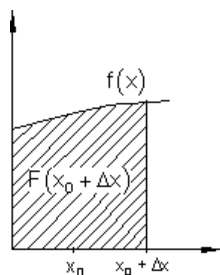
اگر به این قسم یک تابع F و سطح $F(x_0)$ که تنظیم محور افقی x_0 موجود باشد، پس باید قیمت محور افقی $(x_0 + \Delta x)$ به سطح $F(x_0 + \Delta x)$ تنظیم شود.



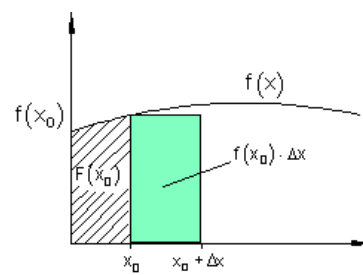
محدود کردن مستوی در مستطیل:



سطح نشانی شده زیر منحنی
از سطح حقیقی بزرگ
مییباشد.



سطح واقعی یا حقیقی
است.



سطح نشانی شده زیر منحنی
از سطح راستین
کوچک مییباشد.

اگر مستطیلهای سطح هر قدر کوچک شود، به همان اندازه مساحت شان از سطح اصلی کم میشود. از روی ریاضیات طولی به طور زیر میتواند فرمول بندی شود:

$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$
---	---------------------	----------------------------------

این ما را به نامساوات زیر رهنمایی یا تشویق مینماید

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت را میگیریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x)$$

$$f(x_0) \leq F'(x_0) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$$

پس داریم: $\underline{F'(x_0) = f(x_0)}$

این به معنی، که مشتق سطح $F(x)$ به قیمت منحنی تابع $f(x_0)$ در جای x_0 برابر است.

$$F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0) \quad \text{ما مینویسیم:}$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{یا}$$

اگر ما موفق شویم این قسم یک تابع $F(x)$ را دریابیم، که مشتق تابع محدود $f(x)$ میباشد، پس $F(x)$ تابع سطحی میباشد.

اگر ما یک تابع را از تابع اولیه جدا کنیم، پس اینرا مشتق گرفتن مینامیم. پیدا کردن تابع یک مستوی به طور روشن برعکس این عمل میباشد. فورمال میتوان گفت: تابع مساحت یک مستوی، که بیافیم، این معنی را دارد که یکجا کردن یا انتیگرال را می شماریم.

به مثال تابع یک توان ساده از روی احساس میتواند یک طریقه پیدا شود، که این را به چه قسم انتیگرال میگیریم.

$$\text{تابع توان: } f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق به معنی که: اکسپوننت به یک کوچک میشود و پوتنختابع به پوتنخ کهنه ضرب میشود.

انتیگرال گرفتن (زیاد کردن یا مشترک شدن) پب این معنی که: اکسپوننت به یک بلند میشود و تابع پوتنخ به اکسپوننت نو تقسیم میشود.. این را همین حالا امتحان میکنیم:

$$\text{توانتابع: } f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{x^3}$$

تابع $F(x)$ تابع اولیه تابع $f(x)$ نامیده میشود، زیرا که $f(x)$ از $F(x)$ بدست می آید.

تمرین: - نشان دهید، که توابع F و G توابع اولیه همان تابع f میباشد.

$$a) \quad F(x) = x^3 + x + 4, \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b) \quad F(x) = (x-3)^2, \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c) \quad F(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$d) \quad F(x) = 1 + \sin x, \quad G(x) = \sin x$$

انتیگرال نامعین

$$\int f(x) dx$$

فعالیتونه:

-- در شکل بالا $\int$ به چي مفهوم است.

-- در بخش گذشته ما $F(x)$ را چي $f(x)$ نامیدیم و حالا $F(x) = \int f(x) dx$ به تابع اولیه چي فرق خواهد داشت؟

خواهیم دید، که انتیگرال نامعین یک اسم دیگری است برای تابع اولیه. اگر تابع اولیه $F(x)$ یک تابع $f(x)$ داده شده را بشناسیم، پس با جمع کردن یک ثابت C سب G تمام تابع اولیه $f(x)$ را بدست میا اوریم (C یک عدد حقیقی دلخوا می باشد). ما تابع $f(x)$ را تعیین کردن تابع اولیه $F(x)$ یا انتیگرال کردن هم مینامیم و برای این مینویسیم:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x) dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x) dx$$

پس داریم: $F(x) = \int f(x) dx$

این تا بحال طور نوشتن فورمال بود. حالا این را په زندگی صدا میکنیم. ما تزايع اولیه پیدامیکنیم. مثال:

تابع اولیه $F(x)$ را یافته شود، که مشتق شان $f(x) = 2x$ می باشد.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx$$

ما امتحان میکنیم:

$$F'(x) = 2x = f(x) \text{ که بابت که } F(x) = x^2$$

$$F(x) = x^2 + 2 \text{ از بابت که } F'(x) = 2x = f(x). \text{ به صورت عموم صدق میکند:}$$

$$F(x) = x^2 + C \text{ از بابت که در هر حالت داریم: } F'(x) = 2x = f(x)$$

هر دو توابع اختلاف در عضو ثابت دارد. مگر همان مشتق دارد، از بابت که به مشتق گرفتن عضو

ثابت از بین میرود. ازین دلیل باید به طریق خود تغیر دهیم.

قاعده (طریقه): صدق میکند: $\int f(x) dx = F(x) + C$

سب توابع اولیه:

مثال نشان میدهد، که برای تابع $f(x)$ نه تنها یک تابع اولیه بلکه تابع زیاد متناهی موجود میباشد، که تنها عدد ثابت شان از یکدیگر فرق دارد.

مثال:

یک تابع اولیه $F(x)$ یافته شود، که مشتق شان $f(x) = 3x^2 + 2$ میباشد.

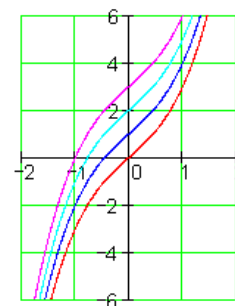
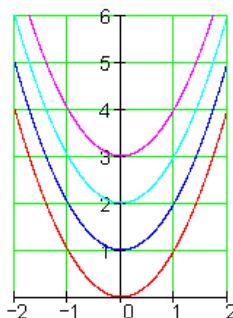
$$F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x) \text{ ، ازین بابت که } F(x) = x^3 + 2x + C$$

سب تمام توابع اولیه به شکل گروپ منحنیها رسم شود، که فقط در عدد ثابت از یکدیگر فرق دارد.

برای این دو مثال پایین گرافها دیده شود.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



تمرین: برای توابع پایین توابع اولیه را دریابید و نتایج شان از طریق مشتق امتحان کنید.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = -2x$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

f) $f(x) = -\frac{1}{4}x$

g) $f(x) = x^3$

h) $f(x) = 4x^3$

i) $f(x) = 2$

j) $f(x) = x + 1$

k) $f(x) = x^2 + x - 3$

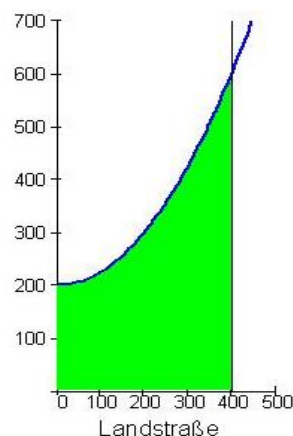
l) $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

m) $f(x) = x^2$

n) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

شمردن انتیگرا ل معین

انتیگرا ل معین همان انتیگرا ل ریمن است، که یک مستوي بين گراف تابع و محور x می‌شمارد.



انتیگرا ل معین:

اگر f یک تابع حقیقی باشد، پس زیر انتیگرا ل معین $\int_a^b f(x) dx$ (خوندن: انتیگرا

$f(x)$ از حد a تا حد b یا انتیگرا ل بالای $f(x)$ از a تا b) یک مستوي جهتدار می‌فهمیم در بین a و b و زیر گرافد f قرار داشته باشد.

فعالیت:

-- بگویند که در انتیگرا ل بالا $f(x)$ چي نامیده میشود؟

G در انتروال محدود $a \leq x \leq b$ تابع اولیه $g(x)$ میباشد، با $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ ، پس

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) \text{ صدق میکند:}$$

اینکه در بین توابع اولیه F و G یک فرق ثابت C میباشد، پس صدق میکند: $G(x) = F(x) + C$.

برای این بدست میاوریم: $G(b) = F(b) + C$

اینکه $G(x) = \int_a^x f(t)dt = 0$ است و $G(a) = F(a) + C$ است، پس $C = -F(a)$ داریم.

این به معنی که $G(b) = F(b) - F(a)$ به همین طور $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

بعد از تبدیل عوض اسم متحول بدست میاوریم $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

بدین ترتیب ما قضیه مشتق و انتیگرا ل را بدست آوردیم

یا افاده که قضیه اساسی شمردن مشتق و انتیگرا ل نامیده میشود:

تعریف: تابع f در انتروال $a \leq x \leq b$ متمادی است و F تابع اولیه f است، پس

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \text{ انتیگرا ل معین میباشد:}$$

برای $F(b) - F(a)$ وقت زیاد مینویسیم: $[F(x)]_a^b$. به این قشم است:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

ما به این شمردن انتیگرال معین پس به انتیگرال اولیه عوض کردیم و دربین مشتق و انتیگرال روابط را قایم ساختیم.

مثالها:

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_1^3 \sqrt{x} dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

برای انتیگرالهای معین قضیه های زیر راست است:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx +$$

مثال: قیمت انتیگرال معین $\int_1^3 x^2 dx$ را تعیین شود. از روی قانون توان یا طاقت تابع

اولیه یعنی $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ را دریابید.

شمردن قیمت انتیگرال مطلوبه:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_1^3 = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{27}{3} + C - \frac{1}{3} - C$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از دلیل $F(b) - F(a)$ ثابت C انتگرال گرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم برای تعیین ثابت انتیگرال بنویسیم $C = 0$.

مثال: قیمت انتیگرال معین $\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{+0.5\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادداشت: ازین بابت که درین حصه تنها قیمت انتیگرال معین خواسته شده و نه مستوی زیر منحنی، پس حتمی نیست که جاهای صفر مد نظر گرفته شود.

یادداشت مهم: باید در نظر داشته باشیم که انتیگرال معین یک عدد است و انتیگرال نامعین یک تابع.

تمرینونه:

قیمتهای انتیگرال معین زیر را بشمارید.

a) $\int_0^3 4dx$

b) $\int_{-3}^{-1} xdx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

d) $\int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$

e) $\int_{-1}^0 e^x dx$

f) $\int_0^\pi \sin x dx$

i) $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

j) $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

k) $\int_{-2}^2 x^3 dx$

l) $\int_2^6 (1+x) dx$

m) $\int_1^2 (x^2 - x^5) dx$

n) $\int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} \right) dx$

از انتیگرال نامعین به انتیگرال معین

پیشگفتار

ما دیدیم که چطور برای یک تابع $f(x)$ تابع اولیه $F(x)$ به بین آورده میتوانیم، پس لایتناهی زیاد توابع اولیه موجود است، که فرق شان از یکدیگر فقط در جمع کردن یک ثابت میباشد.

فعالیت :

-- در باره فرق بین $\int f(x) dx$ و $\int_a^b f(x) dx$ فکر کنید؟

-- نتیجه $\int f(x) dx$ و $\int_a^b f(x) dx$ چي میباشد ؟

- این فرق را با اساس یک مثال روشن سازید.

مثال:

داریم: تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ و سب توابعو اولیه شان $f(x) = x^3 + 2x + C$

تعریف: ست تام توابع اولیه نسبت به یک تابع $f(x)$ ، انتیگرال نامعین،، نامیده

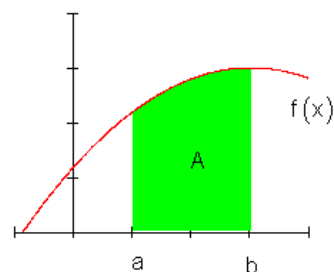
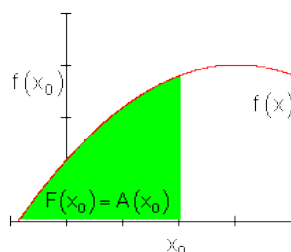
میشود و برای این مینویسیم: $\int f(x)dx = F(x) + C$

روابط بین مشتق- و انتیگرال شمردن میتواند از طریق جمله زیر بدست بیاید.

جمله(قضیه): شمردن انتیگرال معین معکوس شمردن مشتق میباشد.

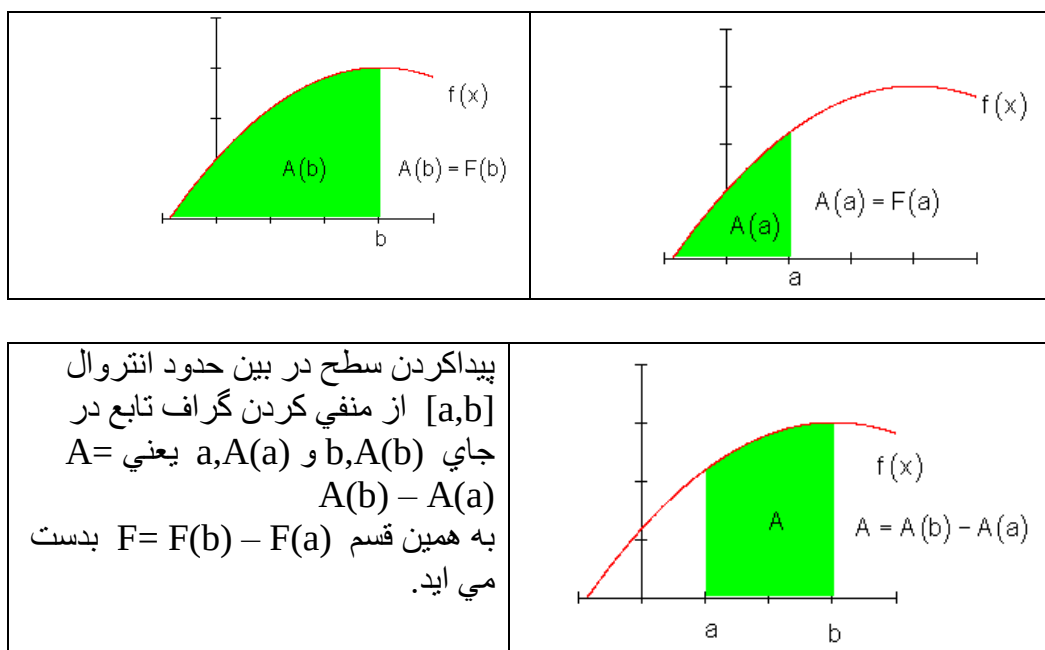
$$\frac{d[F(x) + C]}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

مستوي زیرگراف تابع و در بین انتروال $[a; b]$ تعیین شود. درین پرابم ما تاحال از علم بدست آورده استفاده میکنیم.



فکر موجودیت یک تابع مستوی ما را به یاد گرفتن زیر رهنمایی میکند:

روابط بین یک مستوی کی زیر گراف یک تابع $f(x)$ زیر نظر ما درجای x_0 و یک تابع $F'(x)$ که مشتق تابع $F(x)$ در جای x_0 با قیمت تابع $f(x)$ در جای x_0 برابر باشد موجود است.



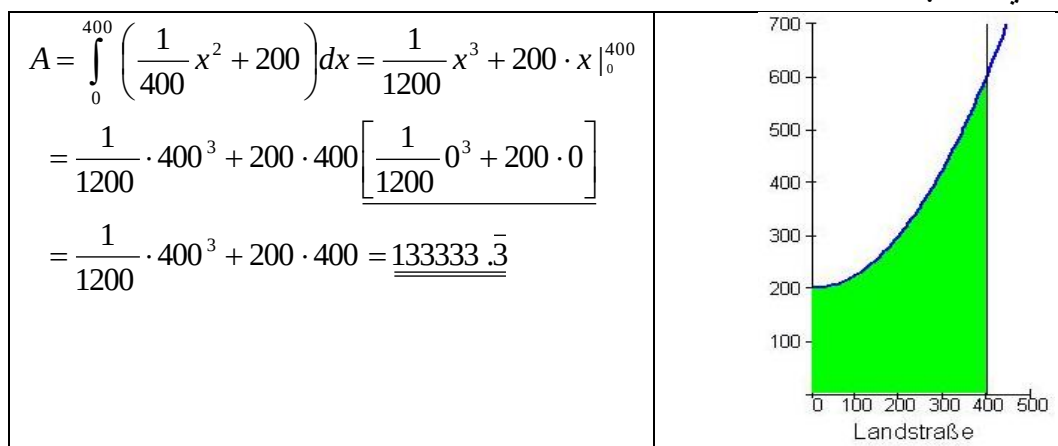
مستوی زیر تابع در انتروال $[a, b]$ تفریق توابع اولیه میباشد.

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

این انتیگرال معین هم نامیده میشود. $\int_a^b F(x) dx$

جمله: به اساس معلومات که تا حال بدست آوردیم، میتوانیم سطحی را بشماریم که در مثال اول آورده شده.

عدد ثابت به تفریق کردن از بین میرود. در عمل برای حل این مسئله راه دیگری مفید دیده شده.



تمرینونه:

dx

$$\int_3^x \left(\frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx$$

۵. استعمال شمارش اینتیگرال

قرار دارد. x و محور $f(x)$ ۵. ۱ مساحت مسطوي، که در بین گراف

مساحت $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ در حصه چهارم خوانده شد، که اینتیگرال معین

$x=a$ و خط $y=(0)$ در x ، و محور $y=f(x)$ را نشان میدهد، که از منحنی A مستوی در داخل انتروال $y=f(x)$ محدود باشد. ما ازین پیش رفتیم که (مقایسه ۴ . $x=b$ و حرکت میکند، مگر میتواند که پایین محور هم حرکت x اینتیگرال طرف بالای محور نماید..

فعالیت:

و یا در بین دو توابع x - برای شمردن مستوی دلخواه در بین یک منحنی یا خط و محور پیشنهاد کنید.

- برای شمردن این هم در فکر داشته باشید، که اگر منحنی و یا خط طرف پایین محور قرار داشته باشد x .

- یک تابع دلخوا داده شده باشد، تابع را ترسیم نمایند و انتیگرال تابع را در نقاط معین بشمارید.. x محور

میرود. تابع x - یک تابع دلخوا را بنویسید، که در داخل یک انتروال به طرف پایین محور را ترسیم نمایند و نشان دهید که تابع کدام علامه دارد؟ رسم تابع را بکشید و نظر به این که مستوی همیشه مثبت است، پس به دادن علامه مطالعه کنید که چرا؟.

یادداشت: اگر در شمردن مسطوی همان عددی را بنویسیم، پس باید به یاد داشته باشیم، که واحد

مسطوی همراهش میباشد. ممکن این نوشته نه باشد، مگر این را همیشه باید در فکر داشته باشیم.

این فعالیتهای بالا ما را به مثالهای زیر سوق میکند:

مثال :

$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$, $y = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ مساحت مستوی در بین

قرار ویل میباشد(شکل روبرو)

سرلیک

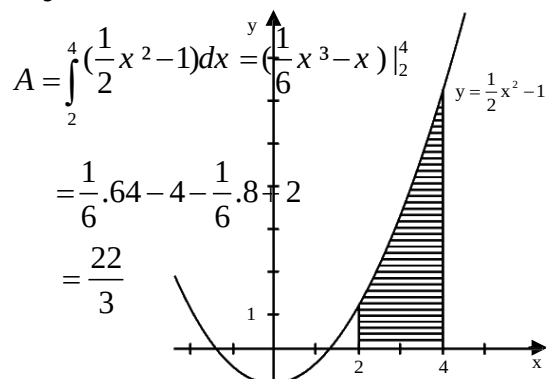
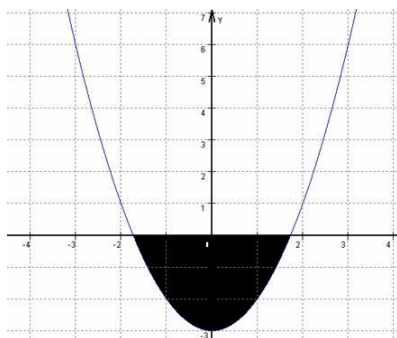


Bild 21,3

میباشد، پس این انتیگرال معین x طرف پایین محور $y=f(x)$ اگر سطح حرکت منحنی تابع منفی می باشد. برای این که مساحت مثبت مستوی را بدست بیاوریم، قیمت مطلقه انتیگرال را میگیریم یعنی انتیگرال منفی.



مثال:

x با محور $f(x)=x^2-3$ گراف یک مسطوی را احاطه میکند. در تمام مساحت x بین گراف و محور مستوی را بشمارید.

طریقه:

۱ - برای این که این مسئله برای ما خوب روشن شده باشد، رسم بالا را ترسیم میکنیم.

۲ - برای این که حد های انتیگرال را بدست آورده بتوانیم، باید جا های صفر را دریابیم.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ - حالا برای شمردن مساحت مسطوی انتیگرال مربوط را مینویسیم.

ضرب 2 انتیگرال می‌شماریم و نتیجه‌شان را به $\sqrt{3}$ تا 0 به اساس تناظر اول از می‌کنیم، پس داریم:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = -2 \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

مثال ۵. ۲ :

بشمارید: (شکل زیر) $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$, $y = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ مساحت مستوی در بین

$$A = \left| \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \right|$$

$$= - \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{8}x^4 + 5x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = 10 \frac{5}{8}$$

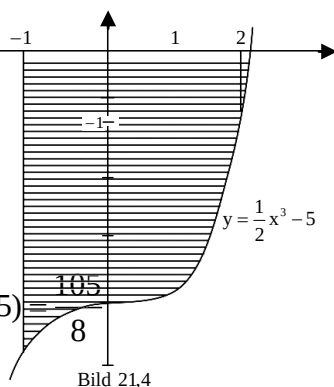


Bild 21,4

مثال ۵. ۳ :

مساحت مستوی از حدود $x_1 = -1$ تا $x_2 = 4$ و $x_2 = 4$

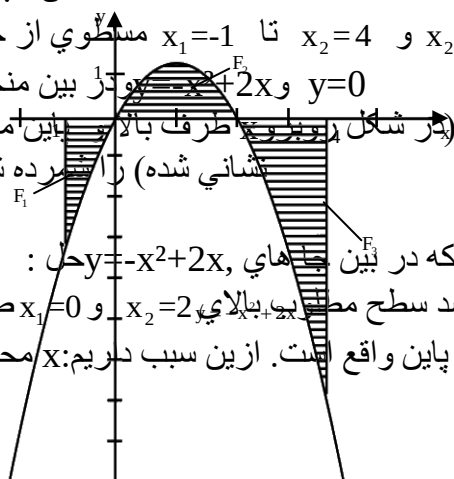
بین منحنی $y = -x^2 + 2x$ و $y = 0$

(در شکل در دو طرف بالا و پایین محور
نشانی شده) را مشخص کرده شود:

که در بین جاهای $y = -x^2 + 2x$ حل : تابع

واقع باشد سطح مستوی $x_1 = 0$ و $x_2 = 2$ را

و باقیمانده پایین واقع است. ازین سبب داریم: محور



سرلیک

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx - \int_2^4 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_{-1}^0 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_0^2 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_2^4 = \frac{28}{3}$$

(بالا و پايين $y = 0$ و $y = -x^2 + 2x$ و در بين منحنی $x = 4$ تا $x = -1$ در بين حدود x محور)

تمرینها:

بشمارید. x : - در انتروال داده شده سطح را در بين گراف و محور

$$a) f(x) = x - 2, \quad x \in [-2; 3]$$

$$b) f(x) = x^2 - x - x, \quad x \in [1; 5]$$

$$c) f(x) = x^2 - 8x + 12, \quad x \in [0; 8]$$

شمردن مساحت مستوي که از دو گراف محدود باشد.



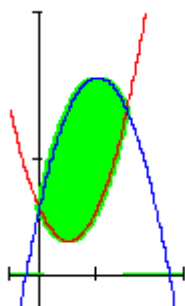
اگر یک حوض این قسمي داشته باشیم، فکر کنید که مساحت شانرا چطور می‌شماریم؟

فعالیت:

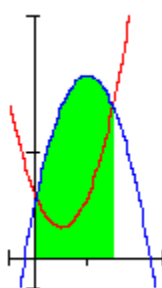
اگر یک حوض مشابه بالا را داشته باشیم، پس حدس بزنید، که مساحت انرا چه قسم بشماریم؟

در بعضي از سوالات مساحت مستوي شمرده میشود، که در بین گراف دو توابع قرار داشته باشد.

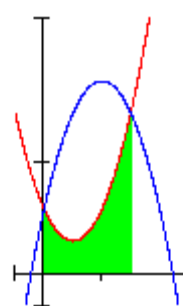
مساحت مستوي این قسمي میتوندند از طریق تفاضل انتیگرال معین شمرده شود. اگر باشد، پس از شیما زیر به پیش می‌رویم: x هر دو گراف بالای محور



A



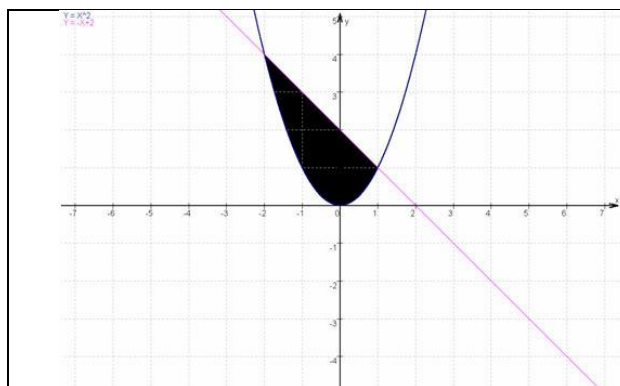
A_1



A_2

سرلیک

$$A = A_1 - A_2$$



مثال :

مساحت مستوي را ميخواهيم
بشماريم، که در بين گراف دو
تابع $f(x) = x^2$

محدود $g(x) = -x+2$
باشد:

طريقه راه حل: درينجا هم
يك شکل يا گراف را رسم
ميکنيم، که اين حالت را روشن
بسازد.

۲ - براي اين که انتیگرال را بشماريم (شکل بالا را ببينيد)، نقاط قاطع گراف را پيدا ميکنيم.

$$x^2 = -x+2$$

$$x^2+x-2=0$$

- فرمول $P;q$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ - به طور ساده دیده میشود:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

پس صدق میکند:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{-2} (-x + 2) dx - \int_1^{-2} x^2 dx = -1 \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) - 6 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) \\ &= -1,5 - 6 + + = -4,5 \\ A &= 4,5 \end{aligned}$$

ی تمام 0.

گراف در بین a و b طرف بالای g حرکت میکند، پس برای سطح مستوی محدود در انتروال هر دو گراف صدق میکند.

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

مثال ۶ . ۵:

و $f(x) = x^2 - 2x + 2$ می‌خواهیم که مساحت مستوی بین گرافهای توابع

را دریابیم. $g(x) = -x^2 + 4x + 2$

هر دو گراف حدود انتیگرا را تشکیل می‌سازد. x قیمت‌های نقاط تقاطع نقاط تقاطع: x تعیین کردن قیمت‌های وضعیه

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

حدود لیمیت اینتگرال میباشد. $x_2 = 3$ و $x_1 = 0$

سرلیک

ساختن یا تشکیل اینتگرال:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

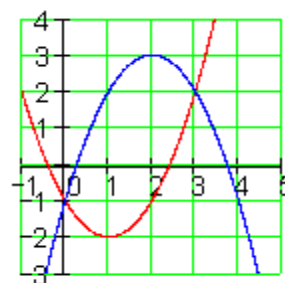
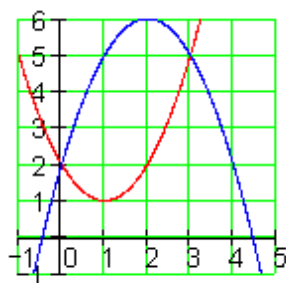
$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 =$$

$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

ازین سبب که سطح بین دو گراف همیشه مثبت میباشد، پس باید از قیمت بزرگ به قیمت کوچک کاسته یا کم شود.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

طوري که میدانیم، علامه یک مستوي در اختیار این است که ایا مسوي بالای محور افتیده و یا پایین. ما مطالعه میکنیم، که ایا تاثیرات شان در مثال بالا افتیده یا نه. ما طرف پایین میبریم و سطح را از نو یا از سر y مستوي به ۳ واحد بالای محور می‌شماریم.



اگر از چشم‌دید قضاوت کنیم، پس تمام دست آورد مساوي خواهد بود. و با این حدود انتیگرال هم بی‌تغییر می‌ماند. x نقاط تقاطع قیمت‌های

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = -x^2 + 4x - 1$$

جا به جا میکنیم:

$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$$

بدست می‌آوریم: $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ از

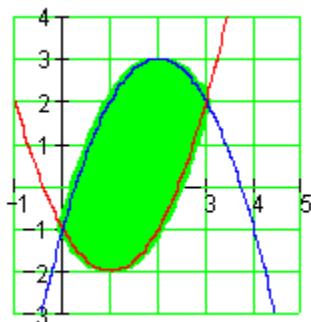
$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

مستوي در بين دو منحنی مستوي فزيکی ميباشد، فلهازا دست آورد شان بايد عدد مثبت ميباشد.

اين از طريق قيمت بدست مي‌آوريم.

$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$

عمومي ساختن اين متود:



مستوي بين دو گراف:

اگر يك مستوي از يك منحنی بالا و يك $f(x)$ منحنی پايين محدود باشد، که مربوط تابع $g(x)$ باشد، پس از اين مساحت محدود به $g(x)$ تابع صورت پايين ميشماريم:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

نقاط تقاطع هر دو b و a حدود انتیگرال گرفتن ميباشد. x گراف قيمت وضعيه محور

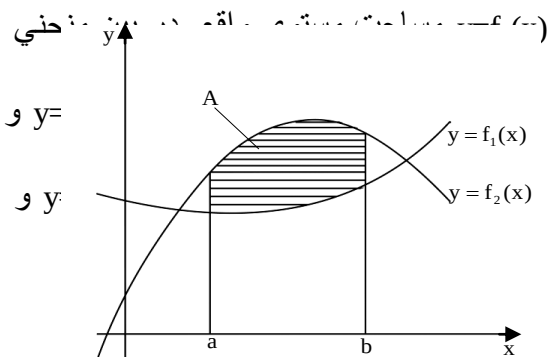


Bild 21,6

سرلیک

به طور به $[a, b]$ در انتروال $f_1(x) < f_2(x)$ دست میاید که مستوي زیر تابع $y=f_2(x)$ تفریق شود. $y=f_1(x)$ مستوي زیر منحنی

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

و $f_1(x)$ به طور ساده میتوانیم خود را به این معتمد بسازیم که ش ۲. ۶ له دي مستقل که کدام علامه به خود اختیار میکند صدق میکند. $[a, b]$ در انتروال $f_2(x)$

مثال : میخواهیم که در بین پارابولهای زیر سطح را بشماریم:

$$y=x^2-1 \text{ او } y=-x^2+1$$

حل : حدود اینتیگرال نقاط تقاطع محور افقی میباشد یعنی

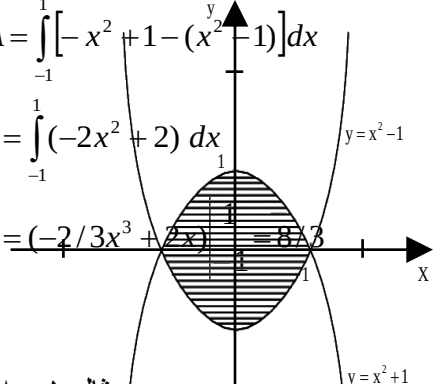
$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2 \quad x^2=1$$

$$x_1=a=1, x_2=b=-1$$

مثال: در انتروال $[-1, 1]$ اینتیگرال گرفتن داریم:

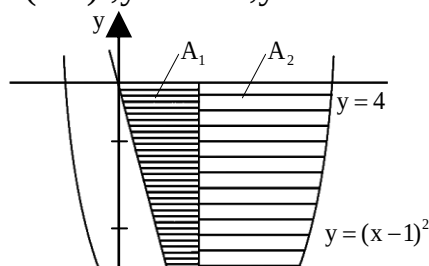
در نظر گرفت نه شود، پس این $f_2(x) > f_1(x)$ کی (۲.۱) و په $[a, b]$ (اگر در اینتروال اینتیگرال منفی میشود و باز انتیگرال قیمت مطلقه گرفته میشود. از این بابت داریم:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 [-x^2 + 1 - (x^2 - 1)] dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$


مثال ۵. ۸:

مطابق (ش. ۲. ۸) سطح در بین توابع زیر شمرده میشود.

$$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$$



حل :

این مستوي در بين منحنی که شمردہ میشود،
بدست میاید A_2 و A_1 از یکجا شدن دو مستوي

مستوي

$y=4$ و $y=-4x+4$ در بين منحنیها A_1

قرار دارد.

حدود اینتیگرال اول نقاط تقاطع به

$y=4$ و $y=-4x+4$ میباشد، در بين x محور

، $x_1 = 0$ ، $4 = -4x + 4$ داریم

به همین قسم نقطه تقاطع اول راست

: $y = (x-1)^2$ و $y = -4x + 4$ قیمت وضعیه (کووردینات) در بين

$$-4x + 4 = (x-1)^2, \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{2,3} = -1 \pm 2, \quad x_3 = 1.$$

و قیمت $x_1 = 1$ واقع است، حدود اینتیگرال $y = (x-1)^2$ و $y = -4$ در بين A_2 میبینیم که
وضعیه $y = 4$ و $y = (x-1)^2$ اول نقطه تقاطع راست

مستوي که میخواستیم بدست آورد.:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x + 4)] dx + \int_0^1 [4 - (x-1)^2] dx \\ &= \int_0^1 4x dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2x^2 \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x + 3x \right) \Big|_0^1 = 7\frac{1}{3} \end{aligned}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

سرلیک

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = 4x - 10$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$; $g(x) = 0.75x + 3$

4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

5) $f(x) = (x - 2)^2 - 4$; $g(x) = x - 1$

6) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

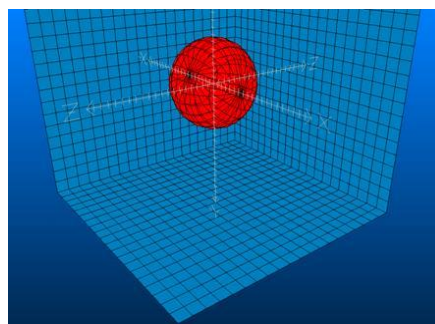
8) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

10) $f(x) = -0.5x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{9}(x - 1)^2 + 1$

حجم اجسام دوراني

ننوتنه د څو مختلفو اجسامو د حجمونو لیکل:



فعالیت:

- حجم یک مکعب را به صورت عادی بنویسید.

- حجم کره، استوانه و مخروط را که به آن آشنا هستید بنویسید.

یادداشت: این همیشه در فکر باشد: اگر کدام عدد از شمردن انتیگرال بدست می آید، پس این عدد حجم یک جسم را نشان می دهد. اگر نوشته نه شد، از آن واحد مطلوبه حجم را می فهمیم.

اجسام دوراني:

اجسام دوراني در هندسه همان اجسام میباشد، که به محور دوراني از طریق دوران یک خط و یا یک منحنی به وجود می آید. خط که منحنی به یک مستوی قرار دارد، محور هم به همین مستوی قرار دارد. منحنی محور را قطع نمیکند و یا اکثراً ممکن لمس کند، که مثالهای عمده شان در پایین خواهیم مطالعه کرد.

x : دوران به محور

مثل که پیش گفتیم، حجم هم یک انتیگرال میباشد. این به قسم به وجود می آید، که اگر دور بخورد. x یک تابع به محور

حجم یک جسم دوراني

برای حجم یک جسم دوراني که به محور x از دوران مستوی از گراف تابع f ، از محور x و در بین هر دو خط $x = a$ و $x = b$ به وجود می آید، در انتروال $[a, b]$ محدود باشد.

شمردن حجم قرار زیل میباشد:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

دوران به محور y

به دوران یک مستوی (به محور y)، که در انتروال $[a, b]$ از گراف تابع f به محور y و در بین هر دو خط $y = f(a)$ و $y = f(b)$ محدود باشد، باید شکل $y = f(x)$ به تابع معکوس

$x = f^{-1}(y)$ عوض شود شود. این موجود میباشد، اگر متمادي میباشد و قوی هماهنگ یا مونوتون. اگر نه (مثل شکل بالا) پس شاید ممکن باشد، که f به پارچهها پارچه شود، که در آن متمادي و حقیقی یکنواخت (مونوتون) باشد. این حجمهای بدست آمده باز تنها شمرده میشود و باهم جمع میشود.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

سرلیک

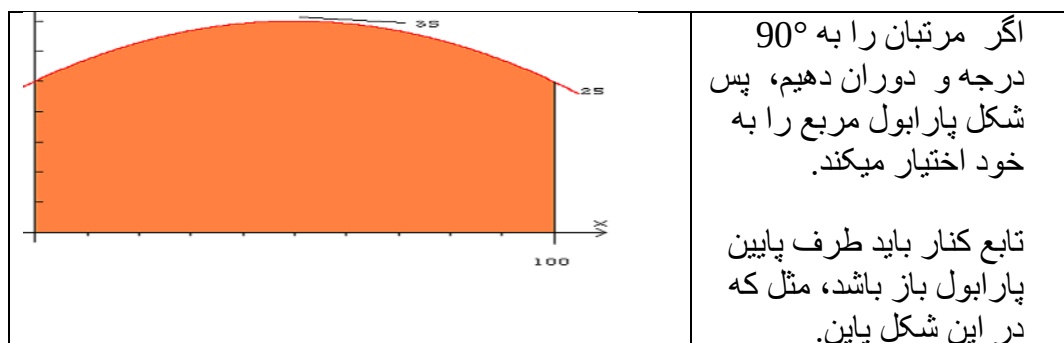
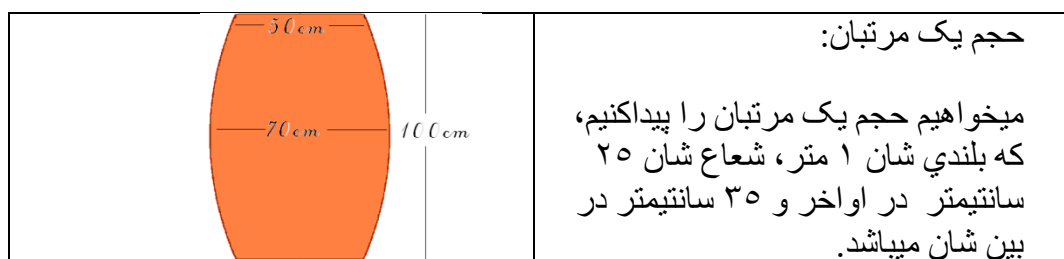
اگر درینجا $x = f^{-1}(y)$ عوض کنیم، پس به محور x حجم قرار زیل به دست می آوریم:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

قیمت مطلق f' و در حدود انتیگرال بلندترین – پایینترین (min/max) قیمت توابع یک انتیگرال مثبت را تنظیم میکند.

به دوران مستوی (به محور y)، که ذریع گراف تابع f و هر دو خط $x = a$ و $x = b$ محدود باشد، فرمول زیل معتبر است:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f)^2 dx$$



حل: شکل نوشتن تابع پارابول میتواند به طور ساده به رأس تابع نوشته شود.

به صورت عموم صدق میکند:

$$f(x) = a \cdot (x - 5)^2 + 3.5 \text{ (قیمت به dm)}$$

به طور روشن 5- ازکش گردن رأس به سوي x+ میدهد و 3,5 به سوي y+ .

ضریب وسعت به طرف a ضرور است، که به طظف زیر بارابول باز به دست بیاوریم. حالا فقط ضریب a نیست. اگر در فرمول یک نقطه معین را جا به جا کنیم، ممکن خواهد بود که a شمرده شود. این نقطه (0/2,5) میباشد.

$$f(x) = -a \cdot (x - 5)^2 + 3.5 \Rightarrow -a \cdot (0 - 5)^2 + 3.5$$

پس a قرار زیل میباشد:

$$\frac{2.5 - 3.5}{25} = -0.04$$

و مساوات مکمل نامیده میشود.

$$f(x) = -0.04 \cdot (x - 5)^2 + 3.5$$

برای ساده ساختن فرمول نقطه رأس به پورم عمود(نورمال) تبدیل میکنیم.

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

تابع را مربع سازید

$$f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$$

پس است

$$f(x) = 0.0016x^4 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$$

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot x^3 + \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

تابع اولیه

برای شمردن حجم انتیگراال معین است :

سرلیک

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 dx &= \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^4 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) dx \\
 &= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10} \\
 &= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10} \\
 &= \pi \cdot 101.167
 \end{aligned}$$

واحد های حجم

ازین که ما در شوع به دیسیمتر شمردیم، پس طبعاً این به لیتر شمرده میشود..

$$= 317.824 \text{ liter}$$

تابع $y=f(x)$ ، $y=0$ ، $x=a$ ، $x=b$ مستوی در بین محور
 دوران میکنند. $x=9.5$ که بالای محور
 مطلوب در بین آمده پیدا کردن حجم جسم
 است که دوران میکند.
 جمله پایین صدق میکند:

جمله ۵ . ۸) حجم جسم دورانی:

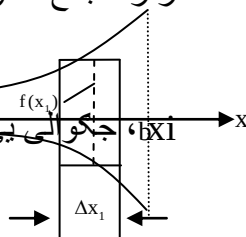
متممادی باشد، حجم جسم دورانی که در بین مستویها $[a,b]$ در انتروال $y=f(x)$ تابع
 به وجود میاید این قرار زیل مییاشد: $y=f(x)$ ، $y=0$ ، $x=a$ ، $x=b$

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

از راه جمع استوانه ها که شعاع شان V حل
 برای x_i بلندی شان $f(x_i)$
 دارد $i=1,2,3,\dots,n$.
 جگوالی بی $f(x_1)$ لاری چی ورنکه بی
 لپاره لری $i=1,2,3,\dots,n$.
 ۵۱۰ ش: (

م مییاشد: [حجم استوانه

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

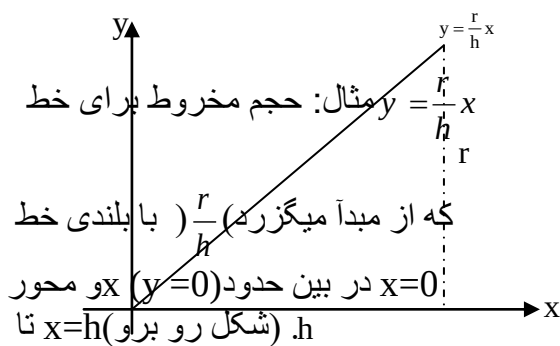


است: n جمع تمام استوانه های

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

(مطابق تعریف انتیگرال اولیه) حجم $x_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ساختن قیمتهای حدود

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{ را میدهد.}$$



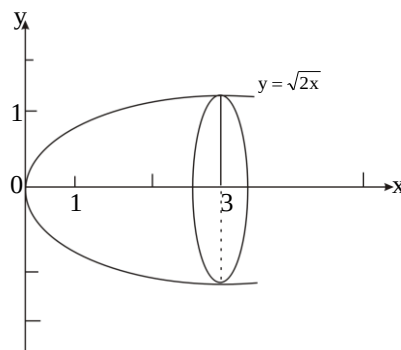
$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

این نتیجه معلوم می باشد از محاسبه اساسات.

مثال:

به x و بالای محور $y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 0, x = 3$ حجم پارابولئید دورانی که در بین وجود آمده می باشد. (شکل پایین)

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$



جمله ارشمیدس Archimedischer Satz

تناسب بین حجمهای استوانه، کره و مخروط:

$$V = 3 : 2 : 1 \quad V \text{ (استوانه)} : V \text{ (کره)} : V \text{ (مخروط)}$$

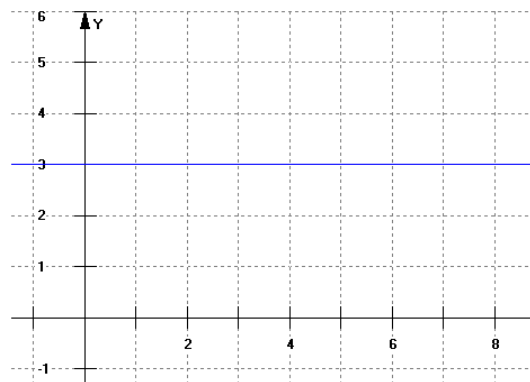
زک یوه درسي کتاب څخه 1886د



المانی بالا به دري: ارشمیدس کس اول بود که تناسب بالا را یافت، به این دلیل جمله که درین جا آمده به نام جمله ارشمیدس یاد میشود.

مثال ۵ . ۱۱:

استوانه:



میباشد $f(x) = 3$ (درین حالت x به محور $f(x) = c$ استوانه از دوران تابع ثابت بدست می آید.

شمردن حجم یک استوانته:

حجم استوانه را شمرده شود. فرمول عمومی برای شمردن حجم $[0;5]$ حالا در انتروال می باشد $V = \pi r^2 \cdot h$

قیمت تابع هم همان است. x . برای هر قیمت $h=5$ و $r=3$ درین حالت داریم

زیر مطالعه بگیریم و می خواهیم یک $r^2 \cdot h$ فقط $V = \pi r^2 \cdot h$ از همه اول می خواهیم از طریقه را بیافیم، که از آن طریقه به کومک انتیگرا ل حجم مطلوبه را شمرده بتوانیم. مساحت مستوی به کومک انتیگرا ل شمرده میشود.

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

سرلیک

به $f(x)$ اگر انتیگرال این مستطیلهای کوچک لایتناهی را بسازیم (مساحت مربع که به طرف صفر برود)، پس بدست می آید: dx ضخامت

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

این به معنی است که انتیگرال چیزی دیگری نیست به غیر که از فرمول بالایی حجم استوانه شمرده شود. اگر این را از اول ضرب نمایم، پس به دست می آید:

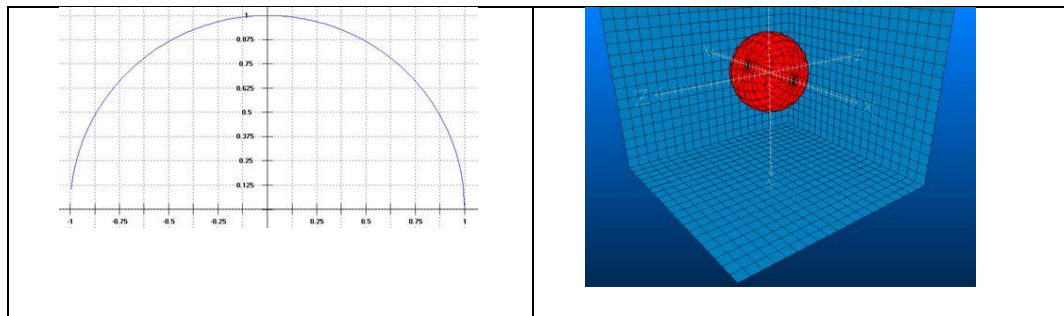
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

حجم شمردن این استوانه داده شده:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]^2_0 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

برای مقایسه: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونداری):



حجم کره را بیدون انتیگرال بنویسید.

حجم استوانه را بنویسید.

- چچ مخروط را بنویسید.

- هر سی حجمها را با هم مقایسه کنید.

کره به وجود می آید. x به محور $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ از دوران تابع

این تابع میتواند به پارچه های دایروی پارچه شود، تابع قطعه کننده افقی

میباشد. ازین پارچه ها میتواند حجم شمرده شود. $q(x) = \pi[f(x)]^2$

درین مثال حجم شمرده شود، که بالای محور x از صفر تا صفر از دوران تابع

$f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$ به وجود میاید، یعنی در انتروال $[-1;1]$.

$$\pi \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right] = \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

مخروط Kegel (Geometrie)

سرلیک

این هم ممکن است، که یک مخروط را به n یک اهرام که از یک سطح اساسی که از

به لایتنای n زاویه منظم محدود شده باشد) میرود) نزدیک کنیم.

حجم مخروط:

برای شمردن حجم مخروط مستقیم به کومک انتیگرال یک راه دیگری کومکی میباشد.

یک سیستم قیمت وضعیه به کار انداخته میشود، که به زریعه رأس مخروط در شروع $(0|0)$ و نقطه مرکزی در نقطه $(h|0)$ واقع باشد. حالا ممکن است، که مخروط را در فکر بگیریم که از یکجا شدن استوانه های کوچک لایتنای به وجود آمده باشد، که بلندی (ضخامت) شان dx میباشد.

ازین بابت که فاصله پارچه های دایروی استوانه این قسم از رأس مخروط در سیستم قیمت وضعیه به x داده شده، از جمله شعاع (در افغانستان به نام جمه تالس یاد میشود) صدق میکند.

شعاع یک استوانه لایتنای کوچک:

$$r_z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

حجم استوانه لایتنای کوچک:

$$\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx$$

حجم تمام استوانه های کوچک این قسمی حجم تمام مخروط دورانی میباشد. برای شمردن شان انتیگرال معین به کار میبریم، با حدود انتیگرال h و 0 :

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

ما ازین به فرمول مشهور (که داشتیم) میایم:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$f(x)$ (به طور مثال $f(x) = mx$ دوران یک تابع خطی x دوران یک مخروط به محور $= 0,5x$) میباشد.

شمردن مخروط

درینجا اول حجم کوادر (مربع - ، مستطیل المکعب) را شمردن نمیتوانیم. درینجا چیزی dx که زیر گراف میباشد په پارچه های کوچک پارچه کردن است که ضخامت شان دارد، به اسم تابع تقاطع افقی و $f(x)$ میباشد. مساحت این پارچه ها را بشمارید، که شعاع انتیگرا ل شان را بگیرید. $[0;5]$ بعداً در انتروال داده شده

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

برای مقایسه کردن شکل حجم معیاری (ستاندارد) مخروط دیده شود.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

کوتاه :

سرلیک

دوران داده شودو حجم که بدست مي اید، که ما این y یا x اگر یک منحنی به محور و به همین قسم x جسم را به پارچه هاي کوچک یا زون پارچه میکنیم، به ضخامت و این را به طور نزدیک مشابه به استوانه ها تبدیل میکنیم ، پس به طور نزدیک، y مثل که در باره حجم پیش گفته شد، شکل زیر را بدست مي اید:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{دوران به محور } x$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad \text{دوران به محور } y$$

مثال:

به محورهاي قیمت وضعیه دور میخورد. $[0, 2]$ در انتروال $y = x^2/4$ گراف تابع این جسم که ذریع دوران به وجود آمده چي قدر است؟

$$x \text{ دوران به محور } : y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$$

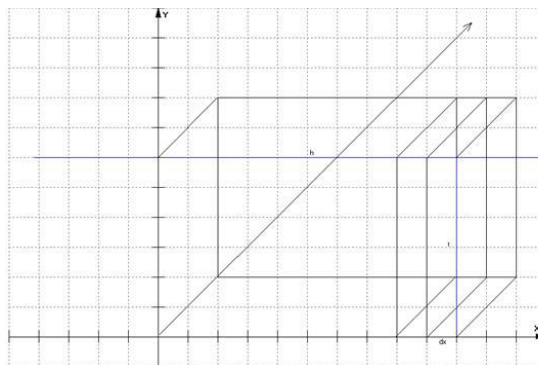
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

$$y \text{ دوران به محور } : x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

حجم جسم نادرانی.

مستطیل- یا مربع المکعب (جسم شش ضلعي) Quader



این شکل که دیده میشود از استوانه برای ما معلوم است فقط حالا دوران نمیخورد. حجم شان میتواند به حیث مستطیلالکعب شمرده شود ($V = r^2h$) و یا به مربع ضخامت dx ، که به طرف صفر میرود، پارچه شود. برای این سطح قاطع افقی شمرده شود، یعنی تابع قاطع افقی $q(x)$ جور شود. بعداً انتیگرال شان باید گرفته شود. این به صورت عموم معنی زیر را دارد:

$$V = \int_a^b q(x) dx$$

درین مثال که تصادفاً تابع قاطع افقی مربع تابع (دژی، غایره، بغلی) میباشد: $q(x) = [f(x)]^2$

اگر ما تابع $f(x) = 3$ در انتروال از 0 تا 5 به تابع قاطع افقی انتیگرال نمایم، پس باید

$$V = r^2h = 45 \quad \text{بدست بیاید. ما داریم:} \quad \int_0^5 q(x) dx = [9x]_0^5 = 45$$

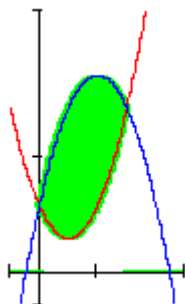
نقاط مهم فصل

میباشد، پس این انتیگرال x طرف پایین محور $y=f(x)$ اگر سطح حرکت منحنی تابع معین منفی میباشد. برای این که مساحت مثبت مستوی را بدست بیاوریم، قیمت مطلقه انتیگرال را میگیریم یعنی انتیگرال منفی.

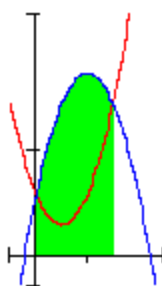
در بعضی از سوالات مساحت مستوی شمرده میشود، که در بین گراف دو توابع قرار داشته باشد.

سرلیک

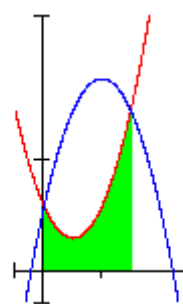
مساحت مستوي این قسمي میتوتند از طریق تفاضل انتیگرال معین شمرده شود. اگر باشد، پس از شیما زیر به پیش میرویم: x هر دو گراف بالای محور



A



A_1



A_2

$$A = A_1 - A_2$$

تناسب بین حجمهای استوانه، کره و مخروط:

$$V = 3 : 2 : 1 \quad V_{\text{(استوانه)}} : V_{\text{(کره)}} : V_{\text{(مخروط)}}$$

$f(x)$ (به طور مثال $f(x) = mx$ دوران یک تابع خطی x دوران یک مخروط به محور می باشد. $= 0,5x$)

دوران داده شود و حجم که بدست می آید، که ما این y یا x اگر یک منحنی به محور و به همین قسم x جسم را به پارچه های کوچک یا زون پارچه می کنیم، به ضخامت و این را به طور نزدیک مشابه به استوانه ها تبدیل می کنیم، پس به طور نزدیک، y مثل که در باره حجم پیش گفته شد، شکل زیر را بدست می آید:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{دوران به محور } x$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx \quad \text{y: دوران به محور}$$

کره به وجود می آید. x به محور $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ از دوران تابع

این تابع میتواند به پارچه های دایروی پارچه شود، تابع قطعه کننده افقی میباشد. ازین پارچه ها میتواند حجم شمرده شود. $q(x) = \pi[f(x)]^2$

تمرینات:

۱- سطح دربین $y = f(x) = x^2$ و تابع معکوس شان را بشمارید.

۲- مساحت همان مستوي را بشمارید، که از مساوات منحنی های داده شده محدود باشد:

a) $y = e^{0.5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$:

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$:

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 9$, $x = -3$, $x = 3$:

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$:

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$:

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$:

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$:

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$:

سرلیک

$$j) \quad y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$$

$$k) \quad y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$$

$$l) \quad y = \cos x, \quad y = \sin x$$

$$m) \quad y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$$

$$n) \quad y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2}:$$

$$o) \quad y = x^2, \quad x = y^2:$$

$$p) \quad y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$$

دوران میخورد. حجمهای اجسام به x^3 - گراف های توابع زیر هریک شان به محور وجود آمده را بشمارید.

$$a) \quad f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad | = [0; 4] \quad b) \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1, \quad | [2; 4]$$

دوران میخورد. حجمهای اجسام x^4 - - گراف های توابع زیر هریک شان به محور به وجود آمده را بشمارید و به شمردن ساده انرا مقایسه کنید.

$$a) \quad f(x) = -x + 5, \quad | = [0; 3] \quad b) \quad f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad | [1; 5]$$

دوران میخورد. حجمهای اجسام به y^5 - گراف های توابع زیر هریک شان به محور وجود آمده را بشمارید.

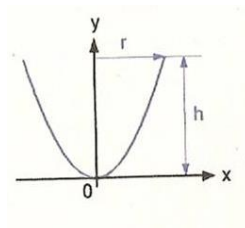
$$a) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad | = [0; 4] \quad b) \quad f(x) = (x-2)^2, \quad | = [1; 3]$$

دوران میخورد. حجمهای اجسام به y^6 - گراف های توابع زیر هریک شان به محور وجود آمده را بشمارید. حجمهای اجسام به وجود آمده را به طور ساده بشمارید.

a) $f(x) = x + 1$, $1 = [1;4]$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $1 = [0;4]$

$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$ به محور سیومتری دوران پارابول یک جسم به وجود میاید. ثبوت کنید که حجم دارد.



$$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

د ډاکټر ماخان (میري) شینواري چاپ او ناچاپي لیکنی:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

سرليک

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې
شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزي ۲
- ۸ - کرښيز الجبر
- ۹ - د شميرپوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرنیز الجبر

۱۴ - Georg Gutenberg گونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره کتور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - پېړۍ پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکي یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

سرليک

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وېه غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د گروپونو تيوري

- د بنوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

د بنوودځي کتابونه له ۷-م لکي څخه تر ۱۲-م ټولگي پورې.

۱ - د دولسم ټولگي شميرپ، هغه

زما ليکونه:

ډاکتر ماخان شينواری

Dr. Makhan Shinwari

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت جمهور ريس جلاتماب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ټك وخت نيسم، خو دا راته ډېر اړين بريښي او پرته له تاسو به يې څوك دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهنيزو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځايه پيليري، چې بنسټ يې بايد سم وي. همداسې نصاب د يوه هيواد د پوهنې مغذ دی، نو بايد همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترگه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول گوته نيسم او په همدې ډول ستونځوبيو يا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲-م ټولگي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لارم، قرارداد پای ته ورسيد. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل (ليکنې مې يې درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پېسې اخستي او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وگڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شمير پوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي (نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانگه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنیو اولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يواځنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسؤليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروي بولم.

سرليک

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توگه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يواځې د ښوونځي له کتابونو سره سر خورولې، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريزم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوروم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راگرې، چې د افغانستان رياضي معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې گوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راگر شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کيښوول شي، چې په هغې د راتلونکې وخت شميرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په ځنو برخو د نمونې لپاره لنډه څيړنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

د ۲۰۱۳ زک لومړۍ نيمايي

ډاکتر ماخان شينواری

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهني محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز کال پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲-م ټولگي د شمير پوهني يا رياضي کتابونه مې په پښتو او دري وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهني وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲-م ټولگي د شميرپوهني (رياضي) کتاب ولوسته، چې گورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دویم : د کتاب خوندونې يا متن ته چې ننوتم، گورم، چې هغه څه چې ما ليکلي وو هغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعنې د ،، پولي ارزښت،، يا ليميټ برخه وکتله، چې گورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه رياضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلي نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوبت:

دا بايد په گوته کړم، چې زما ليکنه په نړیوال معيار وه، چې منځپانگه يا متن يې طبعاً زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په دري وليکه.

دويم: دا لومړی ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو گټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو او داسې څه له انگرېزي ادبياتو رانيول شوې وه.

دریم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې ښه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

په لاندې توگه مې غوښتنه او هيله :

اول - زه بايد پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که يواځې يوه ليکنه هم په کې زما پاتې وي، نو بايد زما نوم په کې وي. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو گاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تيری برېښي؟

تاسو پوهیږئ، چې د ۱۲ -م ټولگي کتاب ليکلو لپاره ماډېرې پيسې اخستي او لپاره مې يې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه يې بايد داسې نه وي.

دويم- د کتاب دا ليکلي لومړی او هم داسې سرسري دويمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځيو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه بايد راټول شي او بيا وليکل شي، ځکه چې په دې خو ليکونکي نه پوهیږي، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته گوته نیسم، چې په دې نورو کتابونو کې به هم ورته ستونځې وي، خو زما يې کتنه اوس د لاسه نه کيږي، ځکه چې

د داسې کتابونو لیکل او بنوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وگورم. زه به د اگست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړی، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی یم.

زه به په دې هکله — که لوي څښتن کول — له تاسو سره په کابل کې وغږیږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پانو او راډیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه گرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

سرليک

په دې نږدې څو مياشتو کې د نصاب کتابونه بيا چاپ ته وړاندې کيږي او گومان مې دی، چې داسې د معيار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله يې د چاپ مخنيوی اړيږي او په همدې ډول يې سمون هم اړين دی، چې په لاندې کې يې ستونځو او ستونځوبيو (د ستونځو حل) ته هم گوته نيسم.

زه د شميرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هيله ده، چې دا ليکنه شخصي وه نه نيسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شميرپوهنې په کتابونو پيل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه ليکلي، چې له جملې يې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره يې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کې اوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شميرپوهنې ته ځانگړې شوې پاڼه کې تر ۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زمان ج پاڼه په نا بنکلي ډول يواځې زما د شميرپوهنې کتابونو ته ځانگړې شوې، چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه بنکلي نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په گډه سمه او معياري کړو.

گرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جگړې په هر اړخ کې بې ساری زيانمن کړی او همداسې په پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنگه چې پوهنه د هيواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغذ دی، نو له دې امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو، پيسې مې واخستلې او زه ترې لارم، چې متأسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول – علت يې دا وو، چې ګران ليکونکي يا ليکونکي وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هيواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متأسفانه ناسم کتابونه چاپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته يو ليک هم ليږلی وو، چې

ما متأسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته ورسيدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

په خواشينۍ سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غور ته هم نه رسېږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو ليکنو لپاره وړانديزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په ميز ايښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او يا يې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د ليکنې متود ښه ونه برېښيده، ځکه چې استادان د دارنگه ليکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زياتې ځنګيزې ليکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتيل، چې د کتابونو د چاپ مخه بايد ونيول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی بايد ښوولی وي، چې د کتابونو معياري او سم ليکلو امکان هم بايد شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړي، چې زياتو برخو ته يې، څو واره وړانديزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیرته وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې گران لوستونکي یې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پټې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هر کتاب څخه لږ تر لږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیرلې.

د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال گران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وگوري او اړونده موضوعگانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي (کتابونه په پورته ن ج کې شته دي، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته گران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولو او سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:

لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیري، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داڅه وروستی خبرې ما هم رامنځ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامي جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویی لولی.

ستاسو له گڼو مشورو به ډېر منندوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

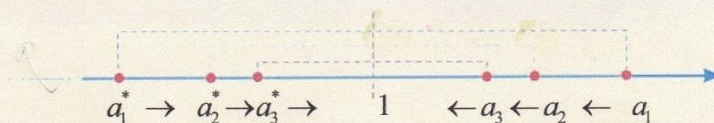
د نصاب د دولسم ټولگي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

لومړي: په دولسم ټولگي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادفونه راوړي او دا یې بیا په یوه گراف یا کرښه د ښي او کیني لورې یوې پولې ته ځغولي.

د کتاب ۳ - م مخ

پایله: لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیني لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

— د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n - 1$ حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیت مفهوم مو ښه څرگند کړی وي، په لومړي پر او کې هغه په څو ترادفونو کې د گراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.

زه پوهيرم، چې دا کار دې درنو ليکوالانو ولي کړی؟

له همدې پيله روښانيږي، چې محترم ليکونکي د درس سره کومه بلدتيا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هيڅکله له (۱ « سره نه برابريږي، لکه ښاغلی ليکوال چې ليکي.

پسې يې بيا د پرلپسې يا رديفونو لپاره بيل بيل گرافونه کښلي.

په پرلپسېو يا رديفونو کې چې مور ليمې راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورگنت او ډيورگنت دي. په پرلپسې کې اړين نه ده، چې د کونورگنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه يو ترادف دی نه دوه.

دويم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه يې ليکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې يوې موضوع ته راغلی او بيا د ښي او کين لوري ليميت ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته. دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کينې لور ليمتونه، چې هلته هم ناسم دي، په اووم مخ کې څيرل (که چيرې څيرنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعنې څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ...
ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

له کیني لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

د

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

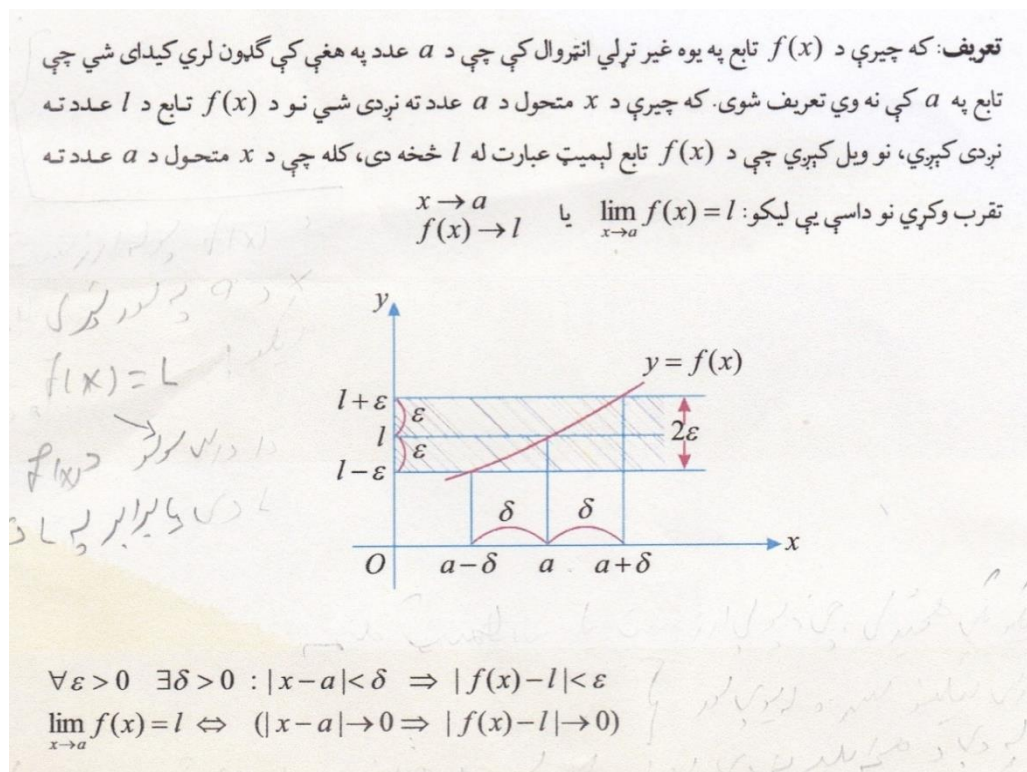
ډول لیکنو سره گران لیکونکي بلدتیا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې لیکنې د ښوونځیو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ما هم په خپلو لیکنو کې نه وې راوړې. گورو چې د کتاب ناسموونکي هم دا څه ناسم یا بې له تشریح کارولي.

په دې هکله زما لیکنه په لاندې کې شته.

دریم: په لاندې تعریف کې د پوهیدلو څه نه شته او په دې ریاضیکي تعریف خو نه پوهیږي، ځکه چې په لاندې یې د پوښتنې د حل نتیجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتیا کې هیڅ سر او کار نه لري.

سرلیک



دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي بنوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کېږي.

بناغلي لیکونکی په اووم مخ کې بیلګه راوړي او بیا دا بنایي، بني او کیني لوري لیمیت یې شمیري.

باید د $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ لپاره $x \neq 3$ ولیکي، چې هلته فنکشن تعریف نه دی. دی بیا په ناسمه توګه په جدول کې لیکي. دا چې دا باید څنګه ولیکل شي، زما په لیکنو کې شته.

دویمه بېلگه: و ښیئ چې $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ سره دی.

حل: د ښی او کینې خوا لېمیتونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کینې خوا لېمیتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ دي.

په پورته کې x د 3 قیمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعریف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښی لوري او نه د کینې لوري دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کیږي.

د بیلگې حل یې هم بیا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغې او د زرکې خبره ده.....

دویمه طریقه: د لېمیت د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

د بیلگې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووايم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي. (بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بی ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیت لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیت

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \text{ لري، یعنې:}$$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او ټیکاوې:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د مترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وي، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي — به له دې، چې د موضوع اړین څه راوړي — له موضوع څخه تیر شوی.

د دې موعوع څخه موخه د مترادف پولې ته تلنه یا کونورگنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورگنت او... دي، چې به له دې په رښتیا کې د مترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د مترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسیم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ — ټولګي کتاب ته:

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ د حقيقي اعدادو (گڼونو) ترادف يا پرلپسې وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف يا پرلپسې پوله ارزښت بلل کيږي او پرلپسې a ته کونورگير کيږي يا a ته هڅيږي يا نږدې کيږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انټروال $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ کې له يوه ايندکس يا پيژند نڅېنې اخوا يا وروسته يا پسې د پرلپسې يا ترادف ټول غړي (دوي يې حدونه يا جملې بولي، نه پوهيږم ولې؟) د انټروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انټروال څخه دباندې پراته وي.

(د نورې اوږدې روښانه ونکې شننې څخه تيريږم)

لنډ پيژند يې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ پوله بلل کيږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو طبيعي يا پيدايښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ يا ور ولري، که $n \geq N$ وي.

دا پيژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس N شته، داسې چې له دې ايندکس يا پيژندنڅېنې وروسته د پرلپسې (ترادف) ټول غړي د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي يعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د يوې پرلپسې پوله ارزښت تعريف داسې رالاندولی شو:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د ε (لوسټل: ايپسيلون) توری ورځنی يا مروج شوی.

بیلگه:

په يوه بيلگه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې $\frac{1}{n}$ پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورگنت وښايو، يو د مخه ورکړ شوي ε ته يوه په خوبه طبيعي عدد يا گڼ N ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ – م ټولگي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توگه پيژنو يا تعريفوو:

پيژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کيږي، L دی او داسې يې

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

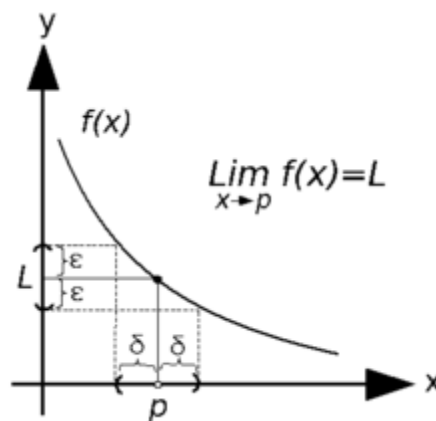
ليکي:

لوسټل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو $\delta > 0$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه $0 < |x - p| < \delta$ سره $|f(x) - L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

د پورته شميرپوهنيز يا رياضيکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څيره



پورته دوه تعريفونه برابر ارزښته دي يعنې له يوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ يا برعکس يعنې لیکو:

تعريف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کيږي، L دی، ټيک هلته يا هلته او هلته يا هلته او په څټ، يا له دې لاس ته راځي او په څټ يا برعکس چې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو $\delta > 0$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاره د $0 < |x-p| < \delta$ سره $|f(x)-L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسيا کوو، که څه هم روښانه کيدل نورې شننې ته هم اړتيا لري.

دې ته دلته په اخر کې بيا گوته نيسم، چې دا شميرپوهنيز يا رياضيکي ډول ليکني ستونځمنې دي او بايد ترې تير شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتيب گران ليکونکي ليکلی چې زه نور پرې نه غږيږم.

دا بسيا کوي، چې کتاب د ښوونځيو څخه راټول شي او له سره وليکل شي.

ستاسو له سړې سينې څخه — که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری.

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to
general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او
دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د کټي – او کټي د کټي شميرنه
، د احتمالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیرپوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو

ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

سرليک

د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزي ۲
- ۸ - کرښيز الجبر
- ۹ - د شمير پوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

۱۳ – له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenberg گونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ – د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ – ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ – ډېری پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ – د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲ – داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

سرليک

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وېه غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تيوري

- د بنوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

دا لاندي د بنوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسيدل:

شميرپوهنه د اوم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د اتم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د نهم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د لسم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د يولسم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د دولسم ټولگي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).



د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میږي په ۱۹۷۲ کې له لري د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومېږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library