شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی   ډاکتر ماخان (میرزی) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

پوله ارزښت ۱

د پوله ارزښت خويونه................. ۱۰

د کسري يا ماتو توبعو پوله............ ۱۶

د کلاسيک له لارې د کسري اعدادو ۲۱

د مثلثاتي توابعو پوله ۲۳

د $\pm\infty \to x$ لپاره پوله ارزښت يا ليميټ ۲۹

ټوليز خويونه: ۳۱

ناپرېکيدنه ۳۴

د متمادي يا................................... ۴۰

د لــومړي څپـــرکي ټولګه ۴۷

د څپرکي تمرينونه ۵۰

د تابع منځ ارزښت تغير ۵۷

کمښت ويش يا د تفاضل ويش..................... ۶۰

رابيليدنه يا مشتقشميرنه ۶۳

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۸

د تانجنت او عمود تعريفونه او خويونه ۷۳

د مشتق شميرني يا رابيليدني قوانين ۷۸

د د الجبري توابعو مشتق ۸۱

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق ۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۰

د مشتق استعمال په طبيعي علومو ۹۵

د جګو درجو مشتق ۹۹
د اکسپوننشل توابعو مشتق ۱۰۳

د لوګاریتم مشتق ۱۰۷

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق ۱۱۷
د فصل ټولګه ۱۲۰

د ځپرکي تمرینونه ۱۲۲

درول قضیه ۱۲۸
همغږیزې توابع ۱۳۲

ځای اړونده افراطي ټکي ۱۳۷

وړنټکی ۱۴۳

د کږې یا منحني خبرې ۱۵۳

د ناټاکلو افدو پولې ۱۵۷
د ناټاکلو افدو پولې ۱۶۰
د تانجنت له پاره............ ۱۶۶

د سترو ګټو ۱۶۷
په تولید کې ۱۷۱

ټولګه ۱۷۳

زینټکی(د اس زین) ۱۷۶

د ځپرکي تمرینونه: ۱۷۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۱۸۷

انتیګرالشمیرنې ته پیل راوړنه ۱۹۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیگرالشمیرنه ۲۰۰

بنستیز یا لومړنی تابع ۲۰۴

ناټاکلی انتیګرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیګرال......... .... ۲۱۲

د ټاکلی انتیګرال څخه نا......... ۲۱۶

د انتیګرالونېا......... ۲۱۹

د لوګاریتمي......... .... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیګرالونه ۲۳۱

ناپای انتیګرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د ځېرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینتیګرال شمیرنی استعمال ۲۵۳
د دوه کرښو څخه رابنده ۲۵۶

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه
د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای يې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه يې ژبه سمه وه او نه يې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته يې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . لیمیت یا حد(پوله ارزښت) "The Limit”

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}$$

$$(II) \quad \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ..., \frac{n+1}{n}$$

$$(III) \quad 2, 4, 6, ..., 2n$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسي وڅیړو لکه په افقي محور(دx محور یعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد(پولې) ته ورنږدې کیږي.

وبه ګورو، چې لیمیټ په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیټ یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلگه راوړی شئ، چې یوه لیمیټ ته له دواړو لورو، یعني له ښئ لورې څخه و کینې لورې ته او همداډول له کینې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ایا د حیرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنګه؟

- ایا دا په ټاکلي ځاي کي پوله یاحد دی، که څنگه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د لیمیټ بیلگې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلگو لیمیټونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیټ، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلگه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلگه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې (3,6) وضعیه قیمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

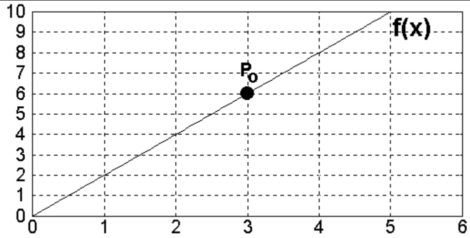
2- د تابع گراف یا ځیره انځور کړئ.

3- د(3)f قیمت پیداکړئ او د(x)f پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د (x)f حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

	2- د تابع شکل 3 - موږ $f(3)=6$ لرو او غواړو د درې قیمتونوڅخه چې له ښۍ او کیڼې لورې 3 ته ورنږدې کیږي، و گورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.

ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو،چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لورې له پورته څخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښۍ لورې له کښته څخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروت جدول روړو:

له ښۍ لورې څخه کیڼې لورې ته   له کیڼې لورې څخه ښۍ لورې ته

$\longrightarrow \; 3 \; \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

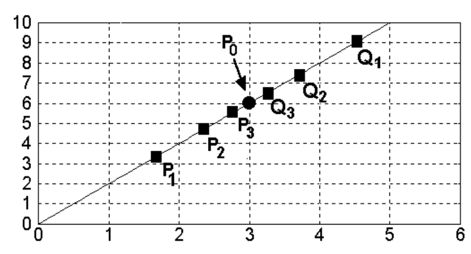
$\longrightarrow \; 6 \; \longleftarrow$

په درې پلونو یا قدمونوکې د f(3) قیمت دf(x) له قیمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) لیمیټ به په 6 برابر شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

او داسې یې لولو: د f(x) لیمیټ یا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کیڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نیسو، چې د P_0ټکي ته تل له کیڼې لورې نږدې کیږي.

او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښۍ لورې P_0 ټکي ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ۵

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي وP_0 ټکي ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع قېمتونه و 6 ته نږدې کیږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قېمت له امله).که په ګراف کېx د x=3 ځای ته نږدې شو، نو د تابع قېمت و 6 قېمت ته نږدې کیږي.

وایو: 6 د f(x) تابع لیمیټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لورې ځي یا درې ته نږدې کیږي) لپاره.

د لیمیټ لپاره لیکبنه په دې ډول تعریف شوې: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

د پورته فعالیتونو او بیلګو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د f(x) تابع یو لیمیټ (حد)L لري، د x لپاره که x د یوه حقیقي عدد c په لورې تږلی لاړ شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ لوستل: د f(x) لیمیټ برابر په L دی، د c <-x لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیټ، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې لیمیټ درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲ : تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}; x\neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لورې څخه1ته نږدې کیږي x له کینې لورې 1 ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونيسئ که x و 1 ته نږدي شي يعنې $x \to 1$. له دواړو يعنې له ګراف او جدول څخه دا پايله لرو، چې f(x) د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، يعنې: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خپره کښل کيږي

له پورته شکل څرګنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې ليميټ يې شميرل شوی، تعريف نه ده.

شميرنيزه بښوونه: که يوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قيمت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بيلګه کې- نو د ليميټ يا بولې پيدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

او وايو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشيا (خاليګاه) لري يعنې په دې ځای کې تعريف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: د سرک بنی لورې ته دا مخامخ تخته لرو: - ووایئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟ په همدې توګه د سرک په سر کیڼي لورې ته هم همداسې یوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.	

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لاښودوي:

بیلګه ۳: د $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

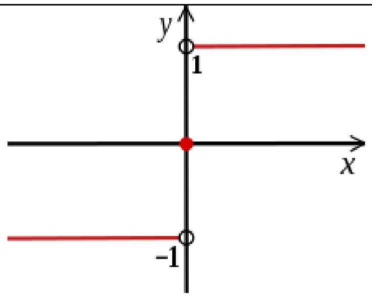
1- تابع ولیکئ، بې له دې، چې د مطلقه قیمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښی لورې 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

4- که x له کیڼي لورې1- ته نږدې شي، نو د(x)f قیمت پیدا کړئ.

5- وښایاست چې پورته تابع یعني f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،|| په لاندې ډول لیکو $f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$ 2-د تابع ګراف انځوروو: مخامخ	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور 1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

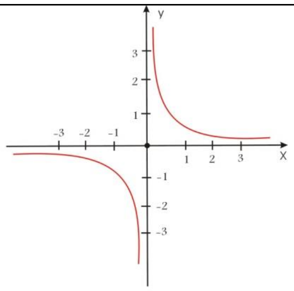
4- کهx له کیڼې لور 1- ته نزدې شي، نو دf(x) لیمیټ دی: $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

5- ګورو چې که x دوه قیمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د لیمیټ قیمتونه لري یعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله f(x) لیمیټ نه لري.

له پورته بیلګې پایله:

په پورته بیلګه کې د$-1 \to x$ لپاره تابع ښی لیمیټ لري او د $1 \to x$ لپاره کیڼ لیمیټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بیلګه۴: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی د $f(x) = \frac{1}{x}$تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نیولی، یعني په x=0 کې تعریف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.	

یادونه: هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کی قطب Pol لري.

$x=0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n) = \frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قیمتونوترادف $n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (x_n)$دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جګېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټیټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د f(x) تابع په صفرځای کې لیمیټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کیڼ اړخیز لیمیټ $a_l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کیڼ لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توګه ښی اړخیزه لیمیټ: د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو ښی اړخیز لیمیټ $a_r=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅیږي..

که تابع f(x) همغه لیمیټ L ولري که x له ښی اویا کیڼي لورې و c ته نږدې شي، نو **لیمیټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پیژند ورشو(د تعریف ناحیه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحیه)) range یا codomainپیدا کړئ. د توابعو ګراف وکاږئ او حدونه (پولې) یې پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\quad,\quad 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\quad,\qquad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱ . ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع = f(x) c او g (x) = x لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

h(x) = x + C, یاL(x) = cx, یا $m(x) = x.x = x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کتمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څېړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعنې که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څېر دا عملیه د هرې ثابتې او کټمټ تابع لپاره رېښتونې ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 , \lim_{x\to 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

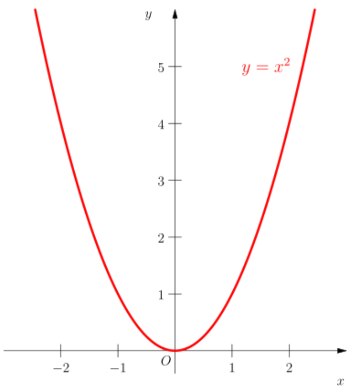
په یاد ولرئ: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$ او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعې خوې: د د وه یا ځو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوي: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>بیلګه ۱: که $g(x) = x^2$ او $f(x) = x$ وي،
نو پیدا کړئ: $f(x)\cdot f(x) = g(x)$
ب) د تابع شکل وکاږئ:
پ) پیدا کړئ: $\lim_{x\to2} f(x)$
ت) پیدا کړئ: $\lim_{x\to2} g(x)$</td>
</tr>
</table>

حل: الف) $f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له گراف څخه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

له دې امله لرو: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = \lim\limits_{x\to 2}(x \cdot x) = \lim\limits_{x\to 2} x \cdot \lim\limits_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4$

له پورته بیلگې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x\cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$

بیلگه:

که $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x) = g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x) = -1$

پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

حل:a $\quad a)\ f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad ,\ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلګه:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ تابع لرو، $\lim_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$
$$= \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 5}{2\cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلګې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعنې یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\ ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د تولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوې: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: د يوه پولينوم حد تيک داسې شميرل کيږي، لکه د يوې تابع حد. د مخه مو وويل،چې يو پولينوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرينونه.

که $\lim_{x\to4} h(x) = -2$, $\lim_{x\to4} g(x) = 0$ او $\lim_{x\to4} f(x) = 5$ وي، نو پيدا کړئ:

1) $\lim_{x\to4}(f+g)(x)$, 2) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim_{x\to4}(fg)(x)$

4) $\lim_{x\to4}(h(x))$, 5) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim_{x\to4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim_{x\to4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^2+1}$

د کسري - يا ماتو توابعو ليميټ" Lmit of Rational functions

موږ د پولينومونو دا لاندې ويش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د ليميټ په هکله يې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

موږ پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قېمتونو لپاره څنګه پيداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دڅلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قېمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څير ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\frac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د$x->-2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ

- د تابع پیژندورشو ولیکئ!

- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونه ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو (Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعریف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه لري، نو د مختلفو لارو یا متودونو څخه کار اخلو، چې لیمیټ یې پیداکړو، که شته وي.

بیلگه ۴: پیداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعریف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پیداکیدای. داکیدای شي داسې پیدا کړو، چې د تابع صورت په ضریبونو تجزیه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع لیمیټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډېږي او لاندې لیمیټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بیلگه ۵: پیداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

گورو، چې تابع په $x=16$ کې تعریف نه لري یعنې باید $x\neq 16$ وي.

په یاد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ یو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلګه ۶: پیدا کړئ: $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعریف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلګه ۷:

پیدا کړئ: $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعریف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسیک لارې د کسري اعدادو لیمیټ:

اوس یوه بله تابع د څېړنې لاندې نیسو، چې $g(x)$ یې بولو: $g(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$
دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم قېمتونه غوره کوي: مونږ
بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کیڼې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته یا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$

$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$

$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$

$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړني یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعنې هغه ځایونه راونیسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپای نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim_{x\to1} g(x)=3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim_{x\to2}(6x^3-2x^2+5x+3)$

2) $\lim_{x\to-1}(x^7+2x-5)$

3) $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to0}\frac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$

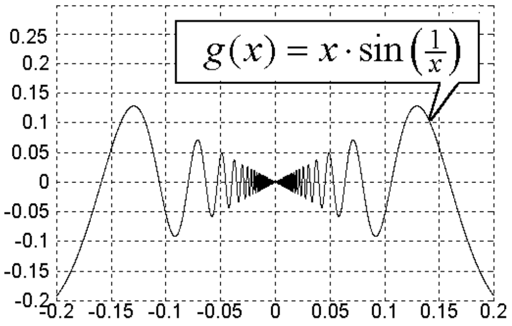
6) $\lim_{x\to4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعاليت:

_ دساين پوله يعنې $\lim_{x \to a} \sin x$ د x د مختلفوقيمتونولپاره پيدا کړئ،که $x \in [0; 2\pi]$ وي:

_ که $x \to 0$ وي. _ که $x \to 30$ وي. _ که $x \to 45$ وي._ که $x \to 60$ وي.

_ که $x \to 90$ وي.- که $x \to 135$ وي.- که $x \to 270$ وي._ که $x -> 2\pi$ وې.

- د پورته ورکړشوو قيمتونولپاره د کوساين $\cos x$ ليميټ پيدا کړئ.

قضيه: که x په راديان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ دی.

ښوونه: د0=x لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعريف نه لري او ناټاکلي بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د$x \to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول يو جدول وليکو(په پورته مساوات کې x په راديان اندازه کيږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

x		$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
په درجه	په رادیان		
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
$30'$	0.00872664	0.00872653	0.99999
$6'$	0.00174532	0.00174532	≈ 1
$3'$	0.00087266	0.00087266	≈ 1
$1'$	0.000291	0.000291	≈ 1
. . .	. . .	. . .	. . .

په پورته جدول کې ګورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ قیمت غوره کوي.

په شمیرنیزه توګه د $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بیایو:

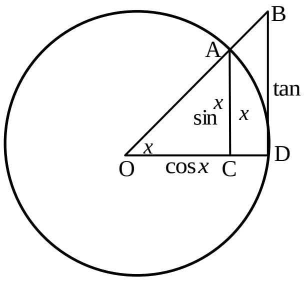
یوه دایره په پام کې نیسو چې د هغې مرکز (0) او شعاع یې OD او $1=\overline{OA}=\overline{OD}$ ده (لاندې شکل وګورئ). دA له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ یو عمود رسموو، چې دا وړانګه پهC ټکي کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دايرې يو مماس رسموو، دامماس له $\overline{OA}$ څخه غځيدلې کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په راديان اندازه کيږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

يا په همدې ډول ليکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وويشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x$$

دا چي د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چي په عین وخت کي $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ له1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دوارو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

بیلګه ۱: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ اوکه $x\to 0$ وي، نو $\alpha\to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

بیلګه ۲:

وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y=5x$ وي او $x\to 0$، نو $y->0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x}\quad\frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)}\quad\frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}},\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x},$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x},\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x},\quad 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1},\quad 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x \to \pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړي او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.
دویم: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.
د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یاني $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.
دریم: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.
په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^+$

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدنې سره.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي، نو
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(څیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو ترېږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه $\pm\infty$ لاس ته راځي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$.

شکل G_f مائله اسیمپټوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $\dfrac{2}{3}$-راکوي

یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپتوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېږو. که -2 په $\pm\infty$ ووېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3x}=\dfrac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نژدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f یوه مایله اسیومپتوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنۍ ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلگه۱: پیداکړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له 1 کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیرېږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. گورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلگه ۲: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلگه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ±0 ته ځي، یعنې: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۳: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)"Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکې یا یوه اېنتروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورږ په دې موضوع د تابع متمادیت څیړو او متمادیت تعریفوو

فعالیت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف ترلی ځغلي او چرته ماتیږي، توپ وهي او ...

له پورته فعالیتونو څخه لاندې پایله لرو:

د توابعو متمادیت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د یوې تابع د متمادیت په هکله څیړنه کوو او د متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

پیژند:

که b د f تابع تعریفورشو (- ساحه) کې یو حقیقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده یاني توپ وهي کیږي.(څیره په ۵ –م مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x=a$ کې غير متمادي ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهي او يا ماته شي.

لرو: $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ او $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=-1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ په $x=0$ کې نشته يعنې تابع د $x=0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بيلگه ۱:

که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x\geq 1\\ 1-x & ; \quad x<1\end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to 3} f(x)$ پيدا کړئ

پ) پيداکړئ: $\lim_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) گراف دې د گرانو لوستونکـ دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to 3} f(x)=(2x+1)=7$$
$$f(3)=7$$

پ)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+1)=3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکېدونې او $x=1$ کې پرېکېدونکې ده.

بیلګه ۲:

که $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x3+x}{x} & ; \ x\neq 0\\ 3 & ; \ x=0\end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و څیرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f لیمیټ شته او $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ او په دې معنا دی، چې $f(0)=3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

بيلگه۳: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x\neq -3$ وي.

ايا $f(x)$ تابع په $x=-3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعريف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x=-3$ کې متمادي نه ده.

له دې بيلگې او د تيرو درسونو څخه لرو:

تعريف (پيژند):

که f يوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اينتروال کې چې $x=c$ لري تعريف وي،نو د f تابع په $x=c$ کې متمادي بلل کيږي، که دا لاندې شرايط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعريف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ ربښتيا وي.

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اينتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x\le 1\\ 4+x & ; \; x>1\end{cases}$ وي.

وګورئ، چې تابع چیرته متمادي او چیرته غیرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعریف لري

$$f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+1)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(4+x)=5$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)\neq \lim_{x\to -1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې غیرمتمادي ده

بیلګه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x<2\\ 3 & ; \; x=2\\ x+3 & ; \; x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متمادیت په $x=2$ کې وڅیرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف لري او لرو $f(2)=3$

$$\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+}(x+3)=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غيرامتمادي ده.

بيلګه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \dfrac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پيدا کړئ، چې f په $x = \dfrac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = a\dfrac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\pi^2 = 8 - 4\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرينونه:

1- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چيرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وڅېړی، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \; ; \; x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \; ; \; x = -1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \; ; \; x = -2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3^3)} \; ; \; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \; ; \; x = 3$

7) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \; ; \; x = 0$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

-1 د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$(f+g)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

-2 د f او g توابع په $x = 2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim_{x \to a} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \; \& \; \lim_{x \to a} g(x) =$

-3 د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a}(f+g)(x)$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : \ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : \ldots = (f+g)(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفريق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f\cdot g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}\ ;\ g\neq 0$

بيلگه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښيئ، چې ايا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غيرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې متمادي ده.

ب) :

$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x = 1$ کې متمادي دی.

بیلګه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښيرئ، چې ایا $f(x) \cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته ښخه لاس ته راځئ، چې $f(x) \cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$$
$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$ ده.
$$\lim_{x \to 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښایي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ ګراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د f(a) او f(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلګه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلګه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x - 10| & ; \ 2 \le x \le 20 \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1,20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x + 4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1)2x\ -1+4 = 2$$
$$f(20)|20-10| = 10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$
$$|x - 10| = 6$$
$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$
$$10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

$$\Rightarrow |x - 10| = 6$$

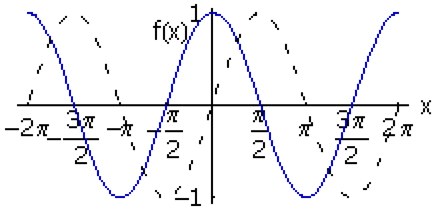
د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایی چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهيد که $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $c\in$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پيدا کړی.

حل : تابع f د ساين تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$	 ټکي ټکي د ساين ګراف دی. دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزيات کړي د بيلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پيدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ايدل کيږي،، چې f په انتروا ل $[a,b]$ کې متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادې علامې لري، نو c د منځنی ارزښت قضيې په بنسټ د $f(a)$ او$f(b)$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلگه۶ :

که $f(x) = x^3 + 5x - 23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x ـمحور په اینتروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: **f پولینوم تابع ده ، نو f په اینتروال [2,3] کې متمادي دی.**

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$
$$f(3)3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c \in (2,3)$ لپاره لرو چې $f(c) = 0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځاي کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

5- که $f(x)=\frac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښایئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پیدا کړئ.

6- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

7- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اینتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې یو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & ; \quad -1\le x\le 3 \\ 13-2x & ; \quad 3<x\le 7 \end{cases}$$

الف) ایا f په $x=0$ کې یو متمادي تابع دی؟

ب) $c\in(-1,7)$ داسې پیدا کړئ، چې $f(c)=0$ وي.

د لــــومړي څپــــرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند:

د $f(x)$ تابع یو لیمیټ L لري، که x ترلی یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترلیLته ځي دا دی، چې x ترلی c ته لاړشي او داسې یې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چېn غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼې لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;Lاو M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلی شو:

1) $\lim\limits_{x \to c} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x \to c} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x \to c} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- ---

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ ;\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

$$3)\ \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b] ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x = a$ کې متمادي وي او له کینې لورې په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني f+g تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم) د توابع تفریق یعنې f-g تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی f.g

څلورم) د توابعو ویش یعنې $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انټروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ځپرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x\to 2}(3x-20)(x+1)$ ئ:

a) 5 b) -5 c) 4 d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیداکړئ $\lim_{x\to 5}\frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) 1　　b) 5　　c) -1　　d) -5

2- $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2　　b) -1　　c) 1　　d) 2

3- $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$ دی.

a) 2　　b) -2　　c) 1　　d) 3

4- $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$ دی.

d) 1　　c) 0　　b) $\frac{5}{3}$　　a) $-\frac{5}{3}$

5- $\lim_{x\to 1.4}[2x+0.3]$ دی.

a) 1　　b) 3　　c) 0　　d)نشته

6- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

d) $\frac{2}{3}$　　c) $\frac{3}{2}$　　b) 0　　a) 1

7- $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ دی.

d) 4　　c) $\sqrt{2}$　　b) 2　　a) $2+\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-------------------- --

-8 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-9 لاندې توابع سره جمع کړئ.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x\to 3}(x) = -2$$

-10 که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پيداکړئ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

-11 تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پيدا کړئ.

-12 وښايئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اينتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو ليميتونه وشمېرئ.

1) $\lim_{x\to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim_{x\to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim_{x\to -2} 2x + 3$

4) $\lim_{x\to 0} |x|$ 5) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim_{x\to 1} 7$

7) $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعريف نه لري ، څه بلل کيږي

16 پيدا کړئ: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

--17 $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

--18

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ايا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي يا غيرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \; ; \; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \; ; \; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \; ; \; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \; ; \; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \; ; \; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \; ; \; x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $x\in[2,3]$, $f(x)=\dfrac{18}{x}+2$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

۲٤- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وڅېړئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x \\ \sqrt{x}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\sin x \\ e^x\end{cases}$	$x\le 0$ د $x_0=0$ لپاره $x>0$ د $x_0=0$ لپاره $x\le 0$ د $x_0=0$ لپاره $x>0$ د $x_0=0$ لپاره	b) $f(x)=\begin{cases}2 \\ x^2+1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-x+1 \\ \ln x\end{cases}$	$x\le 1$ د $x_0=1$ لپاره $x>1$ د $x_0=1$ لپاره $x\le 1$ د $x_0=1$ لپاره $x>1$ د $x_0=1$ لپاره

۲٦-- که $f(x)=2\sin x+3$; $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

د هغه لپاره چې ربنتيا وي $f(c)=4$ او c پيداکړئ.

۲۷: لاندې ليميټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to \pi}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - 2x}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$

26) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$

27) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - x\cos 3x}{x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$

32) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

33) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$

34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5x}{\sin 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولي څیړنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولي درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړیین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change

دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سرک خیره راشي.(دلته څېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر څیړني لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

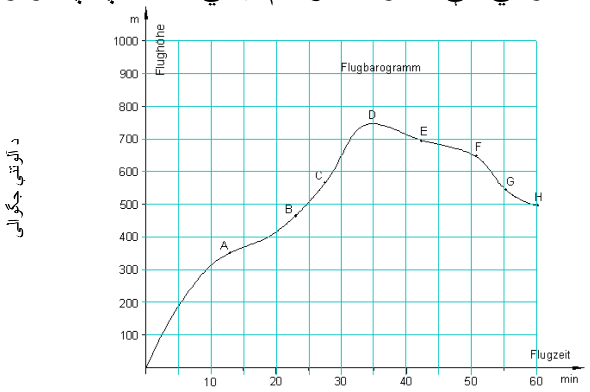
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه یادښت په ځیر راوړم: که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږیږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې کمښتوېش یا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انګرېزي کې **slop** وایي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کیږي.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)

الوتکوکې د الوتنې دلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



Flight barogramm

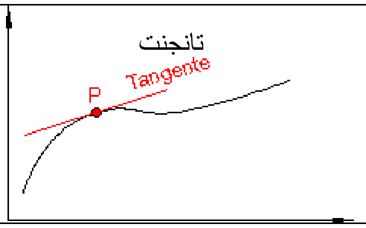
په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.
فعالیتونه:
_ په پورته ځیره کې د ګراف جګوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توګه دګراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.
_ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جګوالي، میل یا تانجنت څخه غږیږو؟
_ وهڅیږئ، چې په یوه ټکي کې د ګراف جګوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جګوالی وټاکئ.
_ ایا فکر کوئ، چې پهB ټکي کې نسبت وA ټکي ته جګوالی زیات دی؟
_ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

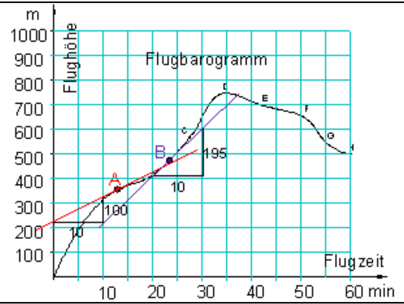
_ ايا د يوې کرښې جګوالی او په همدې ترتيب د يوې منحني هرچيرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچيرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څيړل کيږي.
په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچيرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.
برېښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دی.

(تعريف):
د يوې تابع ګراف ميل(جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی.



ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپيريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.
ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.
د ميل يا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کيدی شي:
A په ټکي کې جګيدنه:



$$\frac{100\,m}{10\min}=10\frac{m}{\min}$$

د B په ټکي کې جګيدنه:

$$\frac{195\,m}{10\min}=15.5\frac{m}{\min}$$

زموږ د بيلګې لپاره ميل يا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) ميل سرعت په معنا دی.

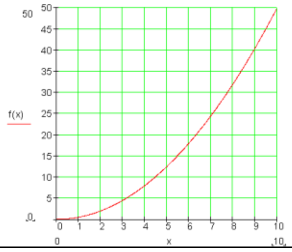
(c) ketabton.com: The Digital Library

د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\,\text{min}$، د میل یاجګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10\frac{m}{\min}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\,\text{min}$، د جګیدنې سرعت نږدې $19.5\frac{m}{\min}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):
معلومه ده، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لرېوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.(مخامخ یا لاندې د تابع ګراف) دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره ټاکلې او لیکو: $S = f(x) = 0.5x^2$	

فعالیت:
1- اوس دې منځنی تغیر ارزښت Averagerat of change(منځنی میل ارزښت) د 3 – مې او 7 – مې ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشمیرل شي.
3- اوس دې د تغیر ارزښت(منځنی جګوالی) د 3 – مې او 7 – مې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جګوالی څومره دی؟

کمبنت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کربنې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کربنه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

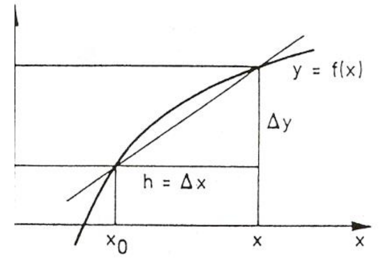
د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):
قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant):
دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.
په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمبنت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$= 6x + 3h - 5$$

تمرینونه:

1 - کمبنتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

د کمبنتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

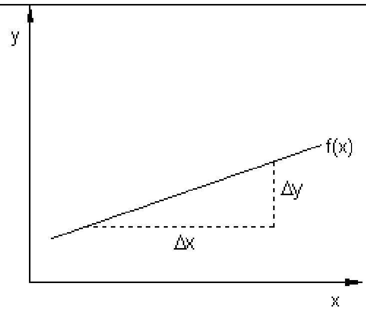
(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه **Diffrentialcaculation**

فعالیت:

پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

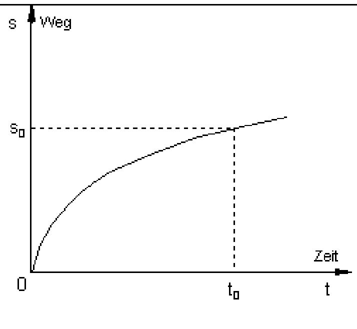
_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

په پام کې نیولې لحظه $\hat{=}\ t_0$

دا تر دې وخت وهل شوې لار $\hat{=}\ s_0$

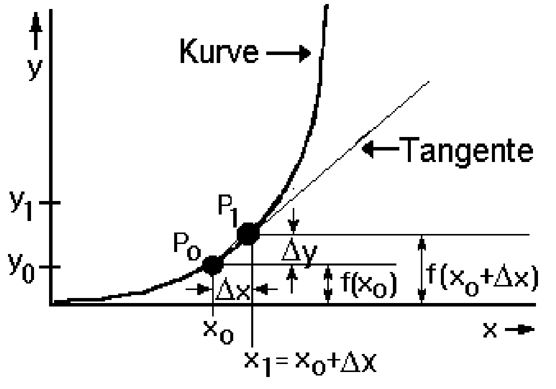
یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه = د یوې منحني میل یا جګیدنه (Differential caculation

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.



د تانجنت جګیدنه: د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې،، لیمت ،Limit,, یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته څیرې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوئ؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ویش) څخه څنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګټه اخسلوخپل نظر ووایاست.

4- له 2–م فعالیت څخه ووایاست، چې ولې دا شمېرنه رابیلېدنه یا مشتق بلل کیږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدنې په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش(د تفاضل وېش) $x->x_0$ او(همداسې) $\Leftrightarrow x->0$ او یا په (همدې ډول) $\Leftrightarrow h->0$ لپاره یو حد ولري, نو د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};...$$

دا لیمیټ داسې ښایو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

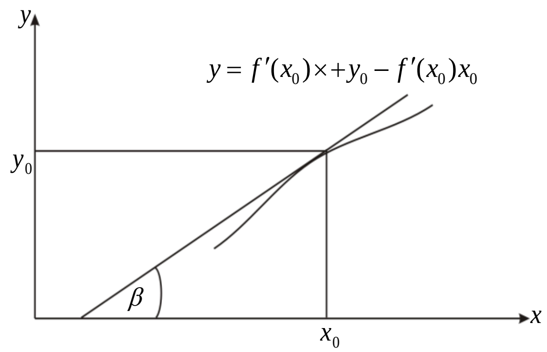
د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله پورته کینې شکل)



موږ اوس د ځو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیرنې لاندې نیسو.

بیلګه۱ :

د یوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه۲ :

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=\underline{\underline{1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :

د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د $c=$ثابتې سره.

د ثابتې قانون:

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $c=$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

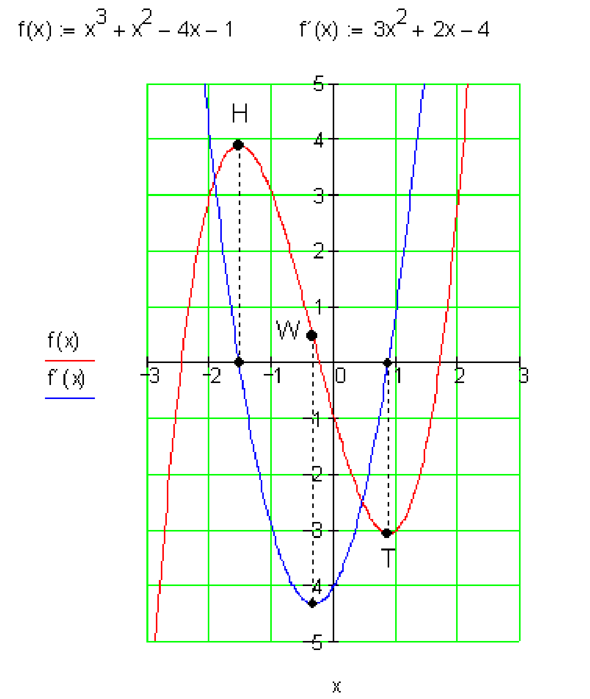
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

	شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښهمنحني د تابع مشتق او وبه ګورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.

فعالیت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه وو ایو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونومو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړی تابع سره پرتله کړئ.؟

- ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وې. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0:$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

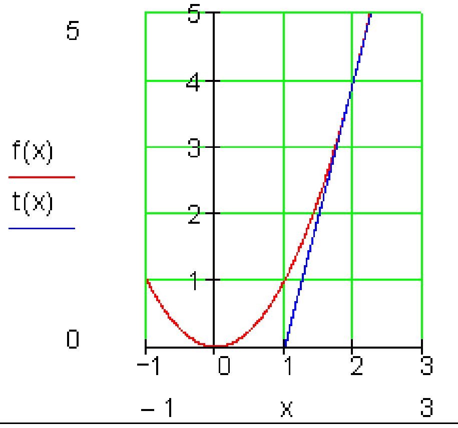
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.



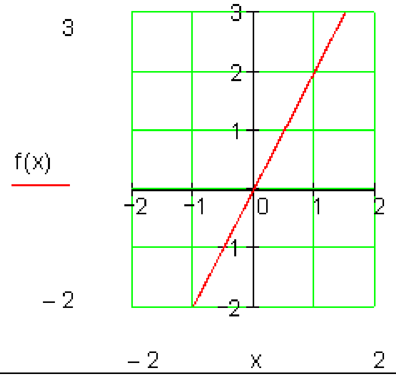
پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 ټکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 ټکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

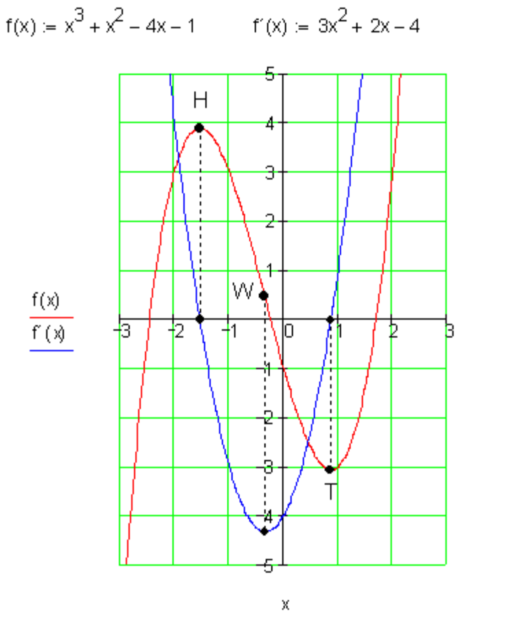
وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x)=3x^2+2x-4$

د تابع مشتق هم تابع دع. مورږ دا د مشتق یا د میل تابع بللې.



تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وبنایئ

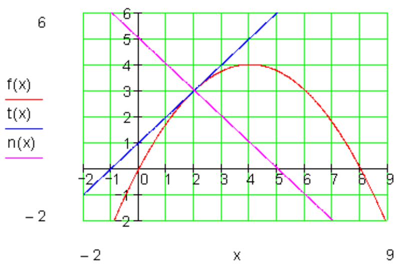
$a)\ \ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$

$b)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$

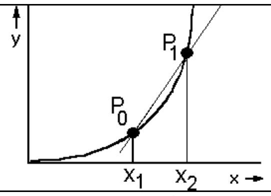
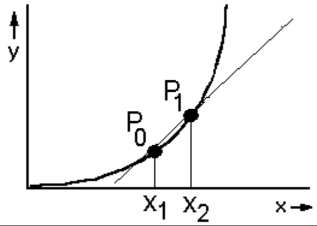
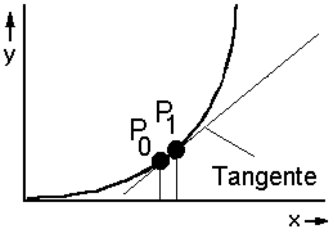
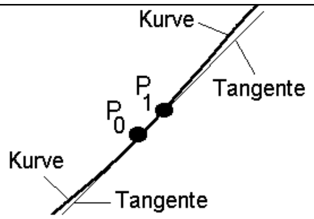
$c)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{x^3}$

$d)\ \ f(x)=3x^2+0.4x-5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې يا مخاکښ ښيره يو منحني او يوه قاطع(غوڅۍ) په ټکو P_0 اوP_1 کې ښايي.	
اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځېږي. پام: ددې سره قاطع خپل میل تغیروي	
بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کیږي.	
که پوره وپيژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0په شاو خوا غزوو يا لويوو : که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کیږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خويونو غوره غوره والی يا پايله:
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړو، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

فعاليتونه:
1- پورته شکلونه بيا سره پرتله کړئ. د ميل په هکله يې فکر وکړئ، چې کوم ميل زيات دی؟
2- تانجنت تعريف کړئ او په شکل کې يې وښاياست.
3- قاطع (سيکانت) تعريف کړئ او په ښېره کې يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو: (1) $t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ښیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2|f(2))$$

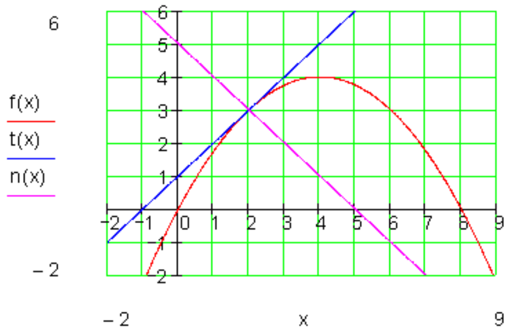
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ يا عمود عمومي مساوات

بيلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت ميل:

د يوه تابع د ګراف ميل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنى لري، لکه په دې ټکي د تانجنت ميل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق تيک په پام کې نيسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

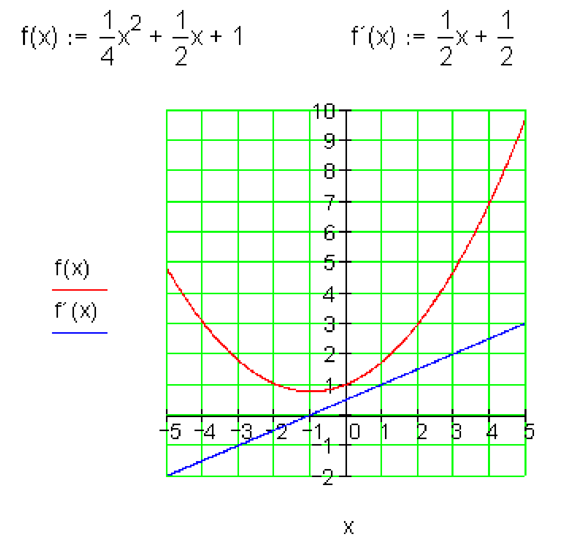
د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلى شو چي د پورته مربع تابع ککرتکى دى: $S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د ميل تابع ارزښت دى: دا دا معنى لري، چې په ککرتکي(د رآس ټکى) کې د $f'(x)$ ميل صفر دى. تانجنت په S کې هم دا معنى لري، چې صفر دى، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,\,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\ \ f'(x_0)\neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شميرني قوانين

د مشتقشميرنې شميرقوانين، لکـ څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانين باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعاليت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$ د $(f(x)-g(x)),(f(x)\cdot g(x))'$ او $g(x)\neq 0,(\frac{f(x)}{g(x)})'$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:
که توابعو $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,\ v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.
ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعالیت: که چیرې f_1، f_2، ..... f_n، توابع او k_1، k_2، .... k_n، ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښووني):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ښوونه:
په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).
لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بيلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو: $g'(x) = 2x$

$h'(x) = 2x$

او د ويش قانون له مخې لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x) \neq 0$) مشتق پيداکړئ، که شونی وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پېژندونه(تعريفونه):

1- يو بنستيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسڅندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوگاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په څېر د $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n\in N \quad \wedge \quad a_1\in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x)=3x+6$ او $u(x)x^2+4x+4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x)\neq 0$ د $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلگه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په گوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $f(x) = x^q \;\; ; \;\; q \in Q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1.x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x\dfrac{1}{2}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)

(پونتخ) قانون:

1- مختني اکسپوننت د متحولې x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

$$f'(x) = q \cdot x^{q-1} \Rightarrow f(x) = x^q$$ **د** $q \in Q$ **سره**

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$

$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان(Potence) مشتق، چې طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3, \ldots$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق يې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملې په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1 \in R \quad \wedge \quad n \in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $\qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيرونې قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u^\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ وواياست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅېږئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f\left[g(x)\right]$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = \quad f\,'(g) \quad . \quad g\,'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نيسو چی:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h -> 0$ لاړه شي (همداسې $k -> 0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x = x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)\,,\ z = g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};.....................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتيب(تنظيم) شي.

دا (*) فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چی ښی خوا د کيڼې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري يا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ:
$$(fog)'(x)=f(g(x))'$$

بيلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون ion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f\,'(z)=2z \quad z\,'(x)=2x$

$$f\,'(x)=f\,'(z)\cdot z\,'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع يوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چيرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بيلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچيرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچيرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بيلګه:

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

تمرينونه:

۱ - $h(x)=\dfrac{1}{(x^3-4x^2+1)^2}$

۲ - که چيرې $f(x)=(3-2x+x^2)^4$ وي، نو f' پيداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونيسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

1: $f(x) = (1-2x^3)^4$

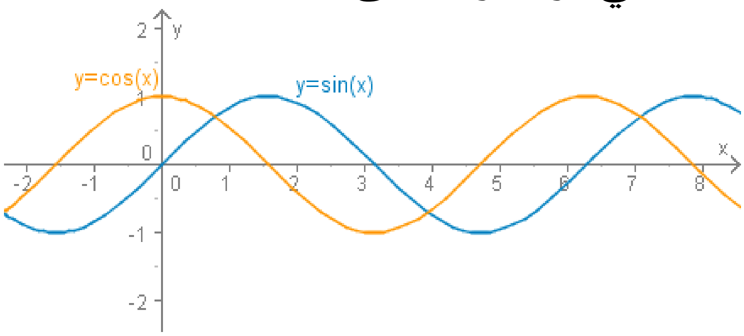
2: $f(x) = (2x^2+1)^{-2}$

3: $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

4: $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5: $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

فعالیت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

:a $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

:b $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

c $f'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0 ,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

لرو: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دويم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2} . \sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د ليميټ او د ليميټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه ليکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضيه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې $f'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \ , x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.
يادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې ځا په ځای کړي.
بيلګه:
غواړو د $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ړدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:
$y = f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پيدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x\cdot\cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x-\cos x$	$:e$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x)\cdot\cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x\cdot\sin 2x$$

$:b$
$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x\cdot(\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x\cdot\sec^2 x$$

$:c$
$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x\cdot\sec x$$
$$= \sec x(1-\csc^2 x)$$

$:d$
$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)'$$
$$= \cos(3x-1)\cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

: e

$$[\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)'$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بیلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

---

f’(x) = cosx ; f’’(x) = -sinx ; f’’’(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پیداکړئ.

د ضرب قانون څخه کار واخلئ.

f’(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

پردو $z = \frac{1}{x^2}$ ***او u(z) = sinz لا س ته راځي:*** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرینونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

a) $f(x) = \sin 3x$ b) $f(x)\sin x \cdot \cos x$ c) $f(x) = \sin^2 x$

d) $f(x) = \tan x + 2\sin 2x$ e) $f(x) = \sin x^2$ f) $f(x) = \sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

-- وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

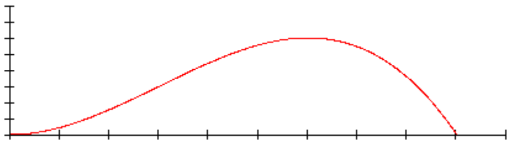
-- د ويش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساين تابع او د کوساين تابع په خوښه زيات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پيداېښتي يا طبيعي علومو کې

۹۶ د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي.
په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي.
لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



فعاليت:
ګران زده کوونکي دي د فزيک د درسونو له مخې د چټکتيا او بيړې تعريفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتيا او بيړې فرمولونه دي وليکي.

بېلګه:
د يوه په برابرډوله بيړه (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيړې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

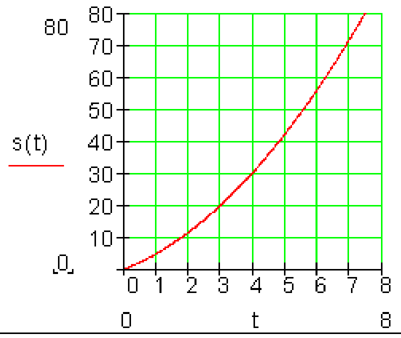
$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(t په s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

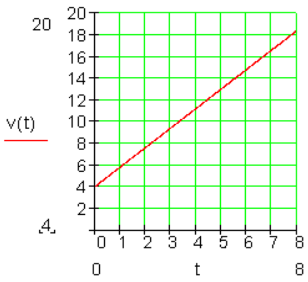
(c) ketabton.com: The Digital Library

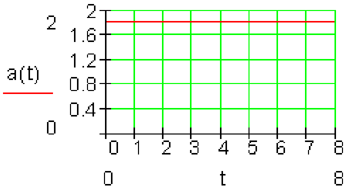


لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$





v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي.

دا دلته ثابته جګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1.8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.

بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\, s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \,| \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad a(t) = v'(t) = a$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم لیکو.

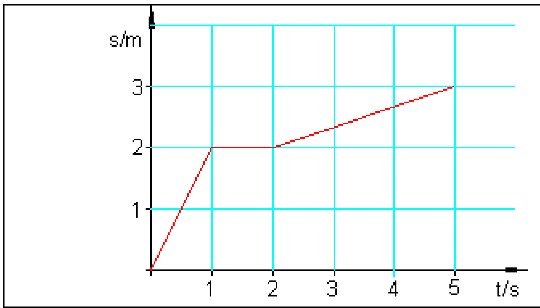
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

1- د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت- دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږئ.



2- یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\dfrac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \dfrac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\dfrac{m}{s^2}$ (را تولي (؟؟کردي شوي)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالوشمېرئ

3- تابع د یوه خوزښت د لار-وخت- دیاګرام ښایي.

الف)د ورځني ژوند څخه یوه بیلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ښایي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

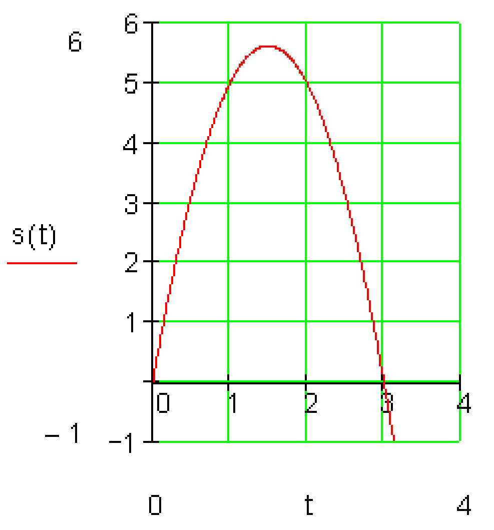
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟



4- یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t = 1,2,3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

حل: لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + \Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $20 + 5\Delta x \to 20$

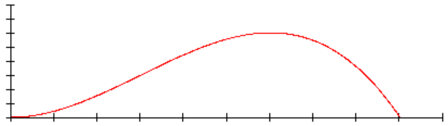
$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $20 + 5\Delta x \to 30$

تمرین:

د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \;\; ; \;\; x > 0$

لاندې تابع ګراف او په ورنزدې توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنې ښايي، چې لاندې څېره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلېکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلېکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور(ګول) لاین(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسي مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دويم مشتقتابع په نامه يادېږي.

بېلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

د $f''(x)$ بيا مشتق نيونه و دريم مشتق ته اوداسي نور.

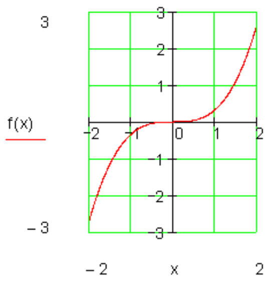
$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونيول شي:

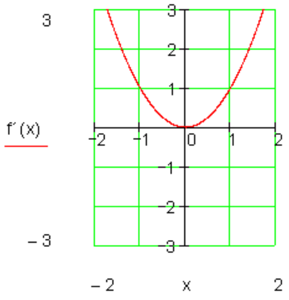
$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

د تابع ګراف: د يوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

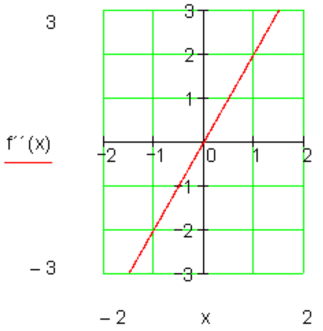
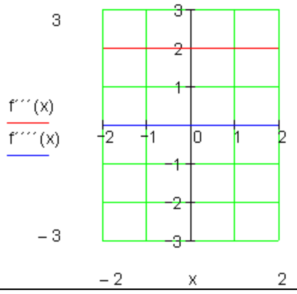
$$f(x)=\frac{x^3}{3}$$



$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$$

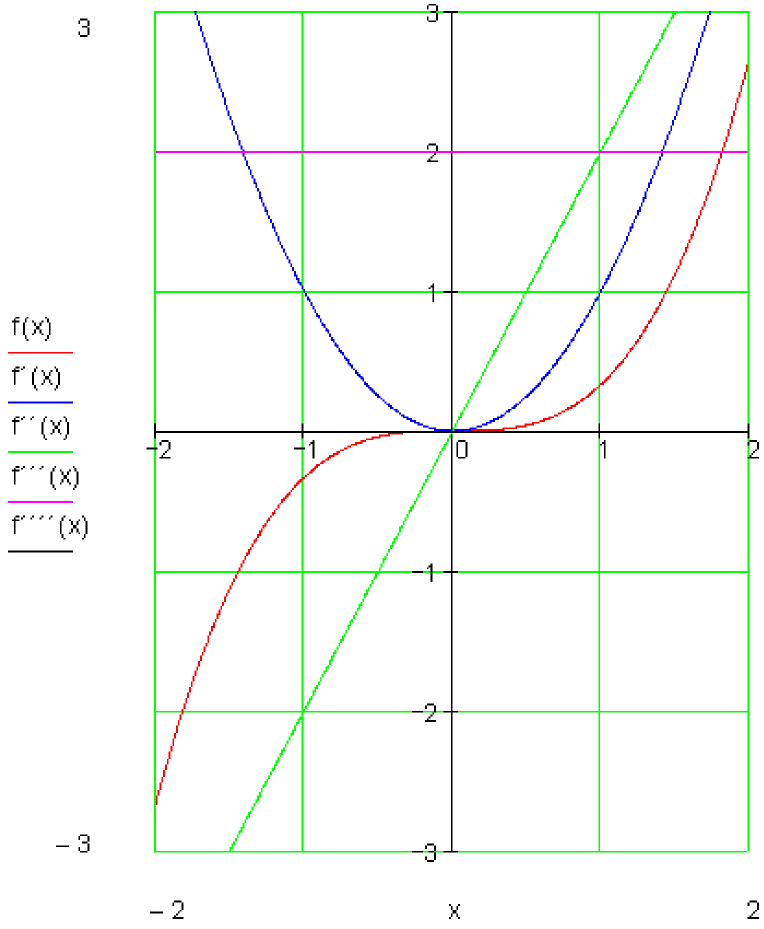


(c) ketabton.com: The Digital Library

 	$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$ $f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$

پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

اول: د تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

۱ـ۳ د جګو درجو مشتق

--- -

دویم: د تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$

$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$

$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: يو په خوښه کسرۍ‌ي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابليت لري.

تمرينونه:

د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ.

$f(x)=3x+4$ -1

$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$ -2

$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ -3

$f(x)=(2x+1)^3$ -4

$f(x)=x-x^4+3+x$ -5

$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$ -6

$f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ -7

$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$ -8

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

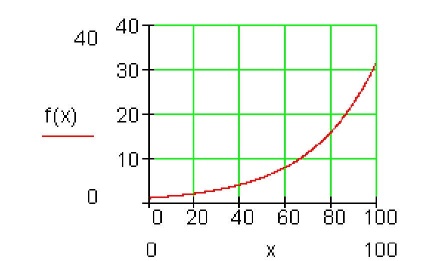
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :ار، او ګراف یې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متغیره د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقیقې

y = د باکتریا ګنون یا تعداد



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \; f(x) = b^x$$

حل:

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \quad , \; x - x_0 = h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

د لوګاريتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; D\ '(f) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

ضيه :

د $y = f(x) = e^x$ مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره ځيرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};\ z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x};\ x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

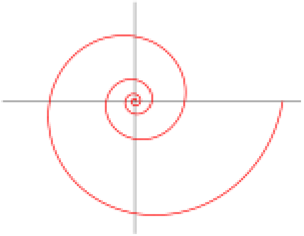
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^{x}}$ $e)\ f(x)=x^{n}\cdot e^{e}$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $m)\ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

د لوګاريتم مشتق



فعاليت:
- لوګاريتم تعريف
- اکسپوننت يا توان تعريف کړئ.
- د لوګاريتم او توان ترمنځ اړيکې وښاياست.

قضيه :
د لوګاريتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: هر د لوگاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځي د$x>0$ لپاره پيژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوگاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پيژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلگه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توگه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \log\sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2}\log_{10} x$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$= 0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f') = IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y = \ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

مونږ لیکلاي شو :

$$y = \ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x) = \log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق f '(x)
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: f '(x) = 1/(x·ln2
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln2)= 1/(16\cdot0.69)=$ <u>0.09</u>

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

د یوې تابع مشتقوړوالی یا ـ قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:
د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-0}{x-0}=1$

د ټولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

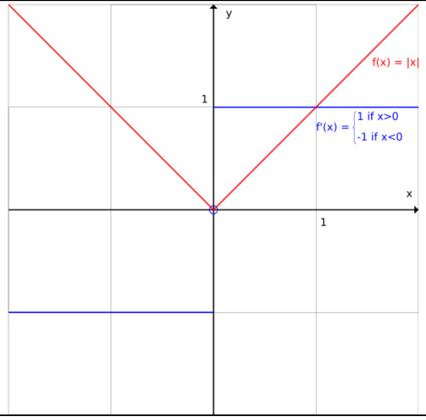
دا چې کیڼ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړې شوې.
په صفر ځای کې سره له دې یو ښي اړخیز مستق ورکړې شوی، یعنې لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او یو کیڼ اړخیز مشتق هم:

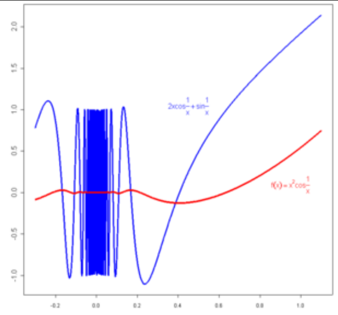
$$f'-(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



که پورته ګراف ته وګورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقوړ تابع باید ګوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:
یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کیږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.
د بېلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$



تابع په هر ټکي کې حتی د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق
د لوګاریتم مشتق ۱۱۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

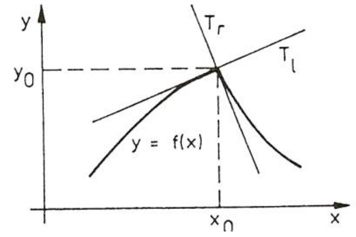
$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی

مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چی د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\rightarrow 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (ځبره 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

په پورته ځیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



په یوه نامتمادي تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځي متمادي توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:
که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.
ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یاني $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:
د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:
د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;\; ; \;\; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کیږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:
د توان تابع ..... $y = x^n$, $n = 1 , 2 , 3,$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

د لوګاریتم مشتق ۱۱۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y = \sin x$ او کوساین تابع $y = \cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز انټروال کی $y = f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y' = f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲. ۴:
په یو د $x = x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سرې د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y = f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینټروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینټروال کې مشتق وړ وي.
ددې لپاره لیکل کیږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:
وښایئ چې ایا دا توابع $y = \cos x$; $y = x^n$; $y = c$ هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیری.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعنې $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د لوګاریتم مشتق ۱۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

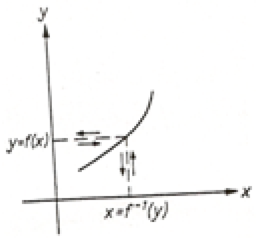
د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) دx په یوه چاپیریال کی د $x = f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د 0 =| f’ (x) سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق ښخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x اوهم 0<-y او معکوس ښخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f`(x)}$$

	$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y) = \frac{dx}{dy}$ سره. بالاخره لرو: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

تمرینونه: د $y = f(x) = x^n; n = 1,2,3,4......$ تابع لپاره که x ≥ 0 وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y = x^{\frac{m}{n}}, m,n \in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیځیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:
د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$
د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$
فعالیت:
که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟
قضیه:
یوه تابع په ایمپلیځیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:
ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعني د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د $f(x)=x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چې په بنسټ او جګ الکسپوننت کې يې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کیدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته يې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بیرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

تمرینونه:

- د r وړانګې سره د د ایرې مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دایمپلیځیټ مشتق له لارې یې مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$E: \ x^2 + 3y^2 = 7$

-- د سره وركړ شوې اليپسې مشتق دې ونيول شي.

د بنستيزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ \ reell$
7	a^x	$a^x \ln \ a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \ x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننیزې یا سپړنیزې(تحلیلي) وییني یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کې ونیسي.

د فصل تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګیدنه) یا منځنی تغیر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

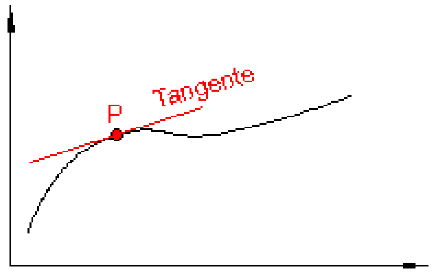
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



Difference quotient د کمېنت وېش يا د تفاضل وېش

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ځپرکي تمرینونه:

(۱) کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$ $b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

(۳) د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترږنځ فوپیر څه دی؟

(٤) د یوه تابع د سکانت( ) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$ $b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\frac{4}{x^2}$ $d)\ f(x)=\frac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$ $f)\ f(x)\frac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د ګراف په مرسته وښایئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

(٨) وښایئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضریب (ځله وونی) ساتلی پاتې کیږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښایئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{x^3}$ $d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^3-1}{4-x^2}$ $b)\ f(x)=\frac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\frac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $d)\ f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د ویش قانون له مخې په ځت ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وتاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\dfrac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x) = (x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف ست(ډېری) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ریښنه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ –مه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) – د لاندې توابعو لومړی مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $\qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $\qquad d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\qquad f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\qquad h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\qquad j)\ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $\qquad l)\ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $\qquad n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $\qquad p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\qquad r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^{n}$ $\qquad b)\quad f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\quad f(x)=s+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=(1+\frac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^2}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=x^2\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري يا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعالیت:

_ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ایا دا تابع به جګ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

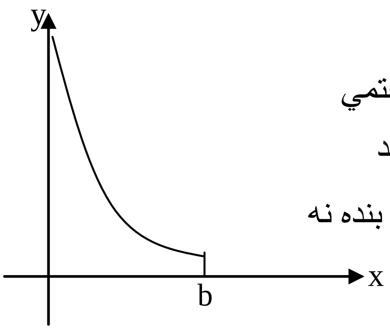
_ وښایاست، چې د $f(x)=-x$ تابع په $[-1,1]$ انترول کې جګ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښایاست، چې x^2 کوم جګ یا ټیټ ټکی لري او که څنګه او که لري یې چیرته؟

دوایرشتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال $[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دې‌اینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.



کیدی شي چی یو همغږیز (monoton مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

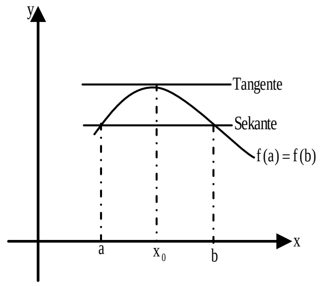
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسی نږدې اړيکي شتون لري، هغه چی د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کی تشریح کیږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول(Rolle) قضيه:
یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ایتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.



حل:

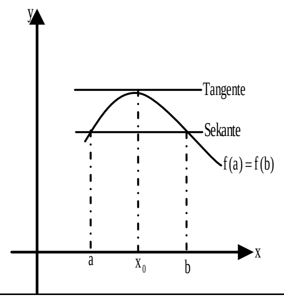
1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وایرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګتیټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګتیټ ارزښت) شتون د اړیین یا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟
ځواب یی لاندې قضیه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



حل: دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چی د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

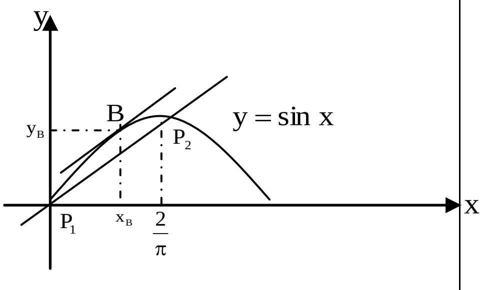
$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسيره پر دې h په (a,b)کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \text{يعني}\ h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بيلګې نوره هم روښانه کيږي.

بيلګه:
د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه ميل ياجګوالی لري لکه قاطع.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوځي) میل یاجگوالی: $m = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \dfrac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\dfrac{2}{\pi} = 0{,}88\iota$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه: که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې: $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1;v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې څخه د h(v)=f(x),v=g(x) او $x_0=g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

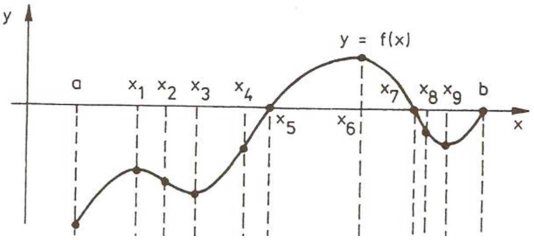
لاندې توابع دوه صفرځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفرځایونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېدوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته څېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته څېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټېږي.
- په پورته څېره کې ټول هغه ځایونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

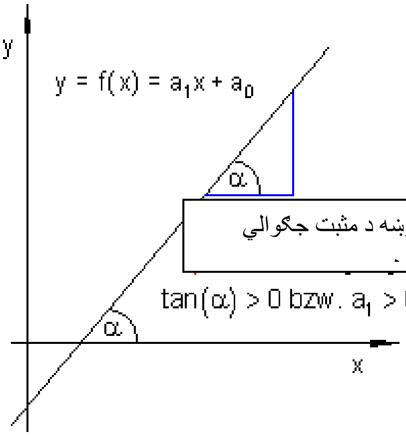
که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینتروال کې
$(f(x_1) \geq f(x_2))\, f(x_1) \leq f(x_2)$ وي، نوتابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې
(- ټیټیدونکې) بلل کیږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
$(f(x_1) > f(x_2))\, f(x_1) < f(x_2)$ کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.
لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \ \wedge\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

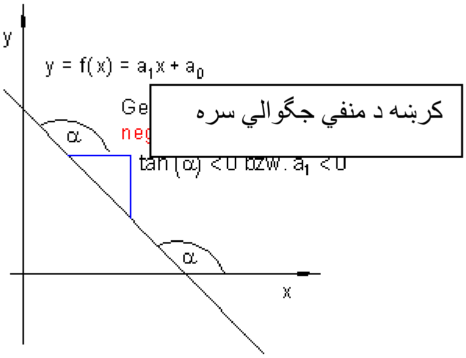
د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټیټیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټیټوالی، د جګټیټوالی جملې
دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع
خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل
ی، چېرته چې $a_1 = \tan(\alpha)$ د کرښې او مثبت لوریز د x – محور ترمنځ زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \ \Leftrightarrow\ \tan\alpha > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library



که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کربنه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.

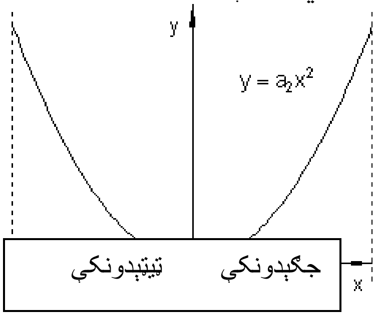
په مخامخ شکل کې: کربنه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0(\Leftrightarrow)$

داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کربنه ټیټېږي یا لویږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینبول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په انتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټیږي. او $f(x)$ په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کربنې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه $> 0 \rightarrow$ منحني مونوتون جګیري. د تانجنت جګیدنه$< 0 \rightarrow$ منحني مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

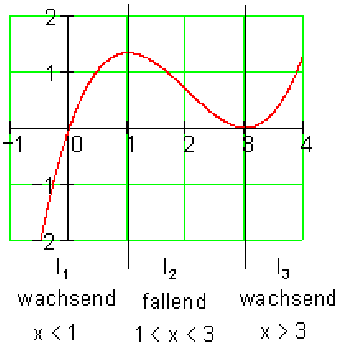
روښانه ده چي د $f(x)$ تابع لومړى مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکي مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکي مونوتون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اينتروال کي همغږيزټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کي همغږيز جګېدونکي ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروال Iکي همغږيز ټيټېدونکي ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کي په کلکه همغږيزجګيدونکي ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکي په کلکه مونوتون ټيټېدونکي ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه
بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدى شي د مونوتوني ساحي لږ يا زيات ټيک و لوستل شي.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

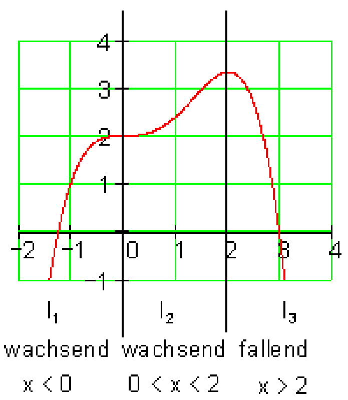


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکي ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګېدونکې ده.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجګېدونکې ده.

د $r\ I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون تيتېدونکې ده.

تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيرئ.

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$b)\ f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

$d)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

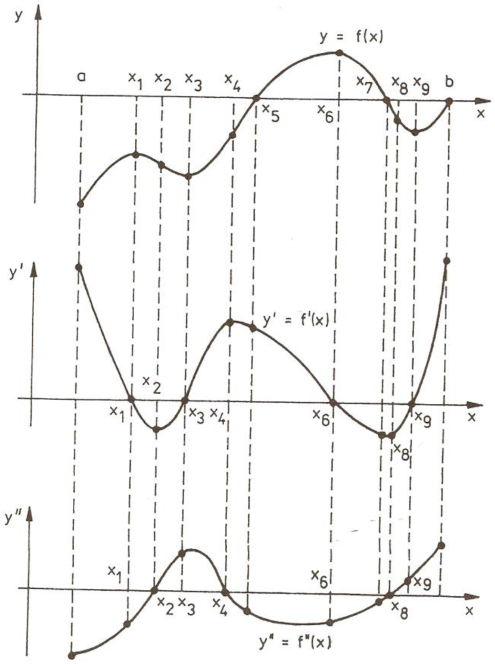
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



یادونه: په لیکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني لیکلي، پام دې ورته وي.

فعالیتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چیرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښایاست.

- په پورته څېره کې نسبي ټیټ او خورا ټیټ ټکي وښایاست.

- په پورته څېره کې وښایاست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټیټو ټکو همداسې د خورا ټیټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځير شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x=0$ په ځای کې خورا ټیټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړیین شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x)=2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، یعنې دلته یو بحراني ټکی پروت دی.
-د تابع دویم مشتق: $f''(x)=2$ دا چې $f''(x)>0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.
بیلګه:

د $y=x^4$ تابع د $x=x_0=0$ لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x)=4x^3 \;\Rightarrow\; f'(0)=0$$
$$f''(x)=2x^2 \;\Rightarrow\; f''(0)=0$$

ګورو چی دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پیژند ته راځو

تعرف یا پیژند: د $x=x_0$ په چاپیریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ (⇔) په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$
جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږیزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د یوه بافراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پیدا کړئ.

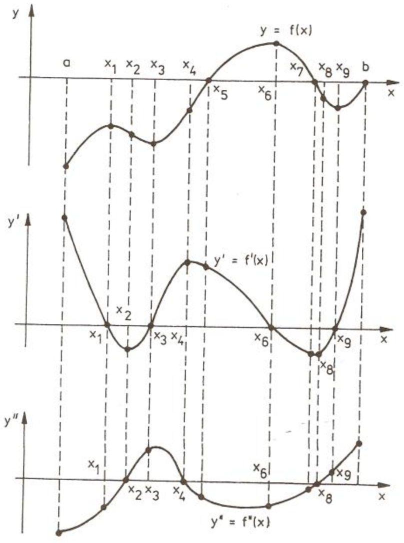
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښئ لور انحنا اوله کېن لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.

- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړئ.

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کېڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) f د $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کېڼ کوږدئ (کیڼه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دئ (ښئ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $6x - 4 > 0$ لپاره کيڼ گوړوال(کينه انحنا (ننوتی يامقعر)

د $x < \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $6x - 4 < 0$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی يامحدب))

بيلگه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف يو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانگه کينه کږه ده يا کينه انحنا لري(مقعر)، او کومه يوه يې ښی کوږوالی - يا ښی انحنا لري(محدب)؟

دويم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های‌پارابول څانگه ښی کوږوالی يا انحنا لري(وتلی يا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کينکوږ دی يا کينه انحنا لري(ننوتی يامقعر).

بيلگه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې له دواړو لورو يو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعريف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^{+}$ لپاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښې لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$a)\quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$

$b)\quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$a)\ \ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b)\ \ -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول ځانګې کوم کږوالی لري؟

$a)\ \ f(x) = \dfrac{1}{4x+1} \qquad b)\ \ f(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2}$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

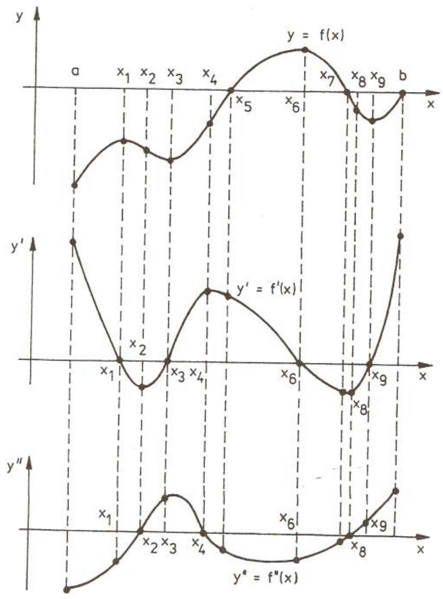
$a)\ \ f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b)\ \ f(x) = \ln x^2$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په تل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ ، سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینې و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئچې د انعطافټکي شاوخوا منحني څنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه وواییی او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x)=0$ او $f'''(x)>0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ځټ): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

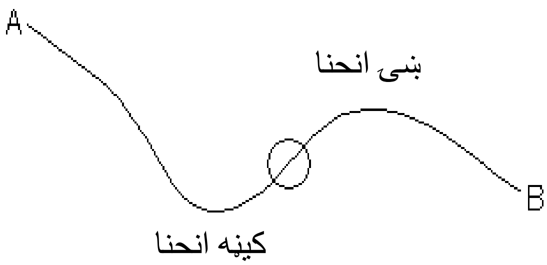
ګورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \qquad , \qquad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \qquad , \qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \qquad , \qquad f'''(x)=0$$

ګورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمي روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:



د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.

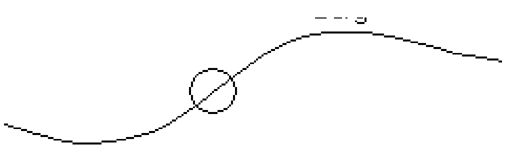
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کيني- او ښی منحني(کږې) ترمنځ بايد د باسکل انډل نيغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کيني لوري و ښی لوري ته. دا د کيني او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

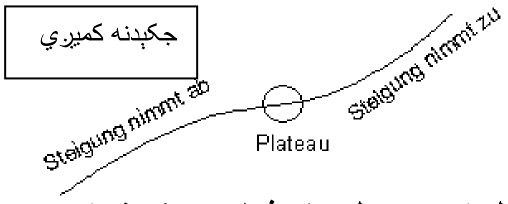
تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی.
وروسته له هغي، چې له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی ښرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بيا



د بايکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دياګرام څخه يې رانيسو:
په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره ښرته جګه شي.
ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتآهواره). دې نسبتآ هوار ځای کې د توټه کرښي جګيدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څيره د ښښتو نومونو سره بيا کښل...



له کيڼ ښي لور ته ژباړه: جګيدنه کيږي، هواره، جګيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه يې جګوالی لوستل کيږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پيدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پيل تابع $f(x)$ لپاره مو تاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.
مخکی له دې چی يو لړ جملی د ېحراني ارزښتونو او د انعطاف تکو په هکله څيرو، غواړو چی دا کليمی تعريف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بنه کی سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند:

په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(يادونه ۴ دې پ؛تله شي) : چيرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چې د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچيرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کيدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

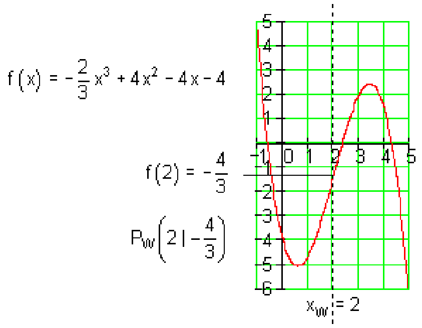
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د درېواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که$f'''(x) < 0$ وي، نو يو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره يو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلگه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



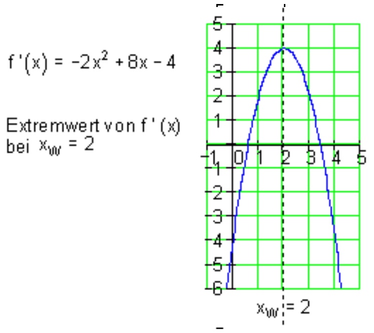
1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$



2- دويم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x) = 0 \iff -4x + 8 = 0$$

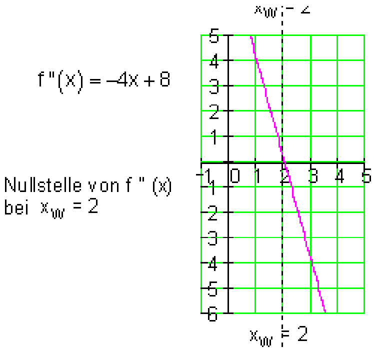
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

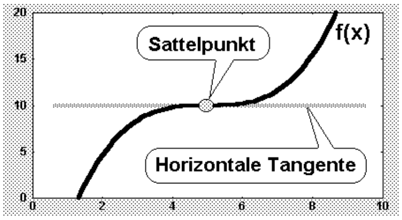
$$\Rightarrow P_{W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)}$$

$$P_W(21-1.33)$$

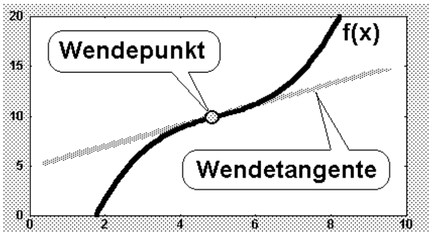
پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ ګراف کږیږي.
په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

پیژند:

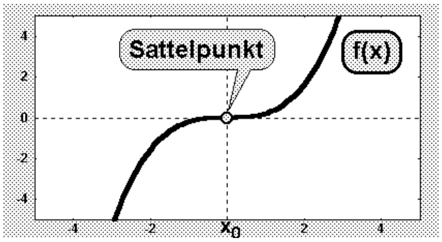
د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



(c) ketabton.com: The Digital Library

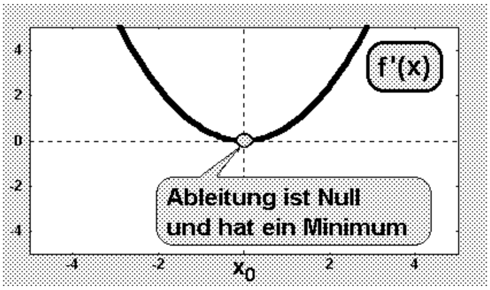


توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی ځنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له ښي – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

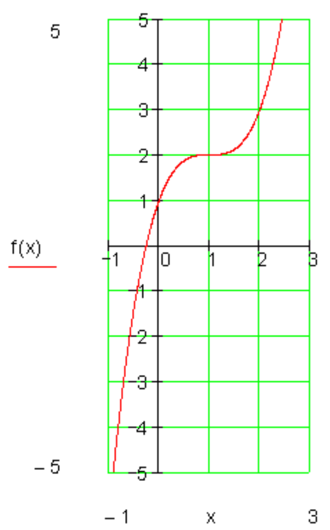
زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0) = 0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخښنه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کي لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کي لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دي معنا، چي دوم مشتق صفر دی، يعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)

زينټکی**Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدي شو فکر کېږي، چي، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که څوک د ښي لور ور نژدي شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لوري ځېړو:
مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-6x+3=0 \ \Rightarrow \ x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زينټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چي د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينټکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندي انعطاف ټکي کي تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسي پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کي تانجنت، چي تانجنت مساوات ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

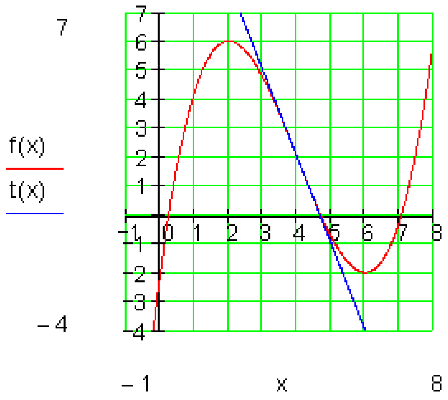
مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوځوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پيداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسي ټاکل کيږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسي حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر ځيرنی لاندې نه نيول کيږي.

پوښتني

۱ -- د تابعf د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي پيداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2}$ $b)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ $d)\ f(x)=\dfrac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زینتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)--=x\cdot e^{-x^2}$ $b)\ f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث (Kurven Diskusion) :

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کینې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کینې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع ځیرنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x)=-f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دي فقط $x\geq 0$ وڅیړل شي.
په تولیزه توگه که تول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو گورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جگټکی، ټیټټکی)
د جگټکی یا نسبي جگ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1)=0 \ \wedge \ f''(x_1)<0$

انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوښټکی):
د x – محور سره ِغوښټکی: $P_{xi}(x_i\,|\,0) \ \Rightarrow \ (x)=0$
د y محور سره غوښټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0\,|\,y_s) \ \Rightarrow \ f(0)$
دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

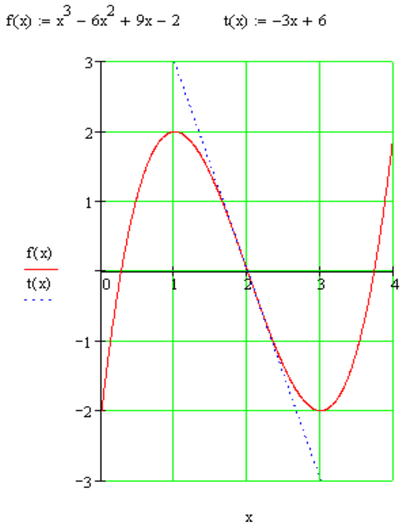
د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0)>0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0)<0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی
1- که د ټولو $x\in I$ لپاره وي $f'(x)\geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون جگیږي.
که د ټولو $x\in I$ لپاره $f'(x)\leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلي مونوټون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلي مونوټون جګېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي انحرافي ټکي

$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$

انعطاف ټکی او تانجنت

$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$

صفرځایونه:

$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزوالی(مونوتوني یاجگ - ټیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.

د انحنا حالت:

ښۍ انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وییینو=ګ\پولې

$$0.\infty \ , \ \frac{0}{0} \ , \ 0^{\infty} \ . \frac{\infty}{\infty} ,.....$$

که و لرو $x \neq 5;$ $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعني $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړی.د.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږئ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړئ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

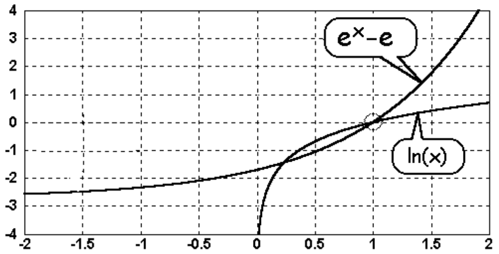
پیل څیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او

مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

	په څېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)

لیکندود(لیکنډول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیټال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Z\ddot{a}hler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0{:}0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلګه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نژدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ 0}{0.0000000010\ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$

هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ وڅېړل شي، په کومو کې چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګې په توګه تابع $f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2 لري، سره له دې هم لیمیټ شته دی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضییې استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځای وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضيې نیونی پوره کوي. د هر $x\in U(x_0)$ لپاره یو x_m د $x_m\in(x_0,x)$ سره موجود دی، په داسې ډول چې لرو:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0\ \wedge\ g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x->x_0$ سره $xm->x_0$ هم هڅه کوي.

د $x->oe$ په حالت کې $x=1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځیري قضيې په مرسته لاس ته راځي:

$$\boldsymbol{u = f(1/z)}$$

د مشتق $du/dz=f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تيپ يا بڼې ∞-∞ څخه و بڼې يا تيپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بيلګه کيدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sinx}}$$

د $x\rightarrow 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بيرته د بڼې تيپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپيتال قاعده استعماليدی شي.

له تيپ يا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تيپ $0.(-\infty)$ حالت د بيلګي په توګه تابع f(x)=x.lnx د0<-x لپاره بنايي. په کوم کی چي ضرب د ويش په څير انځور کړي، نو د لوپيتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څېړنې لاندې نيول کېږي.

د بڼې بدلون يا فورم بدلون و بنسټ e ته د يوې انځورونی په مرسته په بريالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د بنوونې، د بيلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\rightarrow\infty$ د $x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\rightarrow\dfrac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\rightarrow\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\rightarrow e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرینونه:

پورته کې دېرې بیلګې حل شوې. له هغوباید څه تمریونونه راوړل شي.

۱) لاندې پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

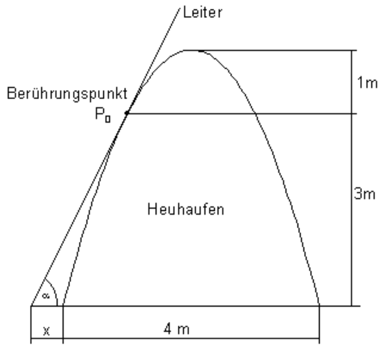
د $x\rightarrow\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیټونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

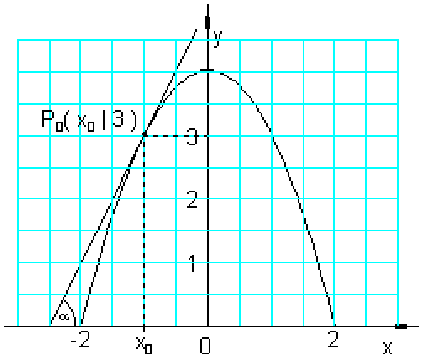
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلگې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جگوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دی او 4 متره جگوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{0_{1/2}} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1\,;\; f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x-(-1)] + 3 = \underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 62.4^\circ$

د زينې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زينه د وښو د ټوپې له پښو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

د ستري ګټې(غټو ګټو) مسئله يا قضيه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د يو څو بيلګو له لارې وڅيړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کيږي يا صورت نيسي، له تاثيروونکو يا په همدې ډول د هغو ټاکلو لويو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو يا مخصوصو پولو کې په اختيار کي لرودی شو.

موږ يوازې هغه پروسې تر څيړني لاندې نيسو چې د يوې واريابلې يا اووښتونې x په واك کې وي. دا د بل په واك کې د يوې تابع $y = f(x) \ , x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه يا مصارف په کوته کړي، نو x بايد داسې وټاکل شي چې $f(x)$ مينيمال يا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسې لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د$-\infty$ او ∞پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(مودالیتې پرابلم).

2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل (*) دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

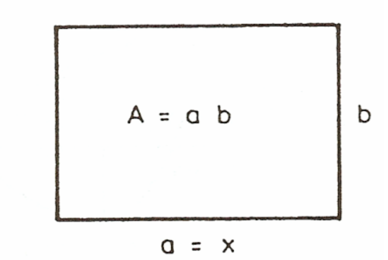
بیلګه: یو د منډو(پټې ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیتېArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې ځلور ضلعي(څلورګوډۍ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د ځیرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کې دوه اغیزې لرونکي یا تاثیر اچونکي لویيa او b دی.

د $L = 2a + 2b$, $b = (L/2) - a$

له امله یوائې یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لويي ته اړیو د بیلګې په توګه $a = x$، دا ګټه (ستحهA)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یوائې x = L /4 په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2< 0$ دی.

په رینښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه: یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډېرۍ) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي. کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډيری) M کې تولید کړي، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته

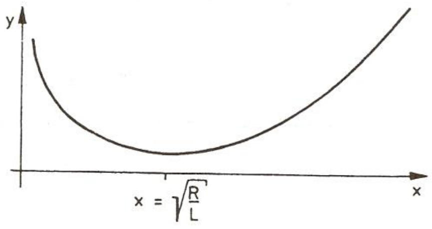
(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخیره کوني) لګښتونه راپید کیږي(ددي د زخيري لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دي ډول تولید باندي درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډېرۍ x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه ایښول شوي لګښتونه دي، L د زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیددیرۍ M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غتیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د سترېدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min!\ (0 \le x \le M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

	$f'(x) = L - R/x^2$, $f''(x) = 2R/x^3$ د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R / L$ د $x \ge 0$ له امله $f''(x) \ge 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرېږ(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی.که $x = R/L > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید x = M صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،

$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چې 10000 یوونه تولید کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي

$R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده، یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت:

یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې مورږ ورته د لګښت تابع وایو او په $K(x)$ سره یې ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع $K(x)$ د تولید سټ(ډېرۍ) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

(c) ketabton.com: The Digital Library

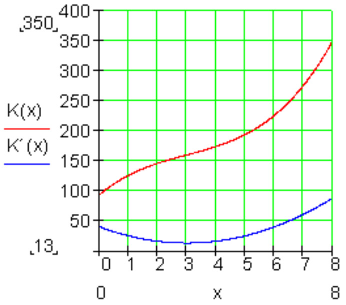
پېژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه يادوو يا يي پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$ دي ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږی‌او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کي يي ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6]$ لپاره په1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زیاتوالی و ټاکی:



لاندي تابع

$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$

لرو

مشتف ارزښت

$K'(x)=3x^2-18x+40$

ارزښت جدول

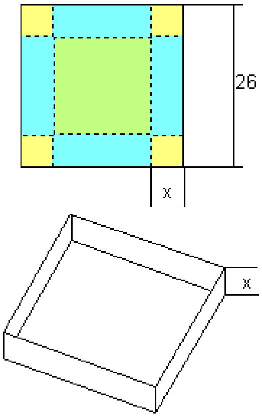
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کي پروت دی، یعني هلته چي تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x)=3x^2-18x+40 \Rightarrow K''(x)=6x-18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$



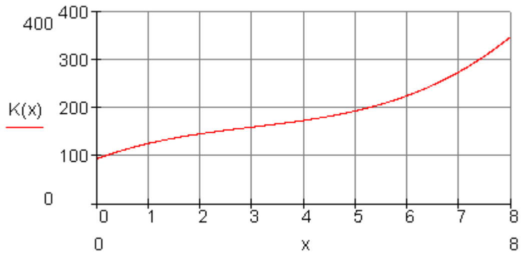
پوښتني: دي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه، چي 26 سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بي له سرپوښ، چي د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چي د بګس حجم(ډکی) vد x په واکوالي یا تابعیت کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه يې
ماګسیما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړېکي انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $1000 \in / tan$ د روځې زر یورو ($1000 \in / tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې ولیکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادیږي. تاسو د لګښت زیاتېدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زیاتوالی خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمېرئ.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې خيره په نوټ کې ده،

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضيه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:

د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اينټروال Iکې مونوټون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$لپاره

- که $f(x)$ په اينټروال کې همغږيز ټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.

- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.

- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايټروال Iکې همغږيز ټيټېدونکې ده.

- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې په کلکه همغږيزجګېدونکې ده.

- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينټروال Iکې په کلکه مونوټون ټيټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو يو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپیریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:
$f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حتمي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\neq 0$, $f'(x)=0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند: په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوازې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال

پیزند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

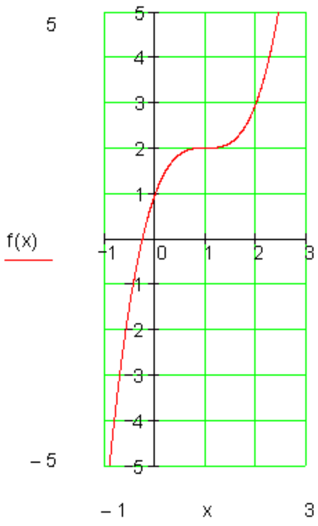
د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زینټکی(د اس زین) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د
انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور
ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته
پروت دی
که څوک د ښې لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو
نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$
$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-6x+3=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=1$$

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:
که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپېريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$
ترڅو په ښې لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

د څېړکي تمرينونه:

١ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\;\; f(x)=\frac{1}{ax+2}$ $\qquad$ $b)\;\; f(x)=\frac{1}{ax^2+1}$

٢ -- و څېړئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه
مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{2+e^x}$ b) $f(x)=2x^5-7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږیزوالي خویونو وڅېړ.

a) $f(x)=e^{x^2}$ b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پيداکړئ.

a) $f(x)=e^{-4x^2}$ b) $f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ d) $f(x)=\ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

a) $f(x)=\sin^2 x$ b) $f(x)=\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

c) $f(x)=x-\sqrt{x}$ d) $f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

a) $f(x)=|x|+x^2$ b) $f(x)=|x^2+2x-8|$

۸ -- د fتابع د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکونه

۹ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپيتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنيو مطالعه وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځايونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$ $\quad b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$ $\quad d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ $\quad f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د 0 = x1=-2 , x2 او x3=4 په ټکو کې غوځوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوځوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع ګراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوځ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځایوه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$ $\quad d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د یوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$ ، سره ثابتې a,b,c اوd پیداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځایونه پراته وي او تابع په x=0 کې یو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

it $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$

۲۳ -- مات یا کسري راشنلf تابع په x1=1 کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وښیئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سې یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودیکي یا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$-2\pi \le x \le 2\pi$

د شمېرنې له لارې صفرځایونه ونوموئ، چې په انټروال کې پراته وي.

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad b)\quad f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c)\quad f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad d)\quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځایونه نه لري؟

$$a)\quad f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{e^x}{x+1} \qquad d)\quad f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې یو تابع ډېر صفرځایونه ولري، مګر د y - محور سره یواځې یو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځایونو د تعداد په هکله څه ویلاي شئ، که د یو f تابع لپاره په تعریفسټ(- دېرئ) کې یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوختکي وشمېرئ.

$a)\ f(x) = x^3 + 2x - 1$ $\qquad b)\ f(x) = (x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2}$ $\qquad d)\ f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x) = (x-2)\cdot e^{x-1}$ $\qquad f)\ f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

د $a_0 \neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوښتکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ $\qquad$ b) $f(x) = \ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x) = (x+a)\cdot e^x$ د گراف د $x_0 = 0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزې(لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ \ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\qquad$ $d)\ \ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ \ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\qquad$ $f)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

۴۳-- د n-مې درجې یو تام راشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه لرودی شي؟

٤٤-- ولې د جګتکي لپاره شرایط $f''(x) < 0$ و اړیین نه دي؟

٤٥-- د لاندې توابعو لوکال(ځایز) انحرافي(افراطي) ځایونه وټاکئ.

$a)\ \ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\qquad$ $d)\ \ f(x)=x^4-4$

٤٧-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$$-2\pi \le 2\pi.$$

$a)\ \ f(x)=\sin^2 x$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٤٨-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\qquad$ $d)\ \ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د f تابع د $x \neq 1$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ سره د انعطاف ټکي بیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx   b) f(x) = 2(1-sin2x)

٥٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\ ,\quad x_0=0\end{cases}\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1,\quad x_0=1\end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\ ,\quad x_0=1\end{cases}\qquad d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\ ,\quad x_0=1\end{cases}$$

٥٥-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مګر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

٥٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

٥٩-- و څېړړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}\qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦١-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کینې کږوالی لري او په کون کې بنی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2\qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦٢--د لاندې مات توابعو ګرافونه هاپیاربول دي. د هاپارابول څانګې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \ f(x)=\frac{1}{4x+1} \qquad\qquad b)\ \ f(x)=3-\frac{3}{x^2}$$

٦٤-- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې يوه بنئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او بنئ انحنا لري؟

١٥٨(١٠٣): څنگه کېدی شي، چې د يوې f تابع د ١ . درجې مشتق څخه د گراف په انخنا قضاوت وکړو؟

١٦٠(١٠٥): د لاندې توابعو حالت وڅېرئ، که $|x| \to \infty$ په لور لاړ شي.

$$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5 \qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$$

$$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^5-x+6 \qquad d)\ \ f(x)=-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

$$e)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2} \qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\frac{1}{3}$$

١٦٣(١٠٨):ولې د $x \to +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وينه نه شي کېداي:

$$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\frac{1}{\ln x} \qquad\qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$$

١٦٧(١١٢): د جوړه(جفت) جگعدد(اکسپوننت) سره تام رينتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

١٦٨(١١٣): د ناجوړه(طاق) جگعدد(اکسپوننت) سره يو تام رينتونی تابع تيک هلته د سر چيني سره تکی سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

١٧١(١١٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$a)\ f(x) = (x+2)^2$ $\qquad b)\ f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$c)\ f(x) = -(x+1)^2 + 3$ $\qquad d)\ f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ریښتوني اعداد په محدودیت وڅېړئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 2x + 4$ $\qquad b)\ f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$

$c)\ f(x) = -(x+3)^2 + 1$ $\qquad d)\ f(x) = x^3 - 2x + 1$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کرښې سره غبرگ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$a)\ f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات ولیکئ.

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کربنيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ \dots\ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت: په پورته ننوتنه كې و ښاياست، چې دا ټوټه كسرونه څېرته تعريف لري؟

-- د يوه په خوښه پولينوم كسر ټوټه ونه او د تعريف ساحې وركړئ.

بيلګه: اصلي پولينوم كسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه كسر ټوټه كړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړى حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې څېرو .

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دى.

د اصلي كسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه كسرونو ټوټه كونه:

د كسرونو شميرنو قاعدې له مخې كيدى شي وركړ شوى پولينوم په درې جمعى برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (كرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه كسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه كسر د پولينوم مخرج دى.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

$$A+B+C=4 \qquad \text{I}$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad \text{II}$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad \text{III}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad \text{V}$$
$$-16B-7C=-41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې ایښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې ایښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې ایښووونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) فاکتورونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينوم ويش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کوني ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډېل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پيل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضريبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه يې له IV سره : A = 2

د A = 2 ايښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 ايښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقى ضريب نه ټوټه کيدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کيدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه دې کينول شي يا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره يوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضريبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A+C = 5 \qquad I$$

$$A + B + 2C = 8 \qquad II$$

$$B + 4C = 9 \qquad III$$

د III کمښت (تفريق) له مساوات II څخه د I سره يې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني يا متحولې لري:

$$A - 2C = 5 \qquad IV$$

$$A + C = 5 \qquad I$$

مساواتIII منقي مساواتII :

د $C = 2$ په Iائښوولو سره :

د $C = 2$ په III ايښوولو سره:

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3x+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي کسري پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا د پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\dfrac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\dfrac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضريبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کوني لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کووني په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (ښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولينومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

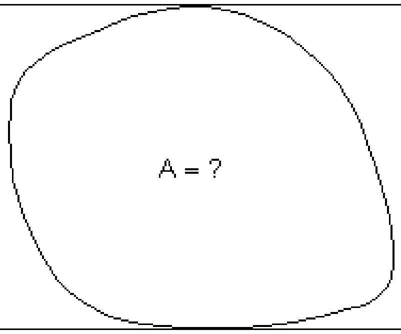
$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي کې) د طبيعي علومو پوهانو د لايبنيڅ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



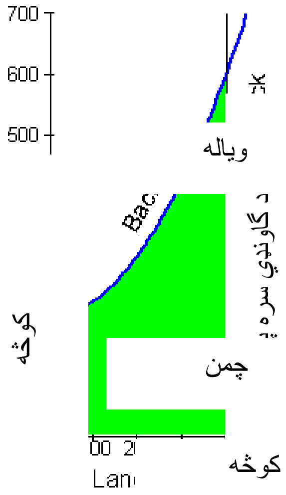
فعاليت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړانديزونه وکړی.
- ايا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد ياست ؟
- ايا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه وليکی.
- داپورته سطحه د وضعيه قيمت سيستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو ووېشئ او د انتيګرالونې په هکله يې فکر وکړئ.

بېلګه

دا څيره شوی چمن خرڅيږي. له پورته لور د ويالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي څمکه ده او کيڼ لور ته کوڅه او له ګښته لور هم د يوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، بايد سطحه وپيژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه بايد نژدې پوره مگر هيڅکله کمه ونه شميرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پيسې بايد ورکړي، خو هيڅکله ځمکه د اصل څخه زيات ونه شمېيل شو.

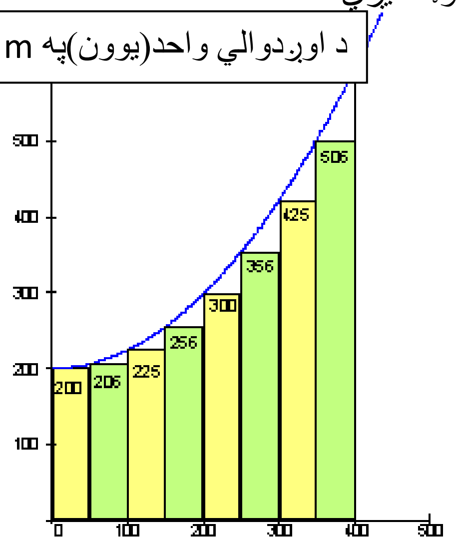


(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

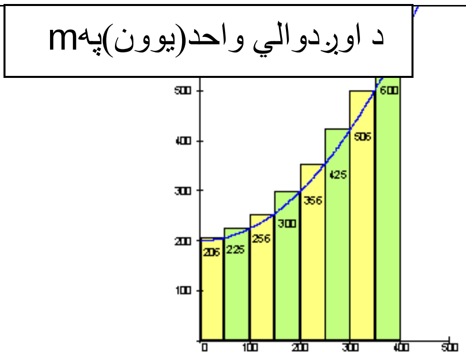
هره ټوټه(مستطیل پټۍ) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200\cdot 50=10000$ $206\cdot 50=10300$ $225\cdot 50=11250$ $256\cdot 50=12800$ $300\cdot 50=15000$ $256\cdot 50=12800$ $425\cdot 50=21250$ $506\cdot 50=25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي 

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټۍ) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولي سطحي مساحت نزدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رینتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنۍ** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنۍ جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې رینتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انتروال [1,3] ترمنځ د تابع سطحه به نخښه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دئ. په كارتيزي وضعيه قېمت سيستم كې د ګراف په سرچينه كې يوه كربښه رسموو.غواړو سطحه پيداكړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واكوالي كې پرته وي.

د ريمن (ټاكلى) انتلګرال

دلته دې يوه څېره راوړل (د يوه ډنډ او يا.....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي څيره وكاږئ، چې په ترتيب له درې، پنځو او اوو كربښو رابنده وي. د د ې څيرو سطحه په ورسره بلد ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم كې يوه كږه(منحني) وكاږئ او وهڅيرئ، چې سطحه يې په ورنزدي ډول پيدا كړى چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

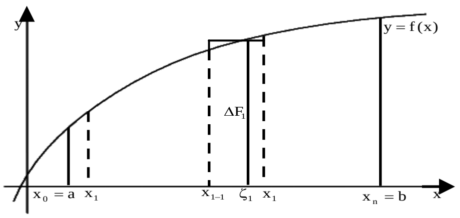
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف: لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف: که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.
تحلیلي تعریف: تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچوني یا اندازه کووني څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

	یو تابع y = f(x) لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې (f(x)>0) وي. (څیره ۱ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينټروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;............................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;...............................(4,2)$$

دا نږديوالى تر هغې ښه کيږي خومره چې د اينټروال [a , b] ويش نرى شي يعني $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زياتيدونکو شمير ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اينټروال [a , b]څنګه ويشل شوى او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اينټروال [a,b] کې اينټيګرالوړ دى. دا د بيلګي په توګه د ټولو ټوټه، متمادى او محدودو توابعو y = f (x) حالت دى .

پيژند (تعريف ٤ . ١ : که ليميټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکي لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکې اینتروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او x د اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

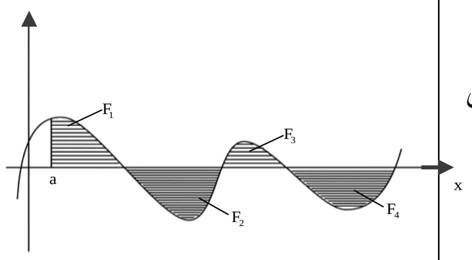
یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\;dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 <باوري نه وي . که 0 < f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

که د f (x) = y (کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلوني په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعریف(پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = -\int_{b}^{a} f(x)\, dx$

د پیژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: x^2-4x-+16 ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- په پورته مساوات کې به F (x) څنګه ولیکلای شو؟

- F (x) نسبت و f (x) ته څه بلل کیږي او په څټ، f (x) د F (x) څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پایلې یې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یوائې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

F (x) = x² + C، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پایله، چی څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنیتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ یوه لومړنیتابع ده، دټولو c∈I لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f (x) هره بله لومړنی(بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C,\ \ C \in R$$

ځواب : ښايو چې Fa (x) دf (x) بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د Fa (x)لپاره د پورته پېژند شرايط باور لري. د Fa (x) مشتق د I ∈ x او a ≠ xلپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a^{'}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right]$$

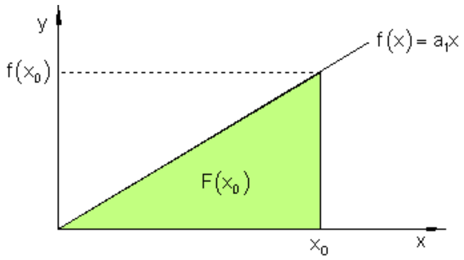
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x, x+h]$$

د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی)
(د متماديت له امله $(f(\xi) \to f(x)$ = f(x)

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

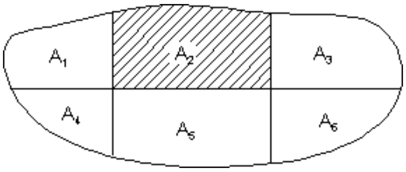
	د تابع $f(x) = a_1x$ ګراف په کارتېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته

(c) ketabton.com: The Digital Library

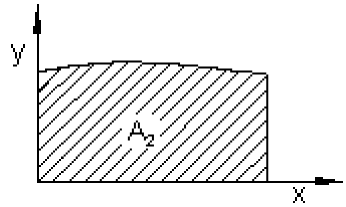
$A=\frac{g\cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي: زموږ د مسألي لپاره متحوله داسي تغيروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندي ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

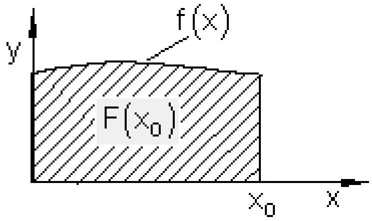
د سطحې پرابلم:



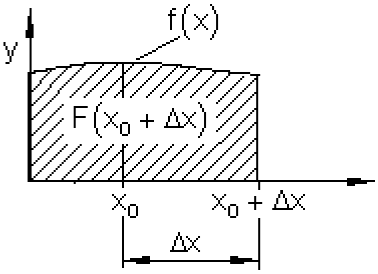
هره له کږوکږښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کږښه رامنځ ته کيږي.
نورې ټولې رابندوني سيده کرښيزې دي.
هره يوه د سطحې برخه(د بيلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيلګه کې؟

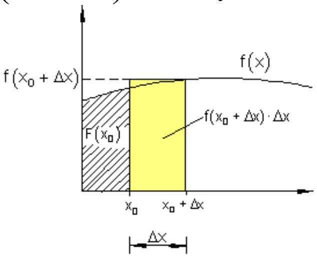


که داسې يو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه باندې تنظيم کړای شي.

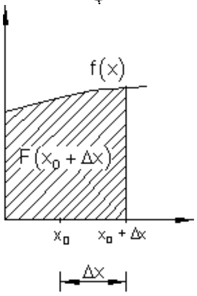


(c) ketabton.com: The Digital Library

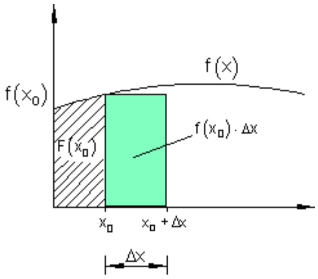
په يوه ولاړګوديز (مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښنه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښنه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه)هرڅومره کوچنې شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \quad\le\quad F(x_0+\Delta x) \quad\le\quad F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \quad\le\quad F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \quad\le\quad f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \quad\le\quad \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \quad\le\quad f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \quad\le\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad\le\quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \quad\le\quad F'(x_0) \quad\le\quad f(x_0)$$
$$f(x_0) \quad=\quad F'(x_0) \quad=\quad f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

موږ ليکو: $F'(x_0)=\dfrac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$ يا $\boxed{F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)}$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سرۍ کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتېګرالول يې شمېرو.
د يوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکېدی شي، چې دا څنګه ايتېګرالوي.

توانتابع : $f(x)=x^3 \quad\Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$
مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

توانتابع: $f(x)=3x^2 \quad\Rightarrow F(x)=\dfrac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځې يا را پيداکيږي يا راځيږي.

تمرينونه:
– و ښايئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f(x)dx$$

فعالیتونه:

-- په پورته څیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)dx$ د لومړنۍ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې$f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، یعني $F(x)$ وپیژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دئ).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلګه:
لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېرى): بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يوازې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يوازې ثابت عدد کې يو له بل سره توپير لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

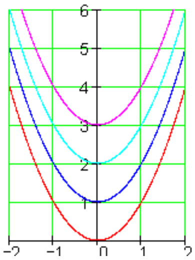
بيلګه: يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

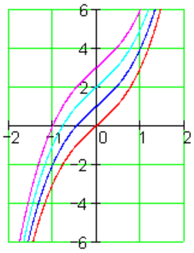
د ټولو لومړنيو توابعو ډېرى دې د منحنيو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بيلګې وکتل شي.

$F(x) = x^2 + C$



$F(x) = x^3 + 2x + C$



تمرينونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پيدا کړئ او لاس ته راوړنې يې د مشتق له لارې و ازمايئ.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = x$

d) $f(x) = -2x$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x$

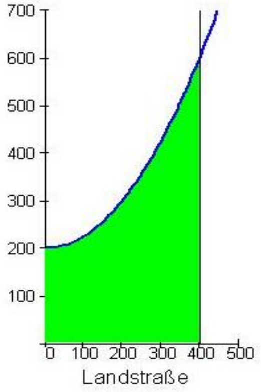
g) $f(x) = x^3$ h) $f(x) = 4x^3$ i) $f(x) = 2$

j) $f(x) = x + 1$ k) $f(x) = x^2 + x - 3$ l) $f(x) = x^n ; n \in N$

m) $f(x) = x^2$ n) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتيګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې يوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري.	

ټاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b يا د a او b حدونو ترمنځ يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعاليت:

اول: ووايئ چې په پورته انتيګرال کې $f(x)$ څه نوميږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتيګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو $G(x) = F(x)$ + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: $G(b) = F(b) + C$

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او $G(a)=F(a)+C$ دی، نو $C = -F(a)$ ده.

دا په دې معنا، چې $G(b) = F(b) - F(a)$ همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکي رامح ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx=\int_2^4 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولې شو د انتیګرال ثابتې ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع یعنې $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښايو:

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$

$$\int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکميل کننده:

از د ليل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بين ميرود. ازين بابت ميتوانيم براي تعين ثابت انتيگرال بنويسيم C =0 .

مثال :

قيمت انتيگرال معين $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعيين نماييد.

ثبوت: ما قرار زيل ثبوت ميکنيم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1-0=1$$

يادونه : دا چې په دې برخه کې يواځې د ټاکلي انتيګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د يوې منحني لاندې سطحه، نو بايد نه دی چې صفرځايونه په پام کې ونيول شي.

عوره يادونه: دادې په ياد وي، چې ناټاکلی انتيګرال تابع ده او ټاکلی انتيګرال يو عدد.

تمرينونه:

د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښتونه وشميرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_0^3 4dx$ $b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $e)\ \int_{-1}^0 e^x dx$ $f)\ \int_0^\pi \sin x\,dx$

$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $k)\ \int_{-2}^2 x^3 dx$

$l)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $m)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $n)\ \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع $f(x)$ ته لومړنی تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنيو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

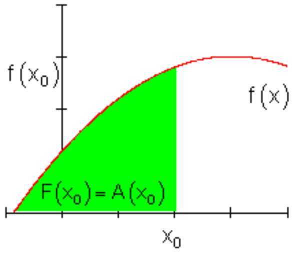
پيژند : د ټولو لومړنيو توابعو سټ و يوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتيګرال ،، بلل کيږي او ددې له پاره ليکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

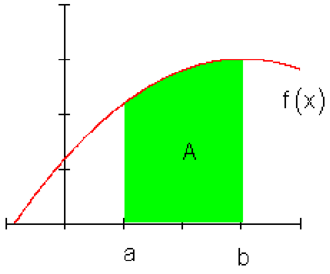
د مشتق- او انتيګرالشميرنې ترمنځ اړيکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضيه) : د ناټاکلی انتيګرالشميرنه د مشتقشميرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

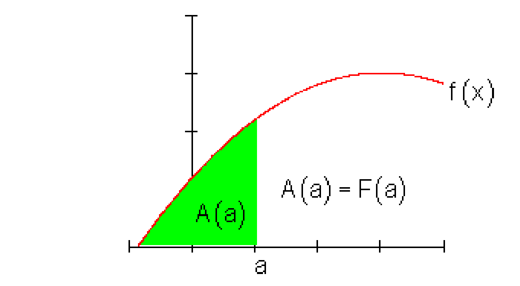


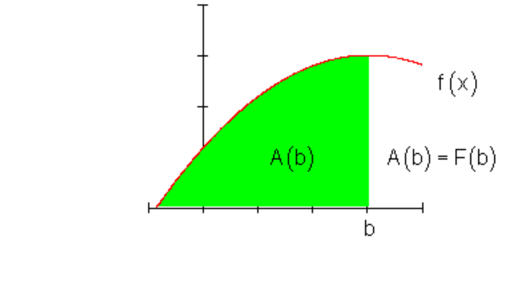


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځاى پورې

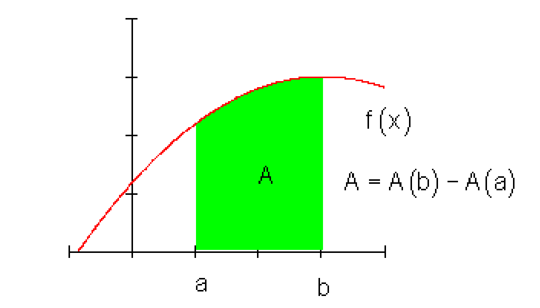
(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې





د انټروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې ، يعنې. A= A(b) – A(a)په همدې توګه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.



په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

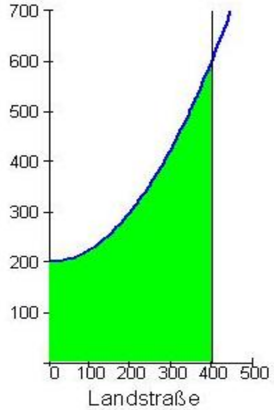
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انټيګرال ټاکلی انټيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل ببلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\,|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\underline{\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

تمرينونه: لاندې ټاکلي انتيګرالونه وشمېرى.

$$\int_1^3 x\,dx\quad,\int_1^3(x^2-1)dx\quad,\int_{-2}^2 4dx\quad,\int_3^4 dx\quad,$$

$$\int_0^4(2x-5)dx\quad,\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتيګرالونې قاعدې

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالونې قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږي‌دلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دى ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدى شي زياته يا کمه وي. دا قاعده کيدى شي چې په ټاکلې انتيګرال کې ښوولې جملې سره سم ټاکلي ايتيګرال ته نقل شي يعني په ټاکلي ايتيګرال استعمال شي . دا قاعدې کيدى شي چې د تيرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نيولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\ (x)\,dx = a\int f\ (x)\,dx\ , \qquad a\in R$$

جمله: د جمعې (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده ځیره بدلون بیرته په بنستیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a) \quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx \quad , \quad b) \int_1^2 \frac{\sqrt{x} - 1}{x} dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ لپاره لرو:

د تولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C$ $(a \in IR^+, a \neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاريتمي توابعو انتيګرالونه

بنسټ: د طبيعي لوګاريتم تابع $f(x)=\ln x (x \in IR^+)$ لپاره $\int \ln xdx = x\cdot \ln x - x + c$ دی .

د ټوليز لوګاريتم تابع $f(x)=\log_a x\ , a\in IR^+ , a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a xdx = \frac{x\cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

بيلګه :

ناټاکلی انتيګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پيدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot \ln 3 + x\cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرينونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندې ناټاکلي انتېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چې د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n\cdot\pi, \quad n \in Z$

بيلګې :

د جدول او تيرو جملو څخه په ګټه لاندې اينتيګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلى شي .

a) $\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$,..............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}dx = \int \left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x\, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون قانون <u>Substitutionlaw</u>

د ناټاکلي انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int (x^2-x)dx$ انتيګرال ونيسی

- د $\int (x^2+5x)^3 dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتيګرال يې ونيسی.

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اېښوول (لنډ: بدلون) د فرضيو لاندې چی u = g (x) متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تيرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګراليدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمېرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی څنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه: عواړو د $f(x) = e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\dfrac{1}{2}e^{u}+C=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایښت: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :
وښایی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^{2}dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^{2}\frac{du}{1}=\int u^{2}du=\frac{u^{3}}{3}+C$$

بیرته بدلون: $\dfrac{u^{3}}{3}+C=\dfrac{(x+1)^{3}}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^{2}dx=\dfrac{(x+1)^{2}}{3}+C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيگرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8(x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int_a^b(x^2-x)dx$ انتيگرال ونيسى
- د $\int_1^5(x^2+5x)^3dx$ انتيگرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدى انتيگرال يې ونيسى.

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه : **وښاياست:** $f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1}e^{2x}dx$ د انتيګرال حل د بدلون له لارې:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

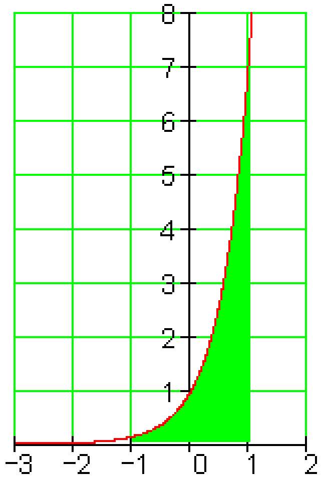
۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$
- پورته پوله

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

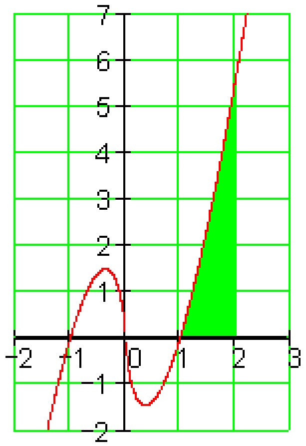
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



تمرين: لاندې انتيګرالونه وشميری يا حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x)=x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسونې په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلې بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که دf مشتقکونی سره يو ساده تابع منح ته راځي.
پيل
د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګتور دی، چی لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بيلګه:
د بيلګې په توګه لاندی انتيګرال شميرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\, \mathrm{d}x$$

يو ساده انتيګرالړ تابع $g'(x)$ او همداسی يو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نيسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتيګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نيسو او انتيګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x=u(b)\cdot V(b)-u(a)\cdot V(a)-\int_a^b u'(x)\cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=[u(x)\cdot V(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)\cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)
د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :
کله کله کېیدی شي ګټور وي، جی د مساوات ښی لور ته ټوته انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

$$\int\sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو $f(x)=\cos(x)$ او $g'(x)=\sin(x)$ ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x)=-\sin(x)\text{ او }g(x)=-\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int\sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x=[-\cos^2(x)]-\int\sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 وويشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+C$$

بيلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بيلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کيدئ شي دا بل ترم ،،له منځه يووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل ex = g'(x) کيږدو او د f(x) له پاره، د انتيګرال لاندئ ترم ، نو ترئ لاس ته راځي:

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنئ تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدئ شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" تېوته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1\cdot \ln(x)\,dx &= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx\\ &= x\cdot\ln(x) - x + C\end{aligned}$$.

جمله :

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو **$u = x$** ، نو لرو : **$du = dx$**

ږدو **$dv = \cos(x)\,dx$** ، نو **$v = \sin(x)$** لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه $\int x^3\sin(x)\,dx$

او $\int x^2 e^x\,dx$ کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x\cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بيلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: دا لاندې انتيګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دويم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دريم: $I = \int \ln x \, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه - ، پاراشنل کسرونو انتيګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتيګرال نيول

فعاليت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتيګرال نيول يعنې څه ؟

- د پورته تابع تعريف ورشو به نخښه کړئ.

د دې انتيګرال نيول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بيلګه :

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځايونو $x1 = -2$ او $x2 = -4$ سره د کرښيزو توابعو په ضريبونو تجزيه کيږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\,(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پيل کوو:

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعني کیڼ لور ته (A+B) افاده باید پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون یې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

<u>B=8</u>

<u>A= **(7-8)= -1**</u>

لیکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx + \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبیعي لوګایتم فقط له مثبت اعدادو شمیرل کیږي، نو یواځې ارزښتونه نیسو.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \mathbf{-1 \ln |x-2| +8 \ln |x-4| +c}$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع تو ټه شي. دا د تو ټه کسرونو تو ټه کوونې له لارې کیږي یا صورت نیسي.

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کي په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادې څخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

B=-4.8

A= (-5+4.8)= -0.2

نو ليکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط د طبيعي اعدادو شميرل کيدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

تمرينونه :

لاندې انتيګرالونه د تېوته کسرونو تېوته کوني له طريقې وشمېرئ

$$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \qquad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+13} \qquad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپاي انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپاى انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څير تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهيدنې لاس ته راځي د بيلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسيدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx = 1$$

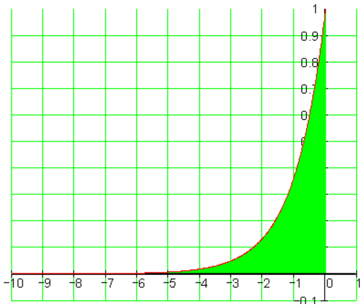
هم او د دې معکوس انتيګارلونه

$\int_1^\infty x^{-1}dx$ **او**

$\int_0^1 x^{-1}dx$ **ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو**

اوړي

يعنې د ناپاى په لور ځي..



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انټروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$$

تر اوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انټروال $[a ; b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې، $b \to -\infty$. یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول بربښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بربښي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0} - e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انټروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0} - e^{-b}\right]$$

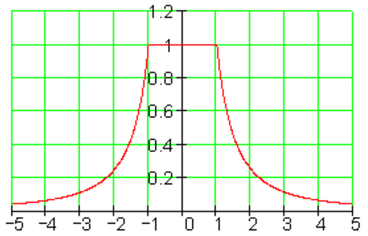
$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځای ایښول شوې یا یو ځای شوې تابع بیلګه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	د $x<-1$ لپاراه د $-1 \le x \le 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتيگرال په برخو وېشنه يا ټوټه كونه:
لاندې د انتيگرالونو تمعه دي و شميرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx + \int_{-1}^{1}dx + \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

لومړنی اند يا تر مخه فكركونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

داسې، چې دا انتيگرال بايد فقط يوځل وشميرل شي.

$$\int_{-1}^{1}dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = 2$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = 1$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1}dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx}_{1} = 1+2+1 = 4$$

تمرينونه:

١ -- د $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتيگرال وشميرئ، كه د ناپاي په لور لاړشي.

٢ – و څېړئ چې ايا لاندې ناټاكلي انتيگرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ b) $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$

c) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x}{(x^2+2)^3}dx$

٣ – د كومو توانونو p لپاره دا نا ټاكلی انتيگرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتيگرالونه د يوه انتيگرال پولې لپاره تعريف نه دي، و څېړئ، چې ايا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتيگرال په دې انتروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $I=[0;1]$ b) $f(x)=\ln x$, $I=[0;1]$

c) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I=[1;2]$ d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I=[-1;1]$

e) $f(x)=\frac{x^2}{x^3-8}$, $I=[0;2]$ f) $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$, $I=[0;1]$

ټولگه

د انتيگرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتيگرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيگرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحليلي تعريف:

تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتيگرال څخه د x په محور د f د گراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

پېژند (تعريف) ٤ . ١ : ليميټ $$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx=F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$ که په اينتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اينتيگرال بولو، يا F- Riemann (د ريمن سطحه). دلته a د اينتيگراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایتیګرالوني پورته پوله بلل کيږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینتروال او(Integrand) (f(x) اینتیګرالپدونکی) او dx اینتیګرالوني) Integrationsvariable) متحول بلل کيږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پيژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پيژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدئ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتيګرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو يا لارو شميرو، نو زيات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

د ښېرکي تمرينونه:

۱ - لاندې ناا‌صلي پولينومونه دې د يوه تول ګويا عدد پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په ښېر وليکل شي.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۲ - لاندر پولينومونه دد جمعې په ځېر وليکئ

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ ـ د لاندې اصلي پولينومونو پہ ټوټہ کسرونو ټوټہ ګونہ ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

٥ ـ د لاندې پولينوم کسرونو پہ ټوټہ کسرونو ټوټہ کونہ ړرکړئ.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښايئ، چې د F تابع د f تابع لومړنى تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7\ ,\quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3\ ,\quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1}\ ,\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x\ ,\quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3\ ,\quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی يې و ازمايئ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx \qquad f)\ \int (e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int (2+e^x)dx \qquad l)\ \int (1+\ln x)dx \qquad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^{2} x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^{2} (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$

$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$

---

۱۷ – هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$

$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$

- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8} \sqrt{1+x}\, dx$

$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x} dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi} \sin^{2} x dx$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt \ , \quad la(x) = 31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt \ , \quad la(x) = e-1$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^{2} \ , \ a = 3 \qquad b)\ f(x) = 2+e^{x} \ , \ a = 0$

$c)\ f(x)\dfrac{1}{\cos^{2} x} \ , \ a = 0 \qquad d)\ f(x) = 2 \ , \ a \in IR$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\ \ ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیگرال بدلون وروسته یي اینتیگرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٢٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینتیګرال وشمیرې:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\qquad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\qquad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ \ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

٢٥- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یې اینتیګرال وشیمرئ

٢٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرې:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

٢٧-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int 0{,}2x \cdot \sin x\ dx, \qquad b)\ \int 4x^3 \cdot \ln x\ dx, \qquad c)\ \int \cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int \cos x \cdot \sin x\ dx \qquad e)\ \int x^2 \cdot \sin x\ dx \qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\ dx$$

$$g)\ \int x^3 \cdot e^x\ dx, \qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x\ dx,$$

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

پـه ځلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د سطحې مساحتA ښايي ، چې له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چي y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعاليت:

--د يوې په خوښه تابع د منحني يا کرښې او د x محور ترمنځ او يا د دوه توابعو د سطحې شميرلو لپاره وړانديزونه وکړئ.

- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونيسئ، که منحني يا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- يوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتيګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- يوه په خوښه تابع وليکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بيا وڅېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که مورږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:

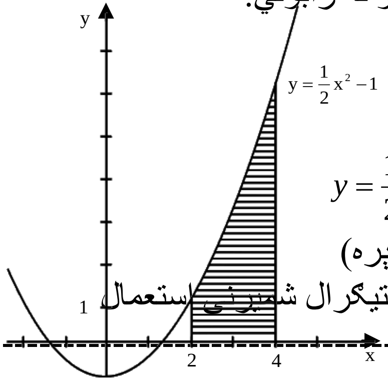


Bild 21,3

بېلگه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

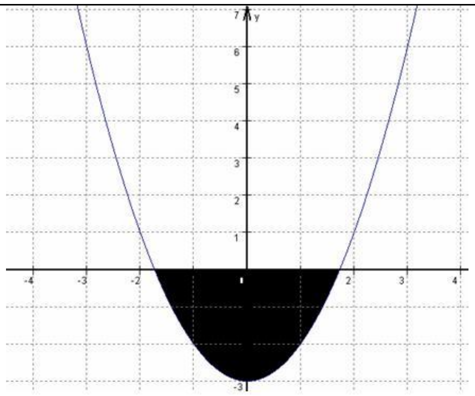
ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېره)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع (x)y=f سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیگرال.

	بdلگه ۵ . ۲ : د f(x)=x²-3 گراف د x محور سره یوه سطحه رابندوي.د گراف او x محور ترمنځ د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دي لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دي لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

---

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحې مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې ځېره)

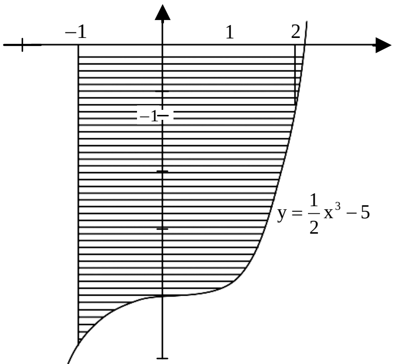
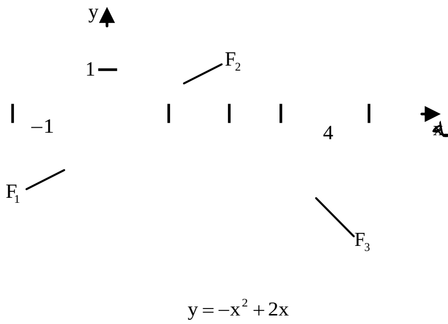


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو x_1=-1 تر $x_2 = 4$ اودمنحني y=-x²+2x او y=0 ترمنځ دx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کې نښانه شوې ده) دې وشمېرل شي

حل : د تابع ,y=-x²+2x د x1=0 د صفرځایونو x_1=0 او x_2=2 تر منځ پرته

غوښتونکې سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)dx - \int_{2}^{4} (-x^2 + 2x)dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{2}^{4} = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کږې $y = -x^2 + 2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

تمرینونه

: - په ورکړ شوي انتروال کې د گراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = x - 2 \qquad , \quad x \in [-2;3]$

$b)\ f(x) = x^2 - x - x \qquad , \quad x \in [1;5]$

$c)\ f(x) = x^2 - 8x + 12 \qquad , \quad x \in [0;8]$

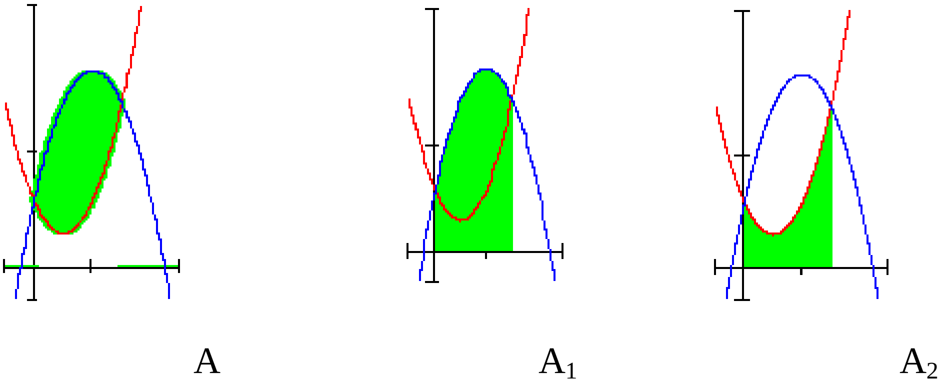
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

- كه داسې يو ډنډ ولرو، نو فكر وكړئ، چې د دې ډنډ مساحت ښنگه وشميرو؟

په ځنو پوښتنو كې د سطحې مساحت شميرل كيږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت كېدى شي د ټاكلو اينتگرالونو د كمښت له لارې و شمېرل شي. كه دواړه گرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما ښخه مخ ته ځو :

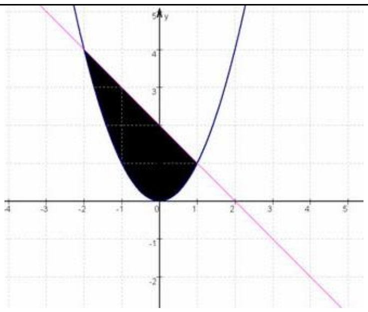


$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>بیلگه ٥ . ٥ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

---

٢ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

٣ – په ساده توګه لیدل کیږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^{2} dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=-1,5-6++=-4.5$$

$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو f(x) = x² -2x +2 او g(x) = -x²+4x +2ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 =0$ او $x_2 =3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

د اینتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

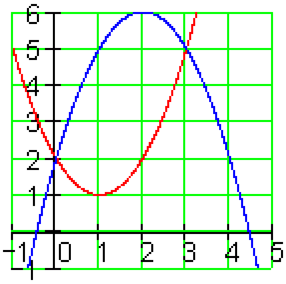
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

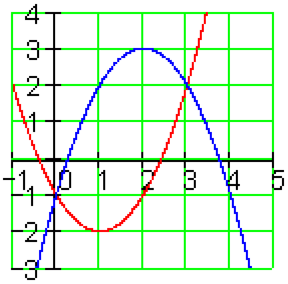
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت ښخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهيږو، د يوې سطحې مخنښنه ددې په واک کې ده، چې ايا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ښيږو، چې ايا دا تاثيرات په پورتنی بيلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(يوونونو) کښته لورته بيايو او سطحې نوې شميرو.





که د ليد له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انټيګرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

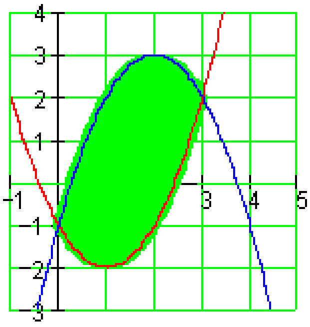
دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}\right|$$

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:



که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني ځخه رابنده وي، چې تابع(x)f او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيکرالوني حدونه a او b د x – محور د

دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوښتکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

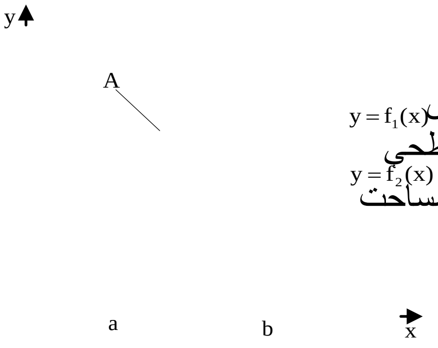


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$
په $[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت
کم کړئ.

$$A=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

سرې په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

۲۶۲ د دوه کرښو څخه رابنده

-- ----

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

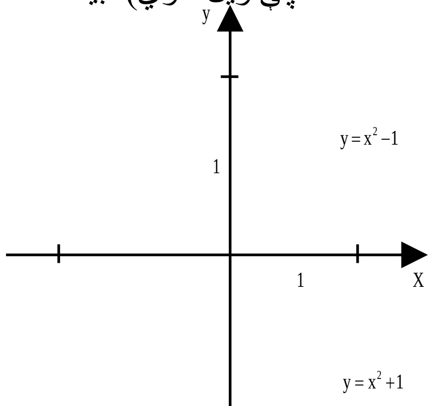
$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2=2$

$x^2=1$ $\qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول
شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سرې(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا
داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.
$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

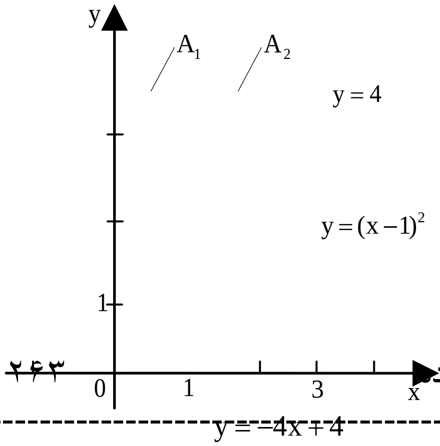


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو ښخه لاس ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي د دوه کرښو ښخه رابند

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ \ x_1=0$ په همدې ډول د

ښي غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

ګورو چیA2د $y=-4$ او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)$x1=1$ او د لومړي
وضعیه قیمت د ښي غوځټکي د $y=4$ او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 \left[4-(-4x+4)\right]dx + \int_0^1 \left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2+2x+3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x) = x^2 - x - 6\ ;\ \ g(x) = 4x - 10$ 2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3\ ;\ \ g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)\ ;\ \ g(x) = 0.75x + 3$, 4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}\ ;\ \ g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

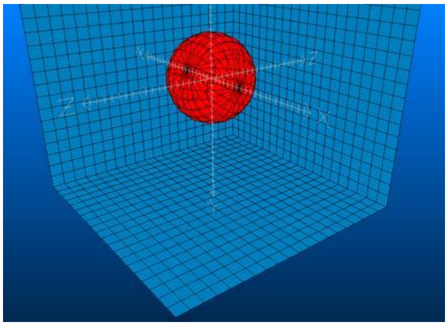
5) $f(x) = (x-2)^2 - 4\ ;\ \ g(x) = x - 1$ 6) $f(x) = x^2 - 4x + 1\ ;\ \ g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\ ;\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 8) $f(x) = x^2 + 3x\ ;\ \ g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2 - 2x - 1\ ;\ \ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ 10) $f(x) = -0.5x^2 + 2\ ;\ \ g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دي تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

ځرخيدونکي تنونه:

ځرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه ځرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني ځرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور ځرخيدنه(ځرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و ځرخول شي.

د یوه ځرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له گراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور ځرخېدنه

د یوې سطحې په ځرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع گراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

 ځرخېدونکي تنونه:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\, f(b))}^{\max(f(a),\, f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توگه حجم لاس ته راوړو:

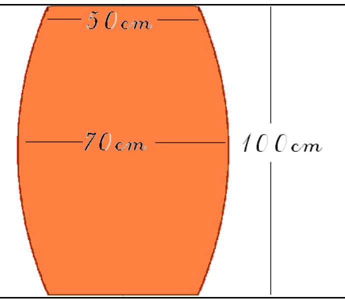
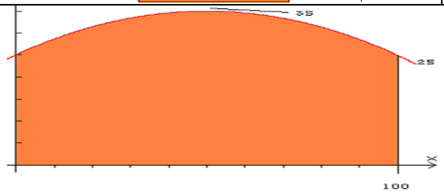
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\, f(b))}^{\max(f(a),\, f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \, dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیگرال په حدونو کې خورا جگ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیگرال تظمینوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

د يوه مرتبان حجم: د يوه مرتبان حجم غواړو پيدا کړو چې جګوالی يي 1 متر، وړانګه يي 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتيمتره په منځ کې ده.	
که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع بايد کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.	

حل: د پارابول د تابع ليکبنه کېدی شي ساده په ککرتکي يا راس باندې وليکل شي.

خرخېدونکي تنونه: ۲۶۷

تېليز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په ديسيمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزوني ضريب a په لور اړين دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضريب a نه شته. که په فرمول کي يو معلوم تکی کيږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا تکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کيږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال يا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنۍ تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شميرلو لپاره ټاکلی انتيگرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\;dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\;\cdot 101.167$$

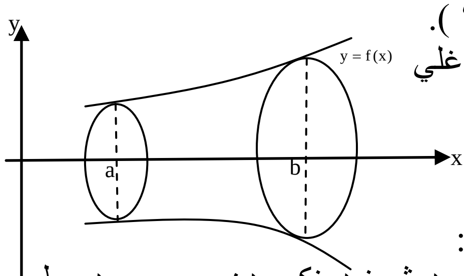
د حجم واحدونه (يوونونه يا يووالي)

دا چې موږ له پيله په ديڅيمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په ليتر شمېرل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= 317.824\ liter$$

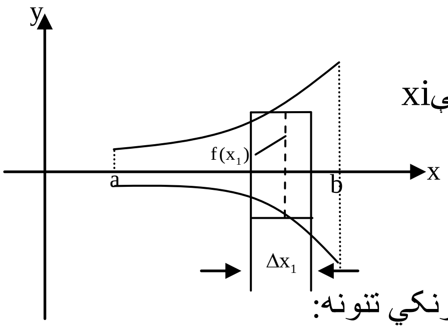
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ
سطحه چې دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي
دڅرخيدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده



جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له
لارې چې وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi
د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توټې
(سليندر ډکی(حجم) دی.



څرخېدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

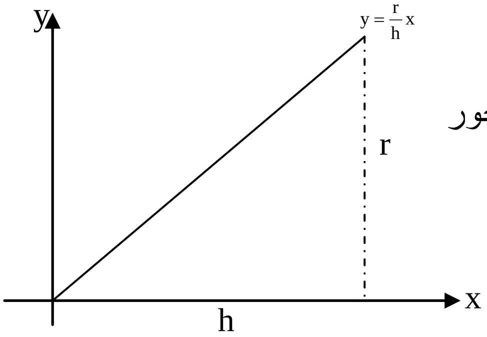
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی (حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچیني تیره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونو x=0 تر x=h پورې(ش . ۱۱)



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنسټیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ \ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم ځرخېدلی پارابولویید دی (ځ ۵ ږ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.$$

y

$y = \sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

د ارشیمدس جمله Archimedischer Satz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

$$\text{oder: } \quad " : " : " = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$$

$$" : " : " = 6 : 4 : 2$$

$$" : " : " = 3 : 2 : 1$$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

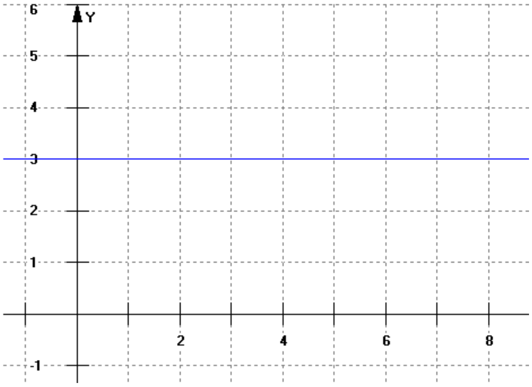
د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې وموند، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د ځرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بیلګه ۵ . ۱۱:

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۱

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د$f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

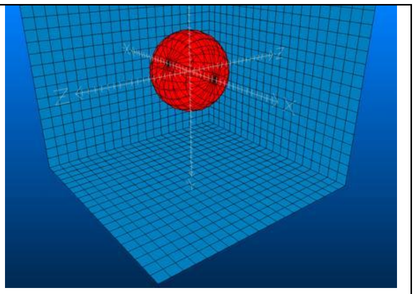
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

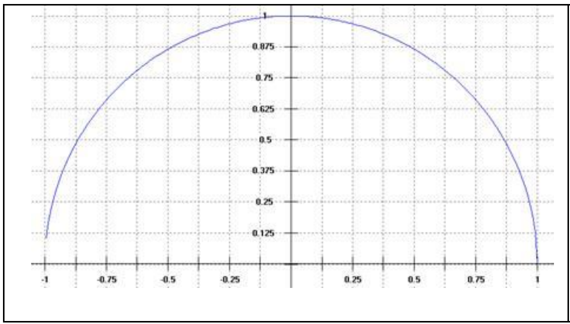
$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعاليت:

- د کري حجم بې له انتيګراله وليکئ.

- د توتي حجم وليکئ

- د مخروط حجم وليکئ.

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۳

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

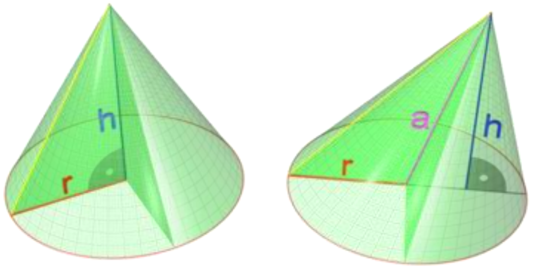
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، یعني په انټروال [1;1-] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظمn زاویو (اړخیزې(کونجیز) څخه رابندې بنسټیزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نږدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله
۲۷۴
ځرخېدونکي تنونه: ----------------------------

مرستندویه لار. یو د کارتیزي وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کیږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچینه (0|0) او منځ ټکی په ټکي (h|0)کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې ګردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قېمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاې کوچنۍ توټې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\ dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توټو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيګرال جوړوو، د انتيګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاې چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بنه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په *[0, 2]* انتروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دئ؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x = \pi\cdot\int_0^2 \frac{x^4}{16}dx = 0.4\pi$$

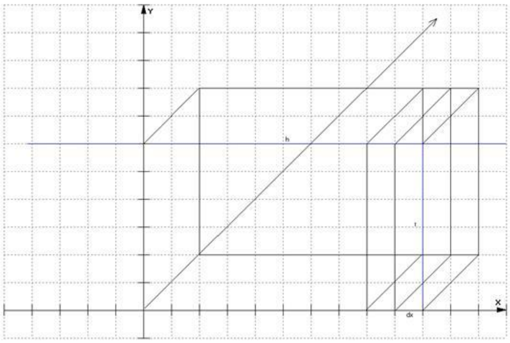
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم ډکی یا حجم.

مستطیل یا بربع المکعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم يې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي ($V = r^2h$) او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅې (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیگرال ونیول شي. په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

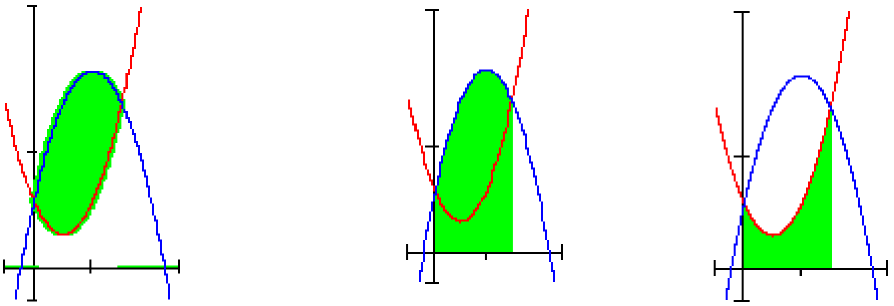
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۸

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انټروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یو غړیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یو غړیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کې دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

څرخېدونکي تنونه: ۲۷۹

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخيدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کیدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې بیا حجم وشمیرل شي.

تمرینونه:

١ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشمیرئ.

٢ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

٣- د هغې سطحې مساحت وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنیو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

f) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

h) $y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

i) $y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$

---

o) $y = x^2, \quad x = y^2:$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

٤-- - د ساين د منحني گراف او د کوساين د منحني گراف يو بل په انټروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو غوڅېدونکو تر منځ له دوارو منحنيو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y = e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y = -x^2 - 1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶ - د کربنې g د $y = 2x^2 + 1$ سره او په اينتروال $[0, 2\pi]$ د ساين منحني د y=sin x سره ځخه رابنده سطحه وشمېرئ.

۷ - پارابول p_1 د $y = x^2 - 3$ سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره د $[-1,2]$ په اينتروال يوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸ – د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کربنه g يې د y = -x-1 سره په اينتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹ - په اينتروال $[-2,1]$ د g_1 کربنې د $y = x + 3$ سره او g_2 د 2x+1 سره ځخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰ - – پارابول $y = x^2 - 6x + 5$ د p سره او کربنهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۱-- د g يوه کربنه يو پارابولp د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوڅوي.

د کربنې او پارابول ځخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y+0,5x^2+x+4$ سره په د $x_1=-2$ او $x_2=4$ ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0\leq x\leq 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړوغوڅټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\quad f(x)=2+\sqrt{x}\,,\quad |=[0;4]$ $\qquad b)\quad f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1\,,\quad |[2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=-x+5,\ \ |=[0;3]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ ,\ \ |[1;5]$

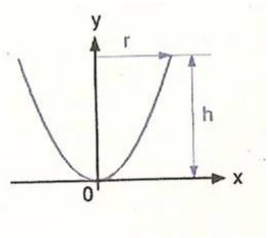
۱۷--د لاندې توابعو ګرافونه هر یو د y په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x}\ ,\ 1=[0;4]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=(x-2)^2\ ,\ 1=[1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو دy په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يې و ازمايئ.

$a)\ \ f(x)=x+1\ \ ,\ 1=[1;4]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\ ,\ 1=[0;4]$

۱۹ د پارابول په سیومتري محور yد پارابول د څرخیدو سره یو لوښی منځ ته راځي. وښایئ، چې دا $v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$ حجم لري.



$$v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$$

۲۰ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0\le x\le 2\pi$ کې غوځوي.

۲۸۴ ځرخېدونکي تنونه:

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع ګراف د $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع ګراف د $y=a.(1-\sin 2x), (a>0)$ سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت $(x-2)$ سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخیدونکي بدنونو ګراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تنونو حجمونه(ډکي) وشمېرئ.

$a)\ f(x)=2+\sqrt{x}\quad ,\quad I=[0;4]\qquad\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2\quad ,\quad I=[2;4]$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو ګرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکي) وشمېرئ او په ساده حساب سره یې وشمېرئ.

$a)\ f(x)=-x+5\quad ,\quad I=[0;3]\qquad\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\quad ,\quad I=[1;5]$

۲۵--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تنونو حجم وشمېرئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad ,\quad |=[0;4]\qquad\qquad b)\ f(x)=(x-2)^2\quad ,\quad I\ |=[1;3]$

۲٦---- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره یې هم و شمېرئ.

$a)\ f(x)=x+1\quad ,\quad |=[1;4]\qquad\qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad ,\quad |=[0;4]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad ,\quad |=[0;4]$ $\qquad b)\ f(x)=(x-2)^2\quad ,\quad |=[1;3]$

$a)\ f(x)=x+1\quad ,\quad |=[1;4]$ $\qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad ,\quad |=[0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړڅه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (مېرې) شينواري چاپ او ناچاپې ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو ځو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راځخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو ځخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپریږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شميرپ،هنه

زما ليکونه:

Dr. Makhan Shinwari   ډاکتر ماخان شينواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوريت جمهور ريس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نيسم، خو دا راته ډېر اړيين برېښي او پرته له تاسو به يې څوک دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهيږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځايه پيليږي، چې بنسټ يې بايد سم وي. همداسې نصاب د يوه هيواد د پوهنې مغذ دی، نو بايد همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نيسم او په همدې ډول ستونځوبيو يا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسيد. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل(ليکنې مې يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستي او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يواځنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يواځي د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريږم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوږوم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان رياضی معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکى وخت شمېرپوهنه يا رياضي ابادېدى شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينوارى

د نصاب د کتابونو د ناسمون په څنو برخو د نموني لپاره لنډه څيرنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شينوارى

د ۲۰۱۳ زک لومړى نيمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ـــم ټولګي د شمير پوهنې يا رياضي کتابونه مې په پښتو او درې وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ـــم ټولګي د شميرپوهنې (رياضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دويم : د کتاب خوندېوني يا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما ليکلي وو هغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعنې د ،، پولي ارزښت،، يا ليميټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ريا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلې نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوښت:

دا بايد په ګوته کړم، چې زما ليکنه په نړيوال معيار وه، چې منځپانګه يا متن يې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په درې وليکه.

دويم: دا لومړۍ ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو او داسې څه له انګريزي ادبياتو رانيول شوي وه.

دريم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې ښه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یوائې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بربښي؟

تاسو پوهیږی، چې د ۱۲ ـم ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډېرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلي لومړیَ او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچنې اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرڅا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړیَ، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زوربېدلی یم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږېږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری

يوه هيله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او راديو تلويزيونو څخه هيله لرم، چې دا زما ليکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده ليکنو هم همدا مرسته وکړي.

د رياضي کتابونو د چاپ مخه ونيول شي

ولې؟

په دې نږدې څو مياشتو کې د نصاب کتابونه بيا چاپ ته وړاندې کيږي او ګومان مې دی، چې داسې د معيار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله يې د چاپ مخنيوی اړيين او په همدې ډول يې سمون هم اړين دی، چې په لاندې کې يې ستونځو او ستونځوبيو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نيسم.

زه د شميرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هيله ده، چې دا ليکنه شخصي وه نه نيسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شميرپوهنې په کتابونو پيل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه ليکلي، چې له جملې يې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره يې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کې‌اوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شميرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول یوائې زما د شمیرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زیات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلي نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شمیرپوهنه په ګډه سمه او معیاري کړو.

ګرانو هیوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې ساری زیانمن کړی او همداسې په پوهنیز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دئ پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هیواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغذ دی، نو له دې امله زیاته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه ولیکل، د قرارداد وخت پوره شو، پیسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما لیکلي کتابونه چاپ نه شول – علت یې دا وو، چې ګران لیکونکي یا لیکونکي وښایي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هیواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای یې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته یو لیک هم لیږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتیجې ته ورسیدم، چې د ریاضي کتابونه باید سم او معیاري چاپ شي او نه دا ناسم بیا چاپ شي.

دا وړاندیز ولې ما په نصاب کې نه دئ کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشينۍ سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسيږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو ليکنو لپاره وړانديزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په ميز ايښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او يا يې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د ليکنې متود ښه ونه برېښيده، ځکه چې استادان د دارنګه ليکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زياتې څنګيزې ليکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتيل، چې د کتابونو د چاپ مخه بايد ونيول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی بايد ښوولی وي، چې د کتابونو معياري او سم ليکلو امکان هم بايد شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زياتو برخو ته يې ، څو واره وړانديزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار بايد ډېر په بيړه وشي، نو دا کار هم کيدونکی دی، خو بايد څو تخنيکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې ليکنه کړې، چې ګران لوستونکي يې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مينه وال او په دې هکله ليوال يې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه يوه برخه داسې د نمونې په څير څيړلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ښوونځيو ښوونکي په ستونځو وپوهېږي، نو اړيين بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه ليکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې يې راکښته کيدی شي او هم يې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغيزمنو هيوادوالو څخه هيله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د ښوونې معياري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تير شم.

دويم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسيږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داخه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما ليکنې د افغانستان اسلامې جمهوريت جمهورر ريس جلالتمآب اشرف غنې او د پوهنې محترم وزارت ته ليک کې هم لوستلی شئ او هيله مې ده، چې ويئ لولئ.

ستاسو له ګنو مشورو به ډېر مننداوی يم.

زما د برېښنا ليک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

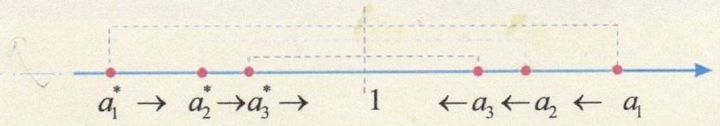
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کیڼې لورې یوې پولې ته ځغلولي.

د کتاب ۳ ــم مخ

پایله:لیدل کیږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتیدو سره نږدې کیږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کیږي او همداشان د a_n^* د ترادف n – ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کیږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لوري ليميټ ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته.
دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې
کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کيڼي لور
ليمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څيړل(که چيرې څيړنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعني څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ...
ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول
وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختيـاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا پـه لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي پـه داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد تـرادف موجود وي پـه داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\forall\delta>0:|x-a|<\delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} x=a \quad \text{یا} \quad x\to a \quad \text{یا} \quad |x-a|\to 0$$

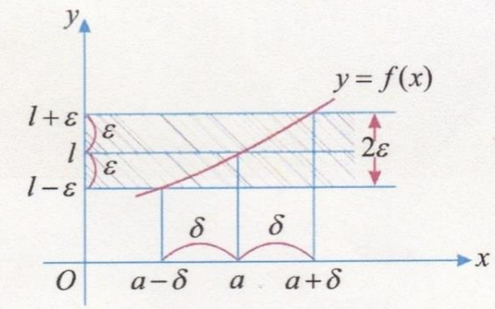
ډول ليکنو سره ګران ليکونکي بلدتيا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې ليکنې د ښوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو ليکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکې هم دا څه ناسم يا بې له تشريح کارولې.

په دې هکله زما ليکنه په لاندې کې شته.

دريم: په لاندې تعريف کې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضيکي تعريف خو نه پوهيږي، خکه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتيا کې هيڅ سر او کارنه لري.

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کيداى شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوى. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدى شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدى کيږي، نو ويل کيږي چې د $f(x)$ تابع ليميټ عبارت له l څخه دى، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x\to a} f(x)=l$ يا $\begin{matrix} x\to a \\ f(x)\to l \end{matrix}$



$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \ : |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \quad (|x-a|\to 0 \Rightarrow \ |f(x)-l|\to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

باید د $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا باید څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دویمه بیلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دي.

حل: د ښي او کیڼې خوا لېمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼې خوا لېمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

په پورته کې xد 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښی لورې او نه د کيڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بيلګې حل يې هم بيا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعني دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې درونډ لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ. توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومیږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعني: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څېړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

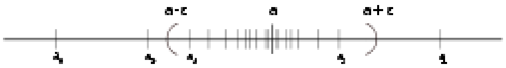
د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څېړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسي وي، نو عدد $a\in\mathbb{R}$ د دې ترادف یا پرلپسي پوله ارزښت بلل کیږي او پرلپسي a ته کونورګیر کیږي یا a ته هڅیږي یا نږدې کیږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسې د پرلپسي یا ترادف ټول غړي(دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تیریږم)

لنډ پیژند یې:

عدد $a\in\mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کیږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو طبیعي یا پیداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس N شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنخښې وروسته د پرلپسي(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي یعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې ليکنو لپاره د ε (لوستل: اپيسيلون) توری ورځنی يا مروج شوی.

بيلګه:

په يوه بيلګه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورګنت وښايو، يو د مخه ورکړ شوي ε ته يوه په خوښه طبيعي عدد يا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پيژنو يا تعريفوو:

پيژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کيږي، L دی او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to p} f(x)=L$

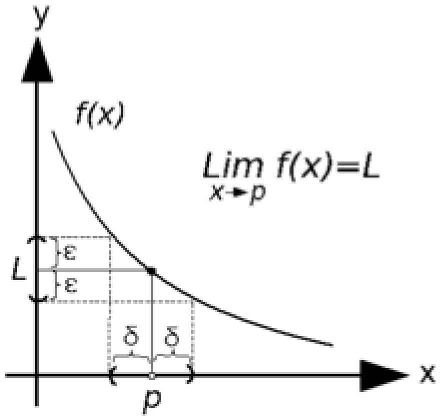
لوستل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر 0 < ε لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره ε > |f(x)-L| هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې ځیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، تیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په ځټ، یا له دې لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس چې د هر ε < 0 لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره -|f(x) ε > |L هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – كه ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاكتر ماخان شينواری.

د ډاكتر ماخان شينواري ليكنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابښادي پستو او اروابښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کي د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغئ.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library