

حُمكچپو هنه (هندسه)

# Geometry

ليكونكى:

ډاكټر ماخان (ميرى) شينواري

2012

Ketabton.com

جرمني د بن بنار

## حُکمکچپوهنه ( هندسه )

لیکونکی:  
ډاکتر ماخان (میري) شینواری

ناچاپ



خمکچپوهنه (بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

۱ ټکي ، کرښه ، هواره (سطحه )  
نيمه – يا نيمهواره ۷

۱۱ کونجکليمه

۱۴ څرخونپروسه: څرخونکنج :

۱۵ گراد

۱۷ کونج کلمه

## حُمکچپوهنه (بنسټیزه هندسه)

### هندسي بنسټيزې کليمې

#### ټکی ، کرښه ، هواره (سطحه )

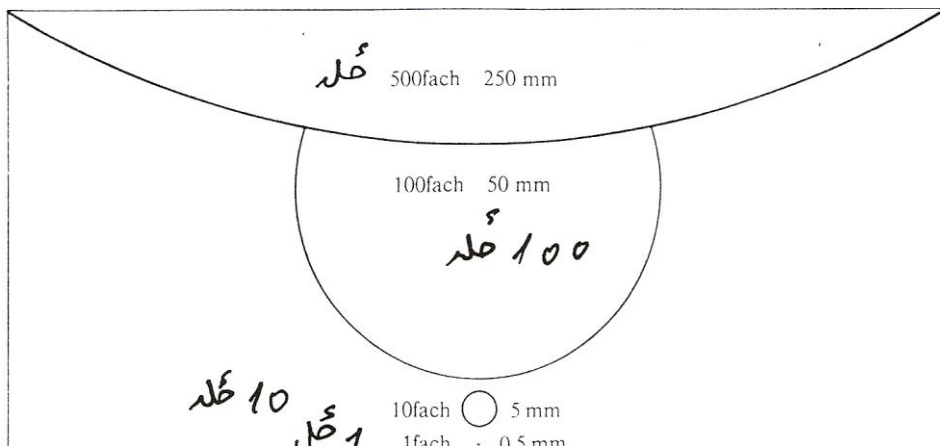
پېژند(تعريف): اویکلید(Euklid) اویکلید وایي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددی پېژند ستونخی په دي کی دي، چی بیا نو د داسی واره شي خُخه خُنگه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو خُنگه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیري؟ یا یی که مایکروسکوپ له لاري لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لاري گورو چی ټکی څرگند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه خُنگه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:

په لاندې کی گورو، چی ټکی د همدې شمیروني له لاري څومره غټیدلی شي

یادونه : هندسه ځمککچ ته وایي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي . همدا اوس هم، له دې امله چي په هندسه کی ډیرڅه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي ).

لنډ: شیان یا لیدیدونکي «رانیولور» (یا شي ډوله څرگندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چي نومونه اړوند (ترلی) کره وټاکلی شو، او همداسی یي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکر وړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چي گوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولور دي، ساده بنکاري، مگر په خپل دننه کی (خپله خټه کی) خورا پیچلي دي چي یواځی وړ نږدې پیژند(تعریف) بی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-مور په لاندې څیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو



گورو چي ټکی هواري او کرښی ته پراخیدلی شي یعنی عملي څیره ښوونه یا شکل نڅښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیک) ښوونه یي ضرور ده ، یا نه پریښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توگه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکي ادیاله(خیالي) څیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه ، د دې لپاره، چي ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی ډیری کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړځتونو ( څیرو) لاندې ، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیری ، داسی تعریفوو:

لنډ: ټکی او کرښه

## سرلیک

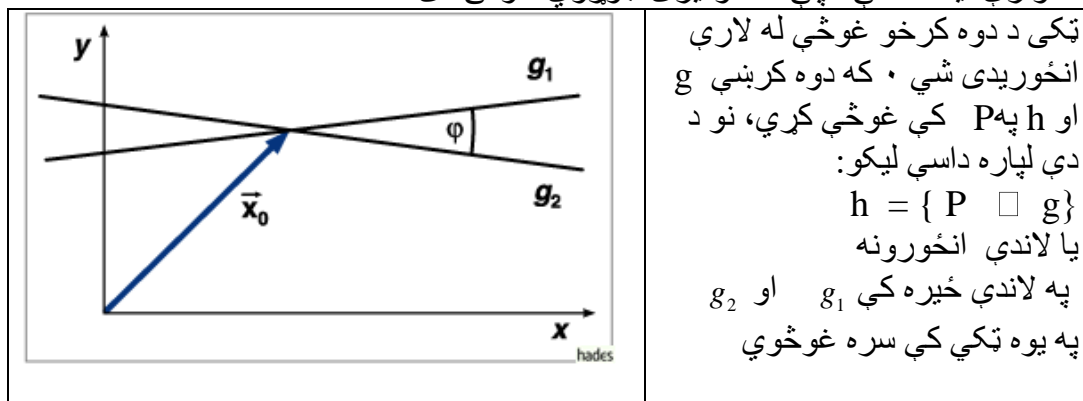
پیژند(تعریف) :

یوه هواره یا سطحه د یوې ډیری په څیر کلکه نیسو، چی توکی یی ټکی بللکیري. او په غټو لاتین تورو یی بنایو لکه  $A, B, C, P, Q, \dots$  ، په هواره کی یوه برخدیری په نڅبنه شوې ده، چی توکی یی کرښی بلل کیري او په کوچنیو لاتینی تورو  $a, b, c, \dots$  سره بنسول کیري

یا په بل ډول: یوه هواره  $E$  د ناپای ټکو ډیری ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیگور یا شکل) بلل کیري.

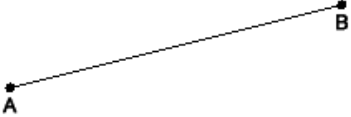
د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول) لکه د بیلگي په توگه د کاغذ دمخ ( تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندی لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چی یوه هواره دوه دیمینزیونال ده ( دوه اړخیز یا دلته بڼه دی چی د اړخ په ځای خوا ووايو، ځکه چی اړخ مو  $n$ -گوډیو لپاره کارولی دی. دلته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی. ) په دې کتاب کی او بیا دي موضوع کی له ورو څرگندونو تیریرو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو) .

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چی هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی د هوارې یا سطحې، چی د ټکوډیری جوړوي، توکی دی .



پیژند :

ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه)  $AB$  د ټولو ټکو هغه ډیری ده، چی له ټکي  $A$  او  $B$  ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعنی که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چی د غاړې ټکي  $A$  او  $B$  هم په دې پورې اړه لري. یعنی ټکی  $A$  او  $B$  هم په دې کرښه پراته دي، داسي لیکو:

	$A \in AB; B \in AB$ يا هغه کرښه، چې دوه ټکي په لند وائڼ کي سره وټري بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښي توکي دي
---	--

که بند کرښه د «خیر کرښي» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیډلی شي، چې مور دا کرښه بولو.

کرښه د ځمکچپوهني بنسټیزه کلیمه ده. لیدور د اویکلید جیومتری کي دا یوه ناپای غزیډلی کرښی ته وایي، چې ناپای نری وي، د لاندې خوینو سره:  
 که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لند وائڼ په نڅښه کوي، چې مور ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو.

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي. اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسي ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرگند ورکړ شوی او نیول شوی یاني مور یې پیژنو.

### پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB) - دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپانکرښه) AB یا g ویل کيږي. بندکرښه نو بیا د (ناپای -) کرښي اصلي برخدیری ده.

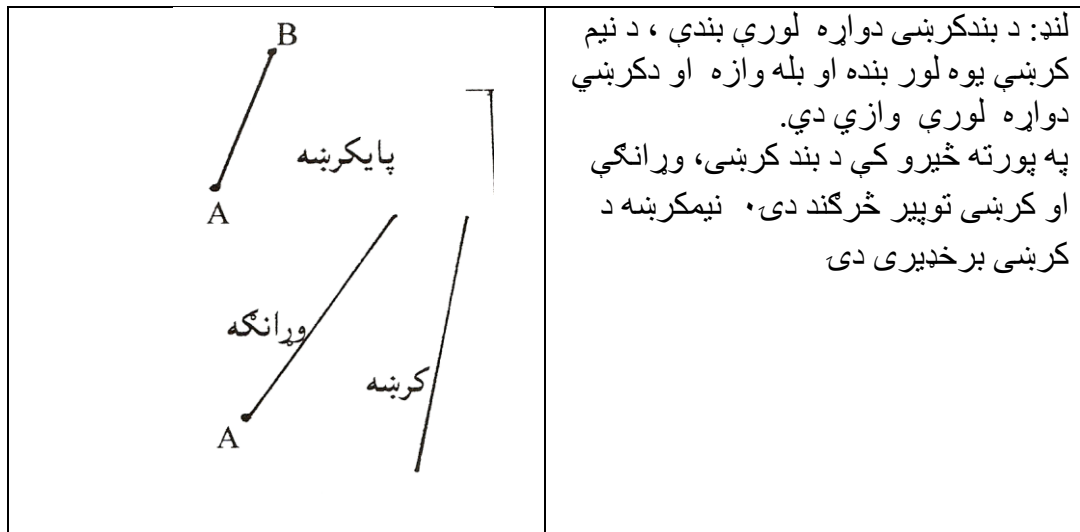
په نڅښونه یې g (برخدیری)  $AB \square$

طبعاً کیدی شي، چې کرښه په یوه لور و غزول شي

پیژند :

که بندکرښه یواځي په یوه لور ناپای و غزول شي، (نا پای) نیمکرښه شي (ناپای) نیمکرښه یا وړانگه (شعاع) بلل کيږي. نیمکرښه یا وړانگه یوې لورته بنده او بلې لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعنی پیل لري مگر پای نه لري.

## سرلیک



که په یوه هواره کې په یوه کرښه  $g$  ټکی  $P$  کینسول شي، نو وایو چې  $P$  د اینځیدیر (inzidiert) کیري یا ټکی  $P$  په کرښه  $g$  پروت دی یا  $g$  له  $P$  تیریري او  $g$  د هوارې  $E$  سره اینځیدیرت کیري، په دې حالت کې د اینځیدینځ اړیکو (inzidenzrelationen) یا «پروتوالی اړیکو» څخه غږیرو.

که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار (kollinear) کوپلاناړ (چې په همغه هواره یا سټخه کې شته وي)  $komplanar$  وایي. که یو ټکی  $P$  په دوه (زیاتو) کرښو  $g$  او  $h$  پروت وي نو دا د  $g$  او  $h$  غوڅټکی بلل کیري او داسی یې لیکو:

$$h = \{ P \cap g \}$$

د پام وړ: ټکی د ډیری نوک کې { } لیکل کیري (یا د ډیری غیر کې نیول کیري)، ځکه چې ناپاڼکړنې  $g$  او  $h$  د ټکو ډیری دي او ټکی  $P$  د غوڅدیری توکی دی.

که چیرې ډیری ناپاڼکړنې په یوه ټکي کې سره غوڅی کړي نو کوپونکتال (kopunktal) بلل کیري، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاڼکړنو غونچه (Büschel) یا بهتره ستوری جوړوي.

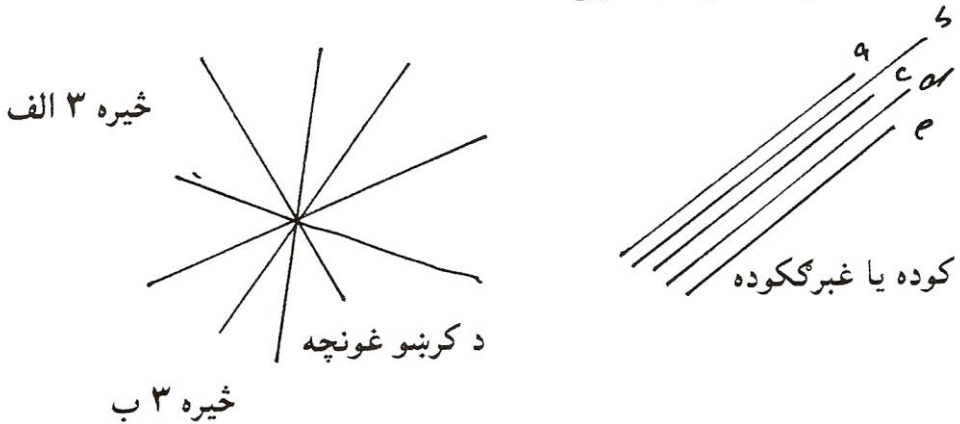
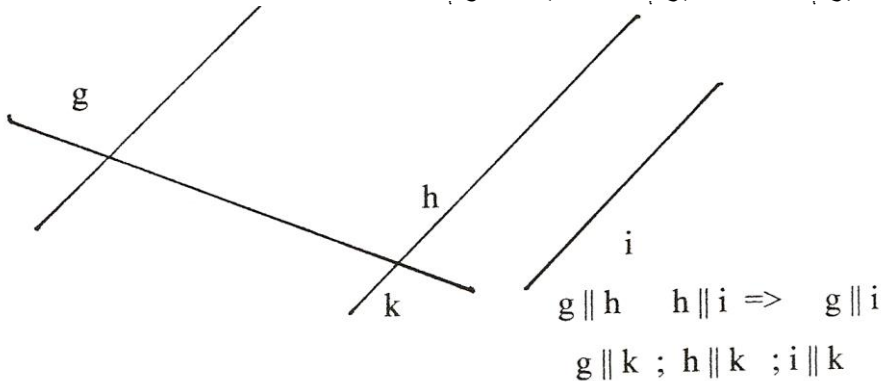
د کرښو کوده (څېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند (تعریف): کرښې  $g$  او  $h$  یې له گډو ټکو یا بهتره: بی له غوڅټکو غیرگړنې (موازیکرښی) بلل کیري، لیکدود (مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې دی  $g \parallel h$

کرنښی د ناپای ډیرو غوڅتکو سره کټمټ یا (ایدنتیک *identisch*) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرنښی سره غبرگی دی •

ددې لپاره لیکو:  $g = h$

ناغبرگی کرنښی  $g$  او  $h$  په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي:  $g \parallel h$  ( دا دې منل شي، چې دا د ناغبرگ کرنښو لیکډول دی یا لیکدود) •  
د لاندې څیری شننه د څیری کښته لیکل شوي:



هندسی څیره : یوه هندسي څیره یوه ناتش ټکیډیری ده. هغه لاین ( یوخوايز یا یو دیمنزینوال (لاتین: په ټولیزه توگه مانا یی: هر ی لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونۍ (1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرنښه پروت وي او ټکی نه وي . پیژند(تعریف):هغه هندسي څیره «هواره ( Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مگر نه په یوه ټکی پرته وي • هواره یا سطحه دوه پراخیدوني یا -دیمنزینوال(2 Dimensional)ده •

په پورته کي د کرنښو کوده یا د کرنښو ډله سره غبرگي هم دي •

## سرلیک

دلته  $A < B$  په دې مانا ده چې «  $A$  په یوه کرښه  $g$  د  $B$  تر منځ یعنی څمور په بلد دود، کین لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه  $g$  څغاسته باندې لمړی د  $A$  ټکی او بیا په ترتیب د  $B$  او  $C$  ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکې له لارې لوریزې کرښې ته راځو. دا په دې مانا چې داسې کرښې لوریزې کرښې دي. یعنی په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یې څرګند دی. منځ اړیکې  $Wz(ABC)$  دا مانا لري چې یا  $A < B < C$  او یا  $A > B > C$ . دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدي شي یعنی سمت یې ټاکل کیدی شي.

تعریف:  $g$  دې یوه لوریزه کرښه وي او  $A$  دې د  $g$  یو ټکی وي، نو د  $A$  بدل یا توپیري ټکی کرښه  $g$  په دوه برخه یو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخه یو ته ټکی  $A$  ورزیات شي، نو له  $A$  څخه په  $g$  پیدا شوي وړانګي منځ ته راځي.  $A$  منځ ټکی او  $g$  د دواړو، نسبت و  $A$  ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیل ټکی  $A$  او له دې توپیر ټکی  $P(P = A)$  له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کې زیاته کاروول

کیږي. دا په دې مانا، چې بل نه شته (ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په  $AP$  ښوول کیږي. دې  $AP$  ته مخامخ یا په څټ وړانګه په  $AP$  ښوول کیږي. تل باور لري:

$$AP^+ \cap AP^- = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^+ \cup AP^- = Zw(AP)$$



که وکتلی شو چی د پای کرنی یو سر له بل خخه د مخه پروت وي، نو پایکرنه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کین لور ته پرته وي نو کرنه په AB بنایو د کرنی لوریزوالی د یوه غشی په مرسته بنوولی شو یعنی: پایکرنه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په خت پرتی دي.

### نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

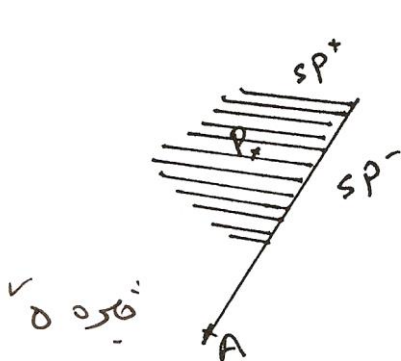
تعریف: هره کرنه  $g$  په هغی کرنه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشی. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته، ټیک او ټیک هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرنی  $g$  کوم ټکی نه وي پروت.  $g$  د دواړو هرې یوې هواره ټیکرنه یا لنډه: ژی یا غاړه ده. د یوې وازې هوارې او ژی کرنی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ټیکرنی پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په خت نیمهوارې بلل کیږي.

که ټکی A او B له  $g$  پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرنی  $g$  په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرنی او یوه ټکی P له لارې (چی په ټیکرنه  $g$  نه وي پروت) یواځنی ټاکلی ده، یعنی له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

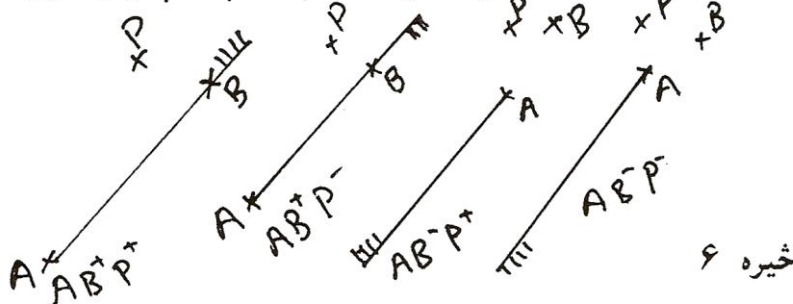
یو ټکیدیری، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانگی، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانگی، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ټیکرنه د وړانگی وړونکی کرنه بلل کیږي.

سرلیک



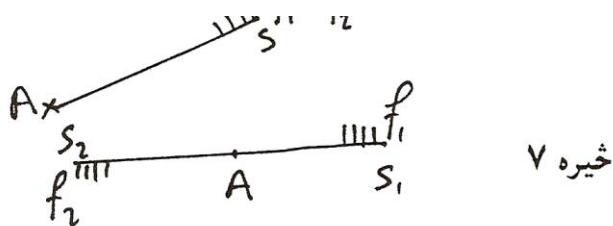
وړانگه د جنډې ژبورانگه ، ددې پیل ټکي د جنډې پیلټکي بلل کيږي. یوه جنډه f د ژبورانگي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په  $sP^+$  بنسول کيږي. جنډه د همغې وړونکې وړانگي یا ژبورانگي s سره ، چی د  $sP^+$  سره مخامخ یا په خټ ده ، د  $sP^-$  سره بنایو. (څیره: ۵)

که په  $sP^+$  همداسی  $sP^-$  سومبول، په پورته د وړانگي s لپاره ایښوول شوی سومبول، چی له A و B ته ځي او  $AB^+$  همداسی  $AB^-$  بدل کړو یا کيږدو، نو د لاندې سومبولونو  $AB^+P^+$ ;  $AB^+P^-$ ;  $AB^-P^+$ ;  $AB^-P^-$  سره کرکترستیک یا بنسول شوي یا ټاکل شوي جنډې بنایي. لاندې څیرې ددې لپاره کارو:

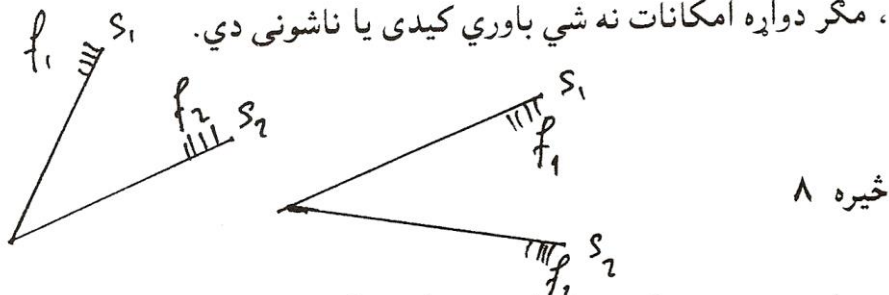


دلرژ څیرو بیرغونه  $AB^+P^+$  او  $AB^-P^-$  یو بل سره مخامخ دي، ځکه چی وړونکی وړانگه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په خټ دی (پام دې وي چی مخامخ او په خټ همغه مانا لري یعنی همغه یو ډول شمیرنيزې کلیمې دي).

دوه بیرغونه ( $f_2, f_1$  د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کيږي، د کولینياري ژبورانگو سره، که  $f_1 = f_2$  یا  $f_1$  و  $f_2$  ته مخامخ یا په خټ وي.

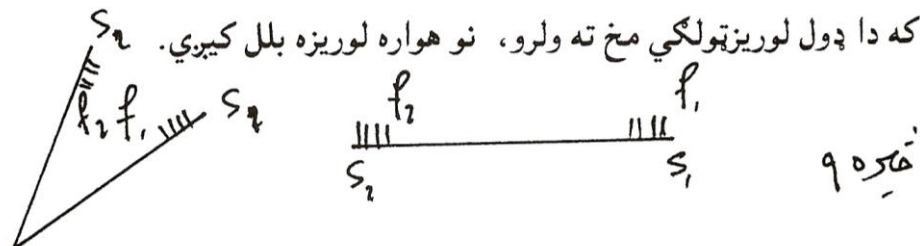


دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیري د همغه پیلتهکي، د ناکولینياري ژبورانگو سره، که د  $f_1$  ژبورانگه په  $f_2$  یا  $f_2$  ژبورانگه د  $f_1$  په ژبورانگه پرته وي، مگر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.



د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. هغه په دوه ټولگیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په خټلوریز بلل کیري. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په خټ لوریز همغه مانا لري

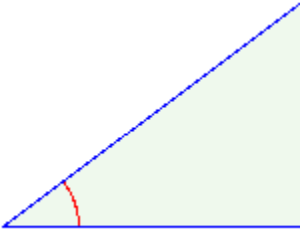


که دا ډول لوریز ټولگی مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیري. دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریگونې (A,B,C) او (D,E,F) ټیک هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري (یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

سرلیک

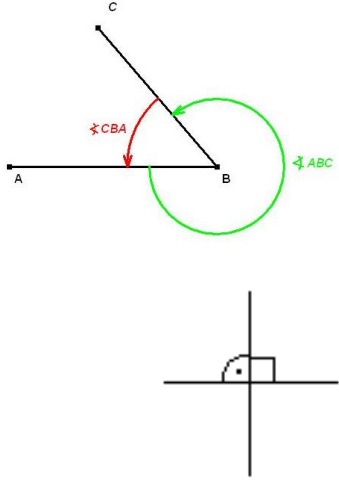
جنډې ABC او DEF همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولاييني دريگونتهکو (A,B,C) څرخونموځی لاندې د جنډې ABC لوريزتولگی پوهيږو.

### کونجکليمه

	<p>پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چي دوه وړانگي S1 او S2 يانې <math>S1 \setminus S2</math> د پيل غوڅتکي S ولري په هواره يا سطحه E کي کونج <math>\beta</math> جوړوي. وړانگي د کونج پښي بلل کيږي او پيلتکي S دکونج &lt; ککره (لند: کونجککره) بلل کيږي.</p>
---	---

لند: دوه کرښي، چي په يوه تکی کي سره غوڅي کړي، کونج جوړوي، چي کرښي د کونج پښي او غوڅتکي يي د کونج ککره يا (راس الزاويه) بلل کږي. پورته څيره دي وکتل شي. گونجونه په گراد (لاتين پل يا لاقدم) کچيږي

د کونجونو رسمونه او نومه وني

	<p>هغه کونج، چي له <math>180^\circ</math> درجو کوچنی وي هغي ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چي له <math>180^\circ</math> درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي</p> <p>ننوتی کونج <b>Konvexes Winkel</b> وتلی کونج <b>konkaves Winkel</b></p> <p>تيره کونج، چي له <math>90^\circ</math> درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چي پوره <math>90^\circ</math> درجي دی، پڅکونج، چي له <math>90^\circ</math> درجو لوي او له <math>180^\circ</math> درجو کوچنی دی، غزيډلی کونج، چي <math>180^\circ</math> درجي دی، له پڅ زيات- يا د پڅ په څنټ- يا له پڅ اخوا کونج، چي له <math>180^\circ</math> درجو لوي او له <math>360^\circ</math> درجو کوچنی دی، پوره کونج، چي <math>360^\circ</math> درجي دی. دا دي په گوته وي، چه صفرکونج صفر دی.</p>
---	--

يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، گران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

	<p>مخامخ څیره : ککر په ککر          کونجونه یورنگیزدي، بدلرنگیز          کونجونه گاوندې بلل کیري •</p>
	<p>لاندي کونجونه پخپله          ونوموی کړی •</p>
	<p>کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي          کونجونه (مخامخ څیره دي وکتل شي) • په          څنگ کې یې سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته          پوره کیدونکی کونجونه • مخامخ څیره •          مخامخ گونجونه بنی لور ته : ککر په          ککره کونجونه •          کین لور ته : گاوندې کونجونه</p>

له کین څخه و بنی لور : پوریز کونجونه ، ردبل کونجونه



سرلیک

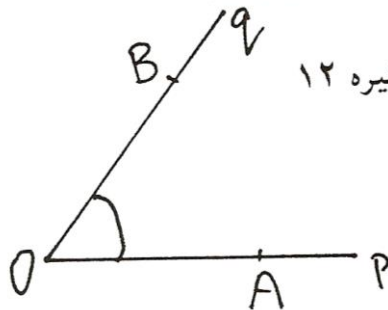
		<p>مخامخ کونجونه، چې پښې يې يو په بل ولاړې وي، ۱۸۰ درجو ته يو بل پوره کوي. په دې بل حالت کې کونجونه يو بل سره برابر دي.</p>
--	--	---

يادونه : گران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زياتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه يم بلد، ځکه چه په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهيرم، يواځې له قايم الزاويه څخه پرته.

يو گراد Grad لاتين: پل يا قدم

لاندي کونجونه سره توپير کيږي، چې ايا د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلي او ايا د کونج دننه په نخښه شوي دي او که نه.

د کونج دننه په نخښه شوي نه دي: د پښو لړۍ پرلپسې کره نه ده ټاکلي



څيره ۱۲

بنسټيز کونج:

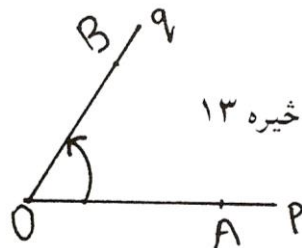
د وړانگو  $p, q$  ( نامنظمی ) جوړې،

د گډ پيلټکي  $O$  سره، د  $\sphericalangle(p, q)$

يا  $\sphericalangle(ABC)$  په نخښوني

د  $A \in p, B \in q$  سره.

دلته  $O$  ککرټکی دی،  $p$  او  $q$  د کونج پښې دي.



څيره ۱۳

د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلي ده:

لوريز بنسټيز کونج: د وړانگو  $p$  او  $q$

منظمه جوړه د گډ ټکي  $O$  سره د  $\sphericalangle(p, q)$

يا  $\sphericalangle AOB$  په نخښوني د  $A \in p$  او  $B \in q$  سره.

دلته هم لکه د مخه  $O$  ککرټکی،  $p$  لومړۍ پښه او  $q$  دويمه پښه ده. دا کونج په



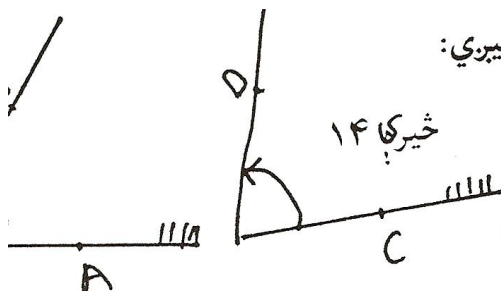
شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخو مخامخ یا په بل ډول په خت ځغلی

مثبتلوریز او هغه چی د ساعتڅرخو په لور ځغلی مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

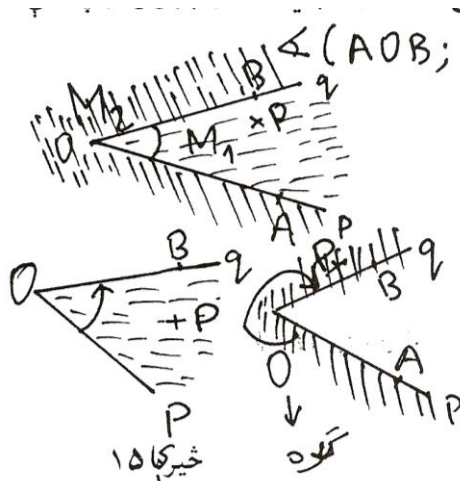
دوه کو نجونه ټیک هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:



د کونج دننه په نخبنه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. ( بلد یا عادي ) کونج بنسټیز کونج هواره په دوه برخدیريو  $M_1$  او  $M_2$  ویشي. په نخبنه برخا بیلگي په توگه په ټکی P کی ) د کونج دننه بلل کیږي ( د کونجهوار،

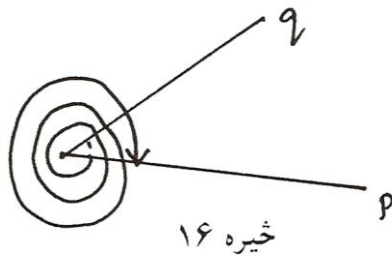


نخبنونه کي:  $\Delta (P, q; p)$  ،  $\Delta (A, O, B; P)$  که دننه یی تش ډیری وي نو دا کونج صفر کونج دی .

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده لوریز کونج: به ځښونه  $\Delta (P, q; p)$  لوریز بنسټیز کونج او دننه یی په نخبنونه  $P \neq q$ ، که وي، نو  $(p, q; p)$  او بدللوریز دي.  $(P \neq q)$

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،  
نو کونج صفر کونج دی:  $(p, q; p) = 0$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



لوریز کونج، که د کونج په همغه لور  
د یوه طبیعي گڼ یا پیدایښتي گڼ په  
اندازه چی یوه پښه یی ځای په ځای  
ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی  
تغیر نه راځي.

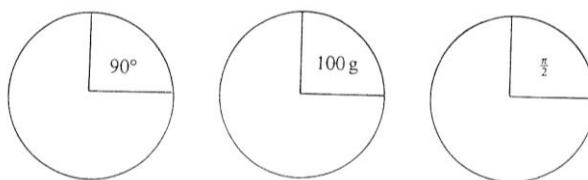
گراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یی: یوون) یا واحدونه (یو یی: واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه گردی کی کښل شوی- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي. (سکتور او گردی لپاره دي، د گردی لوست ځای وکتل شي) (و رسره بلد یا مروج یی په  $360^\circ$  مساوي برخو ویشنه ده) پیژند:  $1/360^\circ$  د یوه پوره کونج  $1^\circ$  (په تورو: یوه درجه، ، لاتین یی = gradus پل قدم) بلل کیږي. گراد نور هم په  $60^\circ$  کونج دقیقو ویشل کیږي ( $1^\circ = 60'$ ) او کونج دقیقه په  $60''$  کونج ثانیو ( $1' = 60''$ ).

«د» گراد یا درجی «لاندي» «زره درجه» (زور گراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریگونومیټري یا کونجکچ کی کونج برسیره پردی په لینده کچ یا - اندازه باندې هم اندازه کیږي او په گیودازي (Geodäsie) د اندازه کولو تخنیک، - پوهنه یا- علم (په نوي گراد یا گون) gon (اندازه کیږي چی دلته گردی په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي. دا په جېسمیری کی مودوس "GRAD" «دی. څیږي :

د گردی څلورمی انځورونه





څیره ۱۷

زور گراد DEG

نوی گراد GRAD

لینده کچ RAD

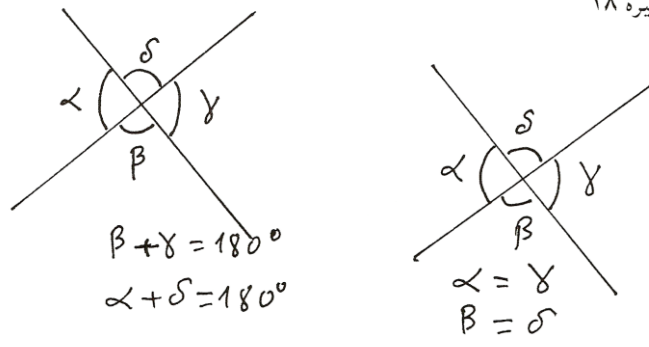
د کونج مثبت- او منفی - یا زیاتون - او کمونځنځني د کونج جوړونکی یا کونج تولیدونکي څرخولوري څخه لاس ته راځي. کين څرخون (د ساعت د څرخي په څنډ څرخيدنه) مثبت- زیاتونمځنځنبه مخ ته یعنی کين لور ته لري او بنی څرخون (د ساعت د څرخولو په لور) منفی - یا کمونمځنځنبه مخ ته لري یعنی کين لور ته لري. دوه کونجونو مقایسې یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځای ارزښت یا څیفر ارزښت دی، بی له مځنځنځني. د مطلقه ارزښت همداسی ځای ارزښت لپاره دي ځما د شمیر پوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي. (په نړیوال جال کي به هم راشي)

بیلگه:  $|-5| = 5$ ,  $|3| = 3$  دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په ټولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفي لوي وي. د بیلگي په توگه که له غوڅکونج غریزو نو موخه به مو وړوکی کونج وي.

پيژند: که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنگ په څنگ کونجونو ته گاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه گډه لري او دواړه کونجونه  $180^\circ$  لري (د درجي نځبه کله کله کين لور ته لیکل شوي، خو دا په پوهېدنه کي کومي ستونځي نه رامخ ته کوي).

کونجونه چی ککري یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرېکونجونه ویل کیږي. ککرېکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو گډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په گډو کربنو پرتی دي.

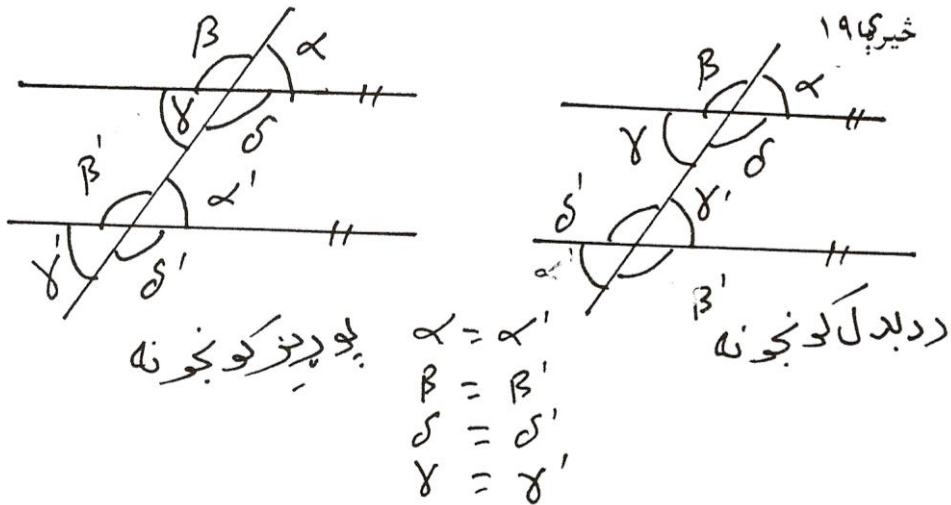
څیره ۱۸



سرلیک

څیره کونجونه چی ځانونه  $180^\circ$  ته پوره کوي سوپلیمینت ( Supplementwinkel )  
 بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه  $90^\circ$  درجو ته پوره کوي کومپلیمینت کونجونه  
 (Komplementwinkel) بلل کیږي. دی دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چی  
 راشي پوره کونکی کونجونه وایي. که دوه غبرگی کرښی g او h د یوې بلی ناپایکرښي k  
 له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راضي • دوي د g او h تر منځ،  
 او د k په مختلفو خواوو ( او څلور دباندې پریکونجونه) نه د غبرگکرښو g او h تر منځ،  
 بلکه له دوي دباندې ( د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه  
 پوریز کونجونه بلل کیږي، دوه دنننی یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو  
 لورو پراته وي ردبدل کونجونه بلل کیږي ( څېري پورته ورکړ شوي دي ) •

جمله: پوریز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو(غبرگی کرښي، چي له دي کرښي  
 غوڅي شوي دي) کي سره برابر دي

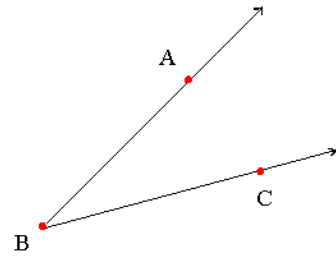
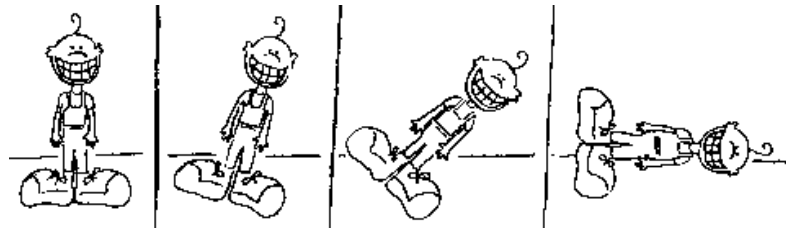


کونج کلمه

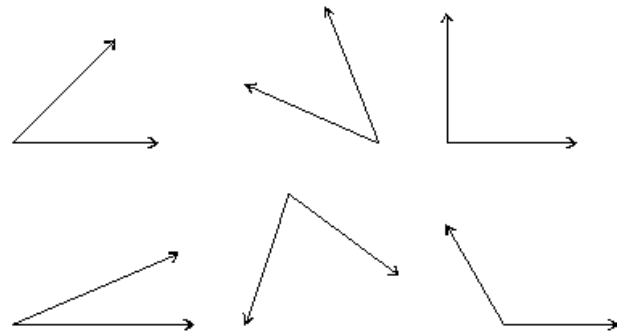
What is an Angle کونج څه شی دی ؟

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري •

دوه وړانگی، چې یو پای لري او سره غوڅی کړي کونج جوړوي • وړانگی د کونج پښي  
 یا اړخونه بلل کړي او هغه ټکی، چې هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو •



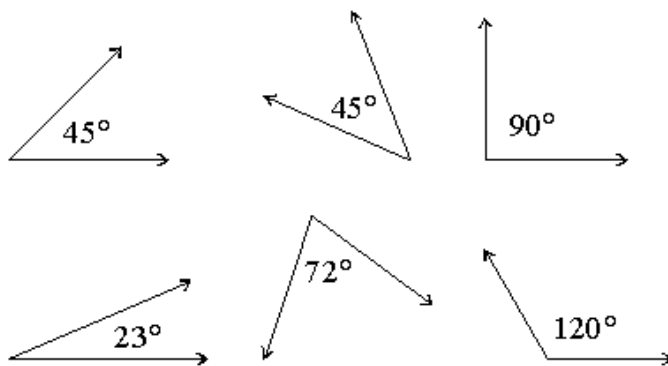
Example: دلته د کونجونو ځنې بیلگی راوړو .



	<p>که توري د کونج په خوله کې راشي بنه به وي، خودا هم د لیکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهگریوان یم .  <math>\angle ABC</math> کونجونه داسې بنایو</p> <p>Example: د همغه کونجلیپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه</p> <p><math>\angle WBA</math> , <math>\angle CBP</math> , <math>\angle PBW</math> , <math>\angle PBC</math> ,</p>
--	--

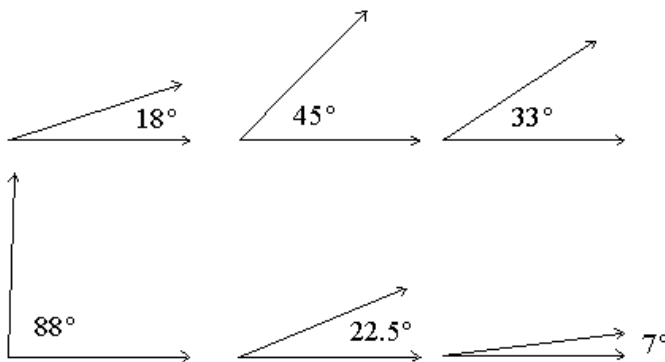
Degrees: د کونج کچونې يوون يا واحد يا يووالی: کونج په درجه کچيري

Example په لاندې کې خنې بيلگې :



تيره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي **Angles Acute**

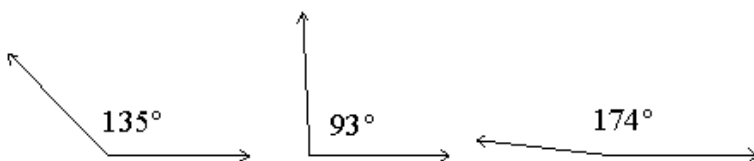
Example لاندې کونجونه تيره دي .

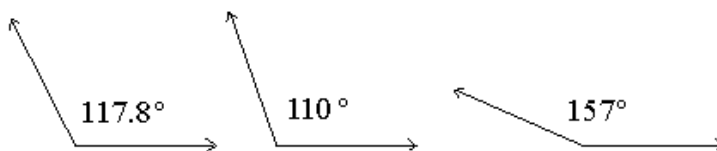


پخ گونجونه **Obtuse Angles**

پخ کونجونه ، چې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کيري.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



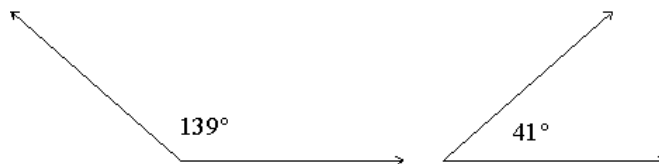


<p>The diagram illustrates three types of angles:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Right Angles:</b> Two right angles are shown, each labeled <math>90^\circ</math>. One is a standard L-shaped angle, and the other is an obtuse angle formed by two lines meeting at a vertex.</li> <li><b>Complementary Angles:</b> Two acute angles are shown side-by-side, sharing a common vertex and a common side. The first angle is <math>58^\circ</math> and the second is <math>32^\circ</math>.</li> <li><b>Supplementary Angles:</b> Two acute angles are shown side-by-side, sharing a common vertex and a common side. The first angle is <math>58^\circ</math> and the second is <math>32^\circ</math>.</li> </ul>	<p><b>Right Angles</b> ولار کونج: هغه کونج، چي <math>90^\circ</math> درجي وي</p> <p>لاندي دواړه کونجونه ولار کونجونه دي: Example</p> <p><b>Complementary Angles</b> کونجونه: هغه کونجونه، چي يو بل و <math>90^\circ</math> درجو ته پوره کوي. کمپلیمینچ کونجونه بلل کيږي. يو کونج د بل کونج کمپلیمینت بلل کيږي</p> <p>بیلگه: Example: دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمینت کونجونه دي</p> <p>دوه کونجونه، چي داسي سره يوځاي شي، چي يو ولار کونج جوړ کړي، نو دا کونجونه يو له بل سره کمپلیمینت دي!</p>
--	--

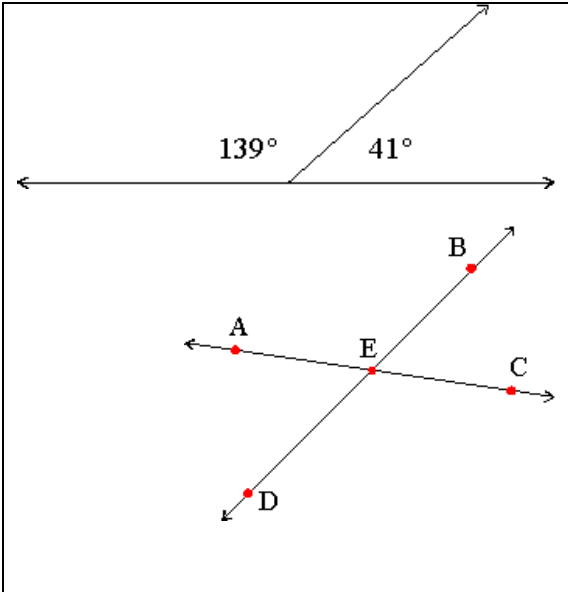
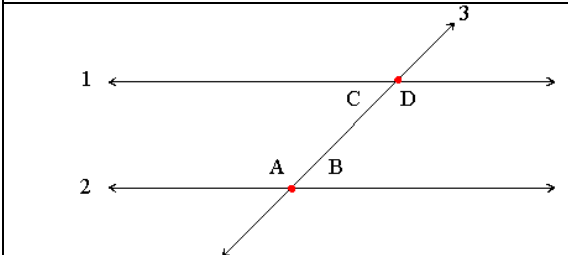
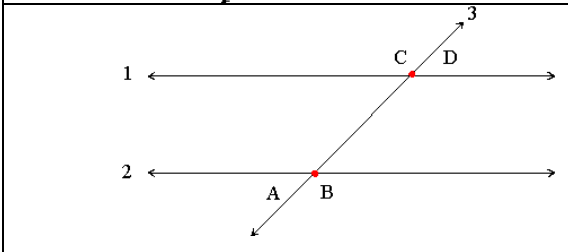
**Supplementary Angles** سوپلیمینت کونجونه :

هغه کونجونه، چي  $180^\circ$  درجو ته سره پوره کوي سوپلیمینت کونجونه بلل کيږي

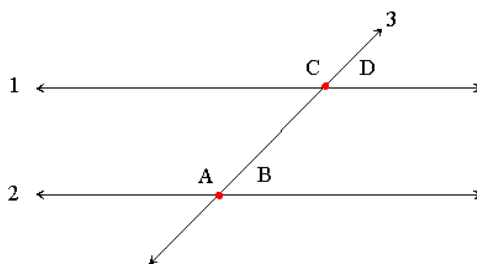
بیلگه Example: لاندي دوه کونجونه سوپلیمینت دي



سرليڪ

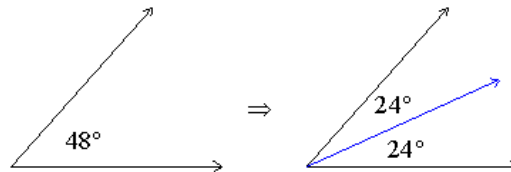
	<p>داسي دوه سره تڙلي کونجونه، ڇي خانونه ۱۸۰ درجو ته پوره ڪري سوپليمنٽ کونجونه جوڙوي</p> <p><b>Vertical Angles</b> ڪڪر په ڪڪر کونجونه: ڇي دوه ڪرڻي داسي سره غوڻي ڪري، لڪهه په لاندي خيره او کونجونه، همغه ڪڪره واري ڪڪر په ڪڪره کونجونه بلل ڪيري او سره برابر ده</p> <p>، <math>AEB</math> او <math>DEC</math> کونجونه او همداسي <math>BEC</math> او <math>AED</math> ڪڪر په ڪڪره کونجونه دي.</p>
	<p><b>Alternate Interior Angles</b> رد بدل دنده کونجونه: په لاندي ڪي کونجونه <math>A</math> او <math>D</math> همداسي <math>B</math> او <math>C</math> رد بدل دننني کونجونه او سره برابر دي . <math>A</math> او <math>B</math> ، <math>C</math> او <math>D</math> گاونڊي کونجوه دي.</p>
	<p><b>Alternate Exterior Angles</b> رد بدل دباندې کونجونه: په لاندي ڪي کونجونه <math>B</math> او <math>C</math> رد بدل همداسي <math>A</math> او <math>D</math> بدل - يا رد بدل دباندني کونجونه او سره برابر دي</p>

پوريز کونجونه **Corresponding Angles** دا کونجونه  $A$  او  $C$  همداسي  $D$  او  $B$   
پوريز کونجونه دي او يوله بل سره برابر دي

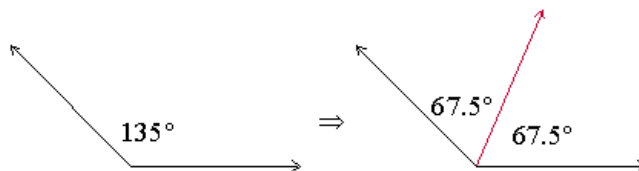


### Angle Bisector کونجیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجیمی یې بولو

بیلگه Example: د ښی کونج شنه کرښه، د کین کونج نیمی ده



په ښی کونج کې سره کرښه د کین کونج نیمی ده .



	<h3>Orthogonal or Perpendicular Lines</h3> <p>ولارې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولارې وي پریندکیولار نومیري (زما وړاندیز: نیغې ولارې کرښې)</p>
--	---

ښلونه:

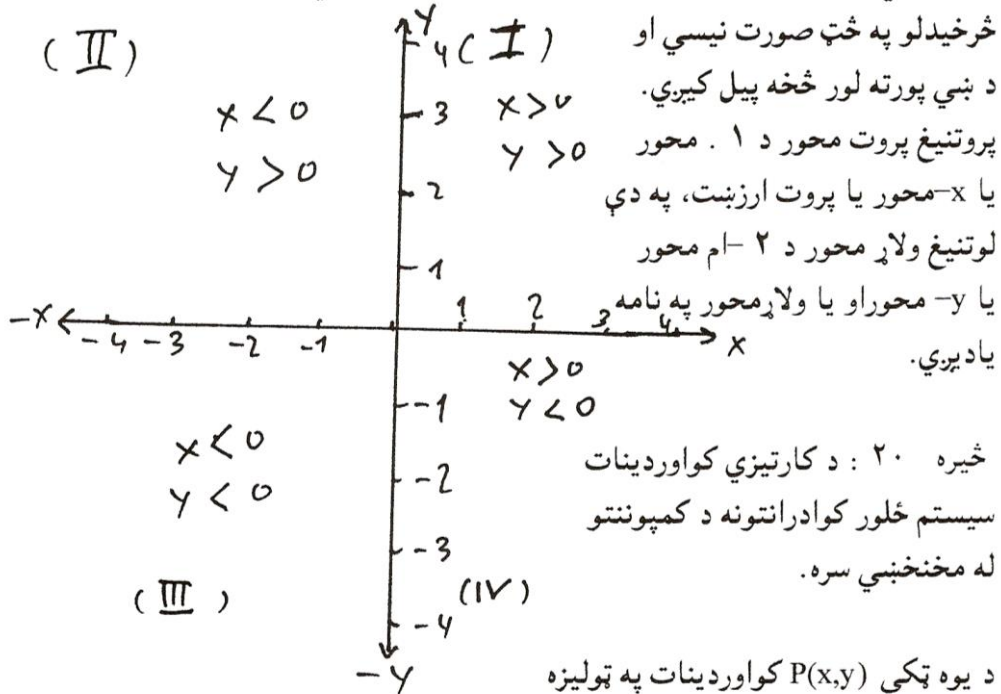
### کواردینات سیستم

یادونه: کواردینات سیستم څخه ځمورن موخه پرتولار سیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسې یادیري. ما دا دواړه ترمینولوژی کارولې، هیله ده چې ستونځې به پینې نه کړي.

د شمیرپوهنی او همدا ډول د تخنیک په ډیرو څانگو کې د کواردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزی کواردینات سیستم کې د هواری هر ټکی P د خپلو دواړو کواردیناتو (x,y) ورکولوسره کره یا ټیک ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا اېسزیز (Abszisse) د x - ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

سرلیک

( Ordinate ) د  $y$ -ارزښت بلل کيږي يا ولاړ ارزښت. کارتيزي کواورديناټ سيستم هواره د دوه يو په بل نيغ ولاړ محورونو ( لنډ: ولاړ محورونو ) له لارې په څلورو برخوويشي ( څلورمى Quadranten ) د کواورانتو نومره بندي يا نمره کول د ساعت



د دريگوديز ناخپلواکو ( تريگونوميټريکي

مثلا تاتي فنکشنونو ) چي وروسته

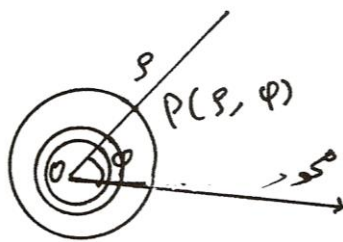
راغلی ) او همدارنگه ديپتاگوراس

له بنسټيزی جملی شميرارونی

( څيره ۲۳ ) کولی شو چې د

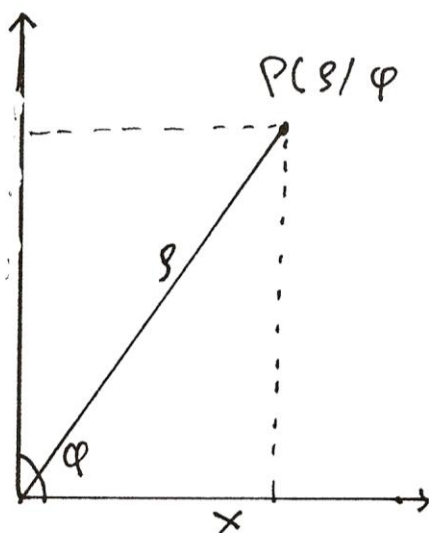
کارتيزي کواورديناټ څخه و پولار

کواورديناټ ته راشو او سرچپه هم.



څيره ۲۳





ځیره ۲۴

جمله : د پولارکوارډینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : شکل اړول یا بدلول) و کارتیزی کوارډینات ته

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

د کارتیزی کوارډینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکوارډینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

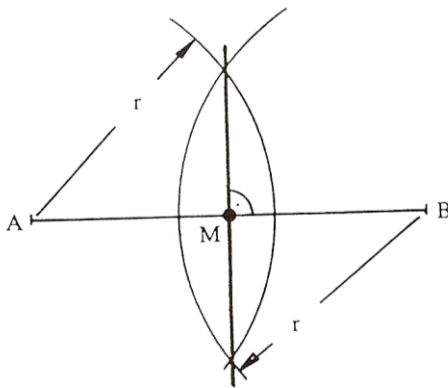
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیرم، خو دومره غواړم چې په گوته کړم، چې تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمې تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چې څنگه ځنی بستیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کې چې له مور سره گردونی یا څرخي (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چې ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړي وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچې دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

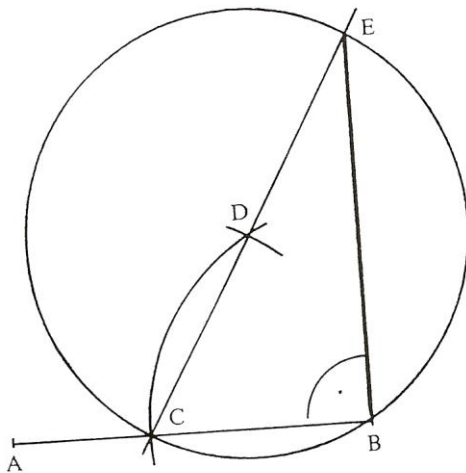
سرلیک



خیره ۲۵

- ۱- د AB کرښی نیمول او
- ۲- د منح ولاړ کرښی کښل
- د A او B په هر ټکي یوه گردۍ د وړانگی  $r > (1/2)|AB|$  سره ووهی (سیومتري دوه گردۍ څیرې)
- د دواړو ټکو تر لکرښه په غوڅټکی M کی په کرښه AB منحولاړ کرښه ده او دا کرښه په M کی نیموي.
- ۳- د یوې کرښی په سر ټکي کی د ولاړ کرښی جوړول (یا کښل). په B

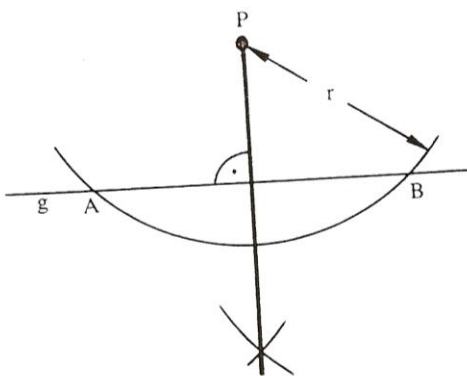
یوه گردیلینده ووهی د وړانگی  $r < |AB|$  سره، چی AB په C کی پرې کړي، ورپسې بیا په C یوه گردیلینده په همغه وړانگه ووهی چی د مخه وهل شوې گردیلینده په D کی پرې کړي. د D دریمی گردۍ منح ټکی دی د وړانگی  $r = CD$



خیره ۲۶ (۳- یوړک اړوند)

سره. چی CD غزولشوې تر گردۍ په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس گردۍ دې وکتل شي)

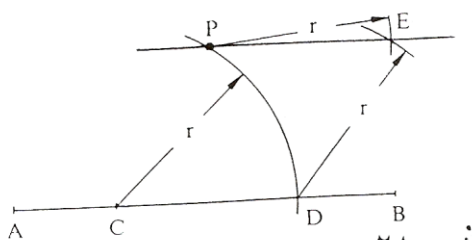
- ۴- د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړ کرښه واچوی ( $P \notin g$ ).
- په P کی په وړانگه r یوه گردۍ ووهی، چی هغه د g له فاصلی (واټن) لوي وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.
- اوس نو لکه په ( ۲ ) کی الترناتیو: لکه د ( ۳ ) لاندې په کرښی او هندسي دريگودي.



څیره ۲۷

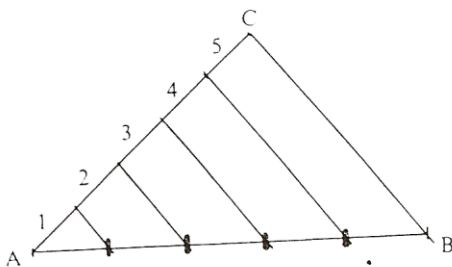
۵- د  $AB$  کرښې سره ټکي  $P \notin AB$  یوه غبرګرښه جوړول (کنبل): د خوښي په یوه ټکي  $C \in AB$  د وړانګې  $r = |CP|$  یوه گردۍ ووهی چی کرښه  $AB$  په  $D$  کی پرې کړي، بیا نو په  $D$  او  $P$  همغه لینده ووهی چی یو بل سره د  $E$  په ټکی کی غوځوي. دا د  $PE$  کرښه د  $AB$  کرښې سره غبرګه ده. ( دا د روتی نومي څلورګوډي جوړول دي ).

الترناتیو : لکه په (۴) کی په ټکي  $P$  کی ولاړه کرښه  $s$  و  $AB$  باندي او بیا همداسی نیغ - یا ولاړکرښه په  $s$  د  $P$  ټکی کی.



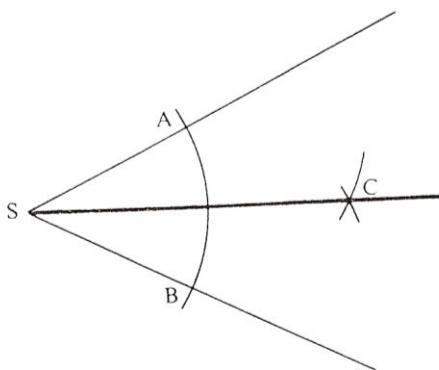
څیره ۲۸

۶- د یوې کرښې  $AB$  ویشل په  $n$  مساوي برخو (د بیلګي په توګه ۵) د  $A$  ټکی څخه یوه د خوښي وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا  $n$  - ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښې ووهی. اړخنی ټکی  $C$  له  $B$  سره وتړی او بیا له هر ټکي د  $BC$  مرستکرښې سره غبرګی کرښې وکارې، دا غبرګی کرښې د  $AB$  کرښه په ( ۵ ) مساوي برخو ویشي.

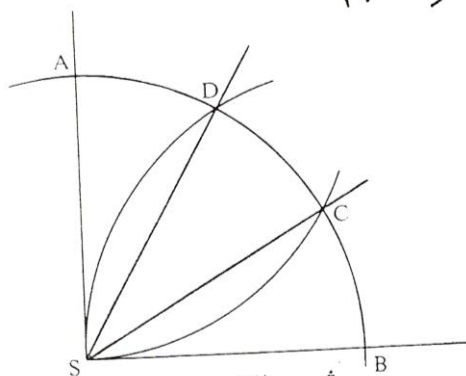


څیره ۲۹

سرلیک



ښکړه ۲۲



څیره ۳۱

## ۷- د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لاینه ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانگه یو د خوښی گردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کی پرې کړي، پریتکی د S سره وتړی.

## ۸- یو ولاړگوډی په درې

مساوي برخو هره  $30^\circ$  وویشی په ککره S باندي یوه د خوښی گردیلینده وباسی چی دواړه پښی په او B کی پری یا غوخی کړي او له

دې وروسته د څرښوونکي په همدې

بیرته والي یا وازون د A او B ټکو

څخه گردیلیندی وکاری، اوس د S

څخه د C او D په لور وړانگی وکاری،

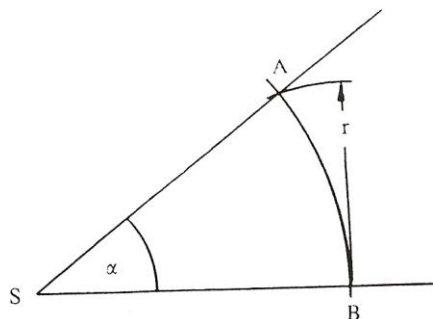
دا دوه وړانگی دا ولاړ- یا نیغکونج

درې مساوي ټوی کوي یا په درې برابر

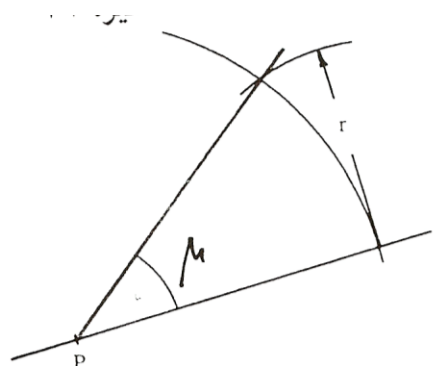
برخو ویشی.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخي او

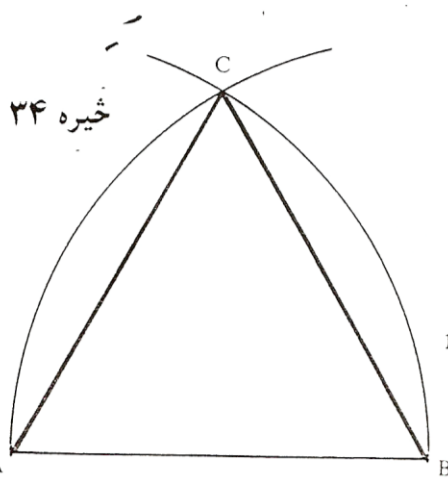
کرنبي باندي په درې مساوي برخو نه



څه ۳۲



خیره ۳۳



خیره ۳۴

ویشل کیري، ددې لپاره بیا الجبري مواد په کار دي.

۹- د  $\mu$  کونج په یوه ټکي P

وغزوی، د ورکړشوي کونج په

ککره S باندي یو گردیلینده

ووهي چی پنی یی په A او B

کي پرې کړي، بیا نو په همغه

گردی ووهی چی خرخی د  $|AB|$

په اندازه وي. اوس نو دا پریټکی

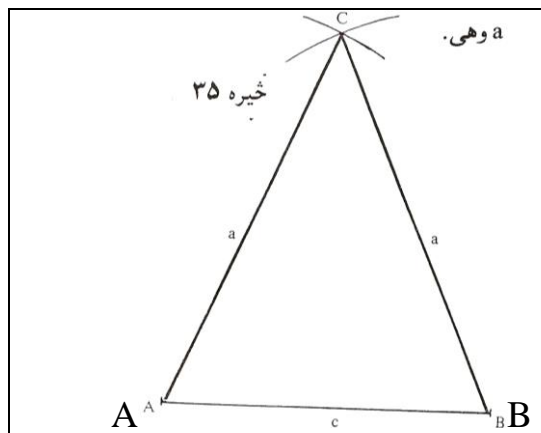
د P سره وتړی.

۱۰- د مساوي اړخیز درېگودي

کنبل: په A او B باندي یوه

گردیلینده ووهی چی وړانگه یی  $r = |AB|$

وي، چی یو بل په ټکي C کی پرې کړي.



خیره ۳۵

بیانوی د A او B سره ونبلوو، دا لاس ته

راغلی درېگودی مساوي اړخونه لري. په

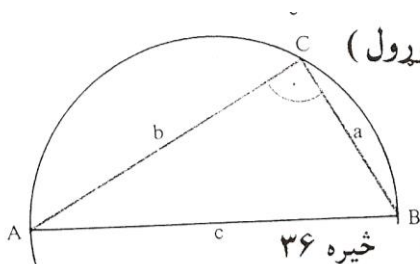
همدې ډول مساوي پښیز درېگودی

انخوړیز پښیز، د ورکړشوي بست  $AB=c$

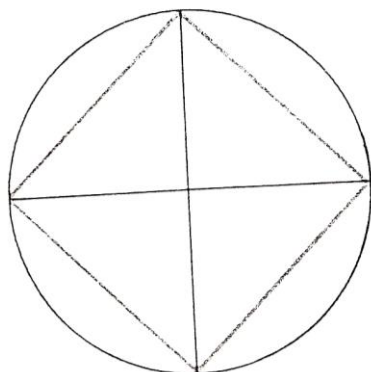
سره. په A او B یوه یوه پښه وه،

سرلیک

۱۱ - د ولاړ کونجيز درېگودي کښل ( جوړول ) هر درېگودي چي اوږد اړخ يی د يوه گردې قطر وي، ولاړ کونجيز درېگودي دی. ( د تالس ( Thales ) جمله وروسته راځي )

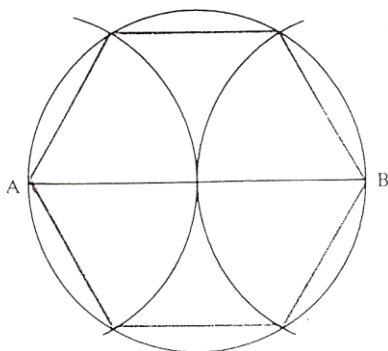


څیره ۳۶



څیره ۳۷

۱۲ - په گردی کی د یوې مربع کښل د گردی په منځتکي باندې لکه په ( ۲ ) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکارې او هغه ټکي چی گردی پرې کړی سره ونښلوی.



۱۳ - په یوې ورکړ شوې گردی کی دمنظم پنځه گودي کښل: د گردی وړانگه په A کی نیمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکارې، |BC| د پنځه گودي د اړخ اوږدوالی دی. ( څیره ۳۹ )

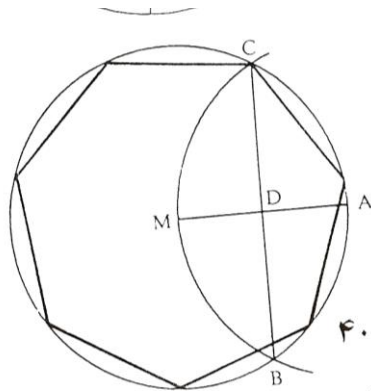
څیره ۳۸

	<p>۱۴ - په گری کی د منظم درېگودي کښل:</p> <p>د نیمي یا قطر اخرنی ټکو څخه د گردی وړانگي په اندازه گردی لینده ووهی. د دې ټکو چي گردی پرې کويیوځای کول منظم شپږگودي چوروي.</p>
--	---



### ۱۵ - د مساوي اوه کښې

جوړول يا کښل:



د ورکړ شوي گردې دنيمې اخر ټکي A

خځه د AM وړانگه په اندازه گرديلينده

ووهي چي گردې په B او C کي پرې

کوي. د BC کرښه د AM وړانگه

په D کي په ولاړ کونجې غوڅوي، څيره ۴۰

پس |BD| د مساوي او کښې د اړخ اوږدوالی دی.

### تمرینونه

۱ - په ډيري ژبه باندې يی افاده کړی:

الف - ټکي A په کرښه g پروت دی.

ب - کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ - کرښه AB په ناپاي کرښه g پرته ده

ت - ټکي C په کرښه. چي له A وبه B

ته ځغلي، پروت دی،

۲ - په څيره  $\frac{1}{2}$  کي څومره ناپاي کرښی،

کرښی او وړانگي پرته دي؟

۳ - کومی کرښی غبرگي، او کومی يو په بل

ولاړې پرته دي؟ دا په سمبولو

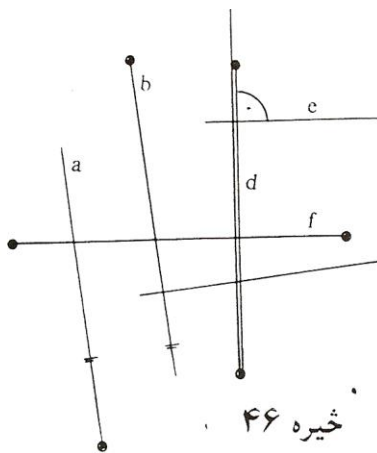
وکاروی (څيره  $\frac{1}{2}$ )

۴ - هرې کرښي ته جوړ کړی:

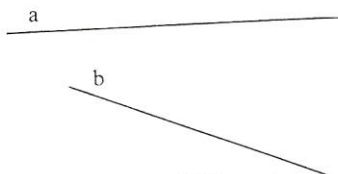
الف - يوه ولاړه

ب - په ورکړ شوي ټکي کي يوه غبرگه

(څيره  $\frac{1}{2}$ )



څيره ۴۶



څيره ۴۷

سرلیک

- • • ۵ - د اسمان کومی لورې یو په بل ولاړې دي؟
- • • ۶ - داسی کرنبه لار (چی یو بل سره تړلي وي) وباسی، چی له ټولو په څیره ۴۹ کی ورکړ شوو؟
- • • ټکو تیریري. دا کرنبو تلنه یا کرنبو

څیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه ( حرکت )

د یوې هوارې په خپل ځان یوواځنی څیرونه تلنه یا خوزیدنه ( حرکت ) بلل کیږي او په  $\varphi$  بنسول کیږي، که چیرې دا لاندې څیرونه ولري:

۱- د یوې هندسي څیرې ( کرنبی، هوارې، وړانگی ناپایکرنی، نیمهوارې ) څیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي څیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی څیره ډیري ژیکرنی پیلټکي، پایټکي په ژیکرنی، پیلټکي، پایټکي باندې څیره شي.

۲- که  $f_1$  او  $f_2$  دوه جنډې وي، نو ټیک یوه تلنه شته نو ټیک یوه تلنه  $\varphi$  شته، د  $\varphi(f_1) = f_2$  سره.

۳- که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه  $\varphi$  شته د  $\varphi(A) = B$  او  $\varphi(B) = A$  سره

۴- که p او q دوه وړانگي وي، د گډ پیلټکي سره، نو یوه تلنه  $\varphi$  شته د  $\varphi(p) = q$  او  $\varphi(q) = p$  سره.

۵- د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسې څیرونو ته یو گروپ جوړوي ( د الجبر برخه یا د لیکونو د الجبر کتاب دې وکتل شي )

د تلنو یا خوزیدنو ( حرکت ) ځانگړي ډولونه دي :



- راکبننه ، چی د  $\mathcal{C}$  سره یی بنایو
  - ایینونه یا هندارونه، چی د  $\mathcal{S}$  سره بنایو
  - خرخون چی د  $\mathcal{K}$  سره یی بنایو
- که یو ټکی همداسی یوه کرننه ، چی په خپل ځان څیره شی ، نودا ودې څیرونی ته

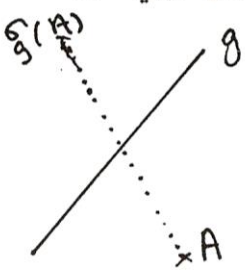
یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرننه یا ځای په ځای کرننه بلل کیږي.

راکبننه  $\mathcal{C}$  یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانگړو ځویونو سره

- تلنه ۱ (  $V$  ) : د یوې په خوښه کرننی څیره و هغی کرننی ته غبرگه کرننه ده.
- تلنه ۲ (  $V$  ) : که څیرونه کټمټ څیرونه نه وي ، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکی څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه  $\mathcal{S}_g$  په یوه کرننه  $g$  ، چی کرنی ایینونه ورته ویل کیږي ، یوه تلنه ده ، د لاندې ځویونو سره



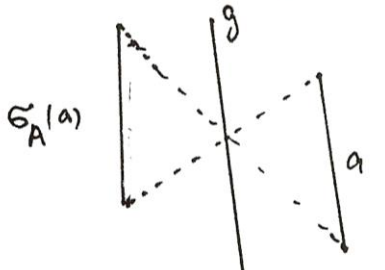
س ۱ : د کرننی  $g$  هر ټکی فیکسټکی یا په خپل ځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرننه یوه فکسکرننه ده.

س ۲ : دواړه د کرننی  $g$  وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي .

څیره ۵۲

دوم: ایینونه  $\mathcal{S}_A$  په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي ، یوه تلنه ده ، د لاندې ځویونو سره : ( څیره ۵۲ )

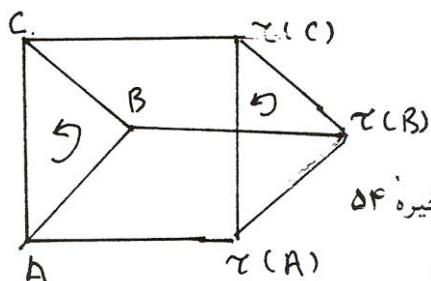
پ ۱ : هره کرننه چی له  $A$  تیريږي په خپل ځان داسی څیره کیږي ، چی دواړه له  $A$  پیداشوې وړانگي یو له بل سره بدلی شي .



سرلیک

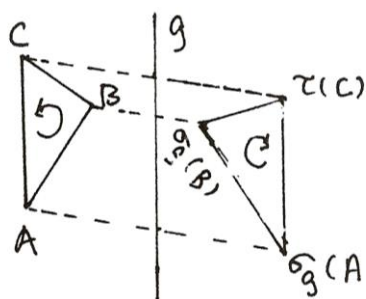
۱ خیره ۵۳

۲ پ : هره کرښه و دې کرښی ته غبرگی کرښی باندي خیره کيږي. ( خیره ۵۴ )



لوريزه تلنه يا خوزيدنه:

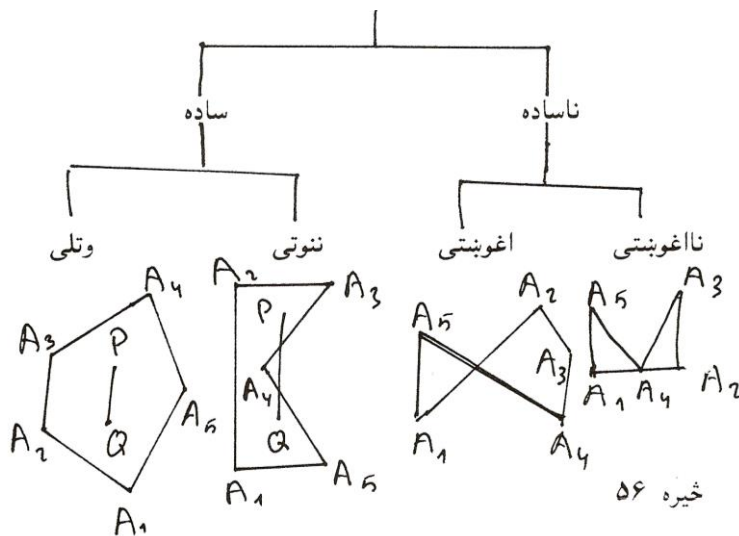
يوه تلنه  $\sigma$  همغه لوريزه ده ، ټيک هلته يا هلته او هلته، کله چی هره خیره  $F$  خیره ۵۴ سره همغه لور ولري يا مساوي  $\sigma(F)$



لوريز وي.

يوه تلنه  $\sigma$  همغه لوريز نه يا نامساويلوريز ده، ټيک هلته يا هلته او هلته، کله چی هره خیره  $F$  و  $\sigma(F)$  ته مخامخ يا په خټ لوريز وي. خیره ۵۵

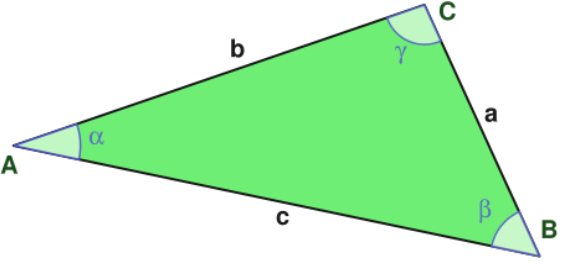
ډېر گوډيز ( د بيلگي په توگه پنځه گوډيز )



خیره ۵۶

یو وتلی  $n$ -گودی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

### درېگودی ( درېگوتی، مثلث )

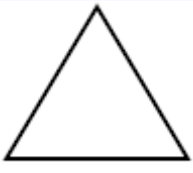
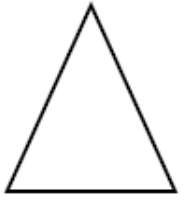
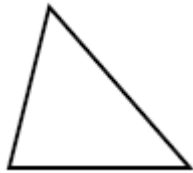
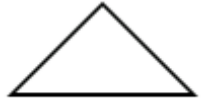
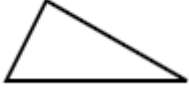

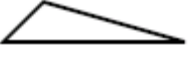
 <p>گورو، چي کوجونه الفا ، بيتا او گاما دي او اړخونه a,b او c دي. په څيره کي گودونه په لويو تورو سره په نخښه کيږي يانی A,B او C گودونه دي.</p>	<p>دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل يواځی يوه کربښه انځوريدلی شي، نو د يوه شکل لپاره کم له کمه دري ټکی په کار دي، په داسی ډول چي دا ټکي په يوه کربښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د څيري د گودټکو په څير ونيول شي، نو درېگودی لا سته راځي. کربښي، چي درېگودی په کي راگير دی يا درېگودی جوړوي د درېگودي اړخونه يا هغه عربي يي ضلع بولو.</p>
---	--

### ولي درېگودی؟

مور وايو، چي سپين مي د برگ د کور د گود سره وليد، يا د برگ د پټي يو گود اوبو وری، په يوه څيره کي يا يوه جوړښت کي دننه د دوه کربښو غوڅی کونج بولو او دباندنی گود. کندهاريان وايی گوت. دا پروا نه لري، که څوک يي گود، گوت او که کونج بولی يانی درېگودی، درېگوتی او که درېکونجی بولي، خو ماته يي درېگودی نوم ښه برينی پام دي وي، چي له ما څخه دا نوم درېگودی نومول شوی، دا څيره ده نارينه نه ده، نو له دي امله به ښه وي، که درېگودی وبللشي، نوره يي د گرانو هيوادوالو او د ځکچپوهني مينه والو خوښه.

د درېگوديو مختلف ډولونه يا تيپونه:

سرلیک

برابر اړخیز	برابر پښیز	نامنظم	
ټول اړخونه او کونجونه یې برابر دي .	دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابر دي .	کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	تیره کونجیز- درېګوډي
			ټول کونجونه یې تیره دي یانې له ۹۰ درجو کوچني دي $< 90^\circ$ .
			ولار کونجیز درېګوډی، یو کونج یې ولار کونج دی
			پڅکونجیز درېګوډی یو کونج یې پڅ دی یانې له ۹۰ درجې لوی دی. ( $> 90^\circ$ )

د کونجونو الفا، بیټا او گاما ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) او اړخونو  $a, b, c$  له مخې د درېګوډیو مختلف تیورونه سره بیلیدي شي.

په پورته څیرو کې پورته بنی لور ته درېگودي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانې د یوه درېگودي پښی دی نابرابرې وي . تیره کونجیز درېگودی، چې دریاوړه کونجونه توپیر لري، درې برابر کونجونه لري ، دوه کونجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابر او نا برابر کونجونو سره . هغه درېگودی، چې دوه کونجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابر کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي . دا لاندي ښه څیرل شوي دي، د څیرو سره

د درېگودي یو له بل بیل ډولونه

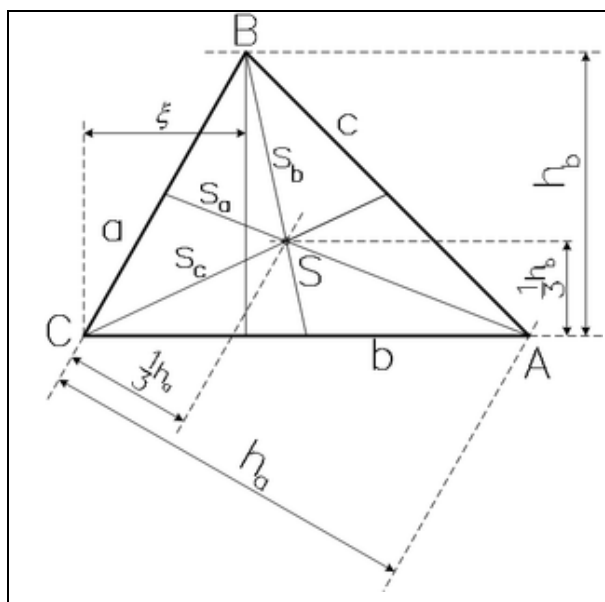
د درېگودي د پام وړ ټکی

- د درېگودي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کې پرې کوي

- اړخښمی په S کې

- د کونجښمی یا نیموونکی په W کې-

- اړخښمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کې: دا هغه کرښه ده، چې د درېگودی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې مور یې منځولاړه بولو

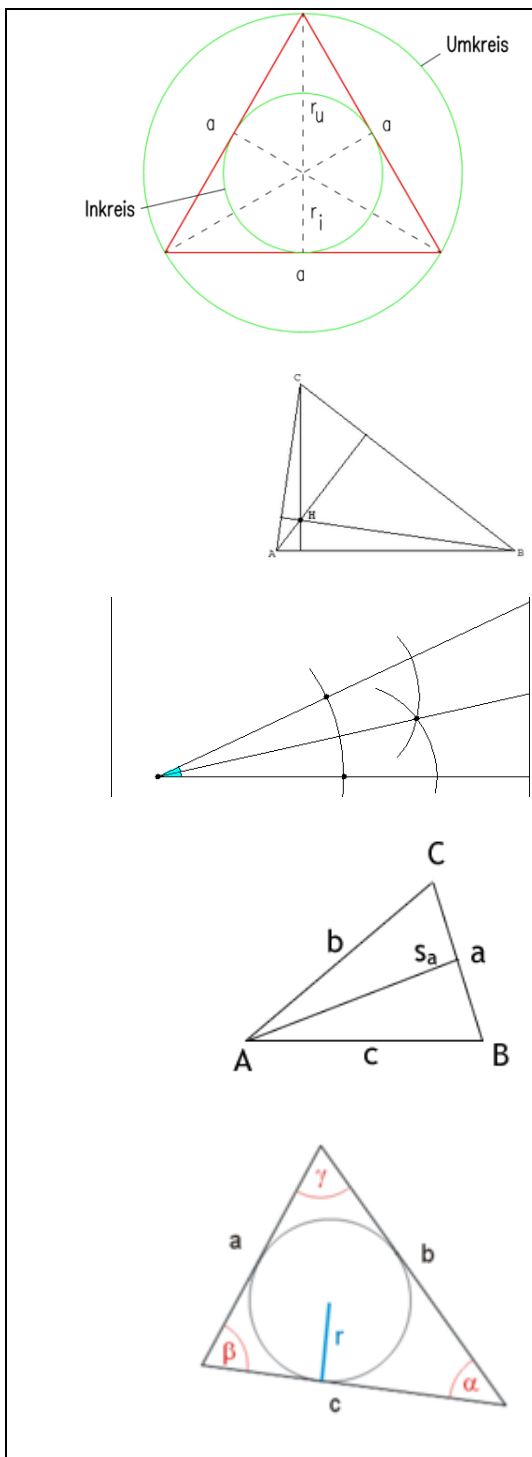


- جگکرښی یا جگي په H کې

دا ټکی د یوه درېگودي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

له دوي څخه W د دننه گردی منځ ټکورانگه او M د دباندې یا راگردی گردی یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالگردی منځ ټکی دی ( وړانگه ) r ، چاپیریالگردی منځټکی



دلته هڅيرو، چې څيرې راوړو، د څيرنې سره يې :

اي ډرگي دنوخ Inkrei Umkreis دهر اتاو-يا په راتاوگردي

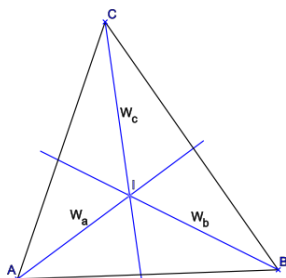
په لاندي څيره كي جگي كرښي وينو . دا هغه كرښي دج، چې را په گوته كوي، چې اړخ د كوني سره كوم جگي لري او دا كر په يوه ټكي كي غوڅوي .

په مخامخ څيره كي كونجيمي گورو او وينو، چې څنگه كښل يا رسم كيږي .

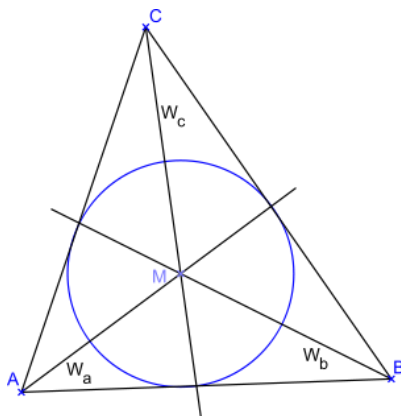
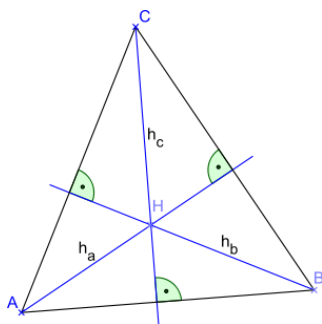
په مخامخ څيره اړخنيمي كتل كيږي . دا هغه كرښه ده، چې له كونج څخه اړخ نيمی .

په مخامخ په درېكوډي كي د خوندي گردي منځنكي د وړانگي سره كتل كيږي .

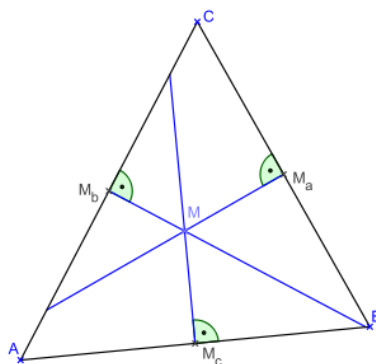
په لاندې درېگودي کې دې کونځنیمې دیو  
جې په یوه ټکي سه پرې کوي



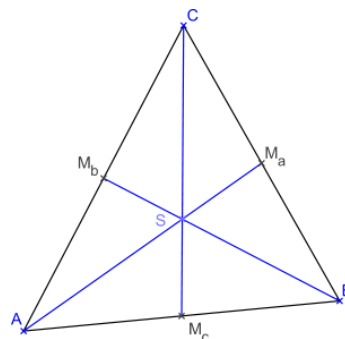
په لاندې څیره کې د درېگودي درې جگي  
ورکړ شویو چې په یوه ټکي کې سره  
غوڅوي



لاندې څیره په درېگودي کې په منځولارې  
گرښې په گوته کویو چې پ لرونده ټکي  
کې سره غوڅوي

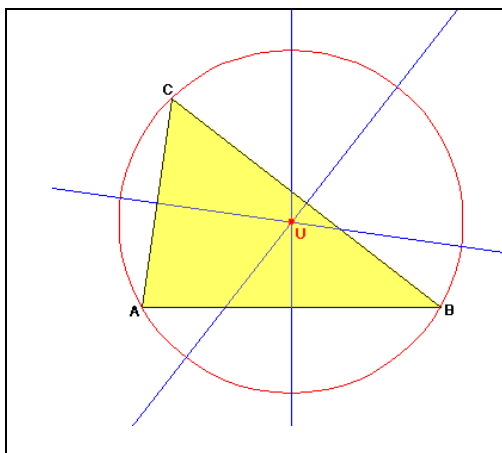


په لاندې مخامخ درېگودي کې درې  
اړخنیمې ورکړ شوي، چې په یوه ټکي کې  
سره غوڅوي

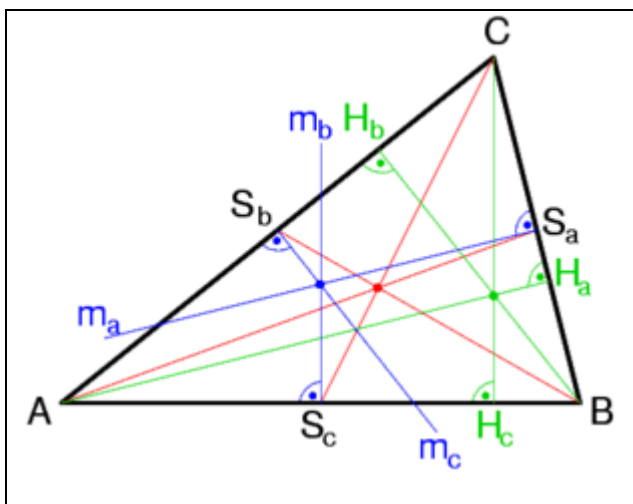


په مخامخ څیره کې گوروږ چې کونځنیمې  
ی خونديگردي منځنې کې سره غوڅوي

سرلیک



په مخامخ څیره کې د درېګوډۍ منځولارې  
 گوروو چې غوڅټکې کې یې راتاوگردي  
 منځټکې دی



په مخامخ څیره کې هغه اړخنیمې،  
 چې په اړخ ولارې دي کتل کېږي،  
 په اړخنیمې ولارې، جگې او  
 اړخنیمې کتل کېږي، چې دريواره  
 په یوه کرښه پرتې دي .

د جگو غوڅټکې (شپږن)، راتاوگردي منځټکې (اسماني يا زرغون)، درونديکې (سور) په  
 یوه کرښه پراته دي.

د درېګوډيو جوړيد امکانات يا شونتوب: درېګوډي يواځنی جوړیږي (همدا یو درېګوډی  
 او بل، چې له دې درېګوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی ) ،

-که د درېګوډيو دريواره اړخونه ورکړ شوي وي،

-يا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج يا

- يو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو يا اخرونو کونجونه وپيژنو

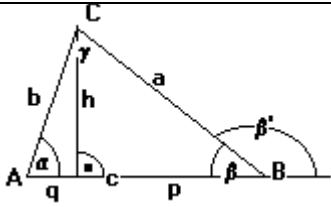


یا په همدې ډول هغه دريگودي، چې دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج يی پيژندل شوی وي. د کونگرواينځ جملو کی يی بيلگي راځي .

د دريگودي پيژندنه لنډ: يو  $n$  - گودي، چې  $n=3$  وي، دري گودي بلل کيږي .

په درېگودي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري يا معتبرې دي چې بي له ثبوته دلته راوړل کيږي.

	<p>۱ - د کونجزياتون جمله : په درېگودي کی تول کونجونه <math>180^\circ</math> لري</p> $180^\circ = \square + \square + \square$ <p>په مخامخ څيره گي <math>\beta</math> د <math>\beta'</math> گاونډی کونج دی</p>
---	---

۲ - د دباندني کونج جمله: دباندی کونج د ناگاونډيو کونجونو زياتون يا مجموعی سره مساوي دی، له دې امله د درېگودي د دباندنيو کونجونو زياتون  $360^\circ$  لري:

يادونه : گران د ځمکچ مينه وال دي دا څيره له پورته څېرې څخه پوره کړي .

۳ - درېگودي نامساوات يا دريگودي نابرابرونه نه:

په هر درېگودي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زياتون د دريم اړخ اوږدوالی څخه لوي دی

$$a + b > c ; a + c > b ; b + c > a$$

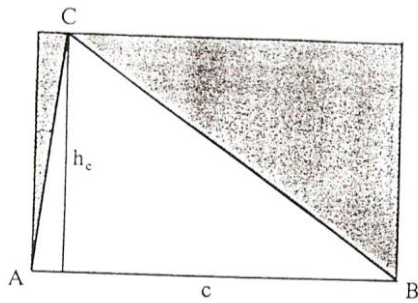
۳ الف-د هر دريگودي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپير يا فرق د دريم اړخ اوږدوالی همغه-يامطلقه ارزښت څخه کوچنی دی

$$|a - b| < c ; |a - c| < b ; |b - c| < a$$

۴ - د درېگودي چاپيرال د دريو اړخونو زياتون دی

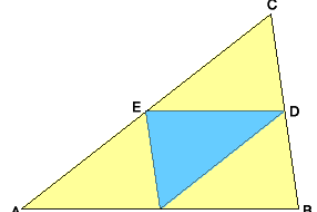
$$U = a + b + c$$

## سرلیک

	<p>۵ - د درېگودي منځهواره (د هوارې دننه) لند: هواره، د يوه اړخ اوږدوالی او په هغې کښلی (نیغ) ولاړ جگوالی (لند): جگوالی) د ځل نیمایي دی</p> $F = a.h_a/2 = b.h_b/2 = c.h_c/2$
---	--

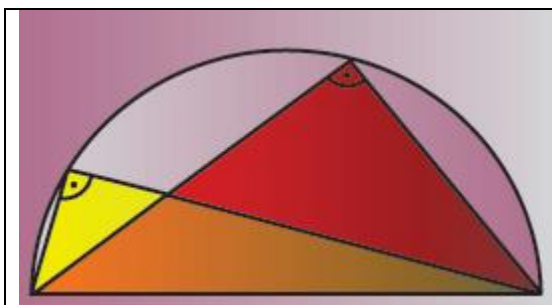
د بنووني لپاره یې د یوه لند چل څخه کار اخلو: مور د درېگودي د جگکړښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجیو غوڅوو او د درېگودي په اړخ یې څیره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجیز درېگودي منځ ته راځي، چې د هغې ټوله هواره، د غوښتونکي درېگودي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته څیرې څخه هم څرگندېږي.

	<p>۶ - د درېگودي اړخونو نیمایي هغه منځنی درېگودي جوړوي، د کوم اړخونه چې نیمایي دومره اوږده وي لکه د پیل شوي درېگودي (د وړانگي جمله دې وکتل شي)</p>
--	--

گورو چې د یوه درېگودي جگي تل څرگند نه دی. مگر دا چې د یوه جگي له لارې یو درېگودي په دوه برخو ویشل کېږي، چې په دې ډول دوه ولاړکونجیز درېگودي ترې منځ ته راځي، چې دا جگي بیا د پینتاگوراس له لارې -جملې چې وروسته راځي - او یا د تریگونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې، چې هغه وروسته څیرل کېږي، لاس ته راوړی شو.

	<p>Satz des Thales: د تالس جمله</p> <p>که AB د یوې گردې (دایرې) یوه نیمې (قطر) وي او C په دې گردې پروت وي، نو درېگودي</p>
--	---



ABC په C کې ولاړکونجيز دی .

د دې جملې په څټ يا برعکس دی:

که چيرې درېگودي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په گردۍ پرته ده د نيمې AB سره

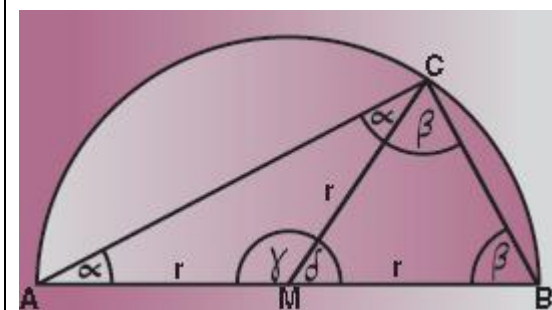
د جملې د بنوونې لپاره: دا برخه دې دا دلته د بنوونځي شاگردانو لپاره نه وي .

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

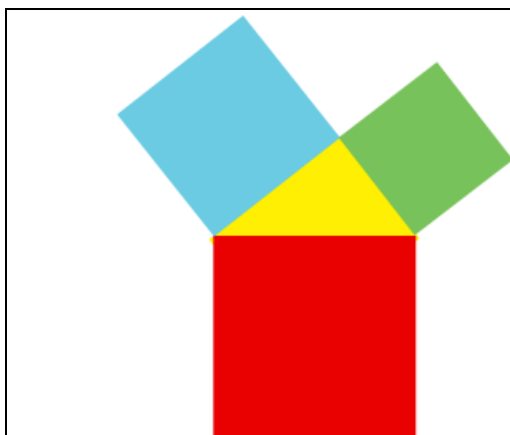
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



د پیتاگوراس (فیثاغورث) (Satz des Pythagoras)



په یوه ولاړکونجيز درېگودي کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه یې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نڅبنه گوو ، باور لري

$$a^2 + b^2 = c^2$$

د دې جملې په څټ يا برعکس

که د یوه درېگودي ABC د اړخونو a, b, c لپاره باور ولري

$$a^2 + b^2 = c^2 . F = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b \cdot \frac{h_b}{2}$$

سرلیک

نو دا درېگودي په  $C$  کې ولاړکونجيز دی يا د پیتاگوراس جمله وايي، چې په يوه ولاړکونجيز درېگودي کې د هيبوتينوز(لوي اړخ) څلورۍ يا مربع د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د څلوريو يا مربعگانو د زياتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېگودی یو ولاړ کونج لري يانې ۹۰ درجې کونج

د درېگودي اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی، چې هيبوتينوز *Hypotenuse* يا لوی اړخ بلل کيږي

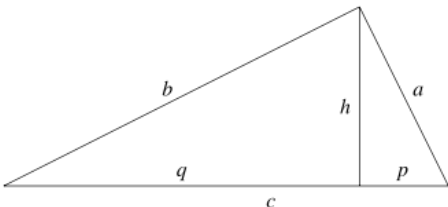
نور دوه اړخونه کاتيتونه *Katheten* يا ولاړ اړخونه بلل کيږي.

لاندي جملې بنايو:

دا جملې ټولې يوځاي راوړل شوي

جمله: ولاړ کونجيز درېگودی  $a + b + c = U$

$a \cdot b / 2 = c \cdot hc / 2 = F$

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاگوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید <u>د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو</u> <u>جمله</u>
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جگړو جمله

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېگودی جگی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

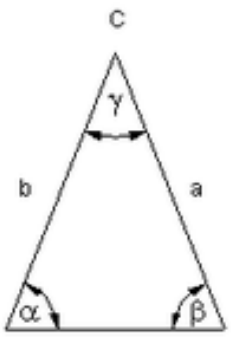
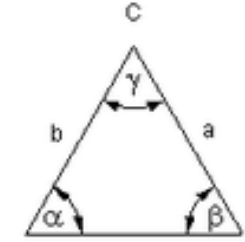
$$F = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b \cdot \frac{h_b}{2}$$

خکه چی  $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$  (د پیتاگوراس جملی له مخی) (پیتاگوراس جمله وگوری)

جمله : برابر اړخیز درېگودی :

د یوه برابر اړخیز درېگودی ټول درې اړخونه برابر دي، دننی کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېگودی منظمو پولیکونونو پورې اړه لري (۰ پولیگون لاتین ډیرکودیز) (**Polygonen**).

د برابر اړخیز درېگودی هر کونج ۶۰ درجی دی. برابر اړخیز درېگودی تره کونجیزو ډیریوگودیو په ډله کی دی، خکه، چی ټول درېکونجونه له ۹۰ درجو کم دي په دې برسیره یوه برابر اړخیزه درېگودی یوه برابر پښیزه درېگودی هم ده. ټول برابر اړخیز درېگودی یو بل ته ورته دی ( وروسته رایی)

 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \beta</math> <math>a = b</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \beta = \gamma</math> <math>a = b = c</math></p>	<p>په یوه برابر اړخیز درېگودی کی، د یوه اړخ کونجیمی، اړخیمی، په منځولاری-او جگی سیو په بل پریوخی. په ورته توگه دا د ضوندي گردی دباندي گردی او دروندتکی اړخ جگیو غوختکی لپاره هم په یوه برابر اړخیز درېگودی کی باور لري.</p>
---	--	---

سرلیک

پورته څیره کې کین لور ته برابر پینیز - او ښي لور ته برابر اړخیز درېگودی دی. هر برابر څه یې کښل شوي.

د یوه برابر اړخیز درېگودی، چې د اړخ اوږدوالی یې  $a$  دی، لپاره باور لري

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	Fläche A هواره یا سطحه
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	Höhe $h$ جگوالی
$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$	د چاپیریال گردی وړانگه $r$ Umkreisradius
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$	د خوندي گردی وړانگه $\rho$ Inkreisradius
$u = 3 \cdot a$	Umfang $u$ چاپیریال

د برابر اړخیز درېگودی خویونه دي گران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هواری یوله بل سره او همداسې دواړه شني هواری همغه منځهواره لري. یا په بل ډول: د سرو او شنو ولاړگودیو هواری یوله بل سره برابري دي.

$$b^2 = qc$$

$$a^2 = pc$$

که  $a, b, c$  د ولاړکونجيز درېگودي اړخونه وي، د هپيوتينوز  $c$  سره  $\bullet$  که دا درېگودي په جگي  $h$  په دوه برخو وویشل شي او  $p$  يې هپيوتينوز توتې په  $a$  ده او  $q$  همداسې توتې ده په  $b$ ، نو باور لري:

په  $a$  څلورۍ د  $p$  او  $c$  ولاړکونجيز څلورگودي او په  $b$  څلورۍ د ولاړکونجيز څلورگودي، د اړخونو  $q$  او  $c$  سره هوار برابره ده يانې هوارې يا سطحې يې برابري دي.

لاندي څيره دې وکتل شي. پام دې وي، چې دا پورته بڼونه او دا لاندي سره برابري دي، خو يواځې څيري يې بدې دي، دوه ځله بڼونه پروا نه لري.

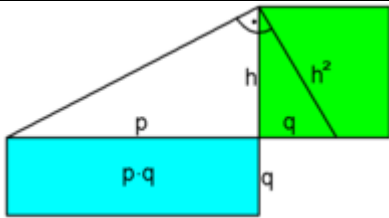

	<p>فرمول يې :</p> $a^2 = p \cdot c$ $b^2 = q \cdot c$
--	---

Kathetensatz د کاتيتونو جمله: دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شني هوارې هم د اړخ او څلورۍ د فرمول په څير په لاندي ډول دي

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

### Höhensatz des Euklid او يکليد جگجمله

	$h^2 = p \cdot q$ <p>د جگجملی د بیاتیونی بنوونه (دا لږ ستونځمنه ده، خو زما یی دا څیره بدلون بڼه راځی گرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کیري):</p>
	

د جگجملی بنوونه : د پیتاگواراس له جملې  $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه بنوونه لاس ته راځي

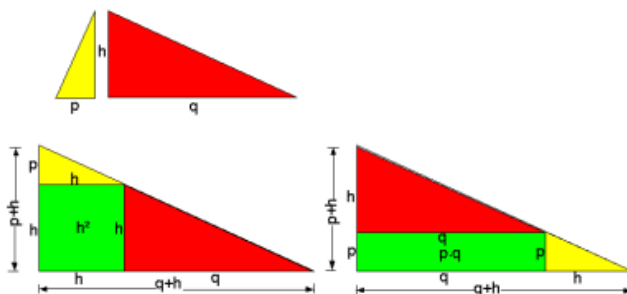
په دیاگرام کې درې درېوګوډي لیدل کیري، یو له اړخونو  $a, b, c$ ، بل له اړخونو  $h, p, a$  او  $h, q, b$ . سره، د دې هر یوه درېوګوډي لپاره د پیتاگواراس جمله باور لري:

$$h^2 = p \cdot q \iff q^2 = pq + q^2 + h^2$$

د پورته بیاتیونی له لارې بنوول کیري

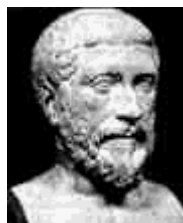
جیومتريکي بنوونه





دا څیره دې گران لوستونکی پام ته را وېولي، چې څنگه د بنووني کار مخ ته ځي

(تمرین)



### د ساموس پیتاگوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولارکونجیز درېکودي کي د کاتیتونو(ولار اړخونو) د څلوریو یا مربعگانو زیاتون د هپیوتینوز(اوردۀ اړخ) د څلوری سره برابر دی.

دا جمله د پیتاگوراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاگوراس د ژوند سره برابر ځای نیسي. لکه لاندې په گوته کوي، چې دا انسان له دې خورا زیات وو.

دا یو له مانا ښک انسان دی «برتراند راسل» Bertrand Russell - "،،

دی د جلبازو مشر دی «هیراکلیت» Heraklit - "،،

Ludwig Börne لودویگ بورني د هغه په هکله وايي «کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل. له هغې وروسته ټول سوخندر لرزیږي، تر هغې، چې نوي څه کشف شي»

سرلیک

پیتاگوراس په 570 دزکال پخواپه جزیره ساموس کې پیداشوی .  
پلار یې سامي زرگر منیساربنوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په مېلت Milet او او انیکشیماندر کې یې زده کړې کولې

د پیتاگوراس بنوونه یا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او خای بدلوي، داسې، چې له یوه ژوندي څخه وبل ته خي

### د پیتاگوراس جمله

په یوه ولاړ کونجیز درېگونې کې د کاتیتونو (ولاړو اړخونو) څلورې زیاتون د هیپوتینوز (اوردې اړخ) له څلورې سره برابر دی

$c^2$	=	$a^2 + b^2$
-------	---	-------------

$p \cdot c$ (د کاتیتونو جمله)	=	$b^2$
-------------------------------	---	-------

$q \cdot c$	=	$a^2$
-------------	---	-------

کاتیت جمله د Kathetensatz

$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
-------------------------	---	-------------

$(c \cdot (p + q))$	=	$a^2 + b^2$
---------------------	---	-------------

دپورته لپاره لاندې څېره وگورئ

د دې جملې د بنوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیوني یا بنوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او بنوونې  
د یوونځلورۍ یا یوون مربع څیره

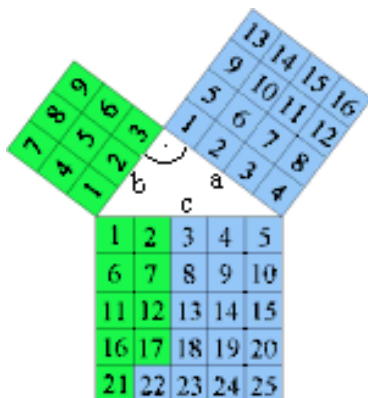
یو ولاړ کونجیز درېگودی لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B.  $a=3\text{cm}$ ;  $b=4\text{cm}$ ;  $c=5\text{cm}$ )

په هر اړخ څلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

$$25\text{cm}^2 = 9\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$



په لاندې کې یو برابرپښیز ولاړکونجیز درېگودی لرو:

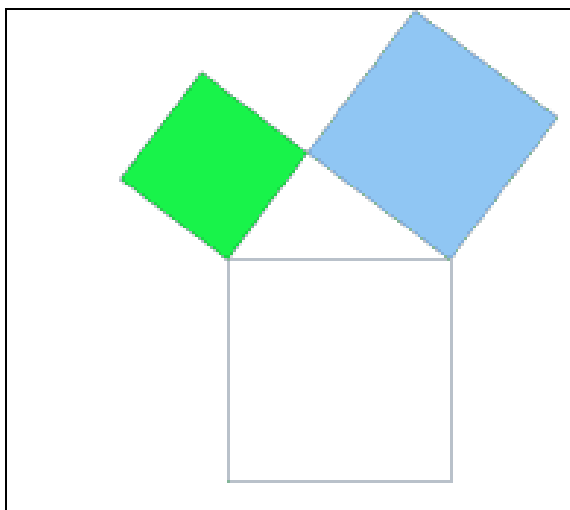
	<p>ولاړکونجیز برابرپښیز درېگودی، چې اوږد اړخ یې <math>a^2</math> او <math>b^2</math> گورو، نو کره به ورته وگورو، چې څه شوي یانې ځنې څلوری نیمې شوي او ځنې بیا په څلور برخو ویشل شوي.</p> <p>که څیر لته وگورو، څه کره کولی شو؟</p>
--	---

### 2.2 په خوبه ولاړگودیز لرو

	<p>دا په خوبه ولاړکونجیز درېگودی دی (z.B. <math>c = 4,5\text{cm}</math>) د تالس گردی د لویې کتیت څلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرگه کرښه وکارې او هیپوتینوز ته یوه ولاړه <math>a^2</math> غوڅه کړي. گران لوستونکي دي له څیرې څخه پخپلهپه گوته کړي، چې د لوي اړخ څلوری د نورو اړونو د څلوریو سره برابره ده</p>
--	---

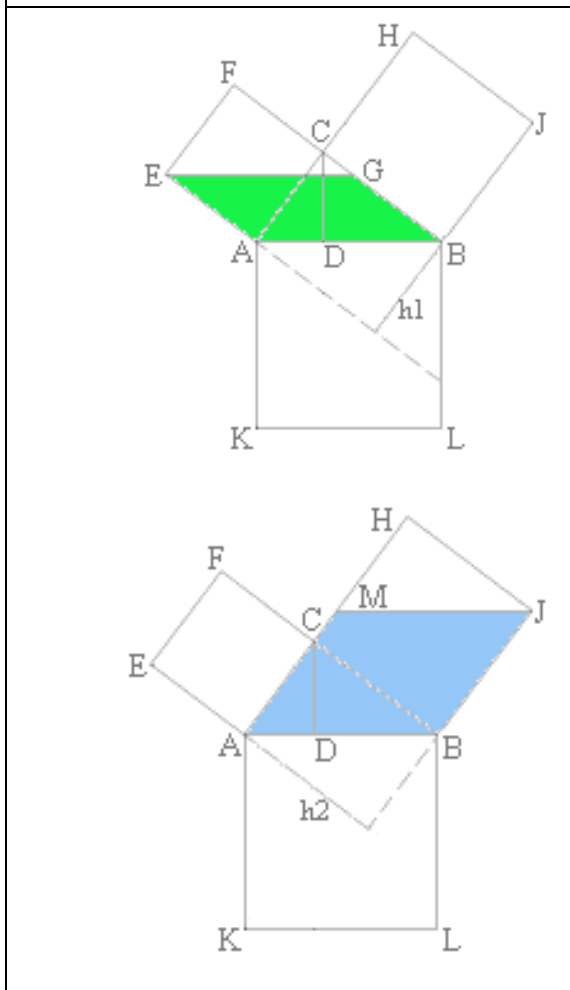
### 3. د څیرې ځمکچیزه لارښودنه

د لوړو گودونو یا کاتیتونو څلوری په درېگودي ABC کې دننه د غبرگ اړخیز په څېر غوڅ کړی



غبرگ اړخیز د لوی اړخ څلوری (مربع)  
کډتکي باندي د هغې تر یوه اړخ پوری و  
څرخوی .

غبرگ اړخیز (مایلوډیز) یوه ولاړگوډیز  
په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هواري  
کي دننه بیاتي کړی



بڼونه : الف : بیاتیونه:

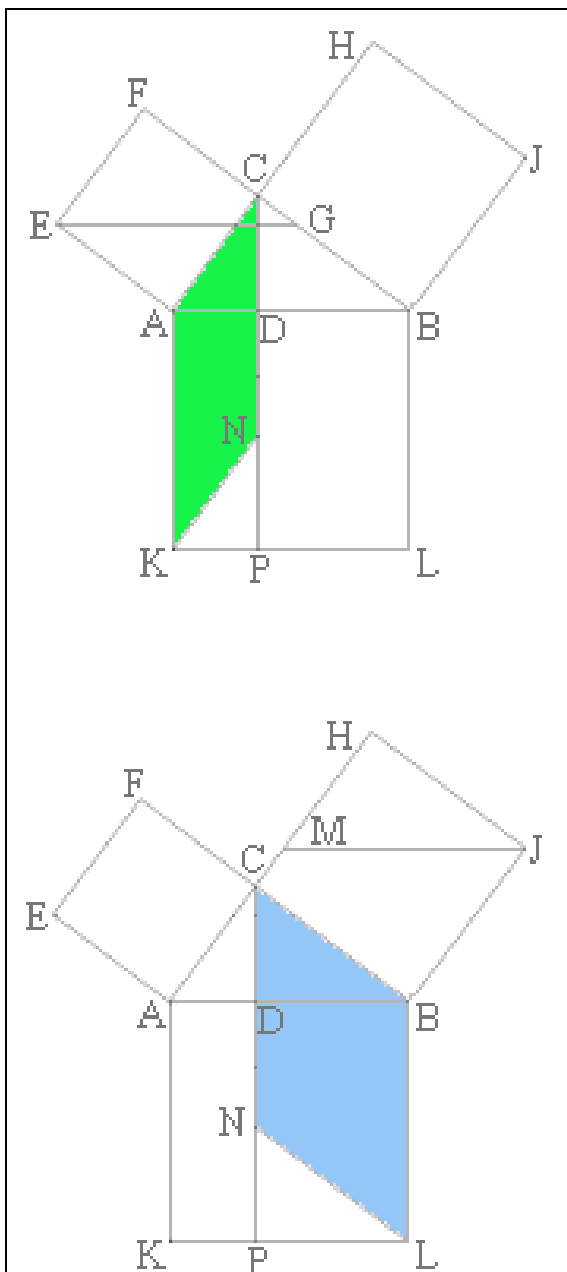
$$EACF = EABG . 1$$

ځکه، جې برابر بنستلین EA او برابر  
حگی

$$BJHC = BJMA . 2$$

ځکه، برابر بنستلین BJ او برابر  
جگی (h) JH لري

سرليک



ب. څرخون : ۳ .  $EABG = AKNC$

د)  $EA = AC$  ځکه په A باندې  
 $AB = AK$  (يوې څلورۍ اړخونه)  
 (د يوې څلورۍ اړخونه)

۴ .  $BJMA = BCNL$

ځکه، چې په B باندې  $BJ = BC$  )  
 د يوې څلورۍ اړخ اوږوالی  $BA = BL$  (د يوې څلورۍ اړخونه)

پ. بياتيونه:

۵ .  $AKNC = AKPD$  ځکه، چې همغه بنسټلاید AK سره نغه جگي KP لري

	<p>۶ . NLBC = DPLB حُکمه، چي          همغه بنسټالين BL او همغه جگي PL          لري          د پورته دواړو لپاره لاندې څېره وگوري</p>
	<p>له مخامخ څيري          لاس ته اځي  <math>a^2 = c \cdot DB</math>  <math>b^2 = c \cdot AD</math>          له دې لاس ته راځي :  <math>c \cdot AD + c \cdot DB = C^2</math>  <math>b^2 + a^2 = C^2</math></p>

بياتيونه پيل(لاندې څيره)

۱ - په هر دې اته درېگوديو څلورۍ داسې کيږدی، چي برابر اوږده اړخونه يو په بل پريوزي، لکه چي گور د يوي څلورۍ اړخونه د يوه درېگودي دارخونو سره برابر دي .

سرليک

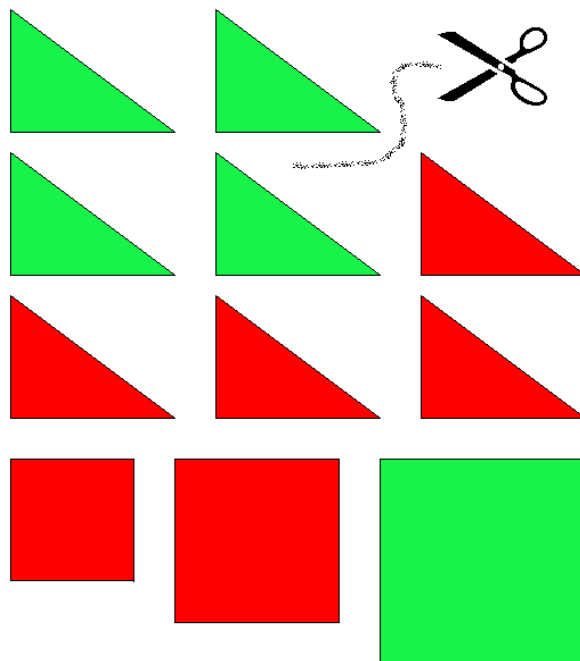
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه څلورۍ اوڅلور درېگودي ) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څيرې ( يوه څلورۍ او څلور درېگودي) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه، چې دواړه داسې منځ ته راغلي څلورۍ يو بل پټه وي.

۵ - ټول درېگودي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلويو سره.

د ځواب لپاره دلایل راوړه!



۵. Berechnungsbeweis د شميرلو بڼوونه



$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$	= $(a+b)^2$
$2ab + c^2$	= $a^2 + 2ab + b^2$
$c^2$	= $a^2 + b^2$

دا څيرې دې د ځمکچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او گرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

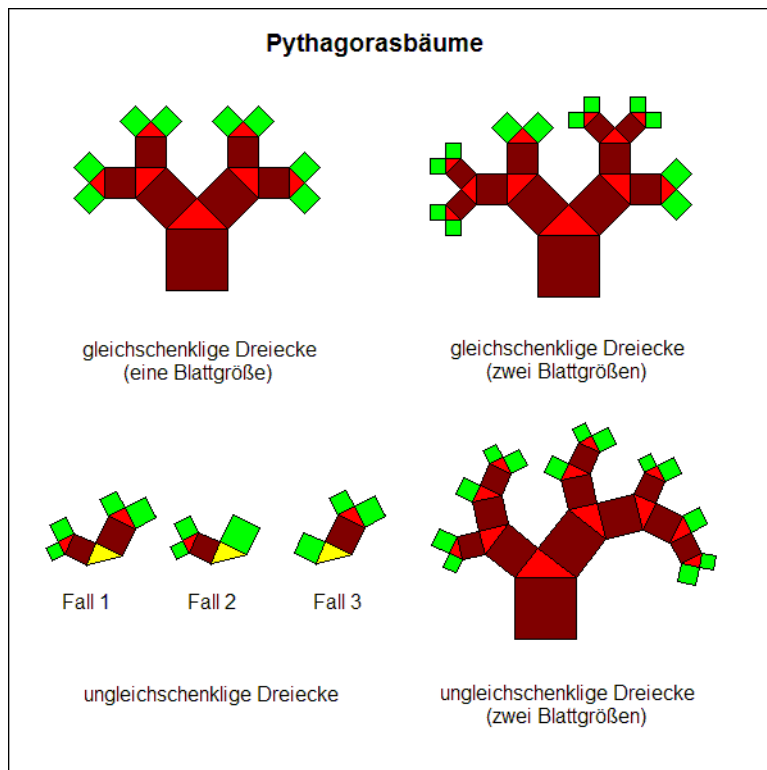
لاندې څیره کې د، پیتاگوراس ونه، لیدل کېږي

له کین و بندي-، له پورته و کبندته لور ته

برابرېښیز درېگودۍ ( یوه پاڼه لویوالی )

- برابرېښیز درېگودۍ (دوه پاڼې لویي)

حالت ۱ تر ۳ نابرابرېښیز درېگودۍ- نابرابرېښیز درېگودۍ ( دوه پاڼې لویي )



تمرینونه:

۱ - لاندې دريگودي وکارۍ :

a)  $a = 4 \text{ cm}$  ;  $b = 8 \text{ cm}$  ;  $c = 9 \text{ cm}$

b)  $a = 8 \text{ cm}$  ;  $b = 8 \text{ cm}$  ;  $\beta = 50^\circ$

c)  $a = 8 \text{ cm}$  ;  $\beta = 40^\circ$  ;  $\gamma = 50^\circ$

۲ - د هوارې فرمول په مرسته

وښایۍ: چی د یوه دريگودي خواوې یا اړخونه او جگي ، یوله بل سره په خټ اړیکو یا ځانښوونو یا تناسب پرتی وي.

۳ - دريگودی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a)  $a = 7 \text{ cm}$  ;  $h_a = 6 \text{ cm}$

b)  $c = 3 \text{ cm}$  ;  $h_c = 5 \text{ cm}$

$$c) \quad a = b = c = 6 \text{ cm}$$

$$d) \quad a = 10 \text{ cm}; \beta = 45^\circ; \gamma = 90^\circ$$

۴- د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي ( د سکندریي هیرون (Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$d \quad s = U/2 = (a+b+c)/2 \quad \text{سره}$$

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې گردی همداسی دننه گردیو وړانگو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.r = r.U/2 = \frac{r.U}{2}$$

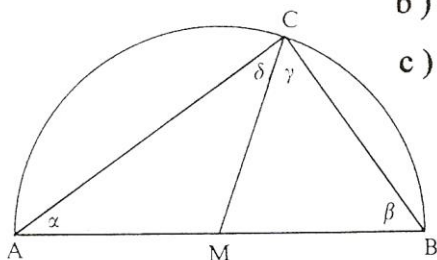
دلته د دننه گردی او r د دباندې گردی وړانگی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویی د ټولو دریگودیو لپاره وټاکي :

$$a) \quad a = 3 \text{ cm}; b = 4 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm}$$

$$b) \quad a = 5 \text{ cm}; b = 7 \text{ cm}; U = 20 \text{ cm}$$

$$c) \quad s = 17 \text{ cm}; r = 5 \text{ cm};$$

$$h_a = 13 \text{ cm} = h_b$$

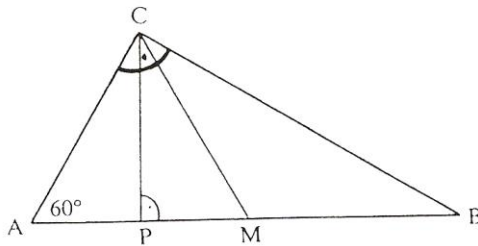


څیره ۸۲

۵- د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وبنایی .

( څیره ۸۲ )

سرلیک



څیره ۸۳

۶ - څیره ۸۳ یو ولاړکونجیز دریگوډی  
 بنایي د کونج  $90^\circ$  سره، وبنایي  
 چی کرښي  $\overline{CP}$  او  $\overline{CM}$  کونج په  
 دري مساوي برخو ویشي.

۷ - وي دې  $a, b, c$  د پیتاگوراس  
 ( فیثاغورس ) گڼون درېگونۍ.

و بنایي :  $(n > m)$

$$a) \quad a = 2n + 1 ; \quad b = 2n^2 + 2n ;$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1$$

$$b) \quad a = 2nm ; \quad b = n^2 - m^2 ;$$

$$c = n^2 + m^2$$

۸ - د ولاړکونجیز دریگوډي پاتی برخی وبنایي ( نښوونه لکه په لیکنه کی ):

$$a) \quad h = 4 \text{ cm} ; \quad q = 5 \text{ cm} ;$$

$$b) \quad h = 7 \text{ cm} ; \quad b = 10 \text{ cm}$$

$$c) \quad p = 4 \text{ cm} ; \quad q = 12 \text{ cm}$$

۹ - د کانتی یا اړخ یا ژی  $a$  اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریگوډي  
 جگوالی وبنایي.

۱۰ - وبنایي : په یوه مساوي اړخیز دریگوډي کی د دباندي گردی

وړانکه  $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$  ده او له دې سره سم د دننه گردی وړانکه په

لاندي توگه ده:  $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$ .

۱۱ - د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریگوډي هواره کله خورا

لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

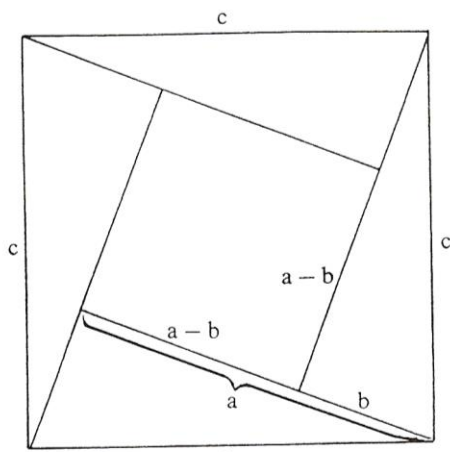
۱۲ - په یوه ولاړکونجیز دریگوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده،

بله نیمه دومره اوږده ده  $(x)$ ، لکه هیپوتینوزي  $(2x)$  نو  $x$  وشمیری.

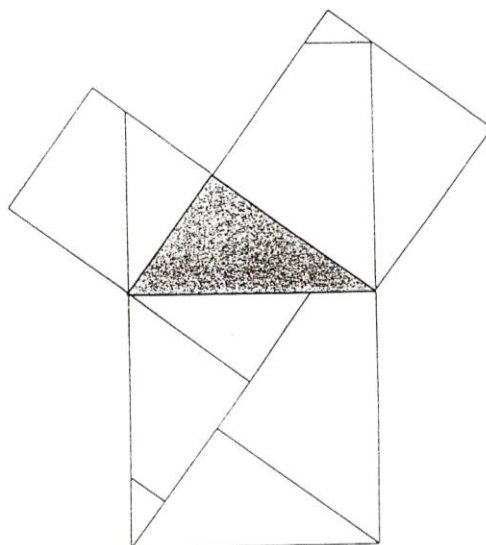
۱۳ - د یوه ولاړ کونجیز مساویپښیز دریکونجی هیپوتینوزې  $c = 10 \text{ cm}$  ده،

کیدى شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

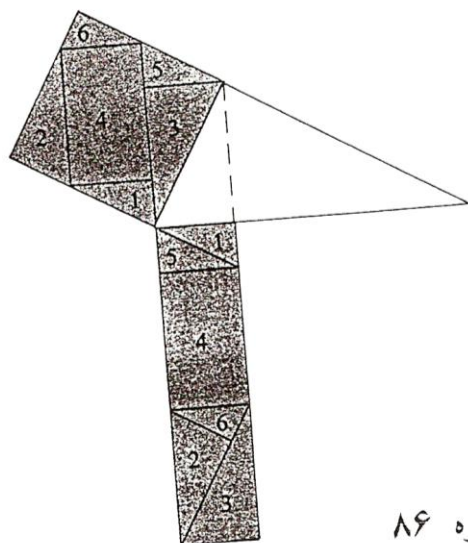
۱۴ - د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاگوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



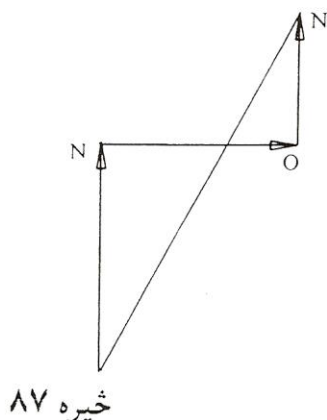
څیره ۸۵



څیره ۸۶

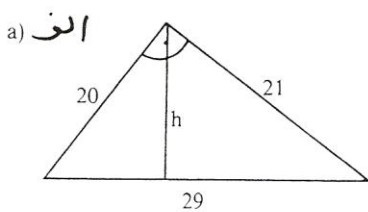
۱۵ - د یوې مربع څخه چې د یوې کانتی یا ژی اوږدوالی یی ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواريز ولاړ- کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژی یا اړخ اوږدوالی یی ۴ سانتي متره وي: الف) د کاتیت له جملی سره ب) د جگجملی سره.

سرلیک

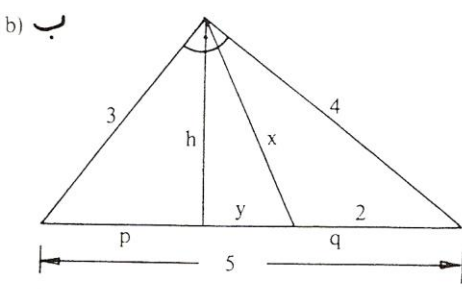


۱۶ - د کاتیت جملی صدق د  
 څیرونی په مرسته، د برخه  
 هوارد د مساویوالی بنوونی  
 له لارې وښایی « (څیره ۸۶) »  
 ۱۷ - په برخه دریگوډیو MPC  
 (څیره ۸۷) د پیتاگوراس جمله  
 استعمال کړی، او په دې بنسټ  
 د پیوتاگوراس جمله وښایی .

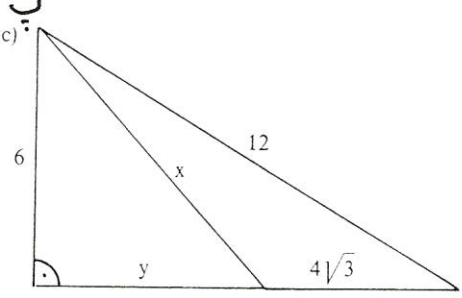
۱۸ - د مساویپنیز ولاړکونجیز  
 دریگوډیو پینسی داسی راکړ شوی



الف ( ۶ سانتي متره )  
 ب ( ۸ سانتي متره ،  
 پ ( x سانتي متره ، هره اړونده  
 هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟



۱۹ - یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور  
 ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا  
 ۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.  
 دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې  
 دی؟ (څیره ۸۷)

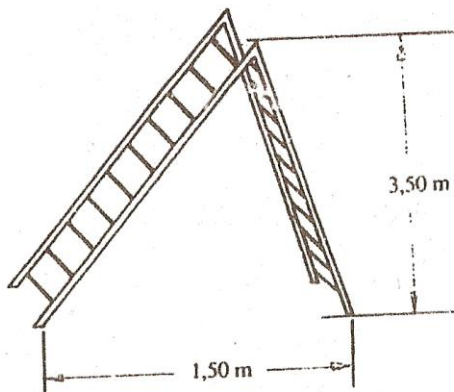


۲۰ - د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،  
 که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته  
 وځغلي؟

۲۱ - دا نامعلومی کرښی په څیره ۸۸ کی  
 وښایی.

څیره ۸۸

۲۲ - یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه  
ایښول شوي د زیني بیخ له دیوال  
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه خومره  
جگه رسیږي؟



۲۳ - د یوې نقشې، چې د ۱ : ۱۰۰۰۰۰  
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې  
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره  
دی د جنگلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰  
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی  
خومره اوږده ده ؟

۲۴ - د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز  
دریځوډی دی

خیره ۸۹

( الف ) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او  
جگوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له  
پورته ژی تر ناوی پورې .

( ب ) د یوه ۹ متره په سور او ۳،۵  
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره  
جگوالی سره د بنسټفورم سور وشمیری،

۲۵ - په یوه رامارته زینه کی ټولی پوری مساوي  
اوږدوالی لریهغه په ټیورونه ۶۴ کی کښل  
شوي د پوریو واټن وشمیری.

۲۶ - یو یوه مساوي پښیز دریځوډي کي چې  
چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جگوالی  
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی،



سرلیک

۲۷ - هر يو ټال په زورند ځغلول شوي رسی تړلی، چی د تړلو ټکی يي اړخونه څومره اوږده دي او جگوالی يی څومره اوږد دی؟

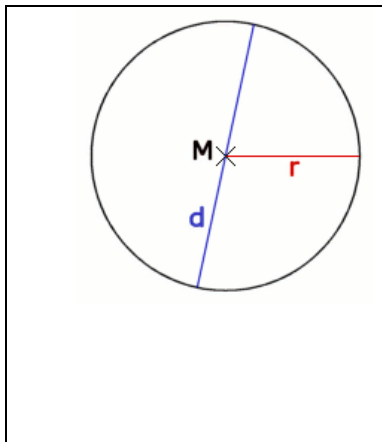
د يوه مساويپښيز دريگودي کونجټکي دي. که وزنورونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر يو له بل لري په کښتی تړلي وي، نو کښتی ټال څومره لري ټال وهلی شي، که دريگوديښست منځټکی د لارجگ ټکي کی ۵،۲ متره د خپل ژورځای څخه جگه وي؟

۲۸ - کوم يو د لاندې دريگوديو څخه نه شي کښل کیدی؟

- a)  $a = 3 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $c = 6 \text{ cm}$     b)  $a = 5 \text{ cm}$ ;  $b = 9 \text{ cm}$ ;  $c = 7 \text{ cm}$     c)  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $c = 2 \text{ cm}$   
d)  $a = 12 \text{ cm}$ ;  $b = 13 \text{ cm}$ ;  $c = 1 \text{ cm}$

۲۹ - ولی درې اړخيز دريگودي هيڅوخت ولاړکونجيز دريگودي نه شي کیدی؟

## گردی (دایره)



پېژند ياتعريف  
د يوې هواري ټول هغه ټکی، کوم چی له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن r (په نامه وړانگه) ولري، گردی لاین يا لنډ: گردی بلل کيږي (مخامخ څیره)

$$k = \{X \in E \mid |MX| = r\}$$

گردی سطحه يا - هواره او گردی چاپېريال يا - محيط



په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له  $M$  څخه د  $r$  کوچنی یا د  $r$  سره برابر وي گردی (موخه ترې گردی منځهواره ده یا ټیک : گردیتوټه ځما په پام به بهتره وي که دا گردی چیترو یا لنډ : چیترو، چی موخه ترې یواځې منځهواره ده، وټولو بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چی په گوته کره، هغه کرښه چی د گردی ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د گردی وړانگه یا لنډ: وړانگه بلل کیږي، چی په  $r$  سره یی ښایو .

پیژند: او هغه کرښه، چی گردی نیموي د گردی نیمونکی کرښه یا لنډ: نیمي ( قطر) بلل کیږي او په  $d$  سره یی په نخښه کوو .

پیژند

دگردی دننه کونج پوره کونج  $380$  درجي لري.

گردیچاپیریال د وړانگي  $r$  سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی گردی منځهواره د وړانگي  $r$  سره په لاندې توگه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړ شوی گڼ گردی گڼ بلل کیږي

$$\pi = 3,14159265 \quad :$$

یادونه: دا چی ما کله هواره یا سطحه په  $A$  یا  $F$  او  $\pi$  می په  $\pi$  نخښه کړي، دا به

هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښی نه کړین

په پورته کی ورکړ شوی گردی گڼ « پی » گورو، چی بیرته راگرځیدونی دی . له دې

امله یو ایرشنل گڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه )

وروستی پر یوډي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کی یی مور نزدی شمرنی ته

مجبور یو، ځکه چه د جشمیری د گڼځایونو له امله، چی پای دي یا پوله لري یا

راند(محدود) دي.

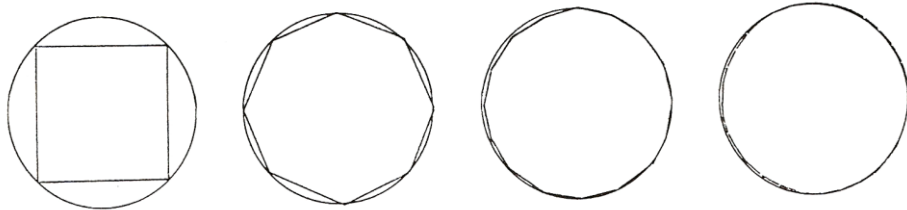
څنگه سری په دې بریالی شو چی دا گڼ پیدا کړي؟

سرلیک

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

دا له اربنیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تگلار داسی پیل کیږي، چی په گردی کی یو ه څلوری یا مربع راگیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکڅیسف یا یو په بل پسې ۸، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لور یا جگ کړي یعنی په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

څیره ۱۱۹



یوې گردی ته د یوه  $n$ -گودي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

څیره ۱۱۹ بنسټی جی،

	<p>په مخامخ څیرو کې نهه گودی ورپسې شپږگودی کنبل شوي، دي ته گورو، چې څنگه گردی ته نزدې کیږي</p>
--	--

په پورته څیره خو څوگودیز بریښي او ستره تری راتاو گردی

پورته څیرو کې یوې گردی ته د یوه  $n$ -گودي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

کنل کیږي، هغه ۶۵۵۳۷ گودی، چې گورو نزدې یا تیک گردی ده)

د زیاتیدونکي  $n$  سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ورسونو ته په یوه پاڼه کی د کنبلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کنبل کیږي، په همدې وخت کی د منځتکی څخه د په همغه واټن د ټکو گبون یا تعداد زیاتیري (یعنی د

گوډټکو تعداد یا گنون ) د مربع پیلگردي سره دا څیره تل نزدې کيږي. په ورته توگه د دي چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالگردي ته نزدې کيږي. د گوډټکو زیاتیدو سره د گردی وړانگه هم لویيږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توگه د چاپیریالگردي څخه. په روښانه توگه لیدل کيږي چی د چاپیریالگردي او د منځ هوارې د ناپای ډیر  $n$  گوډونو سره د  $n$  - گوډي سره یوځای پریوځي یا یوځای کيږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توگه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي  $n$  گن سره ستایل ( په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي ) پیژندوږ دی:

$n$ پیدایښتي گن	$U_n$ چاپیریال	$F_n$ منځهواره
4	5,656854	2
8	6,122934	2, 828427
16	6,242890	3,061467
32	6,273096	3,121445
64	6,280662	3,136548
128	6,282554	3,140331
256	6,283027	3,141277
512	6,283145	3,141572
1024	6,283175	3,141572
2048	6,283182	3,141587
4096	6,283184	3,141591

وروسته به وکتل شي چی څنگه د گردی چاپیری او گردی منځهواره د تریکونومتری یا دریکوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبلگه:

د بانک مدیر بناغلی کړ او غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د بنیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځای نیولی شي. ایا ددی لپاره یو میز چی ۲ متره نیمه (قطر) ولري

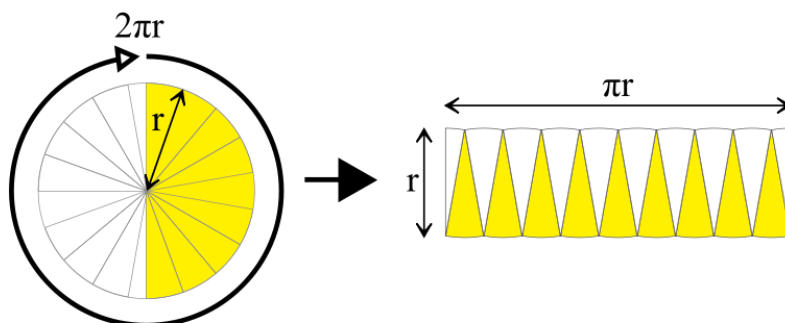
## سرلیک

بسپا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځای په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره گران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه گران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی  $U = \pi \cdot 1m = 6,248m^2$  په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځای په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی:  $8.75 = 600cm$

د ۸۰ سانتي متره ځای د نفر په سر  $80.8 = 640cm$  . منځ ازښت یې  $6,2m$  دی. پس د نېکو هیلو سره ټول ځای نیولی شي میز دا هواره لري:  $F = \pi \cdot 1m = 3142m^2$  او له دې امله  $3,142 \cdot 250 = 785,40$  یانې الماني مارکونه ازښت لري..

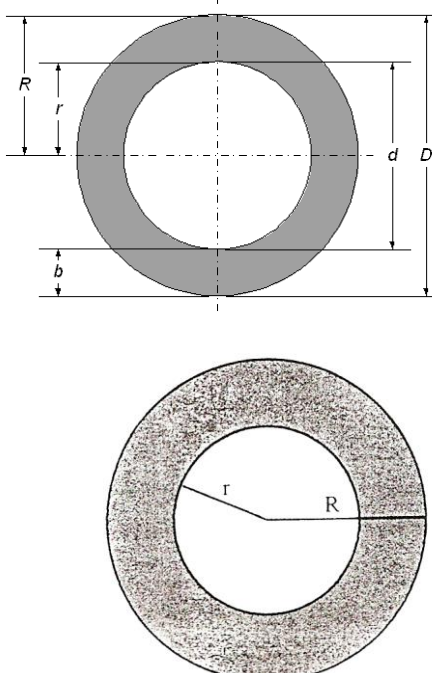
په لاندې څیره کې کتل کیري، چې د گردی منځهواره نزدې



$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده ( په پورته څیره کې د څیرې کوچنیوالي له امله د گردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهور دي )

گردنتوته او گردبیرخه، گردیکړی

 <p style="text-align: center;">څیره ۱۲۰</p>	<p>ډیر وخت دننه- یا خونديگردي له چاپیریالگردي کوچنی وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کرۍ منځ ته راځي، چې د هغې منځهواره د دواړو گردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي.</p> <p>جمله : مور دوه گردۍ لرو، چې د چاپیریالگردي یا دباندې گردۍ وړانګه R او د دننه گردۍ یا خوندي گردۍ وړانګه r</p> $F_K = \pi R^2 - \pi r^2$ <p>ده، نو د</p> $F_K = \pi(R^2 - r^2)$ $F_K = \pi(R - r)(R + r)$
---	---

بل ډول پې: یوې گردیکرۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د گردیکرۍ منځهواره د گردیبرخي د سور او دننه او دباندې گردۍ د نیمو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې گورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیاپیله:

د کړاو میز درز پیداکړ. چې له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. بناغلی کړاو فکر کوي، چې که دامیز په پنځه سانتي متره کوچنی کړی. کوم میز هواره پاتې کیږي او گردیکرۍ چې له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځای نیولی شي؟

سرلیک

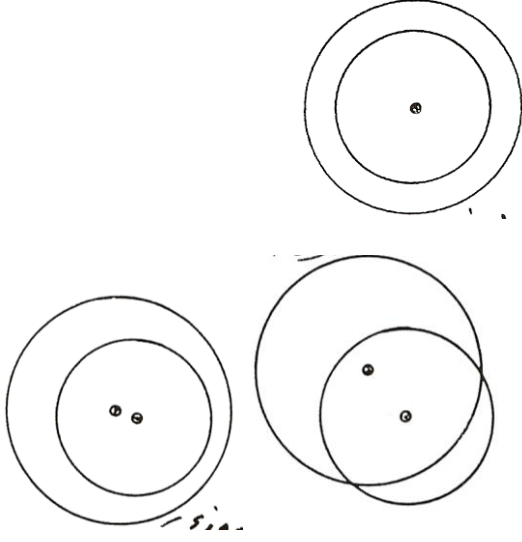
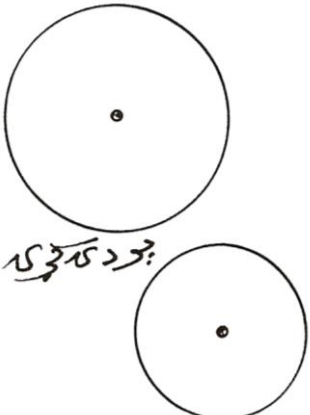
$$F = (0,9m)^2 \cdot \pi = 2,835m^2$$

د گردیکړی منځه‌واره او چاپیریا په لاندې ډول دي

$$F = 1,95m \cdot 0,05m \cdot \pi = 0,30m^2$$

$$U' = 2,095m \cdot \pi = 5,969m ; U' : 8 = 74,6 \text{ cm}$$

د داسې لږ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځای نیولی شي.

 <p>دا یو نایومنځي گردی دي</p>	<p>هغه گردی، چې منځتکي یې یو پ بل پریوځي کونځنټري یا راټول یا یومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکښنټري یا نه یومنځي بللکيږي.</p> <p>تر هغې چې یوه گردی ټوله په بله کې پرته وي، پدی شي چې د راکښلو له لارې په یومنځي یا کونځنټري گردیو بدله شي</p>  <p>جود کړی</p>
--	--

هغه دوه یا زیاتې گردی چې منځ تکی یې یو په بل پریوځي کونځنټريKonzentrie یا راټول او په غیر له دې اکښینټريExzentrie یا ناراتول بلل کيږي . تر څو یوه گردی

ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی دراکنبلو له لاری په کونځینتري گردیو یا راتولگردیو بدلی شي.

که گردی یوبل پوره پټې نه کړي، نو د گډو هوارو یا سطحو (= غوڅډیریو) یا گډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي . که گردی یو له بل سره گډ ټکي ونه لري نو دا گردی یو دبل سره پردی بلل کیږي .

### څو پیژندونه یا تعریفونه:

د گردی هغه برخه گردیتوټه ( سگمنت ) **Segment/ Abschnitt** بلل کیږي، که چیري یوه گردی د یوې کرښی له لاری یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوڅکرښه یا غوڅوونی یا ټوټه ووني ( سیکانت ) **Sekante** بلل کیږي. غوڅکرښه گردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د گردی له منځ څخه تیره شي، نو گردی په دوه برابر و برخو ویشي، چی دا بیا گردی نیمووني بلل کیږي. هغه غوڅووني چی له منځ ټکي تیره شي، د گردی نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که گردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له گردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي . په گردی د غوڅکرښی دننه پرته برخه د گردی ټوټوني ( **Sehne** ) یا وتر بلل کیږي . ټوټونی یا **Sehne** بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا -لکه، چی ورسره بلد یو - کرښي دي . د یوه گردی څخه د دوه وړانگو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه گردیبرخه یا سکتور **Sektor** بلل کیږي. د منځټکیکونج یا منځني کونج او لیندې ( **Bogen** ) **b** سره. مخامخ څیره ده

په لاندې څیرو کی د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کین وښی لورته:

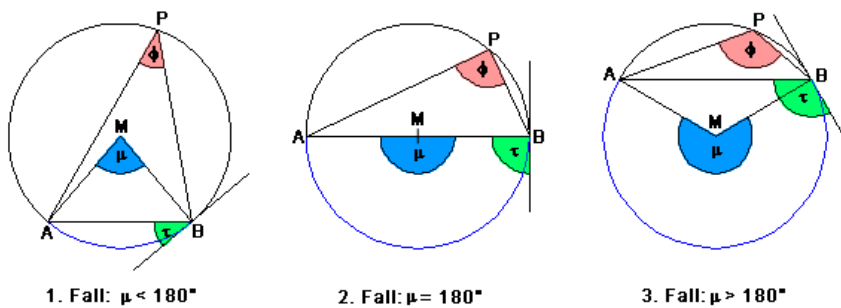
گردیلینده **Kreisbogen** د گردی ټوټه ووني(ټوټووني) **Krissehne** ،  
گردی برخه **Kreisektor** ،

سرلیک

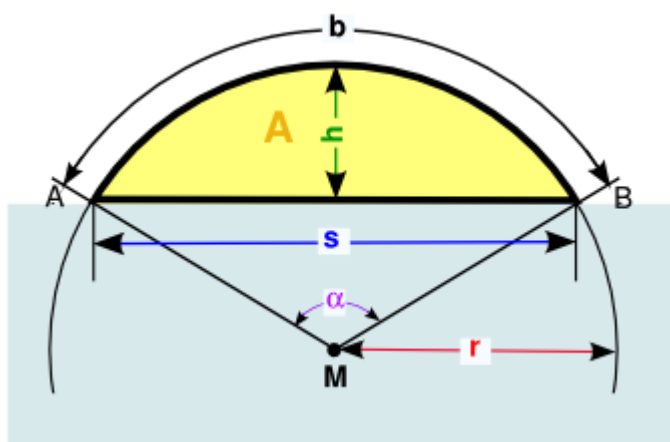


د پورته ژباړه له کین څخه و بنې لور ته: گردی- لینه توتې وونې، گردې برخه، گردی توتې

په گردی کې د کونجونو ډولونه:



د گردی توتې





گردی ټوټه Kreissegment ,

د گردی ټوټی لویي:

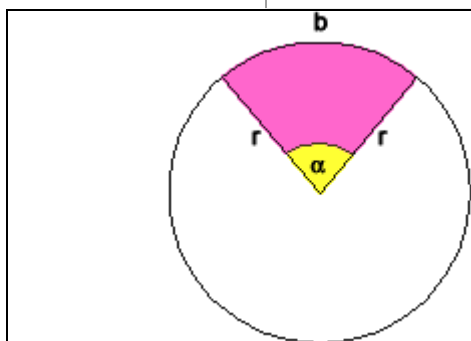
- $\alpha$  = منځټکی کونج Mittelpunktswinkel
- $b$  = گردی لینده Kreisbogen
- $h$  = ټوټی جگی Segmenthöhe
- $r$  = وړانگه Radius
- $s$  = گردی ټوټه وونی یا - وتر Kreissehne
- $A$  = ټوټی هواره Segmentfläche
- $M$  = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- $A-M-B$  = ترنه Verbindung برابر پینیز درېگودی
- 

د گردی ټوټی فرمولونه

<p style="text-align: center;">!Error</p> $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2},$	<p>سطحه مخامخ فرمول <u>Flächeninhalt</u></p>
$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$	<p><u>Radius</u> وړانگه</p>
$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	<p><u>Kreissehne</u> گردی ټوټه وونی (د وروسته لپاره دې په پام کې وي</p>

سرلیک

	$h = r - \left( r \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left( \frac{s}{2} \right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan \left( \frac{\alpha}{4} \right)$	Segmenthöhe د توتې جگوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلیندې اوږدوالی <u>Bogenlänge</u>
	$\alpha ,$ $\alpha = 4 \cdot \arctan \left( \frac{2h}{s} \right)$	<u>Mittelpunktwink</u> el منځتکیکونج په درجه کچ <u>(Gradmaß)</u>



گردی برخه یا قطاع Kreissektor

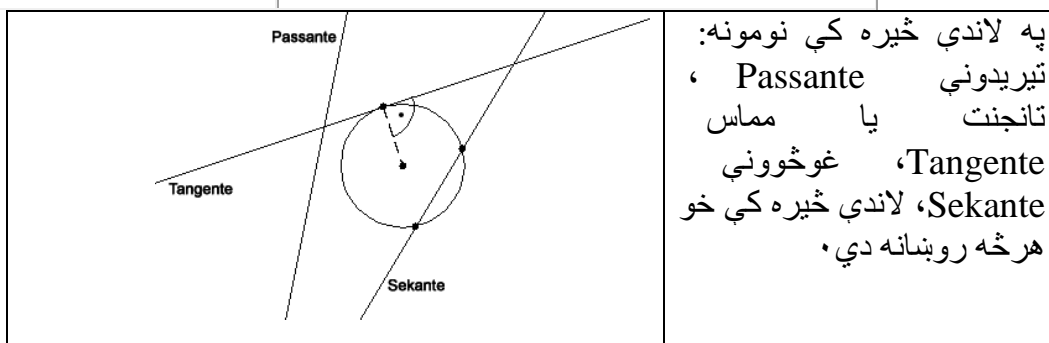
د گردی برخې یا قطاع فرمولونه

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$$

!Error

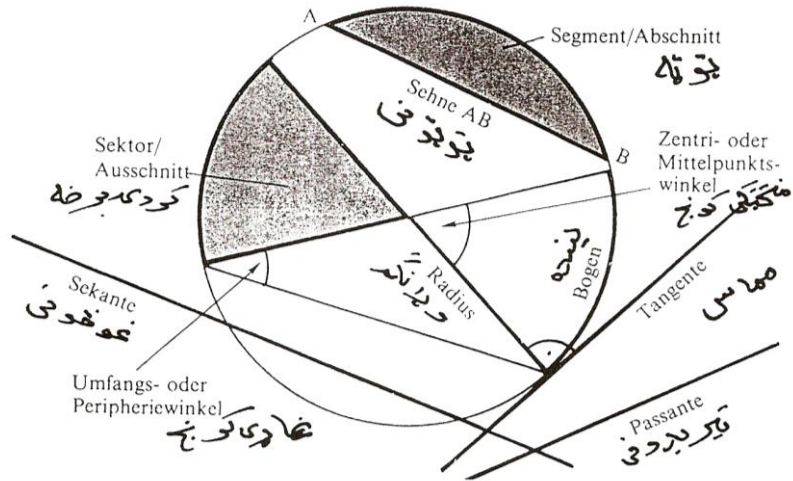
Flächeninhalt سطحه یا منځهواره

$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$	د گردۍ لیندې اوږدوالی
$r$	<u>Radius</u> وړانګه
$\alpha$	<u>Mittelpunktwinkel</u> ( <u>Gradmaß</u> ) منځتکی کونج (په درجه کچ)
$\pi \approx 3,1415926536$	<u>Kreiszahl</u> گردیګن یا - عدد



د پورته څیرې کې راوړي څه په لاندې څیره کې ټول په لاندې څیره کې ورکړل شوي دي

سرلیک

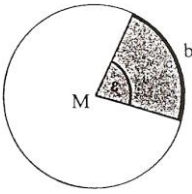


پېلېلگه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوگرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیري یا مصرفیري. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کی، په پالستي، بنیيني او رنگ ټول ۹ په سلو کی رسیري، په رنگه فلزونو او ربر ۶ په سلو کی رسیري، او تیل ۴ په سلو کی. یو گردیدیاگرام وکارۍ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي. د گردی ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي ده ( ۱۰۰ په سلو کی) (د جوړموادو برخه د گردبرخی څخه عبارت دی. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه گردی برخه وي د منځکونج سره  $360^{\circ}:100=3,6^{\circ}$  وی .

	<p>یعني <math>4\% \sim 14,4^{\circ}; 6\% \sim 21,6^{\circ}; 9\% 32,4^{\circ}; 75\% = 270^{\circ}</math></p> <p>خیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې بنوول شوي وي په یوې گردی کې وکینل شي یا لاندې</p>
--	--

د گردی برخي خیره څرگندوي» د منځکونج چې د  $\epsilon$  سره یې په نڅبنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

 <p>ε لویوالي ده b</p> <p>سټګی د یوه یا گردی، اغوځی</p>	$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360^\circ}$
--	--

د ډبل برابرېون د دویمې برخې څخه باوري دي:

جمله: د گردی برخې د لیندې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{2\pi r \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r \varepsilon}{180^\circ}$$

د لومړی برخې څخه د سیکتور یا گردی برخې لپاره باوري کیري

جمله: د سیکتور یا د گردی برخې منځه‌واره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{r b}{2}$$

اړیکي  $F_{Sk} = \frac{r b}{2}$  د مات  $F_{Sk} = \frac{F \cdot b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$  د لنډونې څخه منځ ته راغلي

بیلګه: د خام موادو برخې ( بیلګه منځ ) هواره څومره لویه ده، که د گردی دیاګرام ۵ سانتي متره وي؟

$$F \text{ اوسپنه او فولاد} = (25 \pi : 360^\circ) \cdot 270 = 0,218 \cdot 270 = 58,905 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ پلاستیک} = 0,216 \cdot 32,4 = 7,069 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ رنگه فلزات} = F \text{ ریر} = 0,218 \cdot 21,6 = 4712 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ تیل} = 0,218 \cdot 14,4 = 3,142 \text{ cm}^3$$

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د گردی سطحه یا هواره ورکړي:

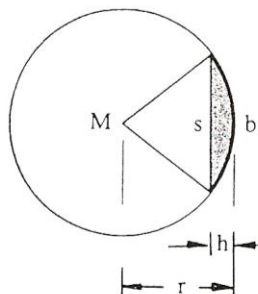
سرلیک

$$F = \pi r^2 = 78,54 \text{ cm}^3$$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اړخنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوپونی څخه جوړ مساوي پنبیز دريگودي کمون دی.

څیره ۱۲۵

گردې ټوپونه



د دريگودي هوارې لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5 r^2 \cdot \sin \epsilon$$

(تريگونوميټري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوپه سطحه یا هواره

جمله: د گردیتپوتی یا سکمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$

$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$

$$F_{Sg} = (\pi r^2 \epsilon / 360^\circ) - (r^2 \sin \epsilon) / 2$$

$$F_{Sk} = (r^2/2) [ \pi \epsilon / 180^\circ - \sin \epsilon ]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوپه هوارې لپاره گټور نزدې ارزښت  $F_{Sg} = (2/3)sh$  بنوول شوی دی

پیلبللگه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د گردیمیز په ځای به یو منظم اته کونجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کی هواره او چاپیری به څومره لوی وي؟

لمړی گردیتپوتی شمیرو. په ورته ډول لکه د گردی نزدې شمیرلو لپاره، د مربع

څخه و ډیرکونجی ته، مخ ته څو او دې د اړخونو او ردوالی s شمیرو.

منځولاره  $m$ ، د اته کونجیز کانتی یا ژی  $k$  او بالاخره د دگر دیتوتی  
جگولی  $h$  د پیتاگوراس د جملی په مرسته شمیرو.  
لاندې لاس ته راځي:

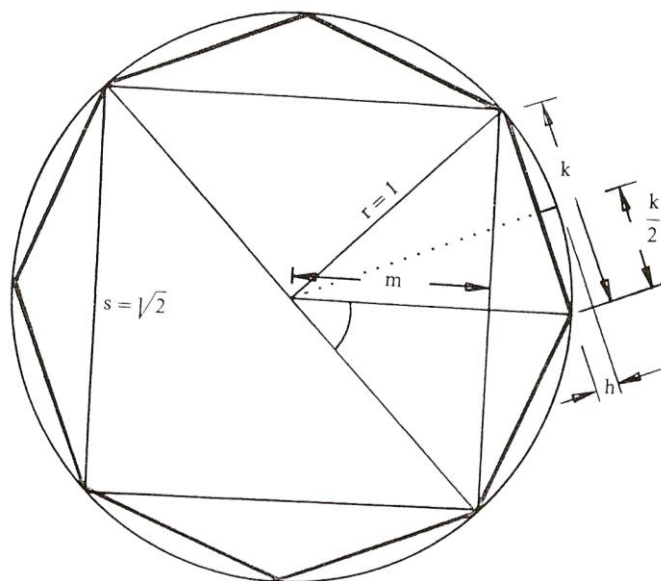
$$s = \sqrt{2} \cdot 1 = 1,414 \text{ m}; \quad m = \sqrt{a - (1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$$

$$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756 \text{ m}$$

$$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$$

د  $\epsilon = 45^\circ$  له امله  $b = 0,393 \text{ m}$  دی. او له دې سوه

$$F_{\text{توتیه}} = 0,5 \cdot [0,393 \cdot 1 - 1,414(1 - 0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$$



سرلیک

له دې څخه په هر صورت د بنیښی میز جوړیږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په

لاندي توگه ده:  $8.0.039 = 0,312 \text{ m}^2$ . میز اوس لاندي هواړه لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوي}} = 2,828 \text{ m}^2$$

او په همدې توگه لکه د کوچني شوي گردیهواړه د وړانگي  $r = 95 \text{ cm}$  سره. د

کیناستلوځاي سور (k) حتي زیات شوی ، چاپیری اوس  $U = 8.0,765 = 6,123 \text{ m}$

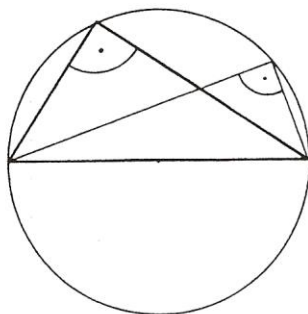
دی. نزدیونه هم همدا ارزښت ورکوي:  $F = 0,765.0,076 = 0,039 \text{ m}^2$  او

داسی نور.

تریگونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi \cdot 1.45 : 360 - 0,5 \cdot \sin 45^\circ = 0,039 \text{ m}^2$$

او داسی نور . څیره



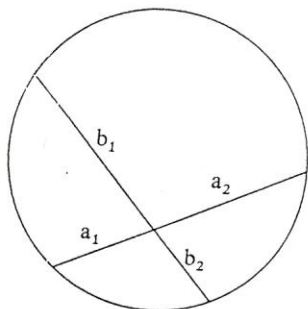
څیره ۱۲۷

گردیجملی او گردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه گردی کی هر پریفري- یا ژی

کونج ولاړ کونج دی ( څیره )



$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

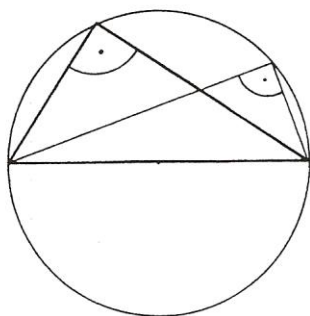
د ټوټونی جمله

که دوه گردی ټوټونی په گردی کی

دنه یو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو



تریگونومیتریکي حل موزر هدف ته رسوي:  
 $F \text{ ټوټه} = \pi \cdot 1.45 : 360 - 0,5 \cdot \sin 45^\circ = 0,039 \text{m}^2$   
 او داسی نور . څیره

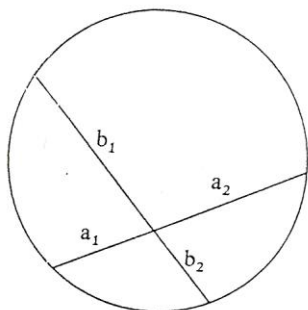


څیره ۱۲۷

گردیجملی او گردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه گردی کی هر پریفري- یا ژی کونج ولاړ کونج دی ( څیره )

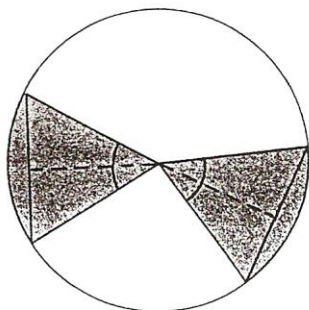


$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

څیره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه گردی ټوټونی په گردی کی دننه یو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو څل ( ضرب ) یی یو ثابت دی



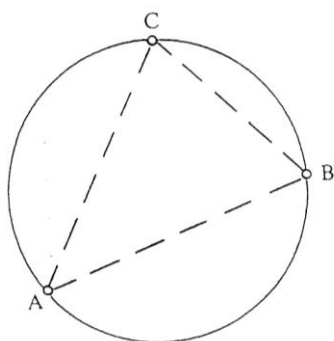
څیره ۱۳۱

د مساوي ټوټوونو جمله

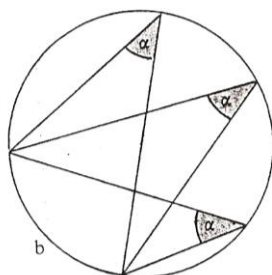
مساوي اوردي گردیټوټی د گردی له منځتکي مساوي فاصلی لري، مساوي منځتکي کونجونه، مساوي گردیلینده، او مساوي گردیټوټی او مساوي گردیبرخی لري .

سرلیک

### د چاپیرگردی جمله



د درې ټکو A, B, C لپاره یوه گردی موجود ده چی د دریواړو ټکو څخه تیریری: دا د دریکونجی ABC چاپیرگردی بلل کیږی څیره



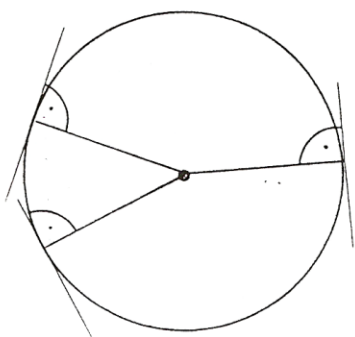
### د پریفری - یا ژیکونج جمله

څیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول پریفری - ژی کونجونه مساوی دي

	<p><b>د منځتکي کونج او پریفری - یا ژی کونج جمله:</b></p> <p>یو منځتکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې تری پریفری - یا ژی کونج (چاپیریالکونج) مخامخ څیره.</p>
	<p>د منځتکي کونج او د تانجنت کونج - او ټوټونکونج جمله:</p> <p>د منځتکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت - یا ټوټه وونی کونج.</p> <p><b>د گردیو جمله چی په دوه ټکو کی سره غوڅوی:</b></p> <p>د ټولو گردیو یا دایرو منځتکي کونج چی یو بل دوه ټکو او کی غوڅویو ناپای کرښه باندې، چی ځایلاين (ځایکرښه) وایی پراته دي. مخامخ څیره.</p>

### د وړانگې او تنجنت جمله



څیره ۱۳۶

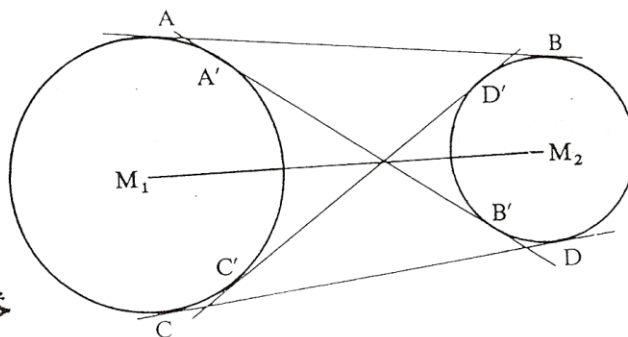
په لمستکي پرته وړانگه او اړوند  
 تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ  
 پراته دي.

### د تانجنت جمله:

د دوه گردیو د منځ ټکو  $M_1$  او  $M_2$  سره تانجنتونه دنننی (دباندي) تانجنتونه  
 نومیري که د دوه گردیو د منځټکو کرښه  $M_1 M_2$  غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې  
 دوه گردیو گډ دننني او دباندي تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅتوبې  
 همغه اوږدوالی لري.

$$|AB| = |CD| \quad (\Leftrightarrow) \quad |A'B'| = |C'D'|$$

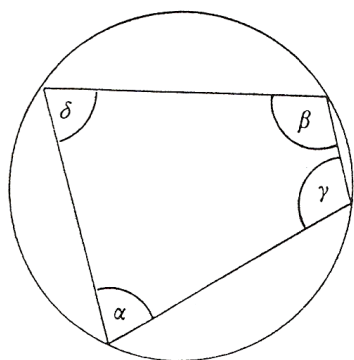
په همدې ډول



څیره ۱۳۷

سرلیک

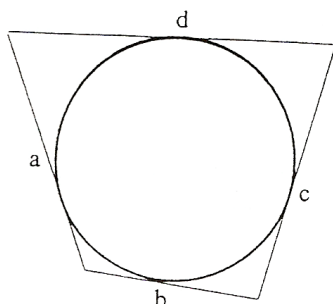
### د ټوپونو څلورگودي جمله



څیره ۱۳۸

د ټوپونو کونجونه چی مخامخ  
پراته دي یو بل سره  $180^\circ$  باندې  
پوره کوي.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$



څیره ۱۳۹

### د تانجنتونو څلورگودي جمله

د تانجنتونو په څلورکونجی کی د مخامخ  
کونجونو لویوالی د نورو مخامخ کونجونو  
سره مساوي دی.

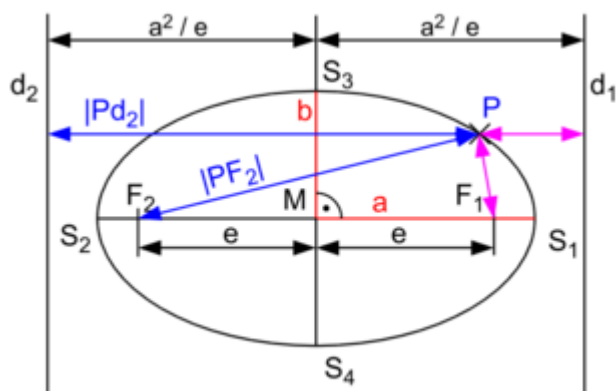
$$a + c = b + d$$

ایلیپسی (بیضوي یا هگی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبلگه:

د کړاو میز جوړښت باندې مور په اته کونجی اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا  
چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمی کیدو خطر موجود دی

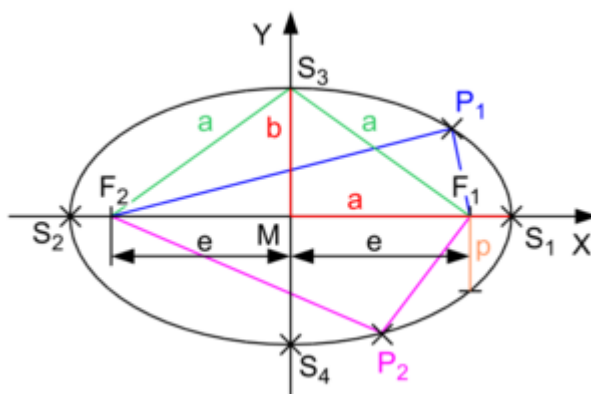
پوښتنه رامنځ ته کیري چی : داسی یو را گردشوی ښکلی شکل ، چی گردی  
نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ،  
داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې څیره ښایي . چی هر د  
غارې ټکی دوه ټکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغو ټکو  $P$  ډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو  $F_1$  او  $F_2$  سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو ( څخه ثابت یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیري

لاندي واټونو یا فاصلو ته سوزونوړانگی وايي.  $|PF_2| = r_2$  او  $|PF_1| = r_1$ .



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

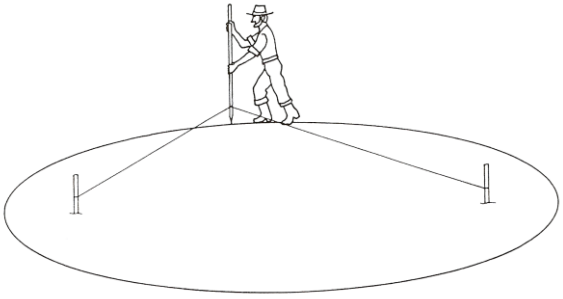
منځ ټکي ( وړوی  $M$  په  $O$  ته د ایلیپسی منځ ټکی وای،  $e$  ته د سوزونواټن یا فاصله یا لایني ایکسټنټریختایت (lineare Exzentrizität) یا لایني ناراتوله وایي. ددی لویو لپاره لاندي اړیکي باوري دي:

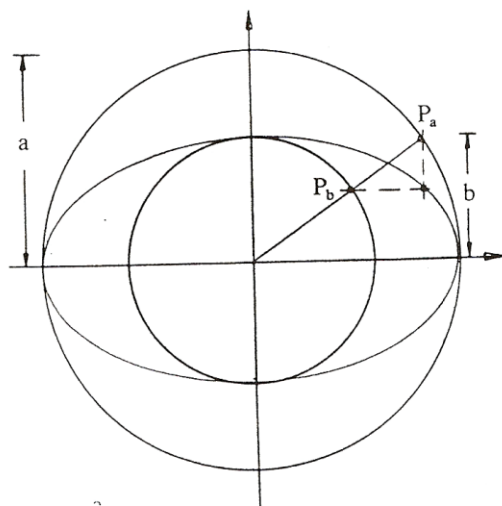
$$I.....r+r=2a \wedge II.....a^2-b^2=e^2$$

په دې کې  $a$  او  $b$  د ایلیپسی لوي او وور نیممخوونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیري د ایلیپسی ټکی P د نیممخو  $a$  په اخر کې وټاکل شي، II د پيوټاگوراس له جملې لاس ته راځي که د P ټکی د  $b$  نیممخو په اخر پروت وي. دواړه ناپانکرښی چی د سوزونټکي تیریري او په دې په O کې ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورو نه جوړوي. د خوشي په ټکی P کې هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونورانگو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

دا څیره دې گران لوستونکي د تمرین په توگه وباسي. د یوې رسی، چی په  $2a$  اوږده وي، په داورو سرونو کې مورې ونړی او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل (خوزیدونکی) مورې یا لرگي په مرسته دا پری راکښ کړی یا راکاری او وگرځوی، دلته کوم شکل چې پیدا کیري ایلیپسی ده او دواړه د پری د سرونو ټکي چی مورې پری وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کو او ردینات سیسم او یا په یوه میلی متر کاغذ کونځینتري یا راتولو گردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیدا کیري، چی سری د یوه ټکي دوه گردی د  $a$  او  $b$  وړانگي ووهي او هره د خوشي وړانگه د نننی گردی په  $Pb$  او دبانندی گردی په  $Pa$  کې غوځوي. که د  $Pb$  څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر  $Pa$  دوام، نو هر چیرته یو د ایلیپسی یا هگی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي. پیژندل کیري چی هر  $2b$  اته غیرگ توتونی

 <p style="text-align: center;">څیره ۱۴۱</p>	<p>د <math>k = a/b</math> فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خوري ددې فاکتور <math>k</math> په اندازه</p> <p><math>r \Rightarrow \pi r \cdot (k \cdot r) = F(\text{hagai, baizawy})</math>  او له دې چی <math>r = a</math> او <math>k \cdot r = b</math>  دلته <math>r</math> د گردی « لویه نیمه اکسی(محور) ده</p> <p>جمله : دایلیپسی هواره  ده <math>F = \pi ab</math> :</p>
---	--



څیره ۱۴۲

د ایلپسی چاپرونی په ساده ډول  
نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی  
په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې  
شمیرنه بسیا کوي.

جمله : د ایلپسی چاپیری:

$$U \sim \pi (1,5 \cdot [a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا گردی ته ورته ایلپسی. دا

په دې مانا چی  $a \sim b$ :

$$U \sim \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که  $a = b$  وي د گردی چاپیری ته ځي:

$$U = \pi (1,5 \cdot [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi (3a - a) = 2\pi a = 2\pi r \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توگه یا  $\Leftrightarrow$

$$U = \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi \cdot \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلگه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی کړاو میز په ایلپسی یا نیضوي یا هگي څیره لرودی  
شي؟

لوي محور  $a = 1\text{m}$  پاتي کيږي، کوچنی محور دی:  $b = 95\text{cm}$ ، داچی میز باید د  
درځ ژوروالي پورې غوڅ شي. نوله دې امله هواره ده:

$$F = \pi \cdot 1.0,95 = 2,985\text{m}^2$$

چاپیری کیری:

$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}) 6,127 \text{ m} \Leftrightarrow$$

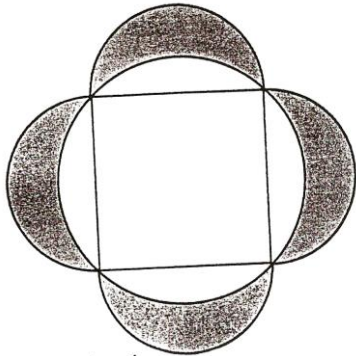
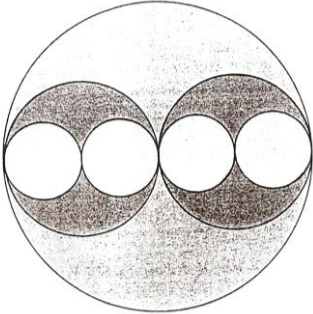
یا په همدې توگه د بیضوي یا هکی و د گردی فورم ته یا گردیخیری ته نزدې فورم نیسي  $U \sim 6,128 \text{ m}$ . له دې امله هگیخیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

تمرینونه

- ۱ - په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارک Yosemite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چی وړانگه یی ۷ ، ۴ متره وي؟
- ۲ - د لاس ساعت دقیقه بنونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی (خرخونمحور - خوکه)، خوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کی څومره لار وهي؟
- ۳ - ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي (اکواتور) وړانگه لري. قطبچاپیری یی څومره دی؟
- ۴ - په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پیری غزوو ( ۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیری څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانگړي تخنیکي چمتووالی له لارې په هرځای کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیری. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سړی ددې ترمنځ یوه د (گیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځای کړای شي؟
- ۵ - د غوڅهواره به یی د ځمکي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جگ وي؟
- ۶ - په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

انداه لري وي؟



	<p>۷ - د گردی [پریال څنگه تغیر خوري، که د هغه وړانگه دوه رابره شي یا په همدې ډول نیمه شي؟</p> <p>۸ - وښایی: د مربع هواره د څلورمې میاشتو (سپوړميو) د هوارې سره مساوي ده؟</p>
	<p>د څیرې سره سم د گردیو هوار متن یا د هوارو دنده د مساوي وړانگو سره وټاکي. د اهره یوه د لويې گردی په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایی، چط څلورو وارو گردیو چاپری د همغې وړانگې سره دومره لوي دی لکه د راجاپیره یا دباندې گردی چاپري.</p> <p>۱۰ - د یوې مربع د باندې او دنده یوه گردی راگرځیدلي. د دواړو گردیو هوارې یو بل ته څنگه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟</p>

۱۱ - د دوه گردیو منځ ټکی د مساوي وړانگې  $r = 7,2 \text{ cm}$  سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانگه . د دواړو گردیو گډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ - په یوه گردی، چی وړانگه

یې  $r = 10 \text{ cm}$  ده، که

یوه گردیکړی کینبول شي،

چی هواره یې دومره لویه ده

لکه د دنده گردی هواره. د

دباندې گردی وړانگه به

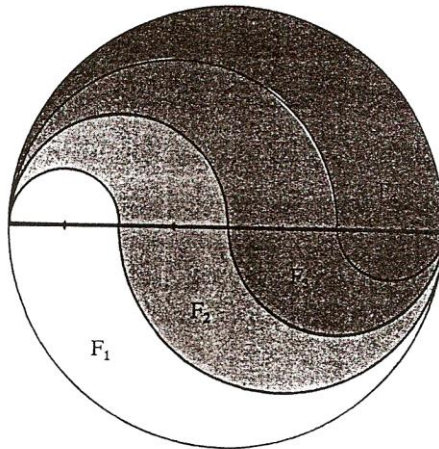
څومره وي؟

۱۳ - د یوې گردی

برخهوارې،  $F_1$  او  $F_2$ ، لکه په

څیره ۱۴۰ کې چی ورکړ شوي،

وښایی، چی وړانگه یې  $r = 4 \text{ cm}$



څیره ۱۴۵

وي. وښايي چي هواره په څلورو مساوي

هوارو ټوټه شوې ده ( څيره 14 )

۱۴ - د هغه گردې وړانگه وښايي ، کوم چي همغه هوارخوندي لري لکه :

الف ) يوه مربع، چي داړخ اوږدوالی يی ۵ سانتي متره وي.

ب ) يوه روتی چي نيمی يی ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چي د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ - د يوه پنډ پينسيل سره يوه گردی وهل کيږي، چي دننی وړانگه يی ۵

سانتي متره وي. داچي پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتيني

يوه گردیکړی ده. د دې گردیکړی هواره وشميری.

۱۶ - يوه ساتليت يا جوړه ، يعنی مصنوعي سپورمی، له ځمکی په يوه گردی

راڅرخي، چي سرعت يی په ثانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره

دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته

ضرورت لري. وښايي چي دا

ساتليت يا جوړه سپورمی يا

مصنوعي سپورمی له ځمکی

څخه په کوم جگوالي الوزي؟

۱۷ - د يوه څرخونکړی يا بهتره

څرخونپټی په مرسته کيدی

شي څرخونحرکت يا

څرخونخوزون د يوې څپي په

بلی څپي راوړل يا واړول شي.

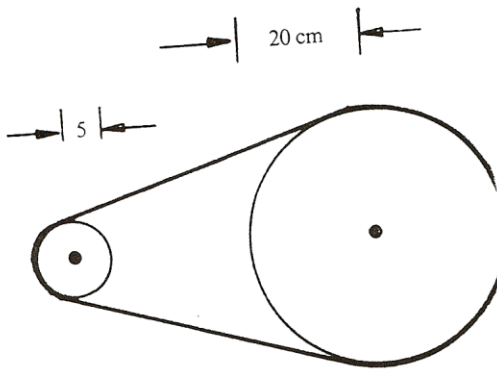
په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه

يعنی ډيره ټيک اړه په بريښنا

ماشين چلول کيږي يا په حرکت

راوړل کيږي. د اړي خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټک دی، که د

ماشينڅرخونڅرخي يا گاډيل (  $r = 20 \text{ cm}$  ) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وگرځي؟



څيره ۱۴۶

۱۸ - کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هگیخیره لري که ولر:

a)  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ , b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $e = 1 \text{ cm}$

c)  $r_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 3 \text{ cm}$ ,  $w(r_1, r_2) = 90^\circ$

۱۹ - وښایي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی  $a_1 = a_2$  او  $b_2 = b_1/2$  ، نو دښی

ایلیپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هگیخیرې غاړه.

۲۰ - ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې گردۍ په څیر راڅرخي. ددې

چاپيري وړانگه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب) په کوم منځنی سرعت ( کیلو متره په سانیه کی ) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه

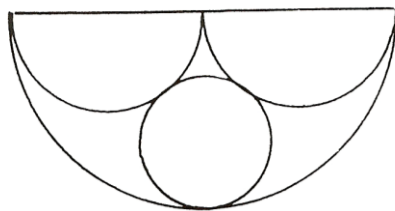
سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷

میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په

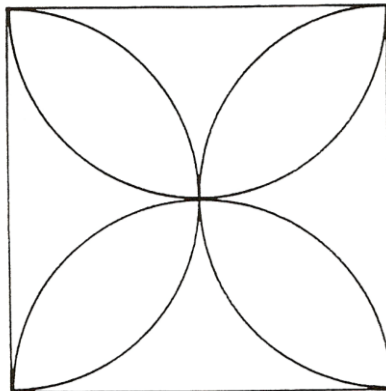
دې ورزشات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښایي، او همدا ډول د ایلیپسي یا

بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ - د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنگ ده؟



څیره ۱۴۷



۲۲ - د دوه گردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تناسب کی سره پرتی دي، لکه 5 : 8 په لویه گردی کی یو گردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی گردی وړانګه  $r = 10 \text{ cm}$  وشمیری.

الف - منځتکي کونج

ب - د گردیبرخی هواره.

۲۳ - کوم منځتکي کونج په لیندې پورې اړه لري، چي

الف ( ټیک همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب ( دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

پ ( نیم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ - د یوې گردیتپوټونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه

وي، که په وړانګه یی چی مربع .

۲۵ - یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپورمی ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جگوالي

راگردوي یعنی له ځمکي راگرځي یا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت

یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیې دي.

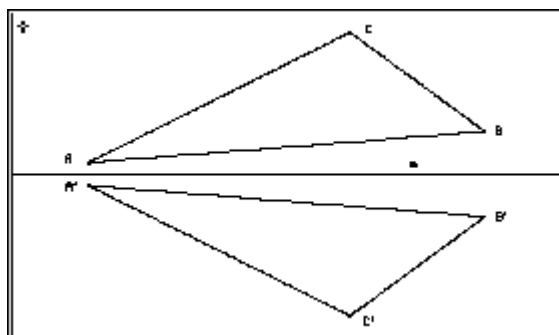
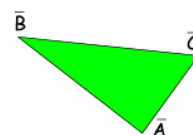
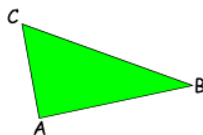
الف - سرعت یی څومره لوي دی؟

ب - په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

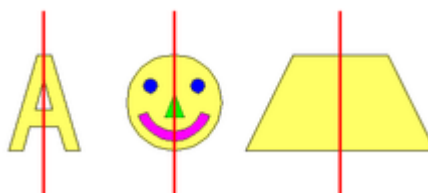
# کونگر و اینځ څیرونی (برابري څیرونی)

## Kongruenzabbildungen

### Congruence mapping



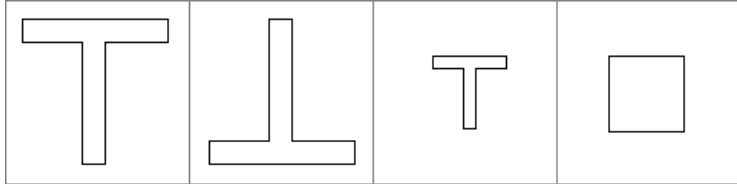
### Symmetrische Figuren سیومتری څیری یا شکلونه



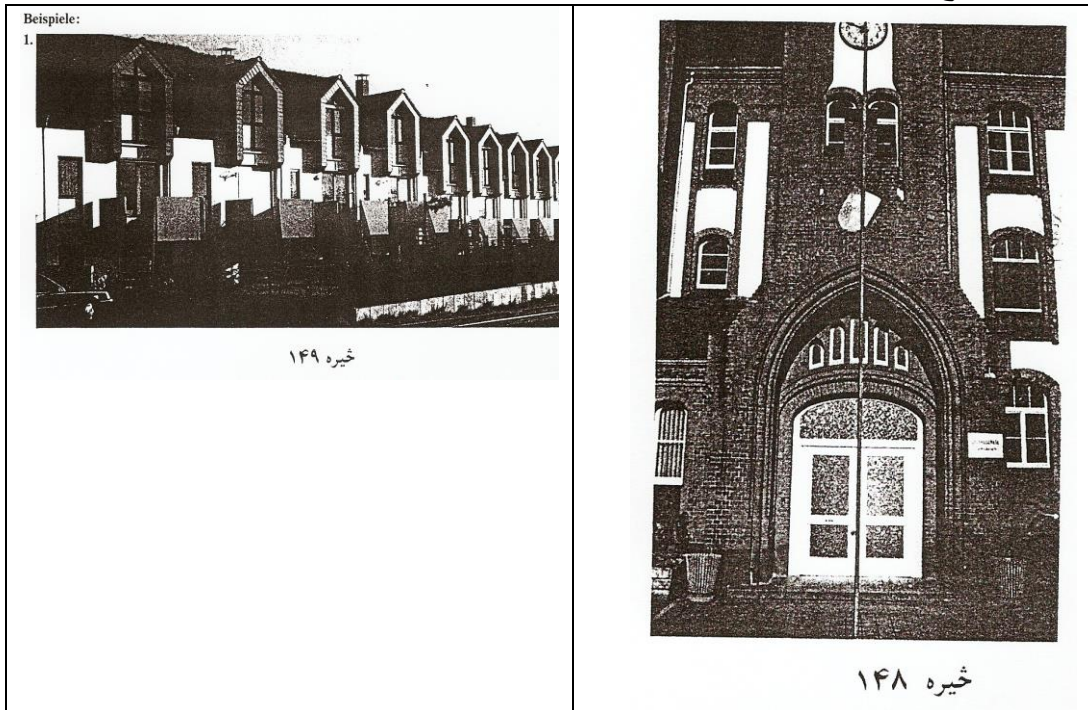
د هوارو څخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتری څیری یا شکلونه، یعنی داسی په نامه برابري یا مساوي او نیمایي څیری:

سرلیک

د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د بشکلا له مخی، د هغو د همغسې څیرې څرگندونې له امله یو ځانگړی ځای نیسی)



په پورته څیره کې کین لور ته دوه د تي څیرې یو بل پټوي، کین لور دې د کبلی تي سره برابرپټوونی تي وکبل شي. دا محور سیومتری څیرې دي. په ځانگړي ډول د اخري شکلونو څخه کتل کیري چی سیومتری تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتری اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی څنگه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه « دوه هگی.» له دې ځایه تر کونگرواینڅ یو پل دی



پیژند : هندسي شکلونه کونگروینڅ ( برابر ) بلل کیري، که په فورم ، بڼه ( څیره ) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځای یی یو له بل بیل وي.



یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونگرواینڅ څیروني « ورته برابري څیروني » وبلولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابري هم دي یانې که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پتوي .

د دوه شیانو A او B د کونگرواینڅ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \sim B$$

د کونگرواینڅ خویونه :

- ۱ - کونگروینڅ څیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پتوي .
- ۲ - کونگروینڅ څیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرگولو یا غوڅولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځي .



پورته څیره ټکی سیومتري ده .  
غوڅول د شمیر پوهنی کار نه دی، مگر غبرگول کیدی شي وي.

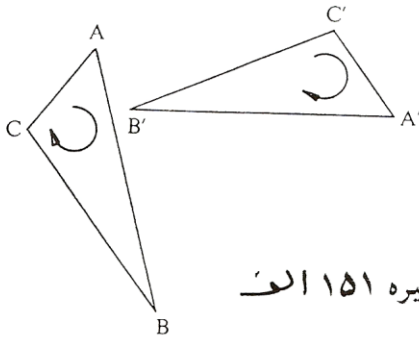
لنډ : محور هنداروني او کرښهنداروني ، څرخون، ټکیڅیره ونې او راکښني گونگرواینڅ څیره ونې دي .

پوښتنه کیري چی :

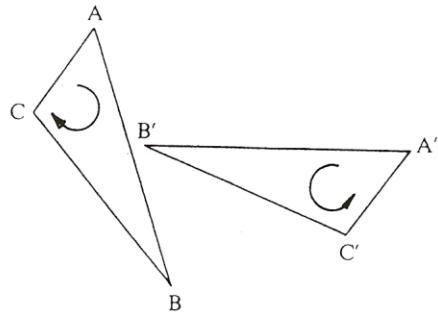
په شمیرپوهنه کی عمليي شته چی د هغي په مرسته یا د هغي له لاري یا د هغي په وسیله څیرې یو په بل پریوتی - او پتیدی شي ، داسي کارونی یا عمليي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونگرواینڅ څیره ونې یا څیره کوني بلل کیري.  
هر کونگرواینڅ څیره یا شکل او لویوالی ( منځهواره ) ساتي. په دي ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دي ډول د برخو تناسب، کربسوتناسب، برخو تناسب غیرگ کرڅو تناسب ( ځانښونه ) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج څرخونلور یا سمت تغیر خورونکي دی، که څرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونگروینڅ بلل کیری او که څرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په څټ یا برعکس کونگرواینڅ بلل کیري

سرلیک

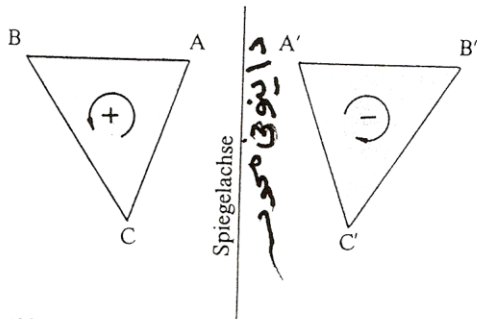
خیره ۱۵۰



خیره ۱۵۱ الف



خیره ۱۵۱ ب



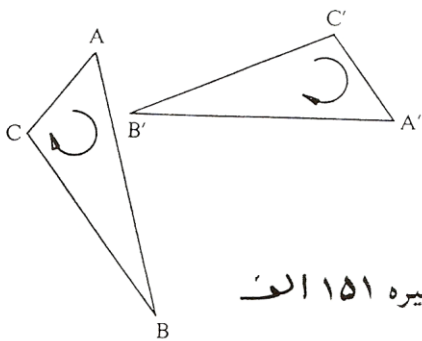
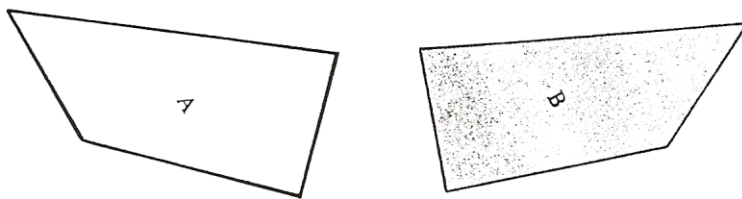
خیره ۱۵۲

کرنهندارونه ( په کرښه

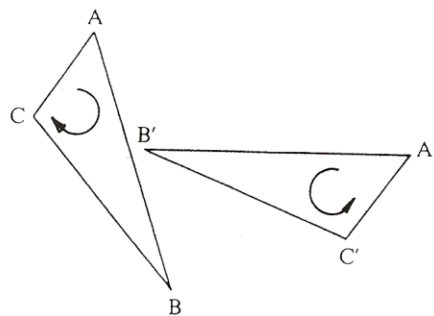
Geradenspiegelung ( منعکسونه )

یو کونگرواینڅ خیره ونه مو په پیل  
 خیرونو کی ونښوده. کرنښ اینونه یا  
 کرنهندارونه یواځنی مخامخ  
 کونگروینڅ خیره ونه ده ، ځکه چی  
 د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

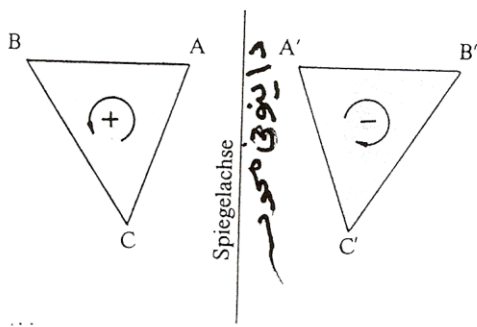




څیره ۱۵۱ الف



څیره ۱۵۱ ب



څیره ۱۵۲

کرنهندارونه ( په کرښه

Geradenspiegelung ( منعکسونه )

یو کونگرواینڅ څیره ونه مو په پیل  
 څیرونو کی ونښوده. کرنښ اینونه یا  
 کرنهندارونه یواځنی مخامخ  
 کونگرواینڅ څیره ونه ده ، ځکه چی  
 د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

سرلیک

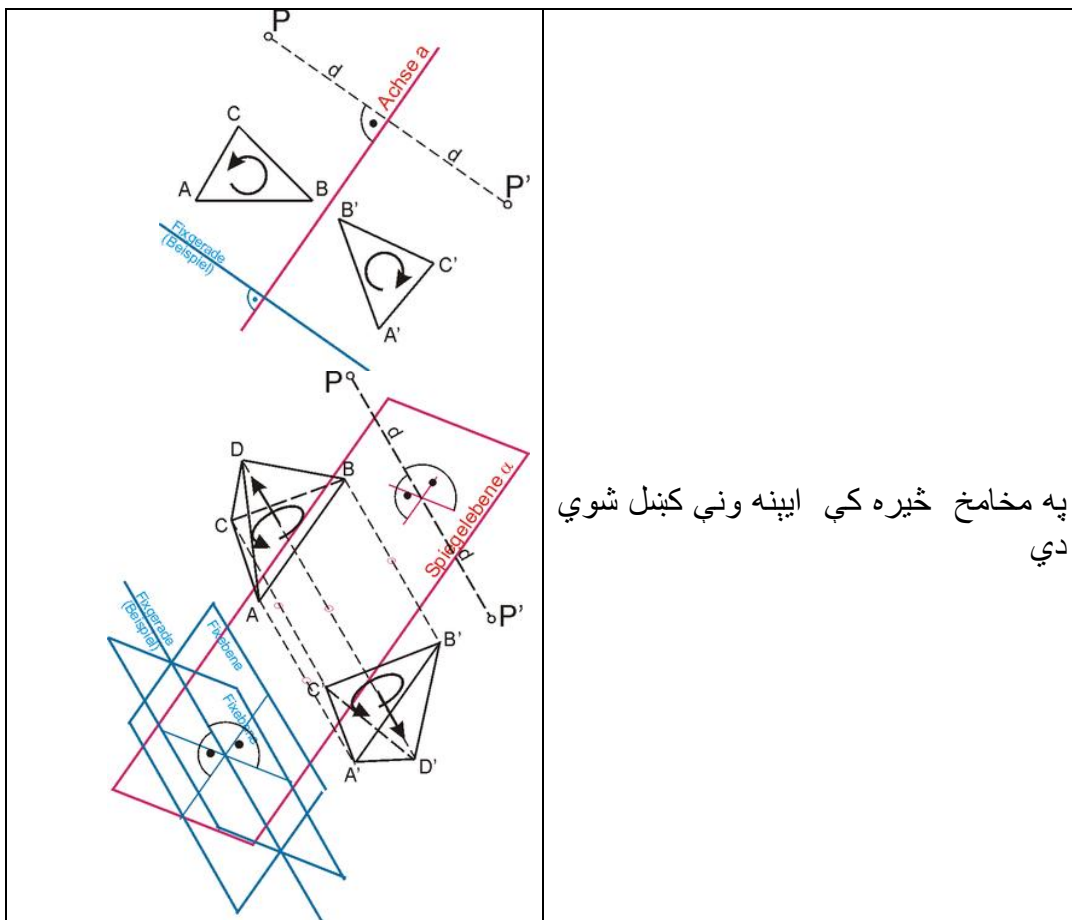
	<p>دایوټی محور</p>	<p>په کرښه هندارونه (پ کرښه منعکسونه):          په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ          تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول          یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د          زویي د لور منځ ته په کې راځي.</p>
--	--------------------	---

	<p>دایوټی محور</p>	<p>په کرښه هندارونه (پ کرښه منعکسونه):          په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ          تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول          یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د          زویي د لور منځ ته په کې راځي. لاندې          څېره دي وکتل شي</p>
--	--------------------	--

د درې ګوډي  $ABC$  مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی  $A'B'C'$  جوړیږي. پخپله کرښه  $g$  په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري (ځای په ځای ټکی (فیکسټکی)  $Fixpunkte$  دی، له دې امله کرښی  $g$  ته د ځای په ځای ټکو کرښه هم وایي. ټولی په  $g$  ننگولاری (لنډ: ولاری) کرښي د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان څیره کیږي، مگر ټول ټکي د  $g$  سره د غوڅټکي په استنني یا بی له غوڅټکي کرښي ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځای بدلوي. له دې امله دا کرښي ځای په ځای کرښی بلل کیږي .

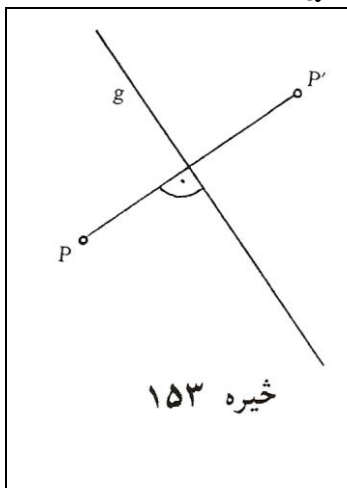
په لاندې څیره کې کین لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کینلي کرښی منځ ټکی دی ، بنس لور ته څیره کیږي او دا په همدې ټکي ، کتک کیږي، چې د هر څیره ټکی واټن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د څیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی څخه .

	<p>په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د څیري او څیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغه څرخونلور نه ده،</p>
--	--



په مخامخ څیره کې ایښه ونی کښل شوي دي

### د کرښ ایښونو (هنداروني یا انعکاس) جوړښتڅیره



۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي ( ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی ) په  $g$  ولار یا زورند پریوځي او دا له  $g$  خوا په فاصله د  $|Pg|$  غزوي. (دا د مخه راغلي .)


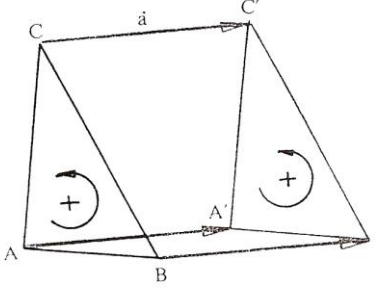
۲ - ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتری ( په ګردي کی : په  $M$  یو ګر دی د  $r'=r$  په وړانګه ووهی). د څیرې او پخواڅیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا  $g$  سیومتريمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله څیره د ایښوني سره په خپل ځان څیره کیري .

## سرلیک

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوگرځول شي. د Sg په یا په خټ څیره ونه یا مخامخ څیره ونه بیرته Sg دی. دا دڅیرو زیاتواره څیره ونو ځانگړی حالت د.

دلته بیا سری د څیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره ترنځښه «» په کار اچول کړي. کرښ اینوونه د گونگراینځو لاندې یو مرکزي ځای یا منځای لري، ځکه چی ټولی نورې اینونې د کرښ اینونې ځنځیرونو باندې بیرته راگرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وگورو.

## راکښنه یا کښونې Verschiebungen

<p>Verschiebungen راکښنه یا کښونه</p> 	<p>پېژند : غبرگکښول، لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وگورۍ.</p>
 <p>څیره ۱۵۵</p>	<p>د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د څیرې وتلکي په څیرنیکو لوریزوي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانگړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی  a  دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونگرواینځیرونې دي، دا په دې مانا چی د څرخونلور ساتلی پاتي کیږي.</p>

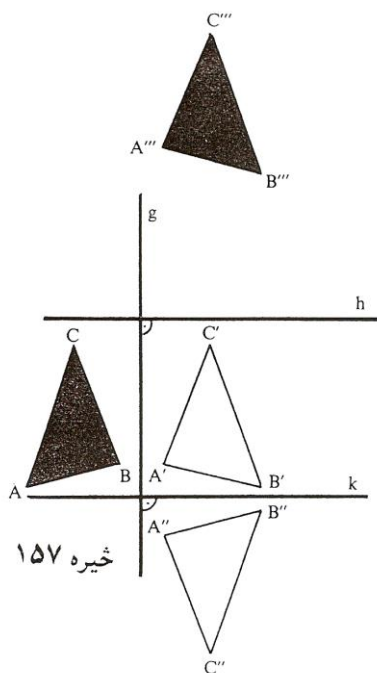
## د کښولو جوړښتڅیرنه

- ۱ - په هر نځښه شوي ټکي (په ډیرگوډي کی گوډونه او په گردۍ کی منځتکی) د گښولو وکتور a وکارۍ ( برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرگ غشی.)
- ۲ - د وکتورونو اخرتکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. ( په گردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانگي په اندازه گردۍ ووهی) کښونه ځاي په ځانتکي نه لري ( که د صفر وکتور دې په نامه identität ایدنتیتی یا کټمټ څیرونی څخه تیر یا صرف نظر شو)

ددې لپاره ټولې له  $a$  سره غبرگی کرښې ځای په ځای کرښې دي، دا په دې مانا چې دوي په خپل ځان څیره کيږي. هر کښول یا نوه هم ښه هره کښه ونه  $V_a$  د  $V-a$  کښولو له لارې بیرته راوگرځول کیدی شي.

	<p>دلته <math>a</math>- وکتور د <math>a</math> سره غبرگ او همغومره اوږد دی، مگر په مخامخ یا په خټ لور. هره کښونه په دوه کرښو <math>g</math> او <math>h</math> له دوه واره اینولو یا هندارونو له لارې بیرته لاس ته راوړونکی ده، چې واټن <math>d</math> یې همدا د کښولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: <math>V_a = S_g \circ S_h</math> د <math>g \parallel h</math> سره او <math> a  = 2d</math>، چیرته چې <math>d</math> د <math>g</math> او <math>h</math> ترمنځ واټن ورکوي.</p>
--	---

په یوه ځانگړي ډول یو په بل پسې صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځای کې ذکر شوي وي، ځکه چې دا - لکه څنګه ټول نور واریانت یا



اووښتونې - یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي: خو یوونکي یا کښوونې اینونه. ترڼه  $G_{a,g} = S_g \circ V_a$  یو کښوونې اینونه ده،

که  $a \parallel g$  وي.

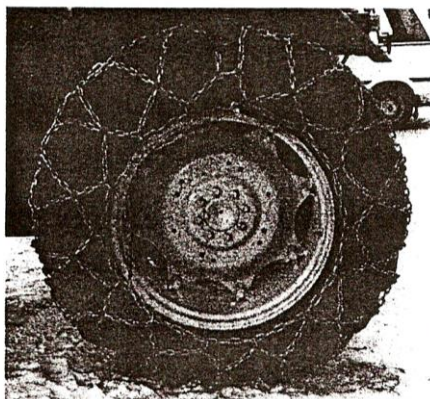
هره کښوونې اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو  $S_g \circ S_k \circ S_h$  تړل دي، چیرته چې کرښې  $h$  او  $k$ ، کوم چې د کښوونې ځای نیسي، په  $g$  نیغی ولاړې دي:

$$h \parallel k; h \perp g.$$

یوه کښوونې اینونه ځای په ځای ټکي نه لري، مگر  $g$  د څیروونې ځای په ځای کرښه ده. هره کښوونې اینونه  $G_{a,g}$  په  $G_{a,g}$  سره بیرته راگرځول کیدی شي.

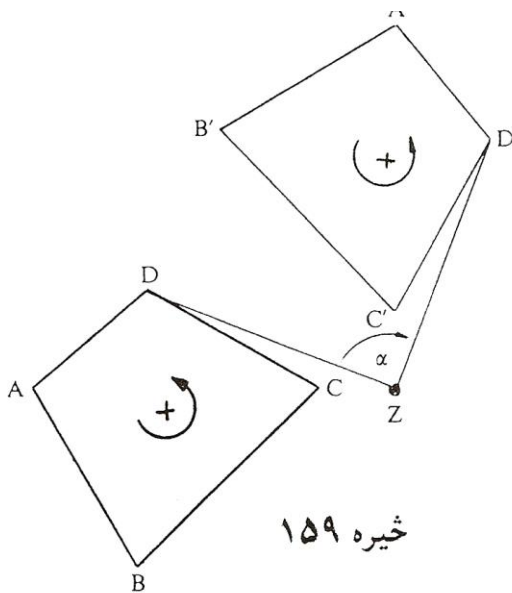
Urenungen

خرخونونه (خرخون)



خیره ۱۵۸

تعریف : خرخون  $D_{z,\mu}$  هغه خیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي  $Z$  (خرخونتېکي یا خرخونمنځ) هر اصلي ټکي  $P$  په یو خیره ټکي  $P'$  داسی تنظیم کړي، چې  $|PZ| = |P'Z|$  او  $w(PZP') = \mu$  چې  $\mu$  یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د خرخونکونج.

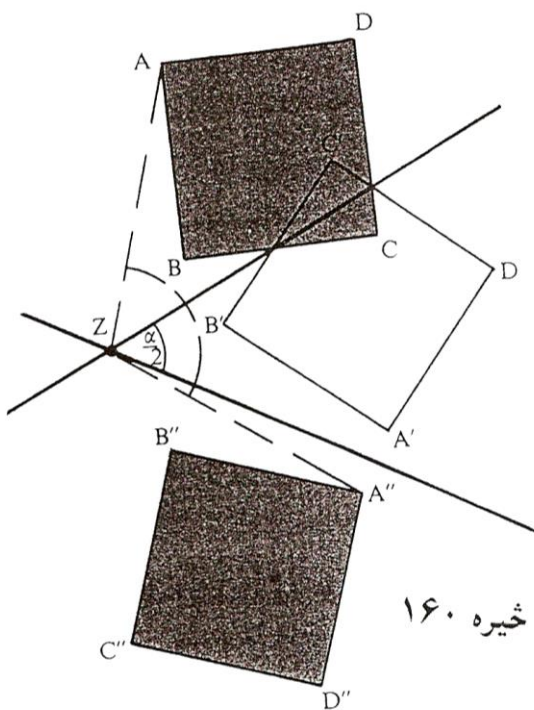


خیره ۱۵۹

پس یو خرخون د خرخونتېکي  $Z$  او خرخونکونج څخه یواځنی ټاکلی دی. د خرخونلور په مخ نڅه له مخه ورکړ شوی. ( ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي ).

دخرخون جوړښت خیره

۱- په ټولو په نڅښه ټکو ( د ډیرکونجیز کونجټکي، په گردی کی منځټکی ) او



خیره ۱۶۰

خرخونمنخ Z یوه وړانگه کیردی . د هر ټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانگه وکارې، کوم چی له PZ سره کونج جوړوي.

۲- لاس ته راغلی ټکی P' په اصل پرلپسي ترتیبو د بل سره ونښلوی ( یا په همدې ډول په P' یو گردی  $r' = r$  په وړانگه ووهی).

خرخون  $D_z$  یوه همغه لوریز کونگرواینخ څیرونه ده.

که خرخون  $D_z$  له خرخون په  $0^\circ$  :

ایدنتیټي یا کټمټ، توپیر ولري، نو دا

یواځي یو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z.

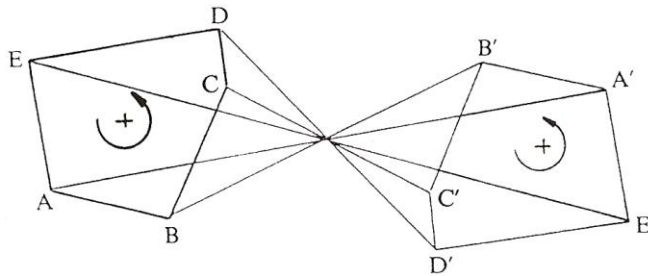


سرلیک

هر څرخون  $D_z$  د په کونج کیدی شي چی په څرخون  $D_z$  په کونج -  
 بیرته راوگرځول شي. د جوړښت څیرنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون  $D_z$   
 د دوه کرنبي اینوني چی په ټکی  $Z$  کی په کونج  $1/2$  یو بل غوڅوونکو کرنسو  $g$   
 او  $h$  ځای نیونکی کیدی شي: څرخون:  $D_{z,\mu} = S_g \circ S_h$   
 د  $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$  سره. ( څیره )

تعریف: یو څرخون د څرخونکونج  $\mu = \pm 180^\circ$  سره ټکی اینونه بلل  
 کیږي. دا په دې مانا چی په ټکی اینه کیږي.

په دې توگه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونگرواینڅ څیرونه ده. ( څیره ۱۲۸ )



څیره ۱۶۱

په ټکی اینوني جوړښت څیرنه

- ۱ - د اصلي څیرې هر په نڅښه ټکی څخه یوه کرنه وکارې، چی له اینونکي ټکي  $Z$  تیره شي، او  $|PZ|$  واټن د  $Z$  په بله لور وباسی.
- ۲ - داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. ( همداسی په  $M'$  یو  $d = r = r'$  وړانگي گردی ووهی).



### ټولګه

هره کونګرواینڅ څیرونه د کرنې اینونې د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرنې اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرنې اینونو ( څرخونو یا کښونو ) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرنې اینونو ( کرنې اینونې یا کښونو اینونې ) یو نا همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده.

دیو په بل پسې د کونګرواینڅ څیرونو کارونه بیرته کونګرواینڅ څیرونه لاس ته راکوي. دا چې هر کونګرواینڅ کرنې اینونه ده نو د پای کونګرواینڅ یو په بل پسې اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګرواینڅ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګرواینڅ څیرونې یو په بل پسې منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوڅیاتيو را یوځاي کیدی شي. الجبري ټول کونګرواینڅ څیرونې یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کټمټ څیرونې سره، دا په دې مانا چې ناپیلي څیرونه ، چې په کارونه کې تغیر نه راولی کټمټ څیرونه ده. ( د ګروپ لپاره دې نښلونې برخه وکتل شي )

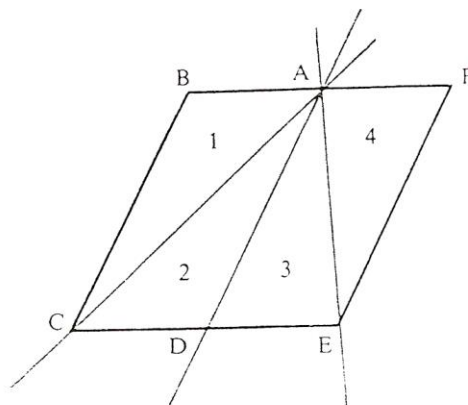
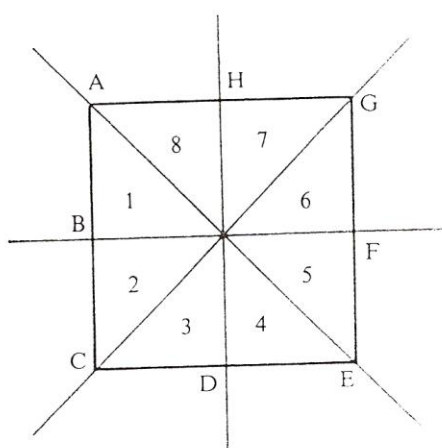
په عمل کې د دريګوړې کونګرواینڅ جملې له پوره اهمیت ډکې دی

**کونګرواینڅ جملې:**

الف ) په خپلو دري اړخونو کې ( SSS ) یا  
ب ) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کې ( SWS ) یا  
پ ) په دوه اړخونو کې او د اوږد اړخ مخامخ کونج کې ( SSW ) یا  
ت ) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کې ( WSW ) یو بل سره وڅوري یا سره مساوي شي

## تمرینونه

- ۱ - په یوه غبرگ اړخیز ABCD هندارونی  $S_{BC} \circ S_{AB}$  وکارۍ.
- ۲ - د کونگرواینڅ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرنسی پیلخیرې په کونگرواینڅ برخو ټوټه کوي.



خیرې ۱۶۲

- ۳ - په یوه بیلگه وښایي :

$$S_g \circ S_h = S_h \circ S_g \quad (\text{الف})$$

$$S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g \quad (\text{ب})$$

- ۴ - د «هیلگولند» کیشتی او د «کون ماری» لوي کینستی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلگولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي ( $N60^\circ W$ ) دلته N د شمال او W د لودیځ لپاره دی، کرنلایني حرکت کوي او «کون ماري» په ۸۲ درجو جنوب لودیځ لور حرکت کوي ( $S82^\circ W$ ) دلته S د جنوب لپاره دی.

په دې وخت کې د «هیلگولند» څخه «کوبن ماری» په  $70^\circ$  درجو شمالشرق ( $N70^\circ O$ )

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کېږي. Nord,, Süd, West, Ost.

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي؟

ب) د دې وخت له ځای څخه به هغه غوڅتکي څومره لرې وي؟

۵- وي دې ABC یو مساوي پښیز دريگودي، له بنسټ AB سره، g او h د

کونجونو  $\alpha$  او  $\beta$  کونجني دي. وښايي چې دريگودي ABP او ABQ

کونگرواينت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅتکي دي).

۶- څومره کورونتڅيرونی موجود دی چې لاندې څيرې يی په خپل ځان څيره کوي:

کرښی، گردی، غبرگ اړخي، مساوي پښیز دريگودي، ولاړ گودي، راوتی،

مربع، مساوي اړخيز دريگودي؟ کتمتڅيرونه دې نه په کی شميرل کېږي.

۷- یو څرخيدونکی هنداره، یوه هنداره ده، چې په یوه خپله ایښوول شوي هواره

پروت محور باندې څرخور ایښوول شوي. ترتیب په څيره کی له پورته لور

انځورېږي.

د نور له چینی L څخه یوه وړانگه په هنداره د (a) په ځای یا ځاینيوون کی

پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم (پریووتکونج = وتلکونج)

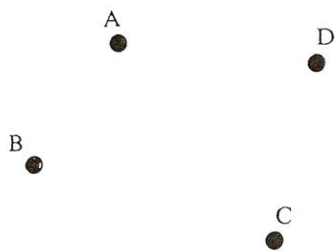
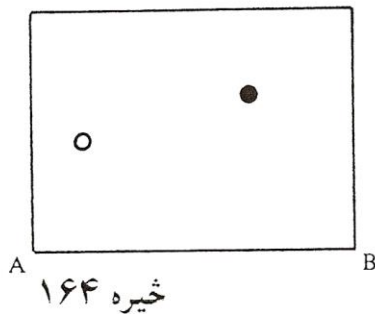
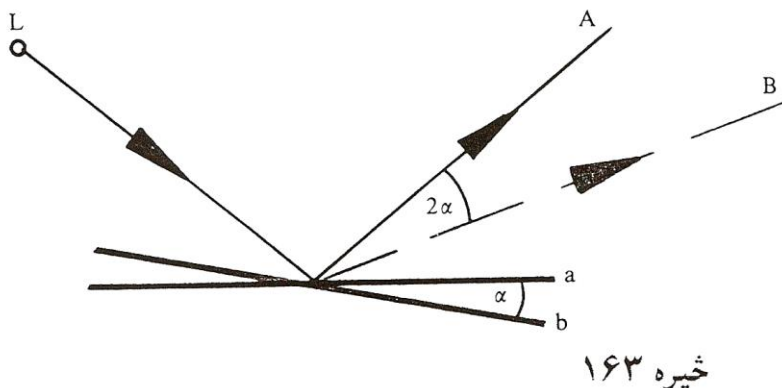
د  $\overline{OA}$  لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کېږي یا منعکس کېږي. اوس

نو هنداره د  $\alpha$  په کونج د (b) ځای یا ځاینيوون ته راوړل کېږي یا

راڅرخېږي. دلته نو د نور وړانگه د  $\overline{OB}$  په لور هچینداره کېږي یا غورځول

کېږي یا منعکس کېږي. وښايی:

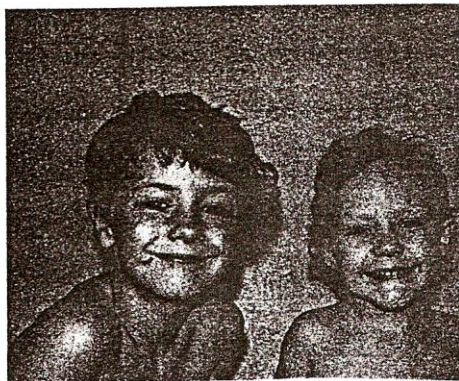
$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$



۸- د کوتی منخ کی دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوتی له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسی ووهل شي چي تور توپ ووهي. دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لگيږي. ( خیره ) د کرنو لار وکارۍ « تور توپ - اینه ټکی یا انعکاس ټکی - سپین توپ »

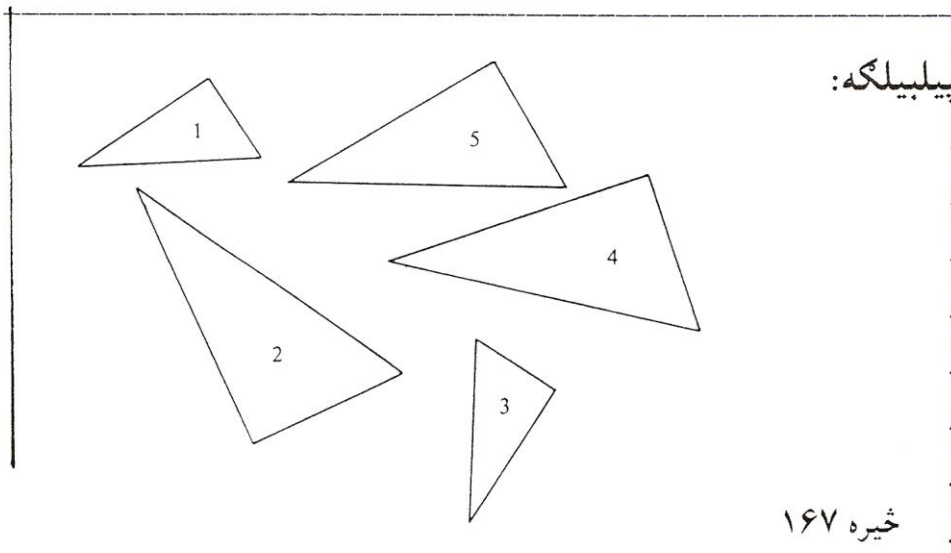
۹- دا د یوه کور څلور برجونه دي، چی په A, B, C, D سره یی بنايو ( خیره ) داسی یو ځای S شته ، له کوم چی برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځتپي په څیر ښکاره شي یا ځان وښايي .؟

### ورته والیخیرونه Ähnlichkeitsabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرگونې کوچنیان وکتل شي، نو سم د لاسه ویل کیږي، چې دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خوږونه یا ګډې نخښې ولري، یعنی څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کې داسی نه شو ویلی چې دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چې په شمیرپوهنه کې داسی قضاوت ځای نه لري.



پیلیلګه:

خیره ۱۶۷



سرلیک

لاندې دريگودي د کونجونو  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  او  $\gamma = 90^\circ$  سره وکارې. ددې کونجونو سره له يوه زيات دريگودي موجود دي، چې په ځانگړي توگه د ولاړ کونج ورکړه يواځيوالی يا يواځيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي. دريگودي ۱ او ۲ کونگرواينځ دي، دريگودي ۲ او ۴ هم، مگر دريگودي ۱ او يا ۱ او ۴ کونگرواينځ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی گډې نخښي لري ( کونج، «بنه» يا «شکل» يا څيره ) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه گډ دي يا دوي نور څه گډ لري؟ له کونگرواينځجملی څخه مخ ته څو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته بنايو چه د اړخونو ځاننيونه يا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې څيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کربنو اوږدوالی په همغه ځاننيونه يا تناسب پروت وي او ( له دې امله هم ) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلگه : کونگرواينځ څيرې د ورته شکلونو يو ځانگړی حالت دی، په هغوي کی د

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننښونه تل ۱ دی. له دې امله باید - د کونگرواینڅ د ټولیزیدلو یا عمومیت - د درېگوديو لپاره هم ورته جملې موجود وي. ددوه یا زیاتو درېگوديو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننښونه کی پراته وي یا اړیکو کی). دا هم د درېگوديو لپاره باور یا اعتبار لري، په داسی ډول- د کونگرواینڅ څخه پر مخ ځو- چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی : درېگودی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی

سره برابر وي

۱- د درېگوديو دريو اړخونو په مناسبه توگه د اړخونو تناسب یا ځاننښونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲- د دوه یو بل سره مناسبو اړخونو تناسب یا ځاننښونه او له دې بندشوي کونج. دا

په دې مانا چي

$$a : a' = b : b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳- د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونو مساويوالی. په

دې مانا چي:  $a : a' = b : b'$  او  $\beta = \beta'$  د  $b > a$  لپاره او یا

۴- ددوه کونجونو اندازې مساويوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.

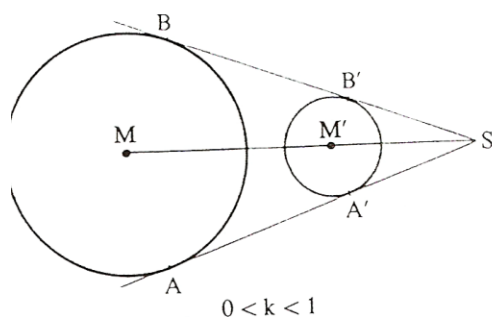
دا په دې مانا چي :

سرلیک

په همدې ډول کیدی شي د نورو څیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. څیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانگړو ورتوني څیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والی څیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه  $Z_{S,k}$  د ټکي  $S$  (د راکښلو منځ) او یوه گڼ  $k$  د راکښلو فاکتور یا څلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لاری په  $k$ -ځلی تغیر ورکول کیږي.



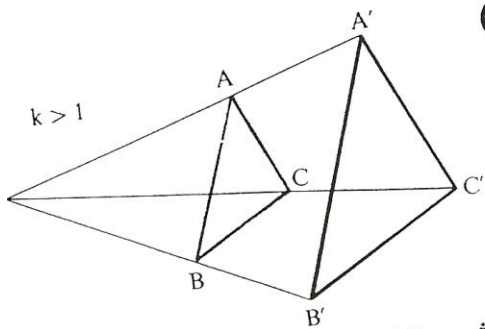
څیره ۱۶۸

د  $k$  لپاره له صفر تر یو گڼونه پریښودل کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی څیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زیخلو (کینکلو) غږیږو. څیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که  $k = -1$  وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ  $S$  باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفي گڼ  $k = -1$  لپاره کیدی شي  $k$  په  $k = (-1) \cdot |k|$  باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

یادونه: پام دې وشي چی راکښنه به بڼه وي او که غزیدنه.



د منځراکبښنی جوړښتڅیرنه (توضیڅ)



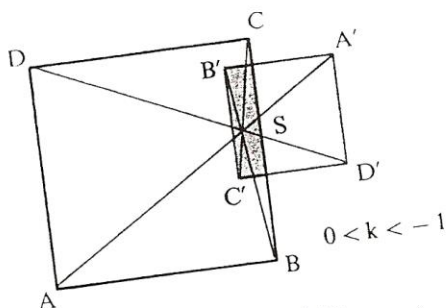
څیره ۱۶۹

- ۱- د اصلي هر په نخښه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.
- ۲- د هر ټکي P لپاره د |PS| پای کرښي په k ځل کيږي (جوړښت ته د  $k < 0$  لپاره هم، مقایسه څیره ) او نوې پای کرښه

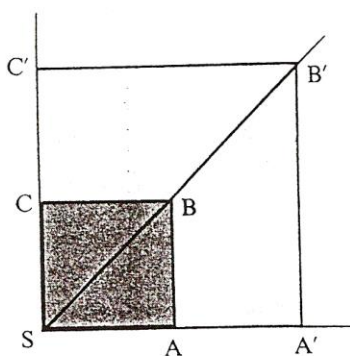
$$|SP|.k = |SP|$$

په کرښه چی د ټکي S څخه پیل له P, S او P' تیريږي وکاري.

- ۳- د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول څیره ټکي سره وښلوی.



څیره ۱۷۰



څیره ۱۷۱

$$k = 2$$

$$\frac{F'}{F} = 4$$

دا چی ورته څیږي (بی له  $|k| = 1$ ) کونگرواینڅ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مگر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k (د بیلگي په توگه  $k = 2, k = 3$ ) تغیر کړو، نو څیروونکی هواره باید په فاکتور  $k^2$

(یعني  $k^2 = 4$ , همداسی  $k^2 = 9$ )

تغیر و خوري.

سرلیک

تعري: په یو منځراکبنسو، چی فاکتور  $k$  ولري د څیرې هواره  $F'$  او له څیرې دمخه (اصلي) هوارې  $F$  ترمنځ لاندنی تناسب یا ځاننیونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \Rightarrow F' = F \cdot k^2$$

د لته د  $k$  مخخنبه کوم رول نه لري ځکه چی منفی ځل منفی بیرته مثبت دی

### پیلبلگ:

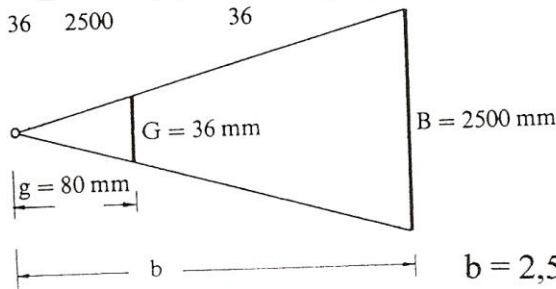
د یاس (د فیلم دیاس) ( فورمات یا لویوالی  $24\text{mm} \cdot 36\text{mm}$  ) په یوه دیوال چی لویوالی یی  $2,5\text{ m} \cdot 2,5\text{ m}$  دی د ممکن حده پورې څیره کیږي. د بنه ټیک جوړولوسره یی له عدسی واپن  $8\text{cm}$  دی. پریوستونی یا پرویکتور د څیرې دیوال څخه باید څومره لرې وي؟ د دیاس هواره په څو واره لویه شوې؟

د دیاس دڅیرونی لپاره لاندې اړیکې باور لري:

$$\frac{\text{د څیرې جگوالی } B}{\text{د دیاس جگوالی } G} = \frac{\text{د څیرې پراخوالی } b}{\text{د دیاس عدسی لریوالی } g}$$

څیره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555,56 \text{ mm}$$



ممکن ډک په دې مانا،

چی  $36\text{ mm}$  په  $2,5\text{ m}$

باید لوي شي. په دې توگه

د پریوستون دیوال عدسی

واپن په لاندې ډول دی :

$$b = 2,5\text{m} \cdot 0,08\text{m} : 0,036\text{m}$$

$$\sim 5,56\text{m}$$

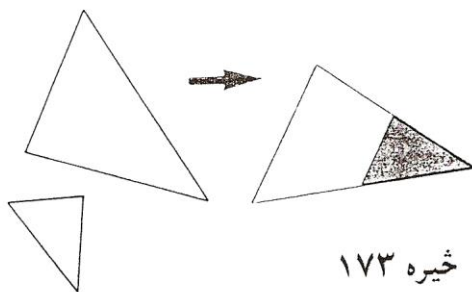
د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

$$k = 2,5: 0,036\sim 69,44$$

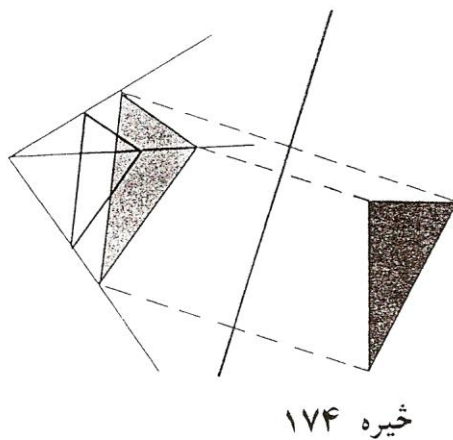
له دې امله د څیرې هواره ده:

$$F' = 69,44^2 \cdot 0,036 \cdot 0,024 = 4,17m^2$$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.



دا روښانه ده، چي ورته څیرې،  
 د څرخونې، راکښلو له لارې او  
 اینونې له لارې یوه پوزیشن ته  
 راوړل کيږي، په کوم چي سم د  
 لاسه د شکلونو د کونجونو  
 د برابرتوب ورته والی پیژندل  
 کیدی شي.



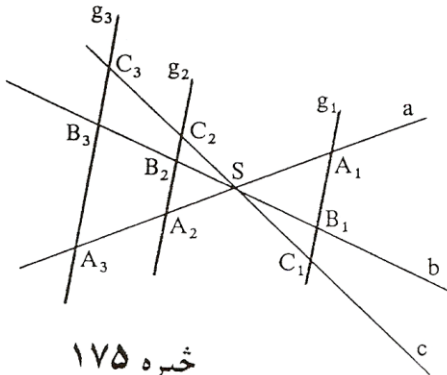
تعریف : هره کونگرواینڅ  
 څیرونه، هر منځراکښونکی او  
 له دوې هر تړلی یا ځنځیري  
 اینولشوي یا ځای په ځای  
 شوي څیرونې ورته څیرونې  
 بلل کيږي.

دا چي هره ورته څیرونه بیړته  
 یوه داسي څیرونه باندي راگرځي،  
 نو بیخي باور لري : د ورته

سرلیک

والي خيروني ډيري چي پرلپسي سره وتړل شي يا ځنځيري شي گروپ جوړوي ( د گروپ لپاره دې، چي شميرپوهنيزه كلیمه ده، د كتاب پای وکتل شي ) او خيري او همداسي پيل بيلگه ( ډياسپرويوكتور ) څخه د وړانگي جمله ټوليزه يا عمومي کيدی شي.

۱. وړانگي جمله: که له يوه ټکي  $S$  وتلی وړانگي  $a, b, c, \dots$  له غبرگو کړښو.  $g_1, g_2, g_3, \dots$  غوڅي شي، نو د يوې وړانگي ټوتي همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه د بلی وړانگي ټوتي: دا په دې مانا چي:



څیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1 A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1 B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1 C_3|}$$

په څیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرگو کړښو له پوریزکونجونو او د دريگوديو ورته والي چي  $SA_1B_1$  او  $SA_1C_1$  او  $SA_2B_2$  او  $SA_2C_2$  او په همدې ډول د  $SB_1C_1$  او  $SB_2C_2$  سره یی لري. برسیره پر دې باور لري:

۱. وړانگي جملی په څت: که له ناپای کړښو.  $g_1, g_2, g_3, \dots$  څخه د خوري

غونچې یا بهتره ستورې کړینو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځاننیونې یا تناسبات څرگندوي، نو دا کړنې یو بل سره غبرګي دي.

### ۲. وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلی وړانګي د غبرګو ناپاکرینو څخه غوڅی شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکي څخه وتلی کچ شوي د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S A_1|}{|S A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S B_1|}{|S B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S C_1|}{|S C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

### ۳. وړانګي جمله:

په یوه غبرګي ټوټو ځاننیونه داسې ده لکه پهدې بلی غبرګي ټوټو ځاننیونه یا تناسب:

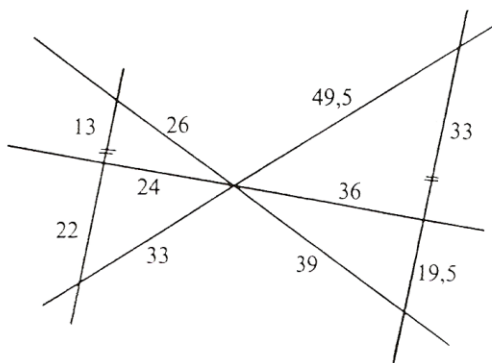
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بیلګه :

۱. د لمړي وړانګي جملې پسې لرو:

سرلیک

۱. د وړانگو جملو پسی یا له امله باور لري:



خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz:  $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$   
معری وړانگی جمله

2. Strahlensatz:  $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$  oder  
 $\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$  oder  
 $\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$   
۰۳ وړانگی جمله

3. Strahlensatz:  $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$  oder  
 $\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$   
۰۴ وړانگی جمله

۲. د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه  $(T_i)$  په ځانښونه یا تناسب 5:3 او دباندې  $(T_a)$  په تناسب یا

ځانښونه 5:2 ویشل کیږي. د

دې لپاره د ۲. وړانگی جمله

کارول کیږي یا استعمالیږي:

- دننه ټوټوونکی  $T_i$ :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

- د باندې ټوټوونکی  $T_a$ :

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

خیره ۱۷۷

دا جوړښت د ویشنی برسیره

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو  $|AT_a|$  د  $|T_aB|$  دوه نیم واړه دی.

۳. طلايي غوڅی یا -غوڅونه:

په طلايي غوڅي يوه د  $a$  اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کيږي، چي برخه ټوټو د  $x$  اوږدوالی همداسی د  $a-x$  اوږدوالی لپاره اړیکي  $a : x = x : (a-x)$  باور لري. دلته  $x$  د دواړو برخه کرښو لويه برخه ده دا ویشنه په هنر او اربښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي:  $x^2 = a(a-x)$  او له دې بیا  $x = \sqrt{a(a-x)}$  لاس ته راځي. دا په دې مانا چي اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم بڼه بدلون غوره کړي او د  $x$  په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي:

$$x = \sqrt{a^2 - ax}$$

$$x^2 a^2 - ax$$

$$0 = x^2 + 1x - a^2$$

$$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$$

$$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$$

$$x_1 = 0,5a(5-1) \quad \text{په کار نه راځي}$$

$$x \sim 0,618a \quad \text{نو لرو:}$$

د طلايي قاعدې لگه لارې

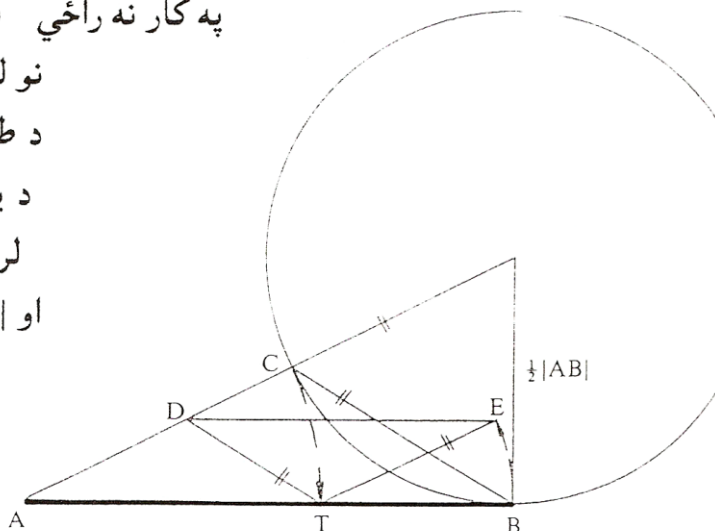
د يوې کرښی  $|AB|$  ویشنه

$$\text{لرو } |AC| = |AT|$$

$$\text{او } |AD| = |TE| = |TB|$$

$\frac{ AB }{ AT } = \frac{ AT }{ TB }$
---

څیره ۱۷۸



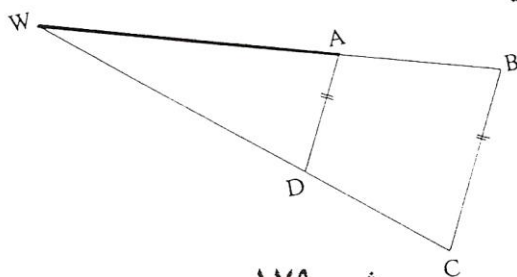


## تمرینونه

- ۱ - په کواوردیناتسیستم کی دریگودی  $A(2|3)$ ,  $B(6|1)$ ,  $C(3|6)$  ورکړ شوی دی. (الف) دا دریگودی د  $k=2$  په اندازه وغزوی. د غزولو مرکز دې  $Z(0|0)$  وي. (ب) دا دریگودی په  $S(-2|-3)$  وخرخوی. د  $140^\circ$  سره. دا څیره دریگودی په  $S$  باندې د  $k=-1,5$  سره وغزوی. (پ) دا دریگودی په ۴ یونو سره لمړی کین لورته او بیا په ۵ یونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په  $-x$  محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي  $(0|-6)$  د  $k=-1$  سره وغزوی.

۲ - ایا ټول الف ( مساوي پښیز ، ب ( مساوي اړخیز، پ ( ولاړکونجیز دریگودی یو بل ته ورته دي؟

- ۳ - د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونخل  $k$  سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولو مرکز په څیر، څنګه تغیر یږي؟  
۴ - کرښه  $|AB|=10\text{ cm}$  دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د  $5:2$  کی سره پراته وي،



۵ - کرښه  $|CD|=6,5\text{ cm}$  د «طلای غوڅي قاعدې»

له لارې ټوټه کړی.

۶ - د یوه کتونبرج  $A$

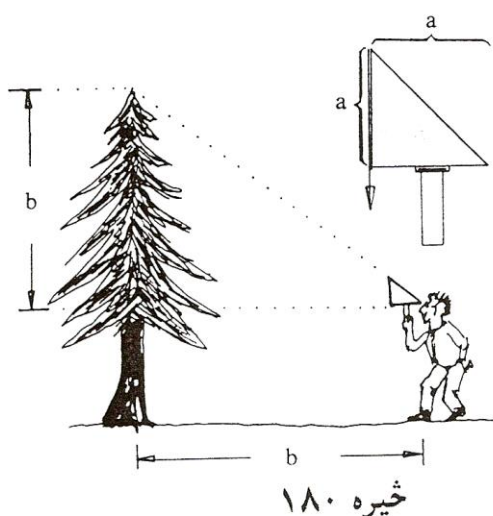
(څیره ۱۷۹) څخه دې واټن  $|AW|$

یوه څنګل برخی  $W$  ته وټاکل شي.

دري ټکی  $C$ ,  $B$  او  $D$  په نڅښه

کیري په داسی ډول چی  $AD \parallel BC$  وي. اندازه کیري:  $|BC|=125\text{ m}$  :  $|AB|=75\text{ m}$  او  $|AD|=100\text{ m}$  , نو  $|AW|$  څومره اورد دی؟





۷- الف) د یوه «ځنگلوالدریگوډي»

سره (خیره) د یوې ونې جگوالی اندازه کیدی شي. - ونه څومره لویه ده، که د ځنگلوال سترگه له څمکی څخه ۷۰، ۱ متره جگه وي، او دی له ونې ۱۰ متره لرې ولاړ وي؟

ب) څنگه (د یوه څرگنده واټن) د یوه شي د جگوالی د خپل مټ په مرسته نزدې یا تقریبي اندازه کولی شي؟

لارښود: ۷ الف وگورئ.

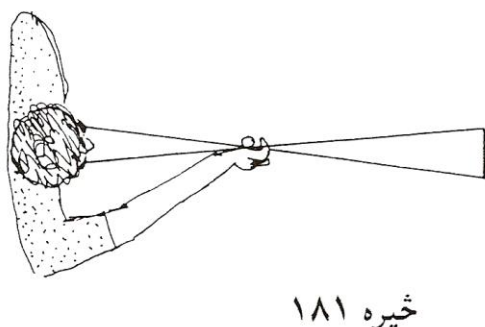
پ) په عسکری کي د دوه شیانو د واټن د اندازه کولو لپاره «د غټی کوتي گام» تخنیک کارول کيږي یا استعمالیږي.

دا داسی صورت نیسی چی لمړی سړی خپله کینه سترگه پټوي او غټه گوته راوباسی،

لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي

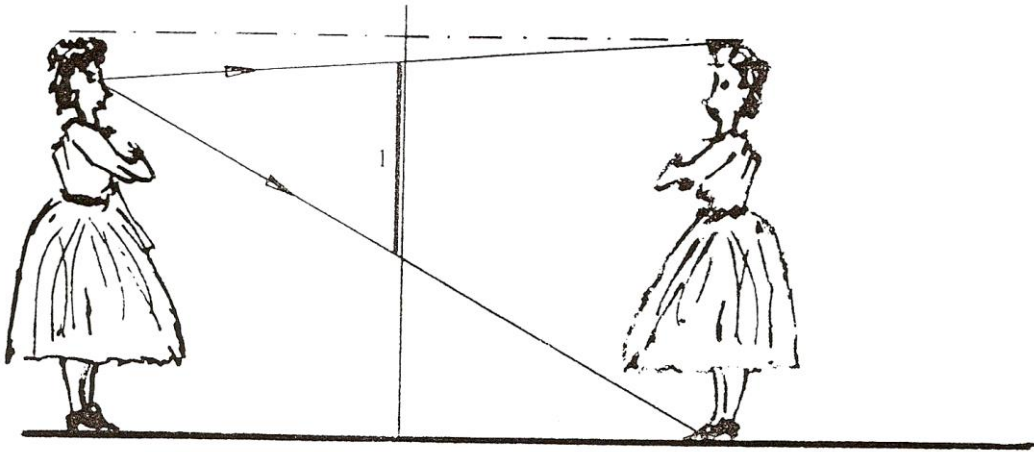
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترگي په پټولو سره ټیک هغه لټوونکی موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنگه راځي؟

۸- میرمن څانگه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی وگوري. په عادي توگه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتی متره له هندارې



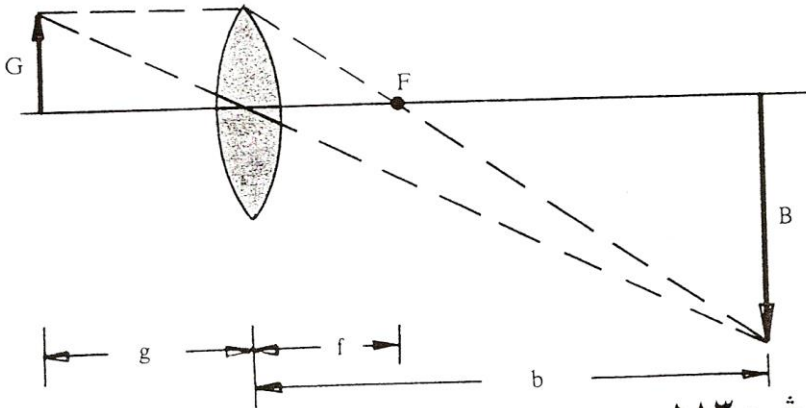
سرلیک

لرې، هندارې ته مخامخ ودرېږي. دا هنداره باید خومره کم له کمه جگه وي  
 چی میرمن خانگه د سترگو جگوالی چی ۱،۶۵ متره دی ټول لویوالی  
 چی ۱،۷۳ متره دی وگوري؟



خیره ۱۸۲

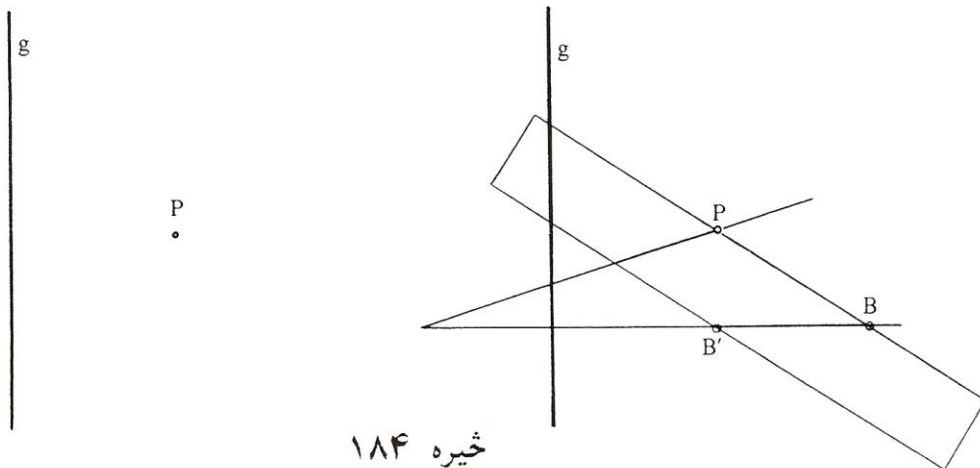
۹- د یوې لینزې یا عدسی یا سترگی له لارې په خیره کی د نور خیرونی



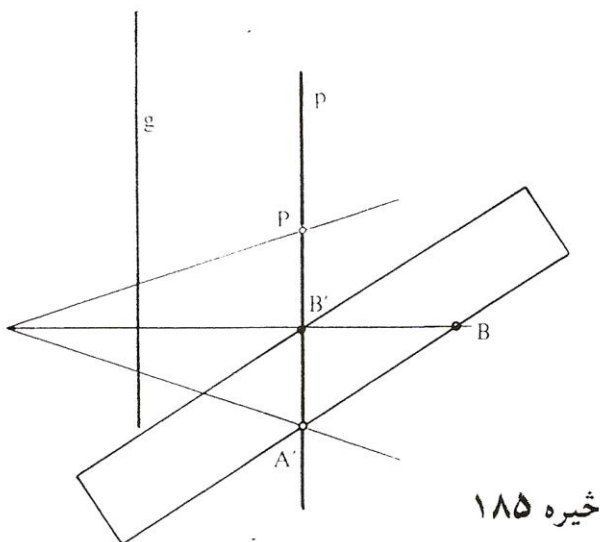
خیره ۱۸۳

جوړښت کتل کيږي. د لينزې يا عدسې لپاره د لينزې يا عدسې مساوات  $(1/g) + (1/b) = (1/f)$  باور لري، پخپله د څيرونې لپاره مساوات  $B/G = b/g$  باور لري (په لغاتو: د څيرې جگوالې د شي جگوالې سره ځان داسې نيسي لکه د څيرې لريوالې د شي لريوالې ته). دا دواړه اړيکې د وړانگي له جملې راوباسې!

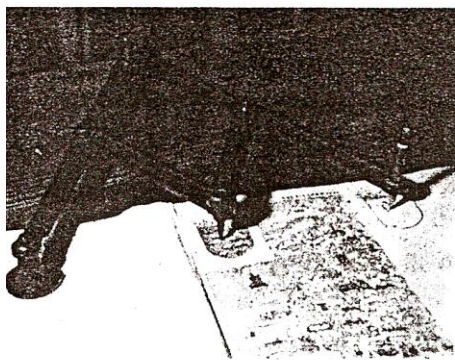
- ۱۰- يو ولاړ کونجيز دياپوزيتيويو مثبت دياس داړخ اوږدوالی ۶، ۳ سانتي متره سره او ۴، ۲ سانتي متره سره يو و هغه ته غبرگ ديوال باندې پريوزې . څيرونې لينزې يا عدسې، دا شی ۱۲ سانتي متره له دياس او ۸۰، ۴ متره له ديوال لرې دي. د پريوستون ديوال کم له کمه بايد څومره وي ؟
- ۱۱- يو د ديوال مربع شکله کړکی، چي اړخ يی ۲۰ سانتي متره اوږد دی. له يوه هغه ته غبرگ ديوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره لرې بايد يوه د پريښنا سرچينه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تيره رڼا يوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟
- ۱۲- د کوم مرکزې غزونې سره کيدی شي چی يو گړدي دننه دريگودی په گړدي راگير يا گړدي دباندې دريگودي باندې څيره شي؟ گړدی هوارې يو بل سره



څيره ۱۸۴



په کومه ځانښوونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟  
 ۱۳ - د دیسارگ ( Desarues ) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په  
 ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرگي مته وي ( د بیلگي



څیره ۱۸۶

په توگه کرښی یا ختکش) د دوه  
 غبرگو کانتو سره یا اړخونو سره  
 ځمور په اختیار کي وي. په دلایلو  
 روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی څیرو  
 جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.  
 ۱۴ - وښایی چی د هر غبرگ اړخیز ABCD  
 لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په  
 خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرگه  
 کرښه رسم شي، نوغبرگارځي منځ ته

راځي، چي ABCD ته منځنی یا مرکزی ورته دی. د هماغه غزولو مرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوگراف (Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځایي ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي. په پینسل P سره د مخه کښل شوي څیرې باندې حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزی یا منځنی ورته څیره رسم کوي (څیره. ) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵- په یوه گردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوڅوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتی متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶- څومره لرې سړی کتلی شي

الف ) د بحر هواري څخه ۴۰ متره جگ اندازه ټوګری

ب ) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جگ هوا پوښکی یا هوا بالون،

پ ) د یوه الوتونکی کوټکی چي د سپورمی هواري څخه ۲ کیلومتره

جگه وي (  $r = 1735 \text{ km}$  )؟

۱۷- د شکل ۱ (څیره

الف ) لپاره صدق کوي  $g \parallel h$  او

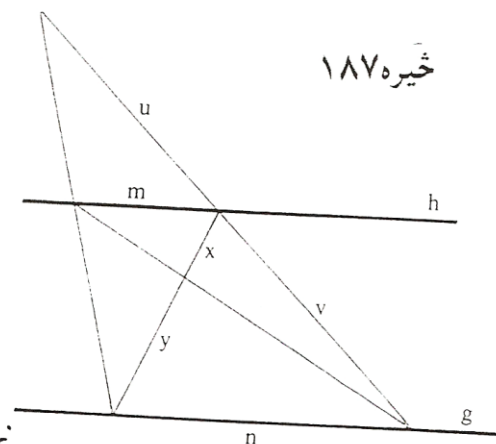
a)  $\frac{u}{v} = 1$

b)  $\frac{u}{v} = 0,5$

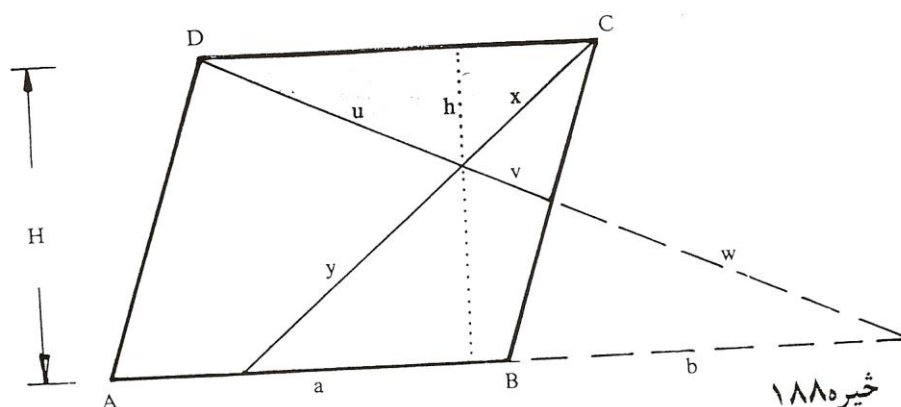
c)  $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie  $\frac{x}{y}$ .

د شمېری



۱۸- وشمیری  $u/v$  او  $x/y$  (خیره ب) د غبرگارخیز خومه برخه رنگه ده؟



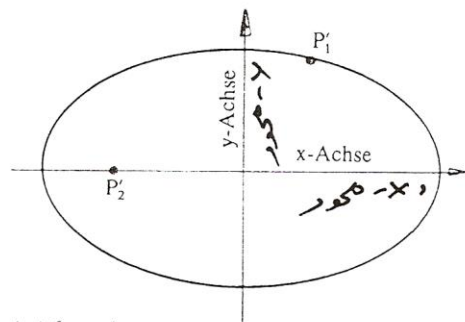
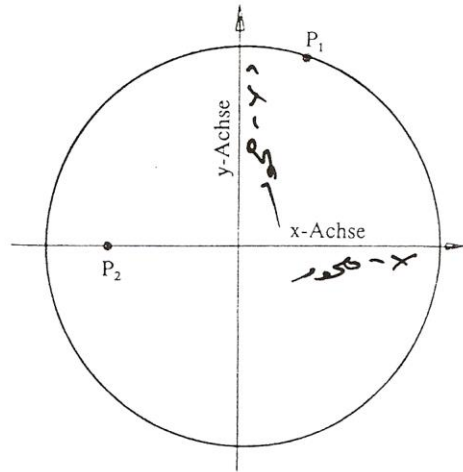
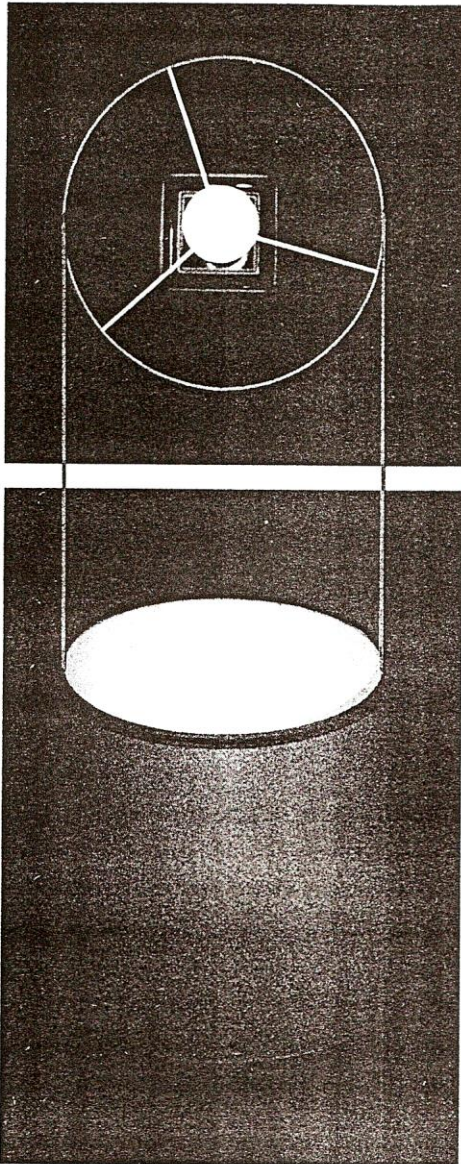
### افینی خیرونی (Affine Abbildungen)

#### محوري افینیتی Die axiale Affinität

دبیلگي په توگه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا مور له یوې گردې بنیښی تویي چی لږ څنډه یی ماته ده یوه بله گردی توتیه چی وړانگه یی له پخوا



کوچنی وی او یا یو ډیرگودی جوړولی شو، چی سیومتری او په دې توگه بنکلی



خیره ۱۸۹

وي. دلته مور الیپسی سره مخامخ شو.

پوښتنه دا ده چی ایا یوه څیرونه شته چی له گردی څخه الیپسی لاس ته راشي؟  
د څیرې ۱۸۹ | د لیدلو له مخی داسی خیال راپیدا کیږي، چی گوندې د گردی او  
الیپسی ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چی  
یوه څیرونه باید موجود وي چی د گردی څیرونه الیپسی شي.  
دا څیرونه باید کوم خویونه ولري؟

مور بیا د جوړونی نیونی چی د مخه مو کړي رامنځ ته کوو.

ټولی په پراته (افقی)  $-x$  محور باندې پراته ټکی ځای په ځای پاتیري: پس  
د  $-x$  محور د ځای په ځای ټکو کړنې څیرونه ده. د دي په څټ د  $-y$  محور ټول  
ارزښتونه تغیر خوري. پس هره  $-y$  محور سره غبرگه کړننه ځای په ځای کړننه ده.  
له دې سره مور د نوې څیرونی لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتی  
محور  $a$  سره یوه محوري افینیتی  $A_{a;g;k}$ ، د لورکړنې ( کړننه چی لوری یی  
څرگندوي لنډ یی: لورکړننه)  $g$  او د افینیتی فاکتور  $k \neq 0$  مخ ته پراته دي، که  
لاندې شرایط پوره وي :

۱ - هره کړننه  $PP'$  چی له ټکو  $P$  او  $P'$  تیره وي د  $g$  سره غبرگه ځغلي.

۲ - که  $P^*$  د  $PP'$  او  $a$  غوڅټکی وي ، نو لرو :  $|P^*P'| = |k| \cdot |PP^*|$ .

په دې توگه نو یوه محوري افینیتی، د کړنې -، غبرگ - او ټوټه تناسب یا ځاننیونه  
ریښتونی ده. اخرنی دا وایی چی په اصلي پایکړنې درې ټکي دا پایکړننه په همغه  
تناسب یا ځاننیونه پری کوي، لکه د څیره ټکی په څیره کړننه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتی جوړښت څیرونه لاس ته راځي

۱ - له اصلي کړنې په نخه شوي ټکي ( د بیلگي په توگه  $P$  ) څخه و  $g$  سره یوه

غبرگه کړننه وباسی او ددې غوڅټکی د افینیتی محور سره د بیلگي په توگه  $P^*$

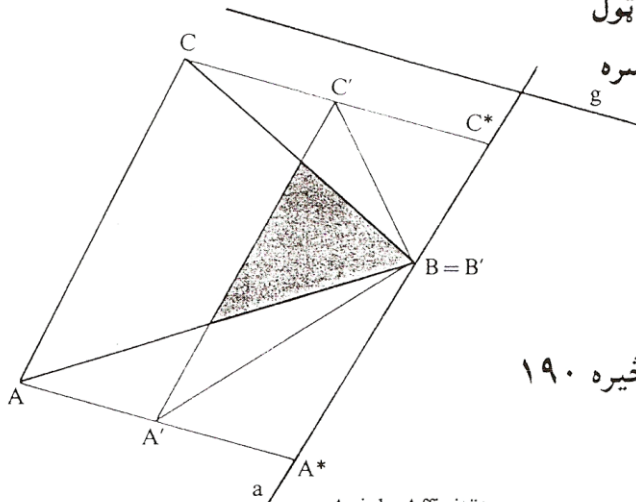
وبولی.



۲- له  $P^*$  څخه  $|PP^*| = k \cdot |P'P^*|$

و  $g$  ته غبرګي مناسبې کرښې وکارئ.

۳- په دې توګه رامنځ ته شوي ټول ټکي اصل ته په ورته توګه سره ونښلوی.

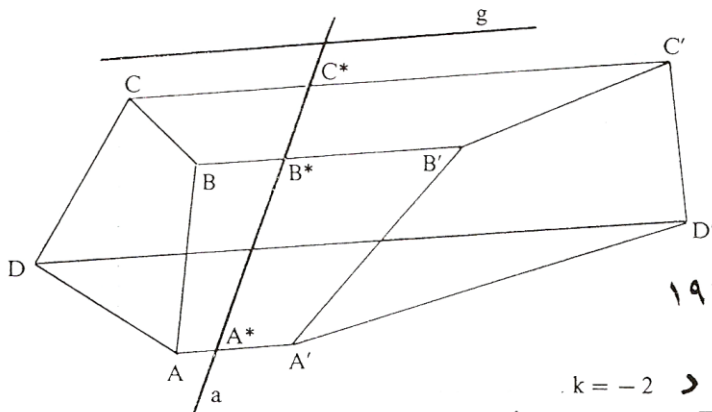


څیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د  $k = \frac{1}{2}$  څخه

اکسیال افینیتی



څیره ۱۹۱

د  $k = -2$

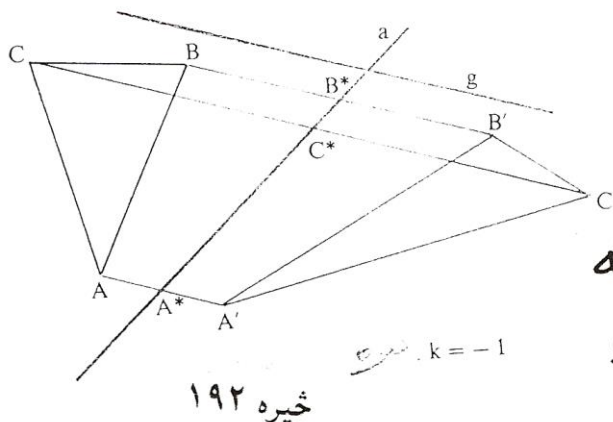
اکسیال افینیتی

سرلیک

د  $k = 1$  لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چې ټولی پایکرښی  
 تغیر نه خوري. له دې لرو چې  $A_{a;g;1}$  کټمټ یا *identisch* ایدنتیک دي.  
 د  $k > 0$  لپاره  $P$  او  $P^*$  د  $a$  په یوه (همغه) خوا پراته دي (څیره ) ، د  $k < 0$   
 لپاره د  $a$  په بدلخواوو ( ش. ۱۵۷ )  
 یو څیرونه  $A_{a;g;k}$  کیدی شي په څیروني  $A_{a;g;1/k}$  بیرته راوگرځي .

### مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانگړې محوري افینیتی ده : د  $k = -1$  لپاره لریوالی یا  
 فاصله  $|PP^*|$  همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله  $|P'P^*|$  . پس مائیل اینونه  
 محوري افینیتی  $A_{a;g;-1}$  ده.



مائیل هندارونه

>

: محوري افینیتی ( یو بل سره ) ترلو خانگري حالتونه:

بیاتی کوونه یا بیاتیونه Scherung

: دوه محوري افینیتی ( یو بل سره ) ترلو، چی همغه افینیتی محور a ولري، g او h مختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینیتی فاکتورونه k او  $1/k$  ولري، نو بیاتیونه ( بیاتی کونه ) ورته وایو.

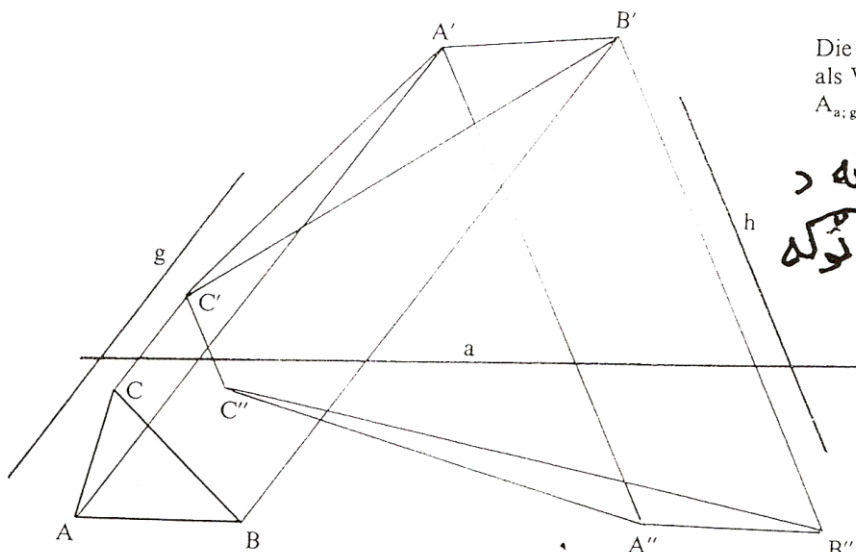
بیاتیونه ( یو بل سره )

: ترلو په خیر:

$$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-1/2}$$

Die Scherung  
als Verknüpfung  
 $A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-1/2}$

بیاتیونه د  
ترلو په توگه



خیره ۱۹۴

سرلیک

په بیاتیونی کی، لکه څنگه په مائیلی اینونی کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیری، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. ( تمرین وگوری )  
 په عمومي توگه د څیرې - او اصلي هواری لپاره په یوه محوري افینیتی کی باور لري :  $F' = |k|.F$  , او یو په بل پسې کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول  
 $F' = |k| \dots |k|.F$ :

دا په دې مانا، چی محوري افینیتی په عمومي توگه هواری ریښتونی نه ده.

## محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتی ده له  $k = -1$  سره. ( څیره ۱۹۲ وگوی )

کونگرواینڅ څیرونه

هره کونگرواینڅڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځای راټوله شي.

منځنی راکښنه ( راکښل )

هر منځراکښنه یو افینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونگرواینڅ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیری، د ټولو افین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونی یو په پسې اجراشي یو گروپ جوړوي، داسی په نامه افینگروپ.

( گروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي )

## تمرینونه

- ۱ - یو دریګودی ABC دې په یوه افین هوار مساوي باندې داسی وارول شي، چیرته چی او  $|AB| = |AB'|$ .
- ۲ - په دریګودي  $A(3|5)$ ;  $B(5|4)$ ;  $C(3|1)$  باندې یو محوري افینتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی  $A'(-3|1)$  او  $-y$  محور د افینتي محور وي.
- ۳ - د گردی خیره د  $M(2|3)$  او  $r = 3 \text{ cm}$  سره وټاکي، که د  $-x$  محور د افینتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرنانت یا څلورمه کي لورکرنه او  $k = 2$  د افینتي فاکتور یا  $-x$  ځل وي.
- ۴ - یو دریګودی په هوار مساوي پنځه ګودي واروی.
- ۵ - یوه گردی دې د نیمي  $d = 12 \text{ cm}$  او د افینتي فاکتور  $k = \frac{1}{2}$  سره افینخیره شي. د راپیدا ایلپسی د هوارې دننه وشمیری. ( دوه یو په بل ولاړ محورونه افینتي محورونه دي چی له منځکي او لوریزکرنی څخه تیریري )
- ۶ - یو تریخ ABCD جوړکړی له  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $c = 3 \text{ cm}$ ;  $d = 5 \text{ cm}$  او  $\angle = 40^\circ$ . په دې محورې افینتي لارښوده کړی، چی د افینتي محور یی د تریخ منځلین وي، چی د لورکرنه یی د هغي سره  $55^\circ$  درجي کونج جوړوي او د افینتي ځل ا- فکتور یی  $k = 3/2$  دی.

## د ریګوډیکچ یا تریګونومتری Trigonometrie

### تعریفونه

د ریګوډیکچ یا تریګونومتری دنده ده چی په هواره یا په هوا کی د ریګوډی کچ کړی ، د ځانګړو بلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتری بلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریوډیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښی (موری تل راګرځیدونی بللی شو) څیرل کیږی.

تریګونومتری تر هیپارچ ( Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا ) پوري تعقیبیدی شی، وروسته له مصري پتولیمویس Ptolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی میر شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. د ریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومی او فزیک، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمک اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیک ( Nautik ) د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه ) کی مومی.

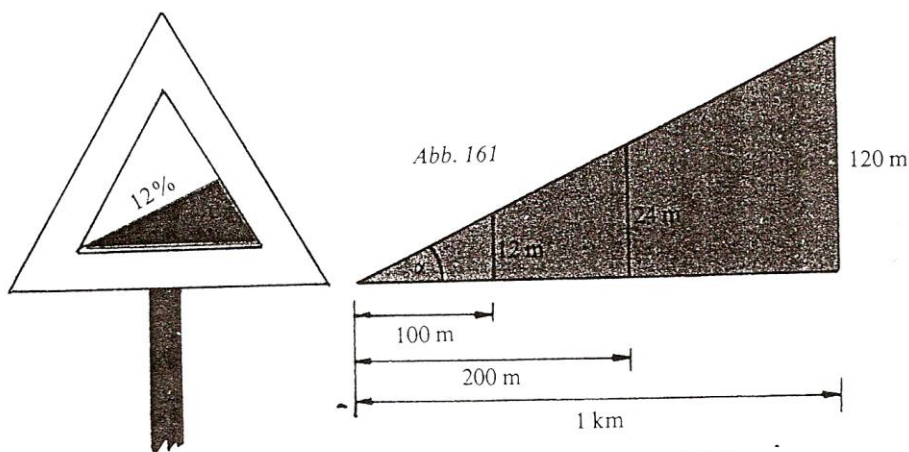
د تریګونومتری مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایګرښلواکوالی، د کونجبلواکوالی سره تړلی شی ( پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري ).

پیلبللګه: د په مانا یا مهم جګوالي یا لویدګرښو نڅښه لوحی یا په بله عبارت د زوري او پیچومی لیکتختی ( دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوري او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي ( وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

پیچومی یا جگوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جگوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جگوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توگه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جگوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جگوالی لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جگپړي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جگوالی کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هواری فاصلي ته تغیر خوري . د پایکړنو تناسب یا ځاننیونه ثابت یا ځای په ځای پاتیري او د په سلو کی گڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جگوالی اوږدوالي معلومات نه



خیره ۱۹۴

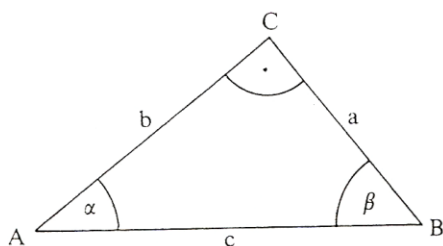


ورکوي همداسي زوری یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوجي هم زورندې وي.

په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرک ټوپه یی د پرتون سره جوړوي.

تریگونومتری یا د په سلوکی (د پیچومی یا جگوالي تناسب) د پیچومی یا جگوالي ویناوي دي او یا په څرگندو پیچومی کونج یا جگکونج چی سلییز پیچومی یا جگوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جگوالي سره د پیچومی کونج په لاندې ډول دی  $\alpha = 6,48^\circ$ .

په پیلبلکه کی څرگندیري چی دا پایکرني د یوه ولاړ دریگوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریگوډیو تناسب یا ځاننونه د کونج په بلواکی یا اړتوب بنایي. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوردارخ) په c بنسول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په  $\gamma$  . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه  $\alpha$  او  $\beta$ .

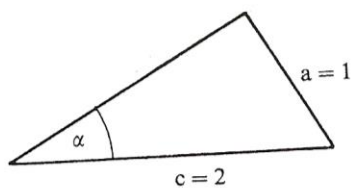


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:



ساینبلواک sinusfunktion : بلیگه:

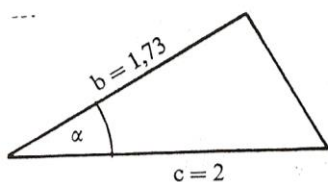


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

خیره ۱۹۶

کوسایبلوک Cosinusfunktion : بیلگه:

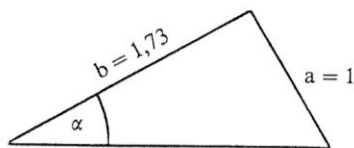


$$\cos 30^\circ = \frac{1,73}{2} = 0,8660$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرتہ کتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion : بیلگه:



$$\tan 30^\circ = \frac{1}{1,73} = 0,577$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

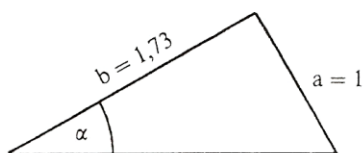
خیره ۱۹۸

سرلیک

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې ځمور موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي، هغه ته په کونج پروت اړخ چې مور یی لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



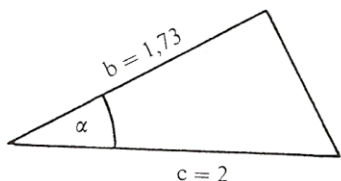
$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څیره ۱۹۹

$$\cot 30^\circ = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم، د بیلګې په توګه استرونومي کې، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه

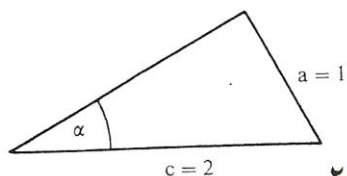


$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

څیره ۲۰۰

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

مور به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توگه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خونبه دریگوډیو کی شمیرنه

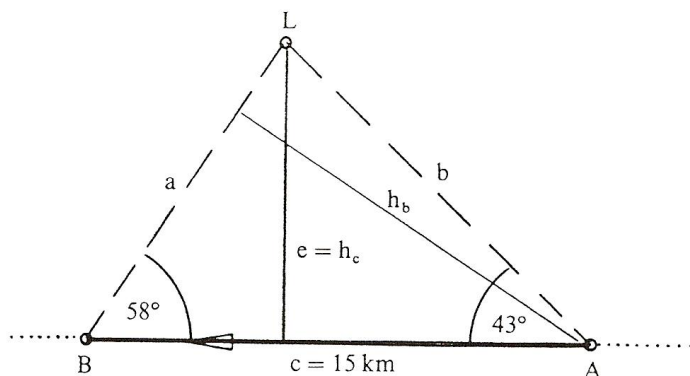
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریگوډیو کی باید تعریف کیږي، خوبیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جگوالی په جوړولو کی هر دریگوډی په ولاړو برخه دریگوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرنی هنري، د مخکنی مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریگوډی باندي لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبلگه

یوه کینستی د رڼاډزکړي ( کله چی کینستی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کینستی یا یو بل څه ته که یوه کینستی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرگندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پېښ شوي دي). دلته  $\alpha = 43^\circ$  د تگ په لور اندازه کیږي او له

سرلیک

یوه تگ پایکرښي  $c = 15 \text{ km}$  او کونج  $\beta = 58^\circ$  وروسته.  
 په دوم ډز کی کینستی له ډز رڼا اور څخه څومره لرې ده؟  
 د A څخه و B ته د کینستی نزدې واټن e د ډز رڼا اور څخه څومره لري دی؟  
 په A کی له اور څخه څومره لرې وه؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ; \quad \sin \beta = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د  $h_b$  په لور اوبسول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12,959 \text{ km}$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12,959 \cdot \sin 43^\circ = 8,838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8,838}{\sin 58^\circ} = 10,421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دريگودي اړخونو a او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

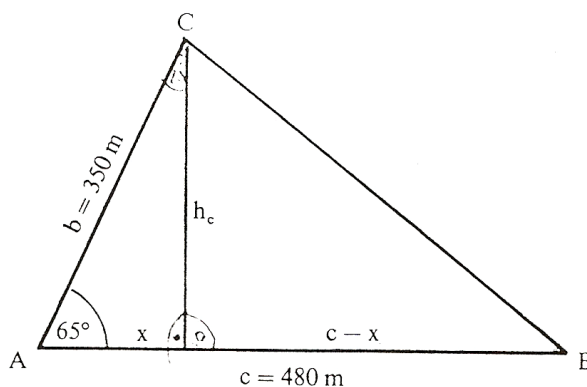
د ساین جمله :

په خوښه دريگودي کې د اړخونو ځاننيونه یا تناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننيونه یا تناسب دی.

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= a / b & \sin \beta / \sin \gamma &= b / c \\ \sin \gamma / \sin \alpha &= c / a \end{aligned}$$

د ساین جمله په پخ دريگودي کې هم باور لري ( تمرین دې وکتل شي ). ددې سره په یوه دريگودي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کېږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي. سړی بیا څه کوي که دريواره اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغو تر منځ راگیر کونج؟

پیلبلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی  $b = 350 \text{ m}$   
 او  $c = 480 \text{ m}$  دي او یو کونج  $\alpha = 65^\circ$  ځبندوي.  
 د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جگوالی یا جگی  $h_c$  کرښه  $AB = c$  په دوه ټوټو  $x$  او  $c-x$  ویشي.

دلته دی  $x = b \cdot \cos \alpha$  ،

ځکه چی  $\cos \alpha = x / b$  دی . د پیتاگوراس د جلی له مخی

لرو :  $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

د اړخونو اوږدوالی نومونى او کونج کيدى شي چي منظم بيرته راگرځيدونکى (خیکليکي يوناني کلیمه ده گردى ډوله يا منظم بيرته راگرځيدونکى zyklisch) يو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

### کوساين جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

په هر يوه دريگودي كى د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زياتون سره ترې كم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي كونج كوساين سره ځل.

د كوساين جمله د پيوټاگوراس د جملې عموميت يا ټوليز ته هم وايي. ( تمرين ۶ مخ دې وکتل شي )

د کونجبلواک له لارې يو بل متود، د ډيرگودي شميرلو لپاره ، تر څو دا په دريگوديو ويشل کيدى شي چى پوره اړخونه او کونجونه يى څرگند وي، پيدا شو. د دې ټولو سره د څلورگودي يو وربرسيره بل د شمير فرمول پيداشو:

$$A = 0,5 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\cdot \sin \alpha = w(d_1; d_2) \quad \text{چيرته چي}$$

$$A = 0,5(d_2 h_1 + d_2 h_2) : \text{ اوبى يا حل}$$

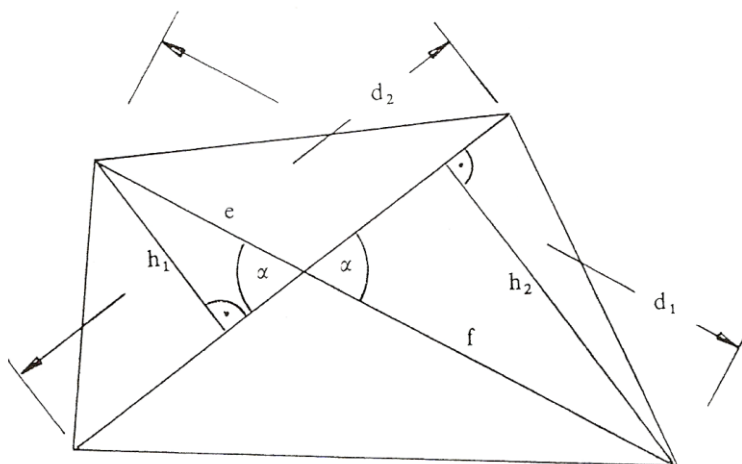
که  $d_1$  په  $e$  او  $f$  ټوټه يا تجزيه شي ، نو لرو

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$

$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 d_1 \sin \alpha$$



څیره ۲۰۴

## د په خوښه کونجونو تریگونومتريکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وویل، چې کونجبلواک، نه یواځې د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره، بلکه د هغو کونجونو لپاره چې له ۹۰ درجو لوی وي، هم هدفمند (موخور) تشریحور دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کېږي.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالور کیدی شي؟

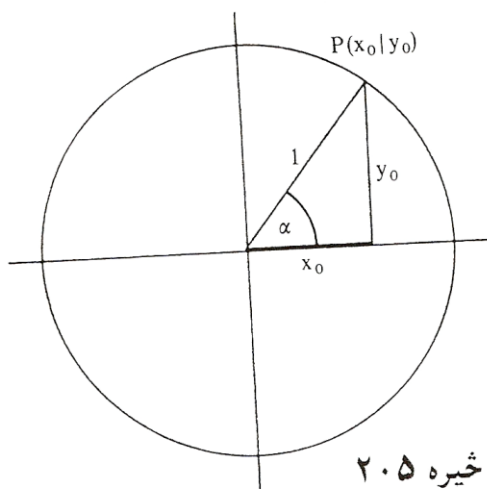


په بڼه توگه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه گردی ووهی چی وړانگه یی ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی ( دې ته یوونگردی ویل کیږي، ځکه چی وړانگه یی یو یوون دی) او د گردی منځتکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریگودی، چی د هغی یو کونج د گردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د گردی په منځ یا ځنتر پروت دی، (خیره ۱۴۲) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریگودی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړ کونجیز دریگودی څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرنانت (Quadrant) کی پروت دی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په گردی، د کونجتگی  $P(x_0|y_0)$  په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin \alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos \alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرنسی د پریوستون او یا د سیورهدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانگه د یوه ټالوهونکی مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرگی رڼا لاندې راشی.



په دې ولاړ کونجیز دریگودی کی کیدی شي چی د پیتاگوراس جمله وکارول شي:

تریگونومتريکي پیتاگوراس:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

چیرته چی  $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$  په مانا دی.

## سرلیک

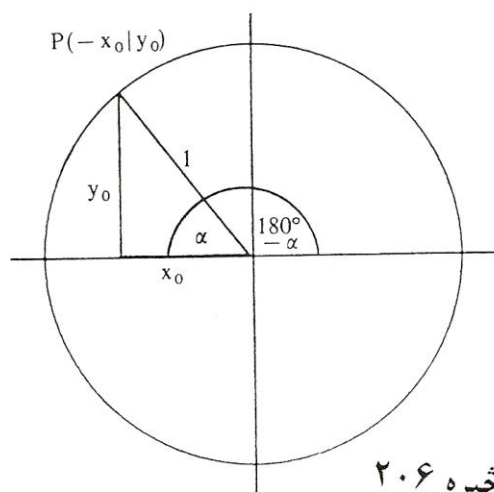
کیدى شي ، چى پوښتنه وشي چى همدا « سيورى » بيا كله لاس ته راتلى شي .  
دا حالت بياتيك هلته لاس ته راځي، چى وړانگه د منفي  $x$ -محور سره يو  
كونج  $\alpha$  جوړ كړي، يعنې څنټريكونج يى  $\alpha - 180^\circ$  وي .

د « سيوروخپرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

ځكه چى دا سيورى همغومره اوږد  
دى لكه د مخه، مگر اوس له صفر  
پيل مخامخ (منفى) لور بڼايي.



په ورته توگه لاس ته راځي :

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

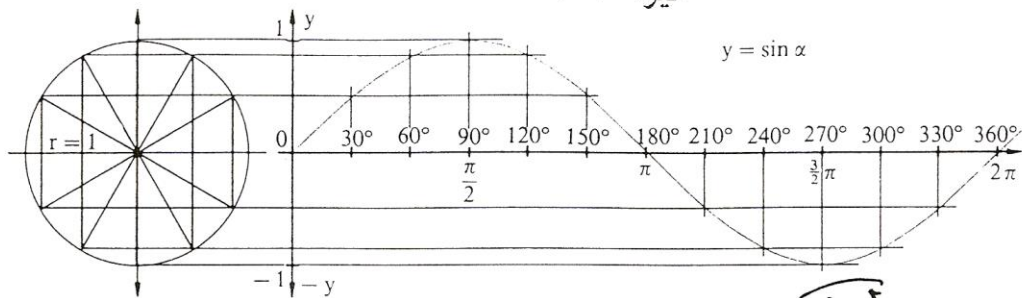
$$\sin (360^\circ - \alpha) = \sin (-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

څيره ۲۰۶

د كونج  $\alpha + 360^\circ$  لپاره بيرته د سرچيني كونج اړيكى لاس ته راځي: همدا ډول  
د  $\alpha + 720^\circ$  لپاره اوهمداسى نور. په دې توگه د په خوښه كونجفنكشونو يا  
كونجبلواكو لپاره د ساين او كوساين بلواك تعريف دي.  
د  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$  له امله (مقايسه مخ | ۱۵) دا د تنجنت بلواك لپاره  
هم صدق كوي. له دې امله لاندې د بلواكگرافونه لاس ته راځي

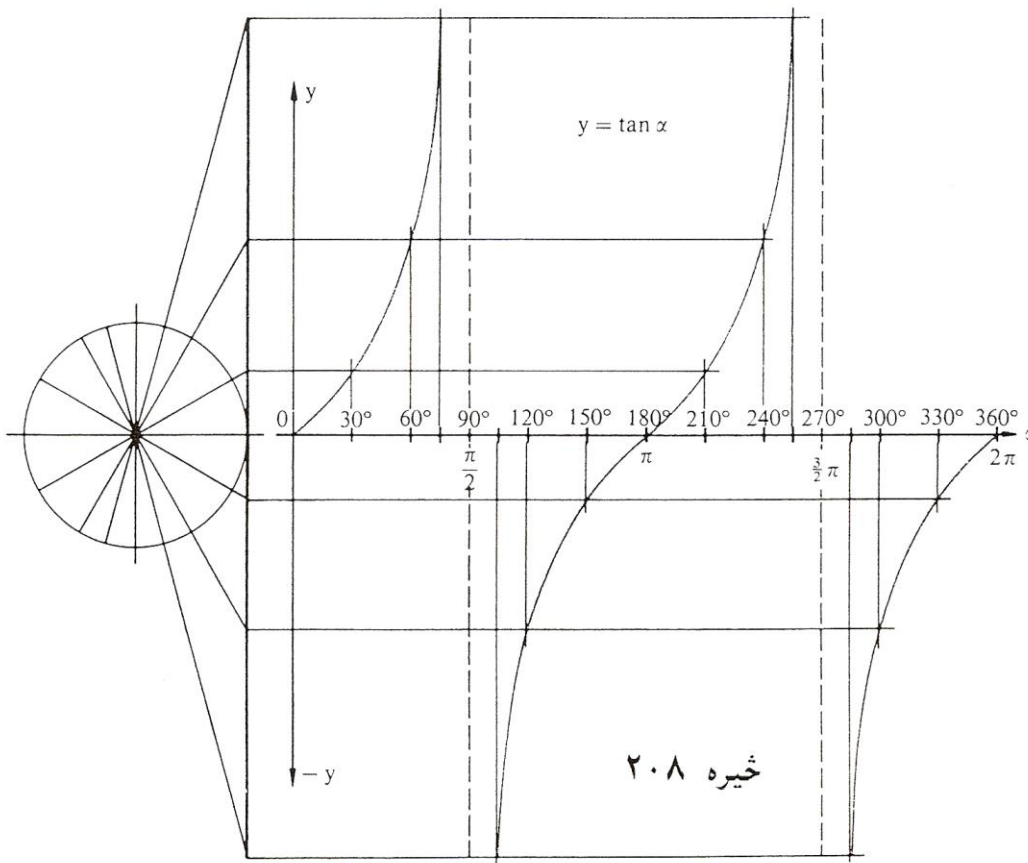
څیره ۲۰۷



Die Sinuskurve:  $y = \sin x; x \in \mathbb{R}; y \in [-1; 1]$

د سین جبهه

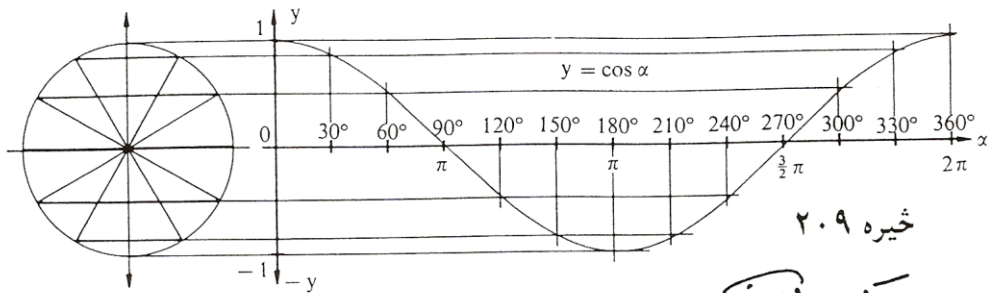
$y = \tan \alpha$



څیره ۲۰۸

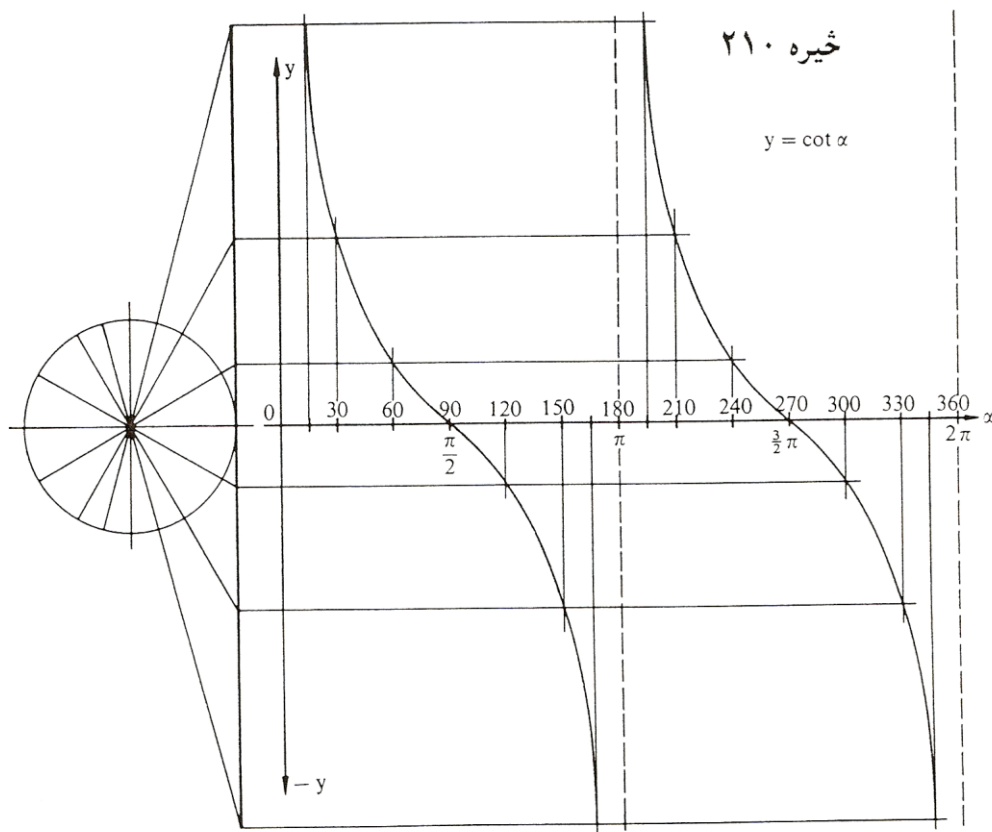
Die Tangenskurve:  $y = \tan x; x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}; y \in \mathbb{R}$

د تانجنت جبهه



Die Kosinuskurve:  $y = \cos x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y \in [-1; 1]$

خیره ۲۰۹  
دکوساین کویه

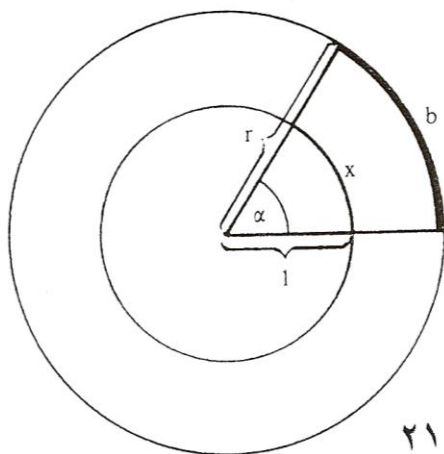


Die Kotangenskurve:  $y = \cot x$ ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ ;  $y \in \mathbb{R}$

خیره ۲۱۰  
دکوتانجنت کویه

## لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا - اندازې سره بلد یو ( دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی بنایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچيوونونو یا کچواحدونو کی گډ دي، چی په گڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون: ارزښتدیری رییلگڼونه دي، په داسی حال کی چی وتل گڼونه ( = د تعریف ډیری گڼونه ) یو یوون یا واحد ( درجه یا گون ) لري. دا په کارونه یا عمل کی مورد زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



خیره ۲۱۱

کونج لویی په واقعیت کی یوون «راد ( rad )» لري، مگر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مونه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریگونومتريکی بلواکو کی ایښودل کیږی ( د بیلگي په توگه  $\sin$  )

ارگومنټ ( Argument تعریفدیری ) بلل کیږي. په تعریفدیری کی کیدی شي چی نوې درجه، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چی په جشمیری کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی. ( راتلونکی دې وکتل شي )

په برخه گردیبرخوکی وبنوول شو ( گردیبرخی د مخه خپل شوي دي ) چی هر کونج پورې یوه گردیبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پورې  $360^\circ$  درجی کونج یا  $2\pi r$  اړه لري، یوه کونج  $\alpha$  پورې بیا یوه لینده  $b$  اړه لري، کومه چی په چاپیری کی  $\pi$  ناهمداسی نیسی لکه په پیل کی  $\alpha$  و  $360^\circ$  درجوته . دلته گردیگن دی :  $\pi = 3,14\dots$  (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

### پیلبلگه:

کونج  $60^\circ = \alpha$  له گردی د  $10$  سانتیمتره وړانگی سره یوه په لاندې ډول گردی لینده  $b = 20 \pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 10,47 \text{ cm}$  غوڅوي یا بیلوي. د گردی

چاپیری دی :  $U = 20 \pi = 62,83 \text{ cm}$

همغه کونج  $\alpha$  د  $5$  سانتی متره وړانگی سره گردیلینده

$b = 10 \pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 5,236 \text{ cm}$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري :  $U = 10 = 31,416 \text{ cm}$ .

له گردی د وړانگی  $r = 1 \text{ cm}$  سره ددې په خټې یا برعکس کونج گردیلینده

$b = 2\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 1,047 \text{ cm}$

غوڅوي» د دې گردی چاپیری فقط  $U = 2\pi = 6,283$  دی .

له بیلگی څرگندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیري لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردی د وړانگی  $1$  سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردی د گردیلیندی اوردوالي کچگن، چی په خنتری کونج



باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi) 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګې څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریلګڼونه پریښوول شوي. بیلګی:

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ} \pi = 0,0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \pi = \pi = 3,1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ} \pi = 2\pi = 6,2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ} \pi = 4\pi = 12,5664 \quad \text{usw.};$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{-5}{12} \pi = -1,309$$

## Arcusfunktionen ارکوسبلواکي

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي، چې لکه په ورکړشو کرښخانینونو راپیداشوي کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږي یا بهتره څنګه ځانونه نیسي. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راڅرخیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونو لپاره یا

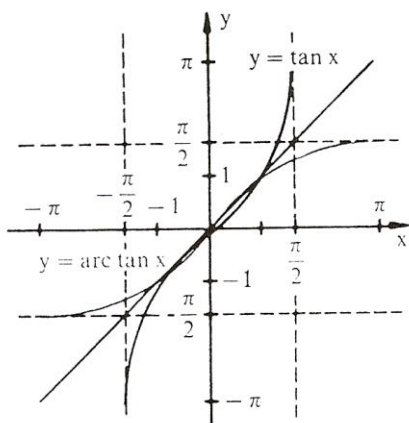
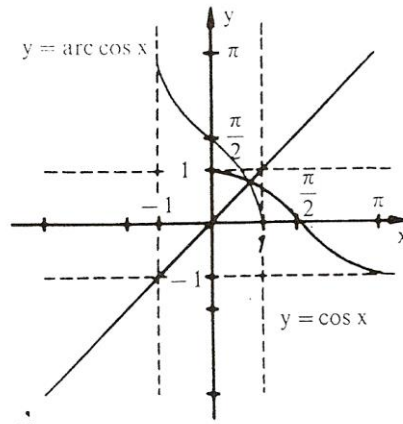
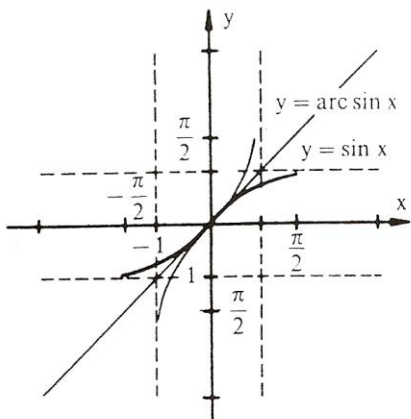
مختلفو واټنونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعريف ډيری په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف: د يوه ( رابند يا محدود ) تريگونوميټريکي بلواک په څټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلوميټريکي بلواک ( لاتين : ارکوس Arcus = Bogen = لينده )

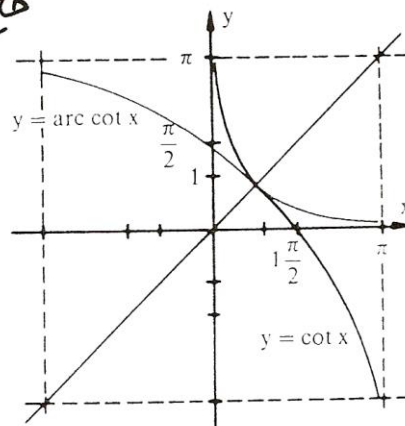
دلته  $\arcsin(x)$  لوستل کيږي «د  $x$  ارکوس ساين. د کونجبلواک تعريف ډيري دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښت ډيري دی او په څټ ارگومنټ يا تعريف ډيري دلته تل يو ريلگن دی.

Trigonometrische Funktion ټريگونوميټريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f: x \mapsto \sin(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cos(x)$ $ID = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$f: x \mapsto \tan(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cot(x)$ $ID = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \{y \mid 0 < y < \pi\}$





قوس معکوس



Beispiele:

1.  $\arcsin(0,8) = 0,9273(\text{rad}) = 53,13^\circ$
2.  $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0^\circ$
3.  $\arctan(-100) = -1,5608(\text{rad}) = -89,43^\circ$
4.  $\text{arccot}(-70) = -0,0143(\text{rad}) = -0,82^\circ$

بیکنی:

۵- دا چی کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په خت بلواک دې نو باور لري

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(y)) &= y; & \arcsin(\sin(x)) &= x \\ \cos(\arccos(y)) &= y; & \arccos(\cos(x)) &= x \\ \tan(\arctan(y)) &= y; & \arctan(\tan(x)) &= x \\ \cot(\text{arccot}(y)) &= y; & \text{arccot}(\cot(x)) &= x \end{aligned}$$

یعنی په لاندې توګه هم

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(0,4)) &= \sin(23,58^\circ) = 0,4 \\ \arccos(\cos(\pi/3)) &= \arccos(0,5) = 1,0472 \\ \tan(\arctan(-40)) &= \tan(-88,5679^\circ) = -39,9999 \\ \text{arccot}(\cot(60^\circ)) &= \text{arccot}(0,5774) = 1,0472 \end{aligned}$$

## د جشمیري کارونۍ یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواک تعریفیږي او ارزښتدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جشمیري استعمال په هکله هم څه ووايو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلک اختیار کی لري، چی د درجي اورو په لینده کچ او په څپ کوي، مگر شمیردرخ په توگه باید د شمیرونکی په پروگرام کی ځای په ځای شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د <....> سره په نڅښه شي:

په قاعده کی دربی بلواک ورکړشوي دي:  $\langle \cot \rangle$ ;  $\langle \cos \rangle$ ;  $\langle \sin \rangle$  کونجنت بیا داسی شمیرلکیدي شي، د  $\langle \tan \rangle$   $\langle 1/x \rangle$  د  $\langle \text{INV} \rangle$  - توکمي سره سری ارکوسبلواک ته راځي: نو  $\langle \text{INV} \rangle \langle \sin \rangle$  ارکوس ساین دی. په عمومی توگه کونج - بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي - باید د فنکشن له مخه ورکړ.

### بیلگي

س

۱ لاندې جدول همغه د کارونۍ یا استعمال لپاره د جشمیري چمتووالی بنای:

Winkelmaß	کو کچ	TR-Modus	په نڅښونه	Beispiel	بیلگه
Altgrad	زړه درجه	DEG		$\sin 45^\circ = 0,7071$	
Neugrad	نوې درجه	GRAD		$\sin 50^\circ = 0,7071$	
Bogenmaß	لینده کچ	RAD		$\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$	

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
$\sin 45^\circ$	45 <sin>	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	< $\pi$ > <: > 6 <sin>	0,5	RAD
$\cot 30^\circ$	30 <tan> <1/x>	1.732050808	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	60(°)	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
$\operatorname{arccot} 2$	2 <1/x> <INV> <tan>	26.56505118°	DEG
$\sin 220^\circ$	220 <sin>	-0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جسمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه - یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جسمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلگی په توگه <MODE> .

د ورکړشوي درجه گڼی اوړون په لینده کچ د <DRG ->> سره سورت نیسي. بیرته یا په څټ سپری داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> - تکمی سره.

## بیلگی

60°	<DRG>	60(rad)
60	<DRG>	60(grad)
60°	<DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<DRG →>	60°
60°	<INV> <DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<INV> <DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<INV> <DRG →>	60°

دلته گراد نښونه ( gard ) نوی درجه ده یعنی گون ( gon ).

ځنی جسمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په گراد دقیقی، ثانیه او یا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26.75° 30°15'	<inv><DMS - Dd> <DMS - Dd>	26°45' 30.25°
------------------	-------------------------------	------------------

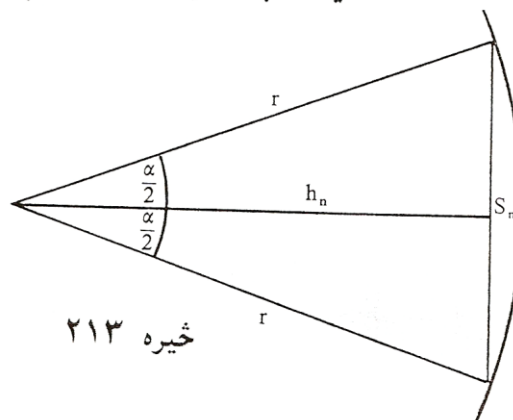
د " 30° 15' " ورکړه کیدی شي د جسمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جسمیري د لاس کتاب څخه گټه واخستل شي ( یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان مور متأسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختگ مور هم خپل شاته نه شي پرینوولی )

پیلبللگه: دلته دې  $S_n$  د یوه منظم  $n$ -گودي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه گردی کی چی وړانگه یی  $r = 5 \text{ cm}$  ده، راگیر دی.

الف) وښایی چی

$$S_n = 2r \cdot \sin \left( \frac{180^\circ}{n} \right)$$

ب) د یوه داسی  $n$ -گودي چاپیری  $U_n$  وشمیری ، چی  $n = 8; 16; 32; 128$  وي، او په نزدې توگه یا تقریبی د دې گردی چاپیری د دې وړانگي  $r$  سره وښایی .



پ ( په همدې ډول  $n$ -گړدی له هوارو  $A_n$  څخه په نزدې توگه یا تقریبي د گړدی — هواره  $A$  وبنایی .

اوبی (حل) : هر  $n$ -گړدی کیدی شي په  $n$  مساوي دريگړديو ټوټه کړی شي. د هغو د څینتريکونج  $\alpha$  لپاره باور لري  $\alpha = 360^\circ / n$ . د جگي یا جگوالی  $h_c$  د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دريگړدي کي ولاړکونجيزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360^\circ / 2n = 180^\circ / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n/2) / r = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

$$b) U = n \cdot S_n = 2r \cdot n \cdot \sin(180^\circ/n) = 10n \cdot \sin(180^\circ/n)$$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180°	<STO>	<·>	8	<=>	<SIN>	<·>	8	<·>	10	<=>	30.614675
<RCL>	<·>	16	<=>	<SIN>	<·>	16	<·>	10	<=>	31.214452	
<RCL>	<·>	32	<=>	<SIN>	<·>	32	<·>	10	<=>	31.365485	
<RCL>	<·>	64	<=>	<SIN>	<·>	64	<·>	10	<=>	31.403312	
<RCL>	<·>	128	<=>	<SIN>	<·>	128	<·>	10	<=>	31.412773	

پ ( د ډیرگړدي هواره د دريگړديو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی د هر دريگړدي هواره ده:  $0, 5 \cdot S_n \cdot h_n$  . د

$$h_n = r \cdot \cos(180^\circ / n)$$

$$S_n = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

او

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0,5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0,5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې پروگرامونو کیدوونکي ده

360° <STO> <: >	8 <= >	<SIN> <: >	8 <: >	12.5 <= >	70.710678
<RCL> <: >	16 <= >	<SIN> <: >	16 <: >	12.5 <= >	76.536686
<RCL> <: >	32 <= >	<SIN> <: >	32 <: >	12.5 <= >	78.036129
<RCL> <: >	64 <= >	<SIN> <: >	64 <: >	12.5 <= >	78.413712
<RCL> <: >	128 <= >	<SIN> <: >	128 <: >	12.5 <= >	78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چي له یوې زخیرې زیاتې ولري ، لکه چي پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتې هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروگرامور ماشین سره کیدی شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د گوډونو گڼ څخه تې شو یا د گوډونو گڼ باندې صرف نظر وشي .

### د تریگونومتريکي بلواکو خویونه

دا چي کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چي یوه کونج بلواک تعریفیږی یا  $\alpha$  او یا  $x$  وي. ددې لپاره چي د یوه بلواک خوي باندې ټینگار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو. د لاندې خویونو لمړی ډله یواځي له تعریف مساوات ( د مخه راغلی ) او د پیتاگوراس له جملی لاس ته راځي ( د مخه لوستل شوې ) لاندې صدق کوي :

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{مخامخ کاتیت}} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \frac{\text{پرتہ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x ; 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتريکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنخ لیکدود په پام کی ونیسی.  
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونى یا پلټونى په مانا دي

	gegeben دودى	sin x	cos x	tan x	cot x
gesucht غوښتونى		sin x	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$



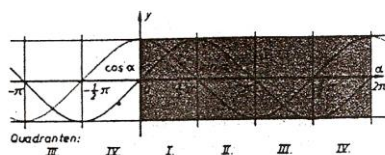
سرلیک

$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چی د مخه مو په گوته کړل، کیدی شي چی تریگونومتریکی بلواک د مختلفو گونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توگه یا په کلکه توگه لاس ته راوړی شو

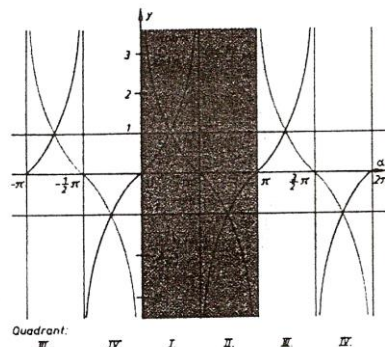
تعریف : تریگونومتریکی بلواک ټول پریودیکی یعنی بیرته راگرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکرارېږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راگرځیدنه (یا  $۳۶۰$  درجی) لري، کونجنتبلواک راگرځیدنه (یا  $۱۸۰$  درجی ( $180^\circ$ )) لري.

$$\left. \begin{aligned} \sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$


خیره ۲۱۴

د ساین او کوساین ځنځن  
په دې د ساین راگرځیدنه





د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راگرځیدنه:

بیلگي:

$$\begin{aligned}
 \sin 50^\circ &= \sin(50^\circ + 360^\circ) = \sin(50^\circ - 720^\circ) = 0,76604 \\
 \cos -30^\circ &= \cos(-30^\circ - 360^\circ) = \cos(-30^\circ + 1080^\circ) = 0,86603 \\
 \tan 2,5 &= \tan(2,5 - \pi) = \tan(2,5 + 5\pi) = -0,74702 \\
 \cot 10 &= \cot(10 + \pi) = \cot(10 - \pi) = 1,54235 \\
 \sin 35^\circ &= \sin(180^\circ - 35^\circ) = -\sin(180^\circ + 35^\circ) = -\sin(360^\circ - 35^\circ) = 0,573576 \\
 \cos 35^\circ &= -\cos 145^\circ = -\cos 215^\circ = \cos 325^\circ = 0,81952 \\
 \tan 0,6109 &= -\tan 2,5307 = \tan 3,7525 = -\tan 5,6723 = 0,700208 \\
 \cot 0,6109 &= -\cot 2,5307 = \cot 3,7525 = -\cot 5,6723 = 1,428042
 \end{aligned}$$

بیلگي:

که د فنکشن گراف ته په څیر شو، نو برسیره پر دې روښانوي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلگي:

	$\alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$35^\circ$	$145^\circ$	$215^\circ$	$325^\circ$
sin	0,573576	0,573576	-0,573576	-0,573576
cos	0,819152	-0,819152	-0,819152	0,819152
tan	0,700208	-0,700208	0,700208	-0,700208
cot	1,428148	-1,428148	1,428148	-1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جیشمیری یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

## سرلیک

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$\alpha$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos $\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan $\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	-	0
cot x bzw. cot $\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

دلته د همدابول یا همداسی په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا گومانی لاس ته راوړی شو

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cos x &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ \tan x &= \cot \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cot x &= \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned}$$

دا گومان کیدی شي په ولاړ کونجیز دریگودی کی د تعریف په مرسته په ساده توگه وپنوول شي. :

$$\sin \beta = a/c \quad \text{او} \quad \cos \beta = a/c$$

د  $\beta = 90^\circ -$  له امله لاس ته راځي :

$$\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$$

په ورته توگه نورې غوښتنې هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین

بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو گرافونه د  $x = \frac{\pi}{2}$  کرښی

ته یو بل سره محوریو مترې ځغلي :

له څیرو او بیلگو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین - ، تنجنت - او کوتنجنت بلواک ناجفت دي « د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \tan(x) = -\tan(-x); \cot(x) = -\cot(-x)$$

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی  $x$  له نوکانو دباندي هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin(-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan(-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = 0,27762$$

## د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چې کونجبلواک لایني نه دي ( د فنکشنګراف کرښه نه ده، بلکه کره ده ) ، نو ډبل تعریفږي پورې ساده ډبل بلواک ارزښت اړه نه لري. لکه

$$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواک ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابی کړی شو.

بیلگی :

$$1. \quad \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$1'. \quad \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$2. \quad \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$2'. \quad \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$3. \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$4. \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$5. \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$6. \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$7. \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$$

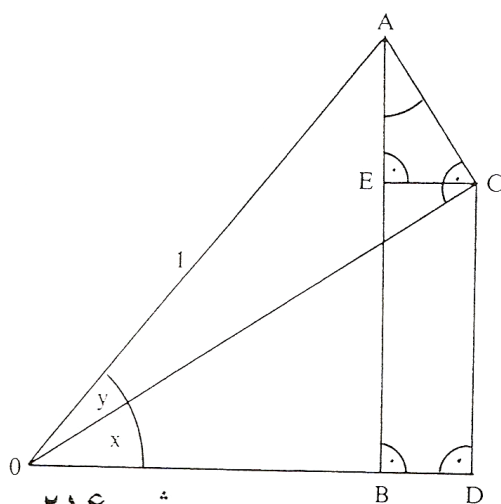
$$8. \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$$

$$9. \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$9'. \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq -1$$

$$10. \quad \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq -\cot y$$

$$10'. \quad \cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq \cot y$$



خیره ۲۱۶

1. und 2.:

$$|OA| = 1$$

$$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$$

$$|AB| = \sin(x + y); \quad |OB| = \cos(x + y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر حسب برداری:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

دکای په های کولو تقد منبونه په لاس راخه

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1': 2':

3. t 4. x = y. های په های تیره

$$5.: \text{Setze } z + t = x; z - t = y \Rightarrow z = \frac{x + y}{2}; t = \frac{x - y}{2}$$

کین ره

$$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$

پس کورو

$$= \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x \cdot \sin y = \sin(z - t) = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} - \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

همه سی

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

6. منبونه په ورته توکه منته می

$$7.: x = y = z/2$$

لېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2 \frac{z}{2} - \cos z \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos z)$$

د ریښه نیونې له لارې ښوونه لرو

په (\*)  $\sin^2 z/2$  کې  $1-\cos^2 z/2$  کېږده:

۹ - ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژندڅخه لاس ته راځي

بلواک یا فنکشن  $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لکه چې په پیل کې مو وویل په طبیعت او تخنیک کې ډیرې پېښې شته دي چې تل بیرته راګرځي یا لنډ: راګرځي، یعنی پریودیکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواک بسیا نه کوي.

دا زیات علتونه لري: لمری د ساینبلواک د  $-1$  او  $1$  ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور دا واقعي د کونج په واک کې نه دي بلکه د وخت په واک کې دي د یوې راګرځیدنې سره، چې دا په ساده توګه د  $2$  په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواک د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیخیر شي یا یې بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغې تاثیر په لاندې لیدنه کې راټول شوي دي، ګراف یې ورزیاتې څیرونې لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کې مګر یواځې د ساینبلواک (په همدې توګه د هغې مخامخ د کوساین بلواک چې په  $\pi/2$  سره راکښل شوی وي) د مانا ډک دي. (لوستن: له پېښې لور څخه)

بیلګې	د کارونې ساحه	تاثیر	بلواک
څلورمه ۲۱۷	ټولې تلبیرته راګرځیدونې تعاملونه		$y = \sin(x)$
څلورمه ۲۱۸	د یوه مساوی او ډول شپاړتو ډول یو په بل کې لاندې	د $-y$ لور یا نږدې راکښنه	$y = \sin(x) + d$

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا های بدلون	په بدل بوښنا جریان د بوښنا او شیا لوند تغییر د وښانویه	٢١٩
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیټوډ د ټاکل بدلون فالتور - 1 له 180° فاز ټاکل بدلون د	د یوه بندل خوږ بدنه	٢٢٠
$y = \sin(bx)$	د ډیولود تغیر یا بدلون b > 1 سرعت 0 < b < 1 په کرا کېدل b < 0 په څپه کې کېدنه که مخور د	د یوه ښیښی ټوټې تغییر د یوه وخت داوړنه او رهغی پرته له یوه لکه په دغو الویه او ازولوی	٢٢١
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پروټوټې جریان یا عمل	٢٢٢

## تمرینونه

١ - د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$$4^{\circ}6' = 4,1^{\circ} \quad ; \quad 10^{\circ}, 5' = 10^{\circ}30'$$

$$a) 6,75^{\circ} = \quad b) 120,48^{\circ} = \quad c) -75,65^{\circ} =$$

$$d) 52^{\circ}16' = \quad e) 97^{\circ}13' = \quad f) 44^{\circ}44' 44'' =$$

٢ - په درجه کچې وليکي

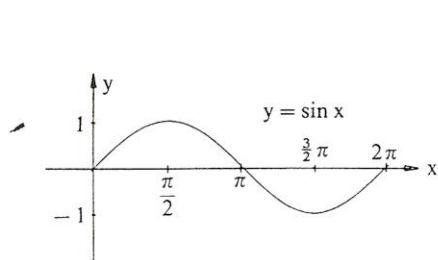
$$a) x = \frac{\pi}{3}, \quad b) x = -\frac{\pi}{4}, \quad c) x = \frac{2}{3}\pi$$

$$d) x = 4 \quad e) x = -3 \quad f) x = 4,7$$

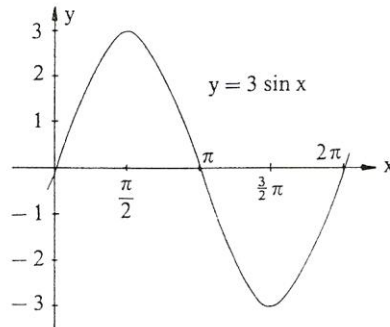
٣ - په لینده کچې یې وليکي

$$a) 15^{\circ} \quad b) -60^{\circ} \quad c) 540^{\circ} \quad d) 20^{\circ}15' \quad e) 15,75^{\circ}$$

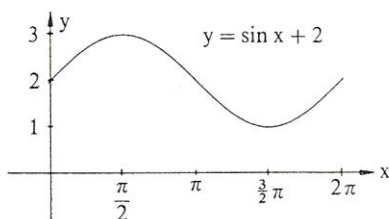




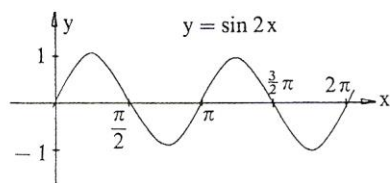
څیره ۲۱۷



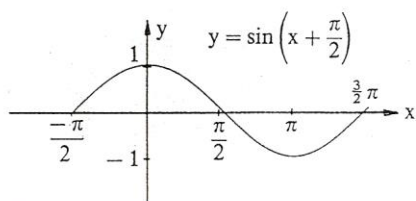
څیره ۲۲۰



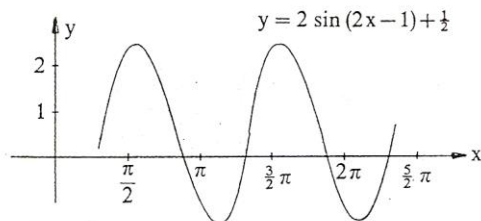
څیره ۲۱۸



څیره ۲۲۱



څیره ۲۱۹



څیره ۲۲۲

د دې بلواک گراف د ساین کړې  $y = \sin x$  څخه لکه چې گورو لاس ته راځي:

- ۱ - د ارزښت دوه ځله کیدل
- ۲ - د نیمې راگرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه
- ۳ - په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه
- ۴ - په  $1/2$  پورته لورته  $100\%$  راکښنه



## ۴ - وټاکي

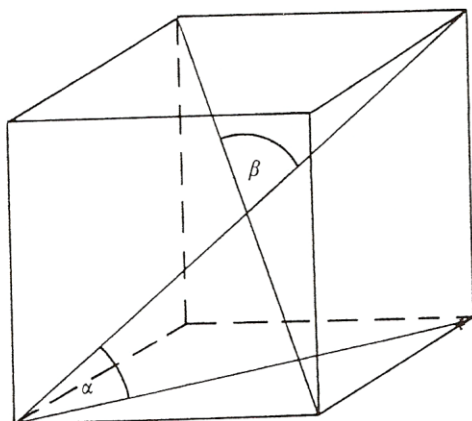
- a)  $\sin 20^\circ$     b)  $\sin(-30^\circ)$     c)  $\sin 172^\circ$     d)  $\sin 1^\circ 4'$   
 e)  $\cos 35^\circ$     f)  $\cos 380^\circ$     g)  $\cos(-27^\circ)$     h)  $\cos 47,9^\circ$   
 i)  $\tan 11^\circ$     k)  $\tan(-15^\circ)$     l)  $\tan 33,33^\circ$     m)  $\tan 13^\circ 13'$   
 n)  $\cot 870^\circ$     o)  $\cot(-11^\circ)$     p)  $\cot 14^\circ 14'$   
 q)  $\cot(-2^\circ 2')$   
 r)  $\sin \alpha = 0,8$     s)  $\cos \alpha = 0,9$     t)  $\tan \alpha = 2,5$   
 u)  $\cot \alpha = -1$     v)  $\sin \varphi = 0,3$     w)  $\cos \varphi = -0,13$   
 x)  $\tan \varphi = -4$     y)  $\cot \varphi = 0,3$     z)  $\arcsin(x) = \pi / 2$

۵ - په يوه ولاړ کونجيز دريگودي کې لرو  $\gamma = 90^\circ$  او په دې برسیره :

a)  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 6 \text{ cm}$

b)  $a = 16 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 66^\circ 45'$

c)  $c = 5 \text{ cm}$ ;  $a = 3 \text{ cm}$



خیره ۲۲۳

پاتی ټوټی وشمیری

۶ - په مساوي پښيز دريگودي

کي (  $a =$  پښه ده ) دی

a)  $a = 10 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 80^\circ 40'$

b)  $a = 12 \text{ cm}$ ;  $h = 8 \text{ cm}$

c)  $\beta = 40^\circ$ ;  $a = 7 \text{ cm}$

پاتی ټوټی وشمیری

۷ - د يوه پڅکونجيز ( $90^\circ < \alpha$ )

دريگودي لپاره ساين وشمیری

۸ الف ( کوساين د يوه پڅ کونجيز

دريگودي لپاره وشمیری ( $90^\circ > \alpha$ )

- ب) په یوه ولاړکونجیز دريگودي کوم فرمول لاس ته راځي؟  
 ۹- په یوه مکعب کې د یوه هوا نیمې او بنسټهوارې ترمخ کونج څومره لوي دی؟  
 څیره د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمو ترمخ کونج څومره لوي دی؟  
 ۱۰- د دوه گردیو وړانگی

$$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 4 \text{ cm}$$

دې او همداسې د منځتکو واټن  $|M_1M_2| = 8\text{cm}$  ورکړ شوی دی.

د دواړو گردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکي

او د کډې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱- په یوه دريگودي کې د یوه

کونجیمی مخامخ اړخ په داسې

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرته خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی (څیره ۲۲۴).

۱۲- که یوه بار ځای ته،

چې ۱،۵۰ متره جگ دی،

یوه زینه ورجگه شي

میلانکونج په دې زیات ترزیات  $33^\circ$  وي، زینه دې څومره لويه وي؟

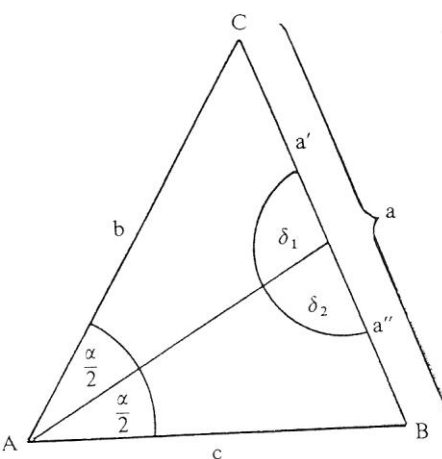
۱۳- الف) د یوې پورته ختلی کوڅې جگوالی توپیر دې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او ۱۲% جگه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جگوالی توپیر څومره دی؟

پ) د یوه زورندې پتیلار، چې ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی، که دا د جگوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟



څیره ۲۲۴

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله = ۱۰۰ کیلوگرامه) په یوه پورته خیزول کیري، چې

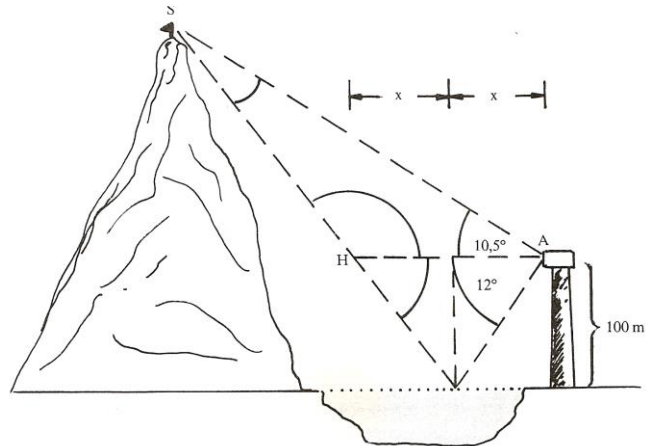
- میلانکونج  $\sphericalangle = 25^\circ$  لري. د وزن زور په زورند زور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشار زور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کيږي، دواړه زوره څومره لوي دی؟ (۱ کیلوگرام = ۸۱، ۹ نیوټن  $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$ ).
- ۱۵ - یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کيږي. درسیو میلانکونج  $60^\circ$  دی. په پښه باندې په کوم جگوالی باید رسی وړلی شي؟
- ۱۶ - د یوې ۵۳ متره جگي ونی سیوری ۵، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمرورانگي په کوم جگوالی یوبل سره مخامخ کيږي؟
- ۱۷ - د یوه ۵ متره جگ کتونټکي ( لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی ) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کيږي چی جگیدونکوج یی  $\sphericalangle = 18,5^\circ$  او پښیتکی یی  $\beta = 8^\circ$  لوید کونج ، برج څومره جگ دی؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی؟
- ۱۸ - الف ( د پیزا (Pisa) کور برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۴، ۵۰ متره ور اوږي. دا برج څومره مایل دی؟
- ب ( د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترگي جگوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟
- پ ( د ۱، ۵ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کيږي
- که جگوالی یی ۱۶۰ متره وي؟
- که جگوالی یی ۱۳۷ متره وي؟
- ت ( د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
- د بل برج څوکه ښکارېږي چی جگوالی یی ۱۴۳ متره وي؟

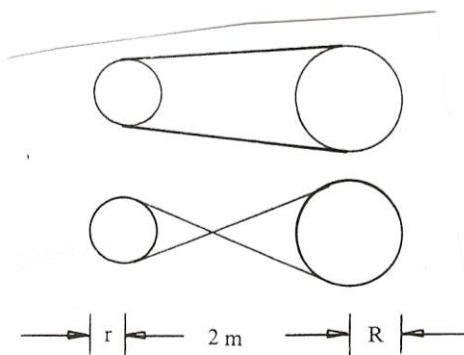
- د پاریس د ایفل برج ښکارېږي چی جگوالی یی ۳۰۰ متره دی؟

۱۹ - د ښیپیس اهرام (Cheopsyramide) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنسټ

## سرلیک

- د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري  
 الف ) د اړخهوارې میلانکونج خومره دی ؟  
 ب ) د څنگهوارې دريواره دنننی کونجونه خومره لوي دي؟  
 ۲۰ - یو ژوری یا قبر -۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته  
 لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی  
 الف ) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی خومره پراخ دی؟  
 ب ) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا خومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی  
 یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟  
 ۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د  
 بحیرې لور ته  $14^\circ$  میلان لري، د دننه لور ته  $28^\circ$  میلان لري. د ډنډ بنسټ  
 خومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواړه خومره ده؟  
 ۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو بڼه لید د ماترهورن (ماترننسکر یا د ماترن د  
 غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی  
 دی ) اچول کیري که دا د یوه لیدتکي څخه چی ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په  
 لور بنسکته وکتل شي، نو د غره د څوکی هندارونه د  $12^\circ$  پریوتکونج لاندې  
 لیدل کیري. د غره څوکه د یوپورته کونج  $11^\circ$  لاندې لیدل کیري. د ریفلډنډ  
 باندي د ماترننسکر څوکه خومره جگه پروته ده؟  
 څیره





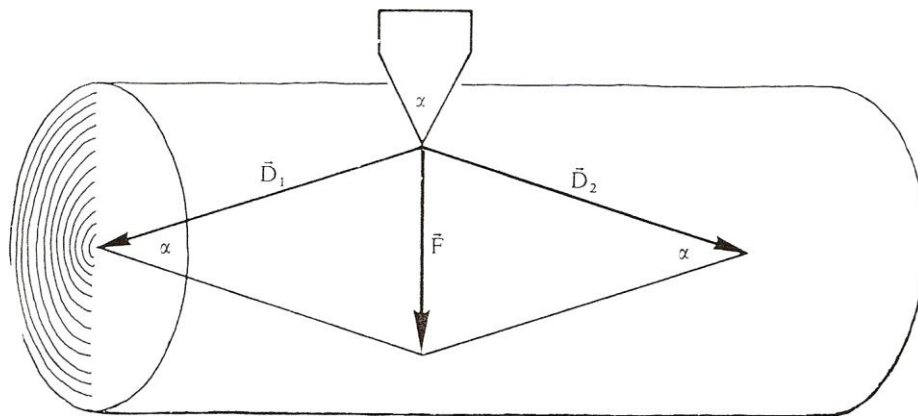
۲۳ - الف ) یوه د کښولو کړی،  
چي په دوه دکښولو چیترو  
باندي راتاو ده، څومره اوږده  
ده، که لاندي اندازې ولري  
 $r = 22 \text{ cm}$  ,  $R = 35 \text{ cm}$  ,  
 $|M_1 M_2| = 2m$ ?

څیره ۲۲۶

ب ) دا کړی به څومره اوږدې وي

که د اټیران په څیر له پیټروګانو یا ټیکلیو ډاکی حیډل وي ؟

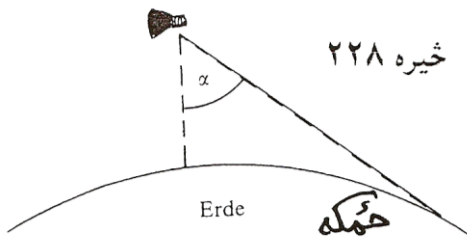
۲۴ الف ) د ونی په سټه یو کایل (موری ) په خټک د  $D$  زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه  $D$  څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه ، که د کایل یا تېرګي کونج  $\alpha = 6^\circ$  وي. ( څیره ۱۹۴ ) ؟  
ب ) په کوم کایل کونج یا تېرګي کونج لرو:  $|D|=|F|$  ؟



څیره ۲۲۷

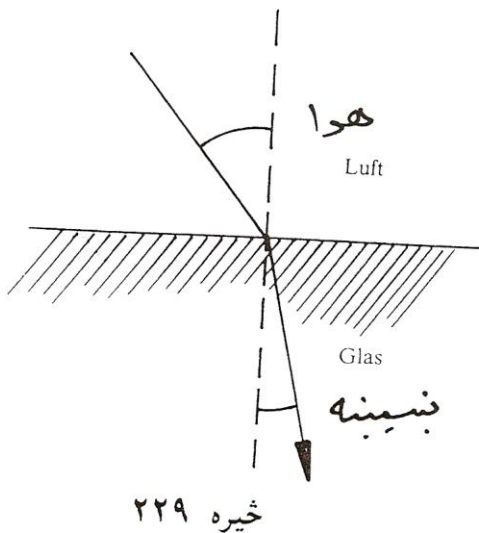


سرلیک



۲۵ - د یوه الوتماشین څخه  
ځمکه د یوه  $\alpha$  کونج لاندې  
لیدل کیږي ( څیره ) دا الوتماشین  
څومره جگ الوزې ؟ ( د ځمکې  
وړانگه : ۶۳۷۰ کیلومتره )

۲۶ - یو گاډی د  $v_{\alpha} = 120 \text{ km/h}$  سرعت  
سره روان دی، نو د باران څاڅکی په  
پټلی د تلنلور باندې په  $115^\circ =$  کونج



د چیترو (مطلب د گاډې د اوسپنې  
تیر یا گاډیل دی) مخامخ ځغلي.  
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو  
د لویدلو سرعت  $v_g$  وټاکي ؟  
۲۷ - که د لمر وړانگه په دوه مختلفو  
طبغو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر  
یا بدلون ورکوي. د سنیلوس Snellius  
د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چی د  
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون  
وايي، چی پروتورانگه ، ماتورانگه او

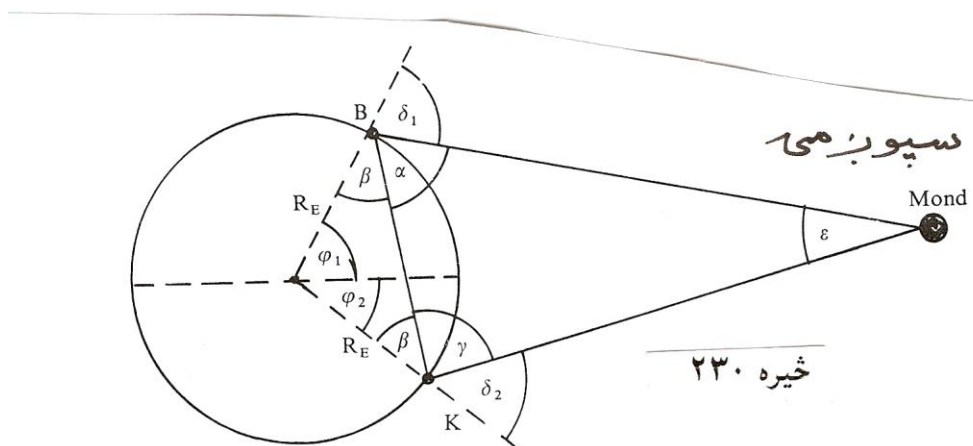
ولاړکرتنه یا عمود په بیلیدونکی هواری په یوه هواره پراته دي او برسیره پر  
دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

که د رڼا وړانگه په یوه بښینه ( اوبو ) پریوزي، نو  $n = 1,5 (1,33)$  دی. وښایي،  
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$10,5^\circ, 15,8^\circ, 27,3^\circ, 41,2^\circ, 67,6^\circ, 72,4^\circ, 81,9^\circ$  ؟

۲۸ - په ۱۸ مه میلادي پیړۍ کې د سپوږمۍ لریوالی تریگومتريکي وټاکل شو. په برلین کې ( جغرافیوي اوږدوالی  $(\varphi_1 = 52,52^\circ)$  او لکه د بنو هیلو په کونج کې  $(\varphi_2 = -33,93^\circ)$  ، کوم چي په همغه اوږدگړاد پراته دي ، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:  $\delta_1 = 32,08^\circ$  او  $\delta_2 = 55,72^\circ$  .  
وشمیری  $|BK|$  ,  $\beta$  ,  $|KM|$  او له دې څخه  $d_{EM}$  .



۲۹ - لږځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعنی د وخت  $t$  ترواک لاندې دي. دا د بلواک  $y = a \cdot (\sin(2\pi/T)t + k)$  له لارې ورکړ شوي. دلته  $t = x(2\pi/T)$  هغه کونج دی ، کوم چي په  $T$  وخت کې وهل کیږي.  $1/T = f$  د یوه څرخون پریود یا راگرځیدنی وخت په گوته کوي او د لږځیدنی دوام بلل کیږي «  $f$  فرکونخ frequenz بلل کیږي.

ټولو راگرځیدونکو هوارو زیاتون، د باندې هواری، او ډکي یا حجمونه، د هوارو متن ټولگی سره ده.

ډکي یا حجمونه په مکعبمتر  $m^3$  په همدې توگه د مکعب متر برخه یا څو واړه باندې ورکول کیږي، چی یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې گورو، ساده دي

$$1 m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000 cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9 m^3$$

$$1m^3 = 10^6 cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3 mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9 \mu m^3$$

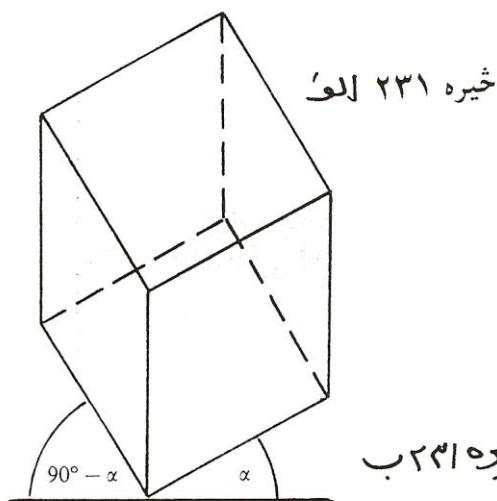
برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوبتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

## د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

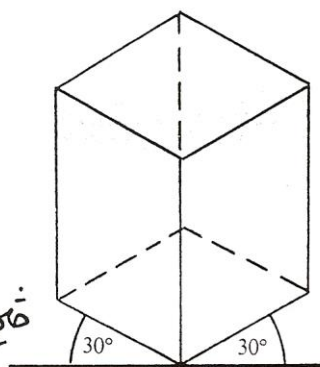
په پرنځیپ کی د بدن درې ډوله گرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی گيرونه ، مابیل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن (Projection) (دریتخته ئیز پریوستون). دا هرؤي یی مختلفې دندې سر ته رسوي.

د دام گيرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله د باندې هواری ونبولی شي. دا که چیرې راگردی پریکړی شي او سره ونبلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

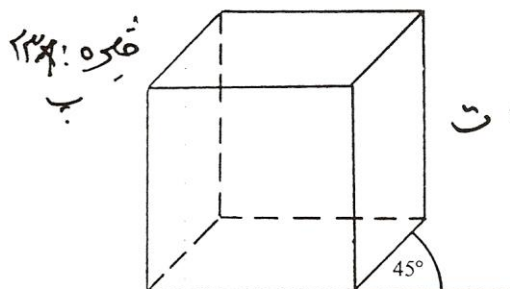




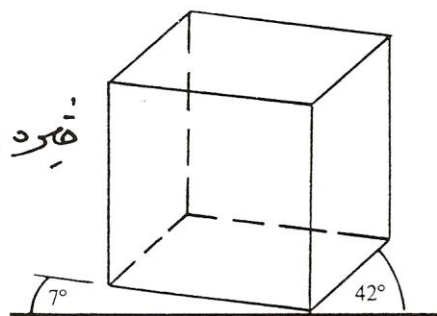
څیره  
Parallelperspektive:  
Militärperspektive  
د عمود پر مسپکتیو  
د نظام لیدنی



څیره  
Parallelperspektive:  
Isometric  
عمود لیدنه  
انزومتری



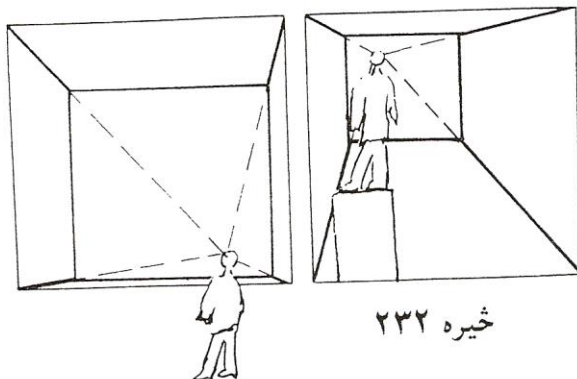
څیره  
Parallelperspektive:  
Kavaliersperspektive  
عمود لید  
کاوا لیر پوسپکتیو



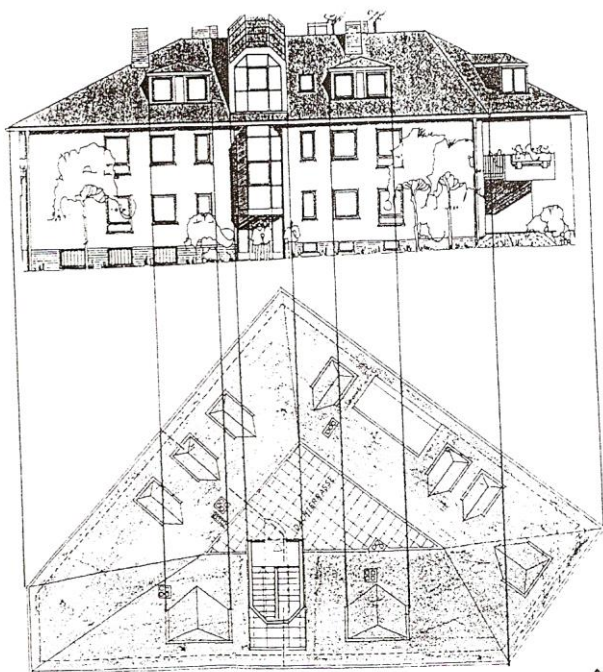
څیره  
Parallelperspektive:  
Dimetric  
عمود پوسپکتیو  
د لیمتری

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلڅیره کښل دي. دا هوایي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو (مائل له پورته) او یوه چینلښی پرسپکتیو (مائل له ښکته) ترمنځ توپیر کیږي، مگر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهیې (فرونټال) ځغلیدونکی لاینونه په

نورمال اوردوالي، له ليدونكي لري څغليدونكي لاینونه مائیل او په لنډ ډول کښل کيږي. لنډونه يی د کونج تر واک ده:



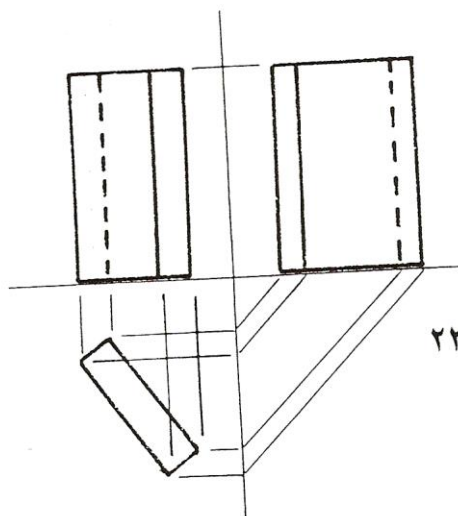
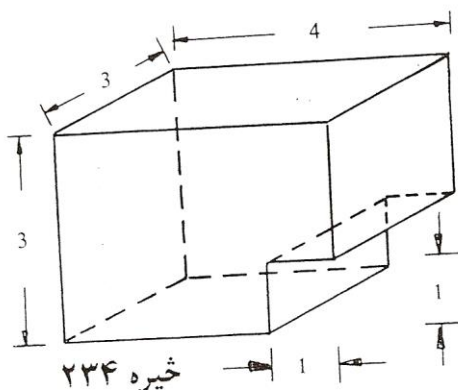
۶۰°	۴۵°	۳۰°	پروت کونج
1/3	1/2	2/3	لنډوونکی فاکتور



په یوه پرسپکتیو مائیل جوړښت کی طبعاً ځني برخی او نه څیره شوې د شا خواوي ورکيږي، دا په دې مانا چي په کښلو کی نه راځي. له دې امله او په ځانگړي ډول کونج لرونکو بدنونو لپاره درې تختییز پرویکشن (پریوستون) گټور دی. دا یو درې څلي ولاړ پریوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنسټیز څرز یا غوڅي هواره، (ب) اړخیز غوڅي یا درز هواره (پ) پورته درز یا غوڅي هواره او دا زیات وخت په جوړښت رسمونو کی استعمال مومي.

### تمرینونه

- ۱ - د دې څیره بدن څخه دریتختھییز پر یوستون وکارې.
- ۲ - د دې بدن مائله څیره وکارې، کوم چی دریتخه ئیزه څیره پورې اړه لري.
- ۳ - د یوې ولاړې گردې توتی یا استوانی مایلی څیرې غوښتل کیږي، چی د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.
- ۴ - یو شپراړخي نل یا شپرخنډیز نل وباسی په غبرگ پرسپتکیو انځورونی سره.

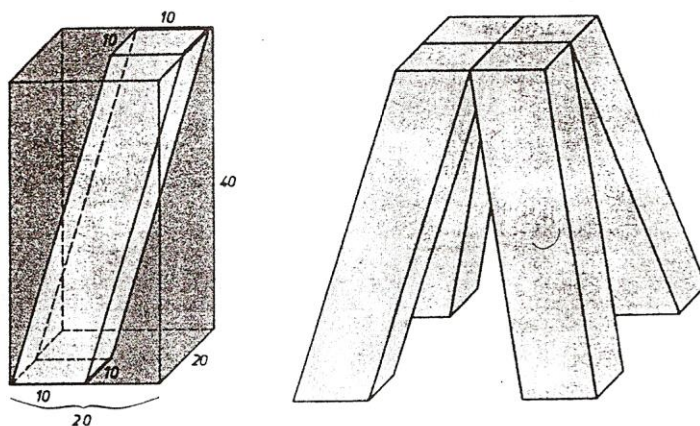


## پریزماوې Prismen

پیلبللگه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podest پودست ( لکه په څیره کې کښل شوی میز ) د لاندې جوړښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرگیو په څیره شوي شکل اړه کړي. یوه پښه څومره ډکې ( حجم ) لري ؟

$$\bullet V = 10^2 \cdot 40 = 4000\text{cm}^3$$



څیره ۲۳۶

۲ - د یو ګاډولارې یا مستقیمې پریزما چې جگوالی یې 12 cm دی د باندې هواړه او ډکې ( حجم )، چې ځمکه او سر یا سرپوښ یې یو سیومتری تراپیش وي

د اړخونو د اوږدوالي  $c = 6$  ,  $a = 10$  cm او  $h_r = 4$  cm سره څومره دی؟

د تریخ هواړه

$$h_r(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32\text{cm}^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

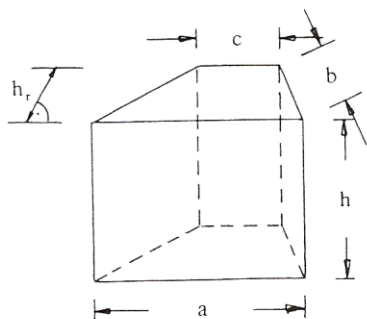
$$V = G.h = 32.12 = 384 \text{ cm}^3$$

د دباندې هواړې لپاره د تریخ اړخ

اوږدوالي  $b$  ته اړه شته .

دا د پیتاگوراس د جملی په مرسته

لاس ته راوړو



څیره ۲۳۷

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47 \text{ cm}$$

له دې امله دباندې هواړه ده :

$$O = 2.G + (2.b + a)c, h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28 \text{ cm}^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرگوډیو ( پولیگونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرگوډیو راگیر وي، او ددې ترمنځ د بیلگي په توگه بیا پریزما ده.

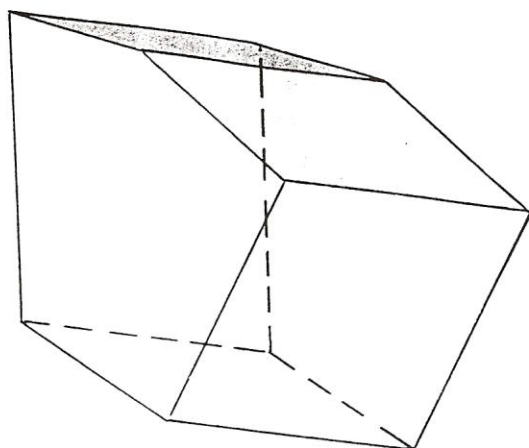
تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرگو

او گونگرواینځو پولیگونویا ډیرگوډیو بند یا راگیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هواړې د کونگرواینځ له امله د اړخونو هواړې غبرگاړخیز دي.  
د پورته هواړې ( چت ) ولاړ اوږدوالی د پریزما جگوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د



سرلیک



څیره ۲۳۸

یوه اړخ اوردوالی د جگوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرږو.

د ټولو خورامنظم او په دې ډول خورا ځانگړي پریزما شپراړخیز یا مکعب دی.

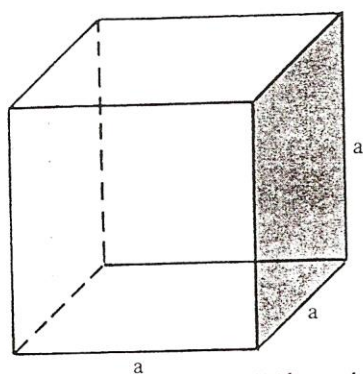
( وورفل Würfel ) . دا د

دبانندی هوراو ۶ کونگرواینڅ

مربع خواوې لري، او ژی یا

اړخونه ( کانتی ) یی یو په بل

نیغی ولاړې دي.



څیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپراړخیز یا شپراړخیز (مکعب) د دبانندی هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 \cdot a = G \cdot h$$

بیلگه : څه شی دروند دی یو کورک ( Quark یو شکل لرگي ډوله بدن دی، چی د

بوتونو خولی په پتیري) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د

اوسپنی مکعب چی د اړخ اوردوالی یی 8 cm ( د کورک ) V سختوالی

( 7,86 g/cm<sup>3</sup> د اوسپنی 0,2 g/cm<sup>3</sup> )

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله  $m$  لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینبرتی یی د ډکي سره څلوو.

$$V = (30\text{cm})^2 = 27000 \text{ cm}^3 \quad \text{د کورک مکعب ډکی} :$$

$$m = 27000\text{cm}^3 \cdot 0,2\text{g/cm}^3 = 5400 \text{ g}$$

د اوسپنی مکعب ډکی :

$$V = (8\text{cm})^3 = 512 \text{ cm}^3$$

$$m = 512\text{cm}^3 \cdot 7,86 \text{ g/cm}^3$$

$$= 4024 \text{ 32 g}$$

د کورک مکعب له دې امله د اوسپنی

د مکعب ته نزدې

$$34\% [(5400-4024):4024 \sim 0,34]$$

دی. یا په بل عبارت، د کورک مکعب

نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د

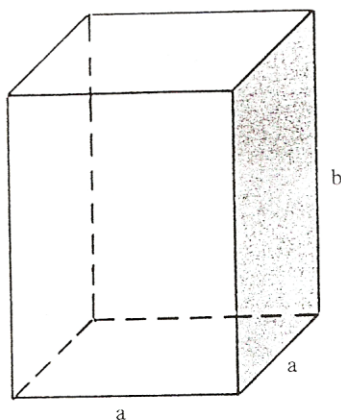
مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب سټه (ځمکه) یا بست

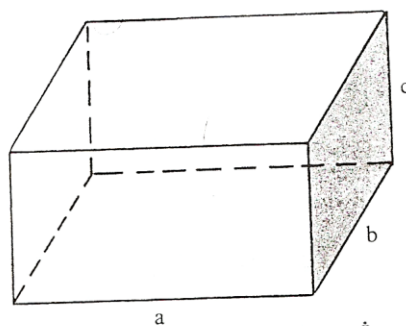
او چټ یا سر مربع پاتی شي او

نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه

مربع ستن (پنبه) لاس ته راځي.



څیره ۲۴۰



څیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړگوډیز

ته «ټولیز» شي یا «عمومیت»

پیدا کړي، نویو کوادر Quader

منځ ته راځي. هغه درې مختلفې

اړخیمي، مگر مساوي هوا نیمي

ا هواقطرونه لري. دا د پيتاگوراس د جملې په مرسته شميرل كيدى شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډكې (حجم) لپاره اسدق كوي:

$$O = 4ab + 2a^2$$

$$V = a^2 b$$

نو بڼه

د اړخونو نيميو او ردولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

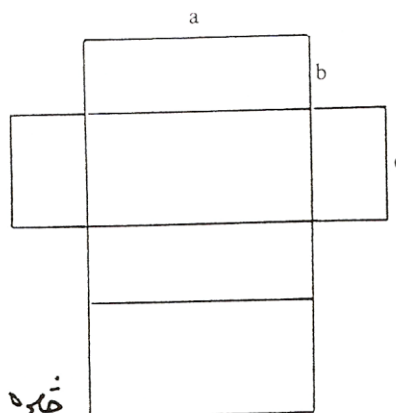
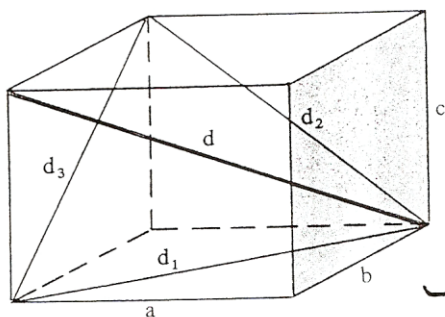
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

د هوانيميو لپاره اسدق كوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف



خیره ۲۴۲ ب



بیلگه: یو کواډر د کانتو اوږدوالی  $a = 5\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$  ( بنستیز هواړه  $a.b$  ) او  $c = 12\text{cm}$  لري:

$$M = 2.(5.12 + 4.12) = 216 \text{ cm}^2 \quad \text{د پوښهواره:}$$

$$O = 2.(5.12 + 4.12 + 5.4) = 256 \text{ cm}^2 \quad \text{د باندي هواړه.}$$

$$V = 5.4.12 = 240 \text{ cm}^3 \quad \text{ډکی (حجم):}$$

$$d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40 \text{ cm}, \quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ cm} \quad \text{نیمي:}$$

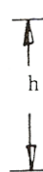
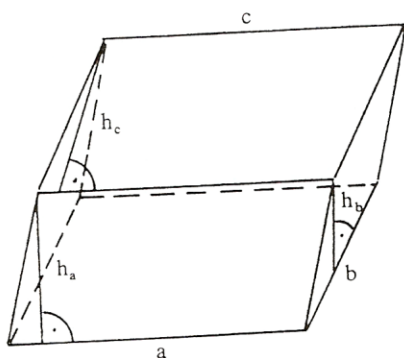
$$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60 \text{ cm}$$

یوه مائیل څلور اړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرگو کونگرواینڅ څلور کونجیو سره غبرگ ایپت یا شپات یا په بل عبارت غبرگهواریز بلل کیږي، چی مور به یی له دې ورسته همداسی وپولو. د هغو دباندي هواړه د هغه د بنست- پورته - او اړخهوارې دوه څله ده.

دا د غبرگ اړخیز په څیر شمیرل

کیږي او په عمومي ډول باور لري:



جمله: د غبرگهواریز دباندي هواړه  
او ډکی دي:

$$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$$

$$V = G.h$$

دلته د ډکی شمیرنه د غبرگ اړخیزهوارې په

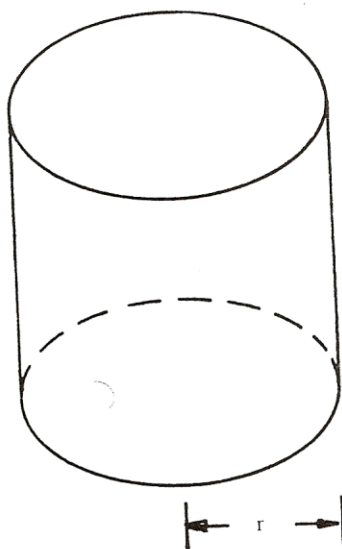
څیر اجرا کيږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي: یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم، مگر په بنسټ یا ځمکه او پورته کونکرواینڅ ډیرکوډیز پریښول وی، د هواری د خواو هواری بیا غبرگ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هواری او حجم لپاره باور لري:

$O = 2$  د ټولو خواو هواری زیاتون + بنسټیزه هواړه .

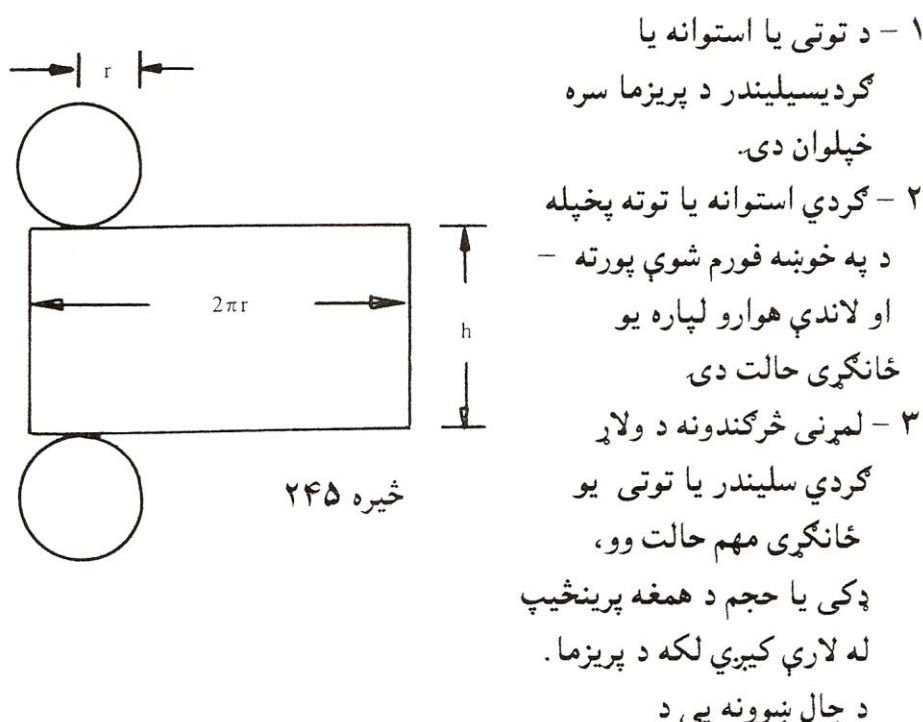
$V =$  بنسټهواړه . جگوالی

### سیلیندر (توته یا استوانه یا ستن)



څیره ۲۴۴

د هغی نیغی (سیخ ولاړې) پریزما سره، چی لاندې او باندې یی سیومتری - کوډیز وی - څه پیښیږی، که د کونجونو شمیر نور هم زیات شی؟ اوس نو لاندې هواړه (او په همدې ډول پورته هواړه هم) په گردې بدلیري او دا ډیر سره کوډیز شوي د خواو هواری په یوې کبرې یا راتاو هواری بدلیري. یو بدن یو بل سره کونکرواینڅ او غبرگ لاندې پورته گردیهوارو سره گردیتوته یا گردیسیلیندر بلل کيږي. د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې شیان څرگندیري.



پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تیرلي راځي چې لاندې او پورته (دځمکی - او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندي هوارې او ډکی لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (r+h)$$

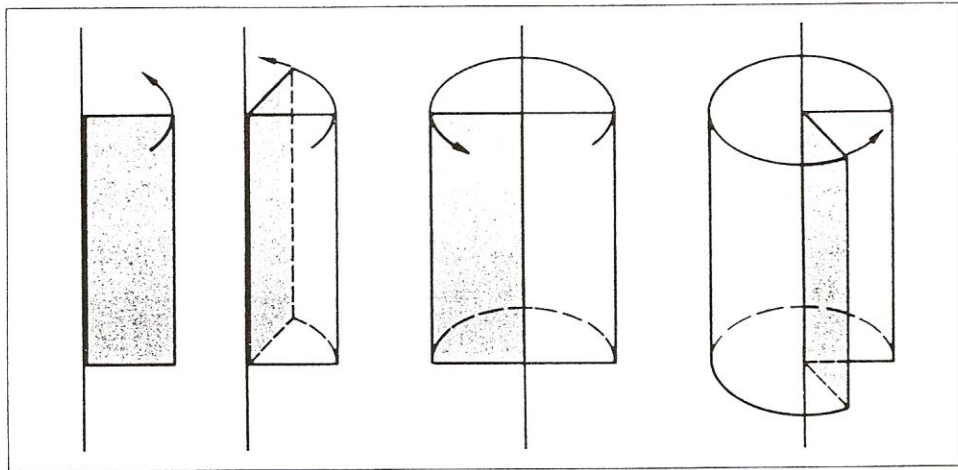
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځتکي سیومتری استوانه چی وړانگه یی له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

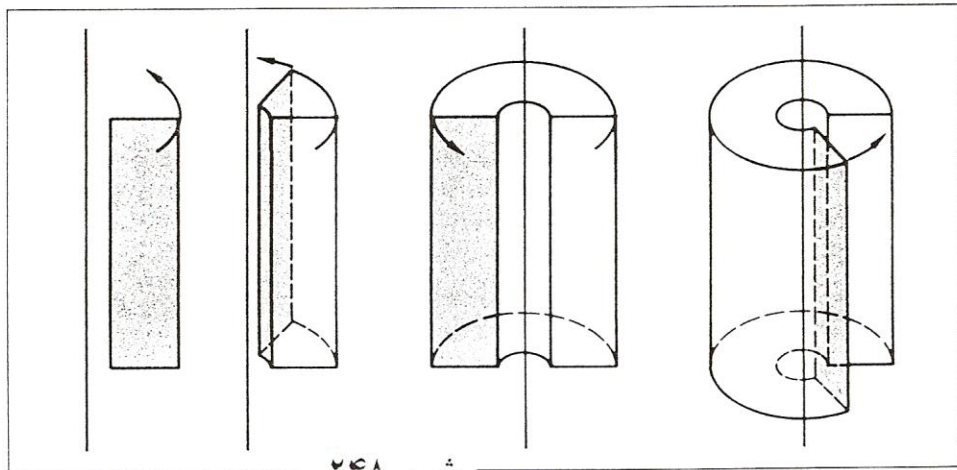
سرلیک

که د مخه و نیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پندې دی،  
نو دلته باید ټول  $4910, m^2 = 0,491 \cdot 10000$  کاغذ سلیخ شوی وي.

د گردې - او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړ کونجیز  
خرخون (Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

## تمرینونه

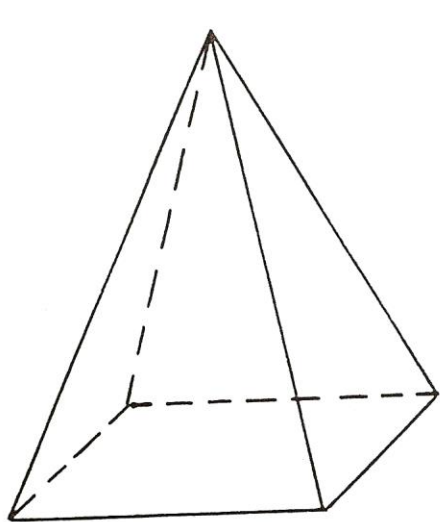
- ۱ - یوه سمه پریزما د شپږکوډیز بنسټ - په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جگه ده. هر بنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږد دی. ددې ډکې پوښ او پورته یا ټوله راگرده هواره وشمیری.
- ۲ - یو غبرگهوارې ۸۱ مکعب متره ډکې لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جگوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵، ۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.
- ۳ - پورته واره او ډکې څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟
- ۴ - د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ ځانسیونه یا تناسب کې پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکې ا مکعب متروي؟
- ۵ - یو مکعب د هوانیمې  $d = 6\sqrt{3}$  لري. نو ټولهواره، ډکې او اړخ (a, V, O) یې وشمیری.
- ۶ - د شګو موټر کې چې د بارهواندازه یا بارډکې اندازه یې  $2,82m \times 1,68m \div 0,55$  وي، څومره متر مکعب شګه ځایري، که دا د پورته اړخ یا کانتې پورې ډک شي؟ د باروړونکي د بار وزن ۱۵، ۱ ټنه دی. په بارولو به څومره ورزیات شوی وي، که شګه یوه ډبښتی، تیګوالی یا غلظت  $2 \text{ g/cm}^3$  ولري؟
- ۷ - په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډک شي. دا کرښه ټوله ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جگ دی او په بنسټهواره کې ۳۹ متره، په سر کې ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟
- ۸ - د سرک جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنې غټه استوانه چې سرک پرې پخوي او په سرک یې څرخوي) ۱، ۱۵، ۱ متره نیمې لري او د ۲، ۲۵ متره سرور دی



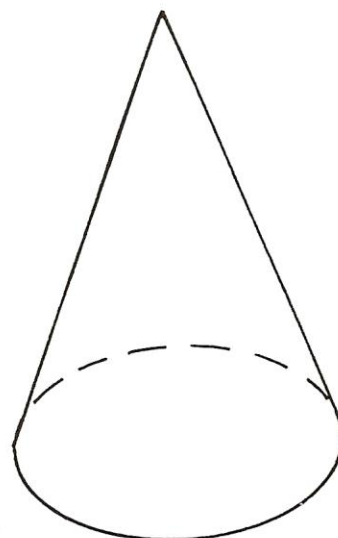
- هغه هواره څومره لويه ده، چې څرخى يې په يوه څرخون وهى؟
- ۹ - يو بايسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتيمتره اوږد رڼا نيمى لري او د پمپ اوږدوالى ۲۸ سانتيمتره دى، د پمپ تشيا ډکى څومره دى؟
- ۱۰ - د دې لپاره، چې د گيلاس توته په پروتغوڅي باندې څيرو يا معاينه کړو، ۲۰۰ گرامه پارې نه يې ډکوو ( $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ ). پوهيرو، چې توته هر ځاي کى همغه دنننى نيمى لري. دا نيمى څومره دى، که پارې ۸۲ cm جگه وي؟
- ۱۱ - يوه کچتوته دې، د يوه ۵ cm دننه نيمى سره داسى په کچکړينو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسى کړينو وي د  $5 \text{ cm}^3$  ډکى وښايي. د دوه څنگ په څنگ کړينو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟
- ۱۲ - د يوه ولاړگوديزې وسپنى ټوټى ( $25 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ ) څخه دې يوه کوتى، بى له سرپوښ او بينس څخه جوړه شي. ډکى يې وشميرى که الف (چاپيرى يې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپيرى يې د لنډ اړخ سره برابر وي؟
- ۱۳ - د لاندې توتو پاتى کڅونه وښايي:
- a)  $r = 5 \text{ cm}$ ;  $h = 12 \text{ cm}$       b)  $r = 9 \text{ cm}$ ;  $V = 120 \text{ cm}^3$   
 c)  $h = 6,5 \text{ cm}$ ;  $O = 300 \text{ cm}^3$       d)  $M = 282 \text{ cm}^2$ ;  $V = 424 \text{ cm}^3$
- ۱۴ - توته څومره ډکى لري، که يو د a اړخ اوږدوالى مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندي يا پاسهواره يې څومره دي؟
- ۱۵ - د يوې توتى جگى h او وړانگه r ځانونه ( $h : r = 3 : 2$ ) نيسى. ډکى يې  $2000 \text{ cm}^3$  دى. h, r او M يې وټاکى.
- ۱۸ - يو ولاړدوله توته يزه گل کوتى د  $h = 17 \text{ cm}$  جگي سره د سره د سرپوښ او بينس ايليپسى د دواړو نيممهورنو  $a = 30 \text{ cm}$  او  $b = 20 \text{ cm}$  سره لري. د دې ډکى څومره دى؟

## اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو گروپونو پورې اړه لري - اهرام یواځي هواره راگرځید هواره لري، مخروط مگر راتاو یا کپره هواره. - بیا هم زیات گډونوالی لري، نو له دې امله یی په گډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



څیره ۲۴۹

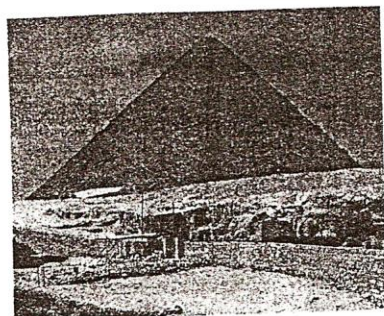


څیره ۲۵۰

---

### پیلبلگه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبس اهرام ( Cheops pyramide ) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه



خیره ۲۵۱

د تیگو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل  
او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوری  
په پوری باید اینسولی وی. دا د  
خیویس اهرام خومره ډکی (حجم)  
لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰  
متره مربع ولري او جگوالی یی ۱۴۷  
متره وي. د هغه لیدور دباندي هواره  
خومره ده ؟

د خیویس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانگړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره  
د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه  
وي کاره یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي،  
که د ډیرگودي گودونه له ډیرگودي دباندي ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او  
سرتیرې نخلونلین ته اړخکانتی ( لنډ : اړخ ) وایي . لکه چی د جالبسونه یی

بنایي، نو دباندي هواره یی له لاندې  
اړخ او د اړخیزو دريگودي د یوخیوالي  
څخه لاس ته راځي، چی وروستی یی  
پوښ هم بللي شو یا بولو.

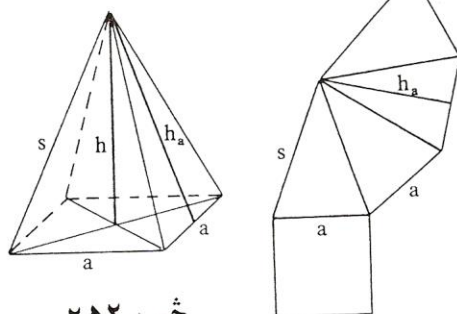
که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د  
خیویس اهرام په مربع شکلي

پوریزتجزه شوی وي، په فکر کی

راولو چی د پوری جگوالی یی  $h/n$

وي. د وړانگي جملی د خورا پورته

پوری د هوارې لپاره لاس ته راځي:



خیره ۲۵۲

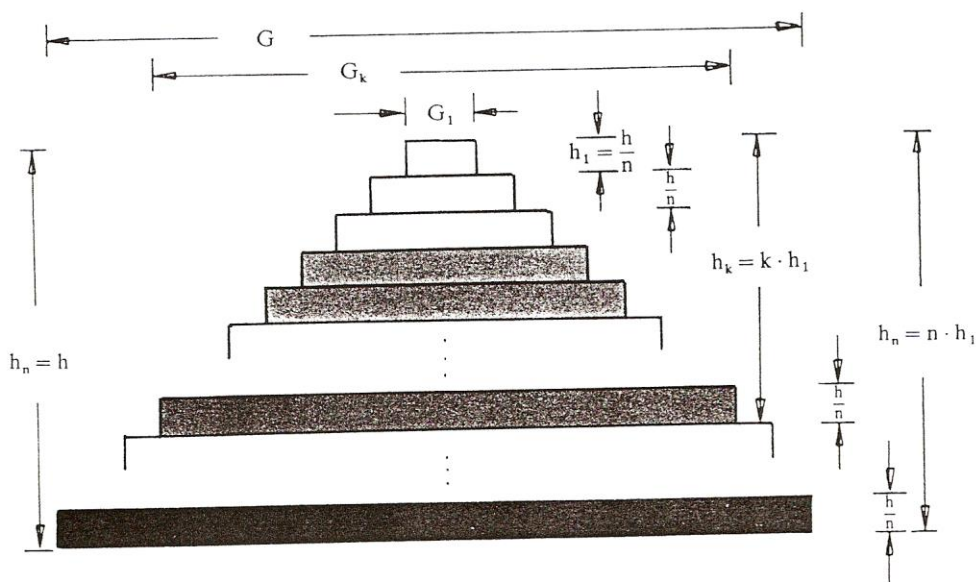


$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G : (h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G \cdot (k/n)^2, G_n = G$$



څیره ۲۵۳

په دې ډول د  $k$ -ام زینې پورې ډکې (حجم) دی

$$V_k = G_k \cdot h / n = Gh \cdot k^2 / n^3$$

د ټولو پورېو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پورې}} = Gh \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) : n^3$$

$$= Gh \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) : n^3$$

$$= Gh \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو ( دا په دې کتاب کی نه څیرل کیږي. ددې موضوع لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي )

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1) : 6 = (2n^3+3n^2+n) / 6$$

که د پورېو شمیر  $n$  نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې گڼونپوهی اکریوالنت دا دی. چی  $n$  هرڅومره لوي شي او  $n$  په ماتلاندي کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل ( لرې ) کیدی شي. په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$$V = G.h / 3$$

دا د څیوبس اهرام باندې استعمالوو :  
د اړخونو هوارو جگوالی له نیمی لاندې اړخ او جگوالی د پیوتاگواراس د جملی له

$$h_a = 115^2 + 147^2 = 186,64m \text{ لاری شمیرل کیږي:}$$

$$M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2 \text{ په دې ډول یی پوښ دی.}$$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

$$V = 230^2 .147 = 7776300m^3 \text{ ډکی یی دی:}$$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

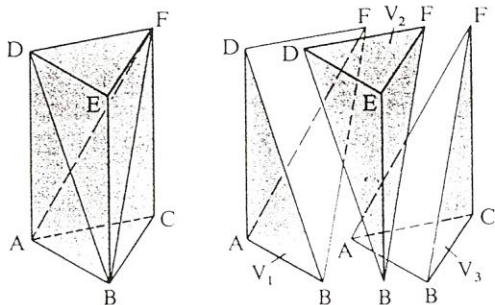
$$M = \text{د اړخونو د ټولو دریکو ډیو زیاتون}$$

$$O = M + \text{بنسټهواره}$$

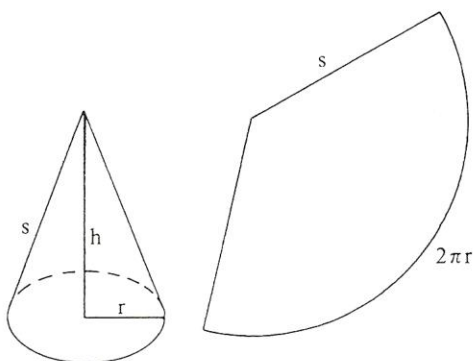
$$V = \text{بنسټهواره} / 3 \text{ جگوالی}$$

۲۱۴

بدنکچ

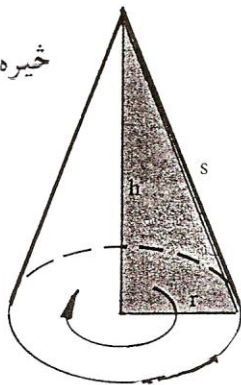


څیره ۲۵۴



څیره ۲۵۵

څیره ۲۵۶



دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوريو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه گردی ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځتکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې گورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندي هم استعمالیدی شي، که د پوريو په ځاي دلته ورې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په څیره  $\checkmark$  کي د پوښ خورونه یا پوښ جال بنایي چی پوښ د گردی ټوټه ده، چی وړانگه یی د بنسټگردی وړانگه ده او لینده یی د گردی چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:

$$F_s = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2 \pi r.s / 2 = s. \pi .r$$

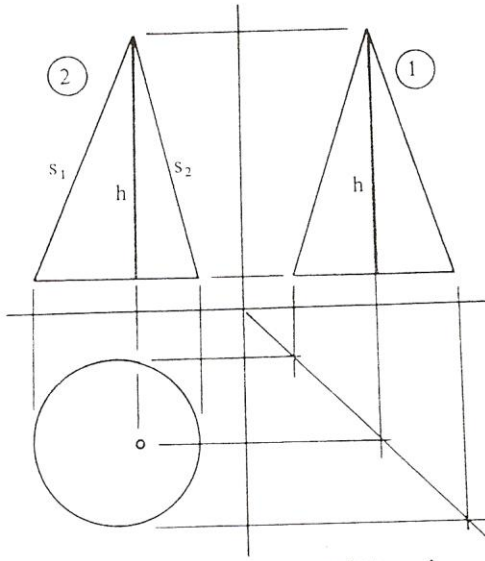
جمله : د گردې مخروط پوښ، د باندي  
هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s \cdot \pi r = \pi \cdot r^2 \cdot 360^\circ / \alpha$$

$$\alpha = 360^\circ \cdot r / s \quad \text{د سره}$$

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 \cdot h / 3$$



په پام کې دې وي چې ولاړ مخروط د  
څرخون په څیر هم په خیال کې راوړل  
کیدای شي: چې په کانتی یا یوه اړخ  
د یوه ولاړ دریګوډي څرخون څخه لاس  
ته راځي.

بیلګه : د ولاړ گردیمخروط ډکې  
وشمیری چې د بنسټهوارې وړانګه  
یې ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا  
زیات یا عظمي اوردوالی یې ۱۵  
سانتي، او مینیمال پوښ اوردوالی  
یې ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون  
دریګوډي فرمول سره سپری د

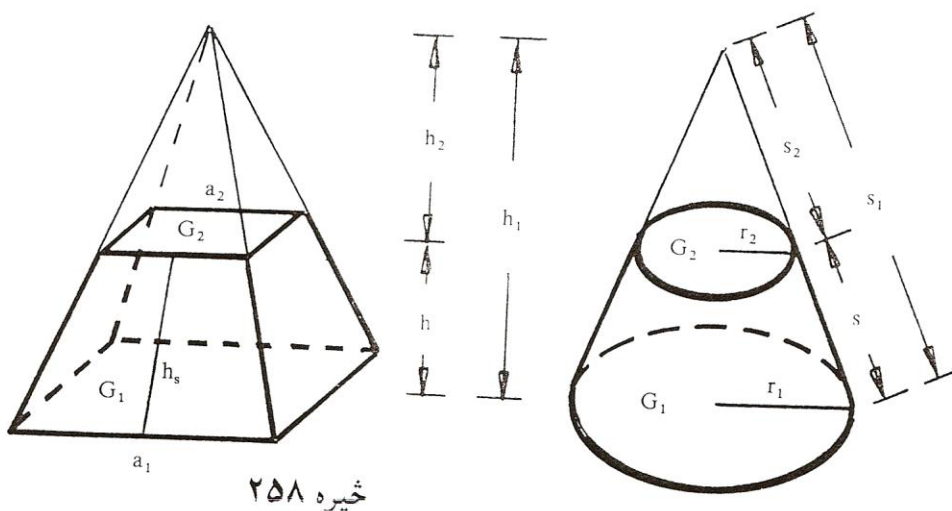
غوڅهوارې په متن یې اخر ته رسوي. ( ۲ )»

$$F = \sqrt{19(19-12)(19-15)(19-11)}$$

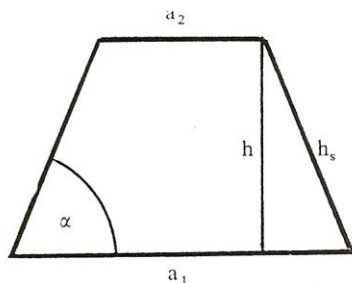
- $F = 65,238 \text{ cm}^2$
- $F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87 \text{ cm}$
- $\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 \text{ cm}^3$

### پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

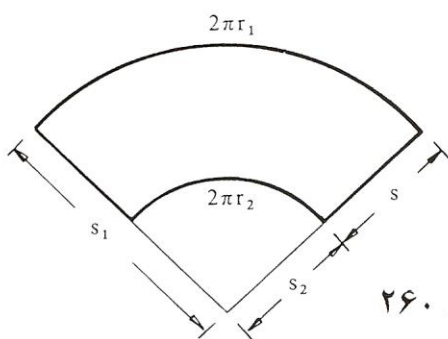
که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي  $h$  بنسټهوارې ته غبرگ پری کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي (راپیدا کيږي) یا منځ ته راځي. د پخ اهرام پوښهواره د یوه تریخ څخه عبارت دی. چی د دوه دريگوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.



## سرلیک



خیره ۲۵۹



خیره ۲۶۰

د پخ د سر و پخ چال  
خیره د زده

د دوي اوږدوالی د پیتو تاگوراس له  
جملی او یا د میلانکونج په  
خخه ټاکل وړ دي.

$$h_s = h / \sin \alpha$$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو  
له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز  
فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره  
یو منظم n-گودی وي، نو لرو :

$$M = (U + u) \cdot h / 2$$

د U بنسټهوارې چاپیرونکی، د u  
سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.  
په همدې ډول د سم مخروط د دوه  
گردبیرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1 \cdot 2\pi r_1 / 2) - (s_2 \cdot 2\pi r_2 / 2)$$

$$= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

د وړانګې جملی په مرسته لاندې اړیکې  
پیدا کیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \Leftrightarrow s_2 r_1 = s_1 r_2$$

$$\Rightarrow M = \pi (s_1 r_1 - s_2 r_1 + s_2 r_2 - s_2 r_2)$$

$$= \pi [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$

$$= \pi s(r+r)$$

$$د s = s_1 - s_2 له امله$$

ددې لپاره چې دباندي هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ - او سرپټهواره یا  
سرپوښهواره ور زیات کړو.

د پڅو کې د اولني اهرام او يا مخروط او د پريشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بيرته اهرام او يا مخروط شکلونه لري. (خیره  $\sqrt{\quad}$  وگورئ)

$$V = G_1 \cdot h_1 / 3 - G_2 \cdot h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2 h_2] / 3$$

دا چې په  $n$ -گوډي کې د اړخ اوږدوالی همداسی د گردیشمیرنه کی وړانگه مربعي ډوله کارول کيږي، د وړانگي له جملی د بنسټهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{h+h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}} \\ \Leftrightarrow (h+h_2) \cdot \sqrt{G_2} &= h_2 \cdot \sqrt{G_1} \\ \Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} &= h_2\sqrt{G_1} \\ \Leftrightarrow h\sqrt{G_2} &= h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}) \\ \Leftrightarrow h_2 &= -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \end{aligned}$$

که د  $h_2$  لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کینول شي، نو د ترڅنگ بیا یواځي هوارې  $G_1, G_2$  او  $G_3$  راپیدا کيږي.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[ G_1 \left( h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right) + G_2 \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[ G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[ \frac{G_1 h \sqrt{G_2} - G_1 h \sqrt{G_1} - G_1 h \sqrt{G_2} + G_2 h \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \\ \Leftrightarrow V &= \frac{h}{3} \left[ \frac{G_2 \sqrt{G_2} - G_1 \sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \end{aligned}$$



سرلیک

که اخري اړیکې د  $\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}$  سره پراخه شي (د بېنوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3} \left[ \frac{(G_2 \sqrt{G_2} - G_1 \sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1} \right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3} \left[ \frac{G_2^2 - G_1 \sqrt{G_1 G_2} + G_2 \sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1} \right]$$

د ماتباندي ترم څخه  $G_2 - G_1$  د

$$G_2^2 - G_1 \sqrt{G_1 G_2} + G_2 \sqrt{G_1 G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$$

له امله نوکېنډ شي او بالاخره د لنډونې څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) h / 3$$

د اهرام، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پځمخروط کېدې شي د گردیهوارې فرمول  $G_1 = \pi r_1^2$  او  $G_2 = \pi r_2^2$  وکارول شي

جمله: د پځ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکي:

د ټول تراپځ هوارو زیاتون  $M =$

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) h / 3$$

د پځمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکي:

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \pi h / 3$$

### پیلبلگه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه مټه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۵، ۱ متره جگ وي، او یوه کتله دې ولري چې ۱۰ ټنه وي (د برنس دینتې یا کلکوالی) په پوښتنه کې یو گرد (پشمخروط) یا یو مربعشکلې (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې، په اندازه ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي؟ د دواړو مټو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149 \text{ m}^3$$

دا چې جگوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یو مربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 \cdot 1} + 1))$$

$$\Leftrightarrow 1,299 - G_1 = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow G_1^2 - 3,598 G + 1,687 = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 / 2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1,799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow G_1 = 3,044 \text{ m}^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549 \text{ m}^2$$

## سرلیک

( دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی )  
 له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمې په پڅمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پڅ اهرام کې:

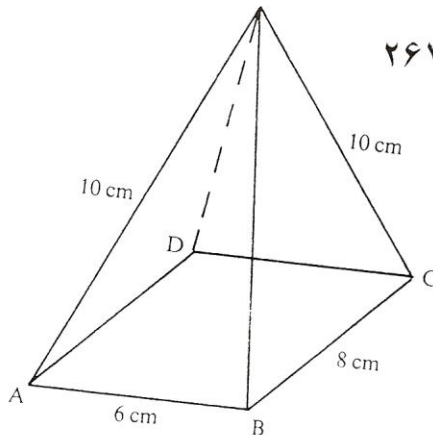
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1\text{m}; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42\text{ cm} \\ \Rightarrow d_2 = 112,84\text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745\text{ m}; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42\text{ cm} \\ \Rightarrow d_1 = 196,85\text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملې د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2} / 4 = 1,546 \Rightarrow M = 8,488\text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \Rightarrow M = 7,575\text{ m}^2$$



څیره ۲۶۱

تمرینونه

۱- د یوه مربع اهرام پاسهواره او

ډکې وشمیری، که وي:

الف)  $a = 7\text{ cm}; \quad h = 14\text{ cm}$

ب)  $s = 15\text{ cm}; \quad a = 10\text{ cm}$

پ)  $V = 80\text{ cm}^3; \quad h = 10\text{ cm}$

ت)  $h_a = 13\text{ cm}; \quad h = 10\text{ cm}$

ت)  $h = 12 \text{ cm} ; s = 18 \text{ cm}$

ث)  $h_a = 12 \text{ cm} ; M = 400 \text{ cm}^2$

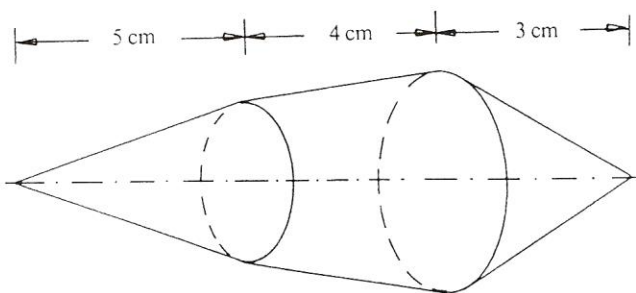
۲- د خیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. ( لمړی تړونکرنه له ټګي A خخه د جگوالی پنبیکپګي ته وشمیری )

۳- په کوم جگوالی دې مربع اهرام بنسټهوارې ته غبرګ غوڅ شي چی ډکی یی نیم شي؟

۴- یو ولاړ اهرام د بنسټیز منظم شپږکونجی سره بنسټ لاندې هوارې اړخ یا

کانتی  $a = 4 \text{ cm}$  لري او خوا اړخ اوردوالی یی  $s = 12 \text{ cm}$  دی. V

او O وشمیری؟



۵- د خیره شوي

بدن ډکي

وشمیری.

خیره ۲۶۲



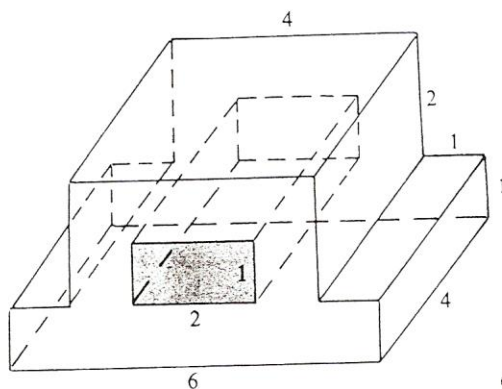
یادونه:  $\emptyset$  د نیمی یا قطر په مانا دی، چې د عرض یا نیمه ګرد لوی سنا

۶- د یوه ګرد ګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی. یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوردوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیک د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمی ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج خخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جگوالی یی ۸۰، ۱ متره دی.

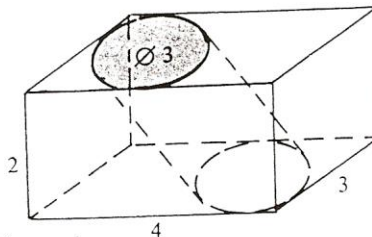
سرلیک

۷- د یوه برج اهرامډوله سرپوښن چی بنسټ یی مربع او اړخ اوږدوالی یی  $a = 12 \text{ cm}$  دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یی ۱۴ متره ده د سرپوښن هواه یی څومره ده؟ دا چټ به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښنول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

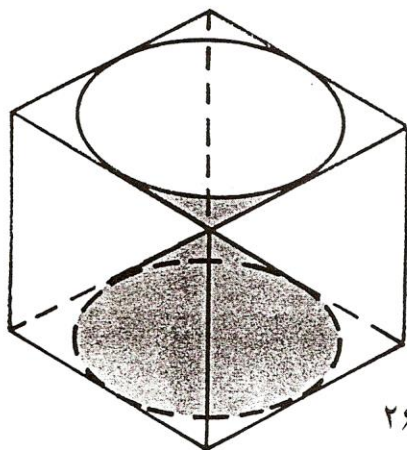
۸- د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری (ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

۹- د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

۱- په مختلف کارټوټو کی مخروط

ډوله خالیگاوې برمه کیري:

الف) په یوه مکعب چی اړخ

اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی

یی  $a = 60 \text{ cm}$  دی، یو مخروط

د جگوالی  $h = d = a$  سره

ب) په یوه مکعب کی

د  $a = 60 \text{ cm}$  یو سیومتری

دیابولو ( لاتین: Diavolo = شیطان )

پ ( په دوه سمو گردیاستوانو د  $h = 2r = 60 \text{ cm}$  هم یو مخروط او یو دیابولو، دا مورد د شگو ساعت په خیر پیژنو . د تشخای ډکي او په

همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکي هم وشمیری.

۱۱ - یو مربع اهرام (  $h = 2a = 10 \text{ cm}$  ) بنسټهوارې ته غبرگ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته  $0,25h$  ;  $0,5h$  ;  $0,75h$  وي.

د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ - ددې لپاره چی یو گردیدوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه گردی باندې را غبرگوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ - یو مخروط ډوله کچگیلاس دې ټیک ۱ لیتر ځای کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جگ دی. د هغه نیمی ( یا نیمی گردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ - ۵ مکعب متره شگه یوې ټوبی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جگی او نیمی یې څومره لوي دي؟

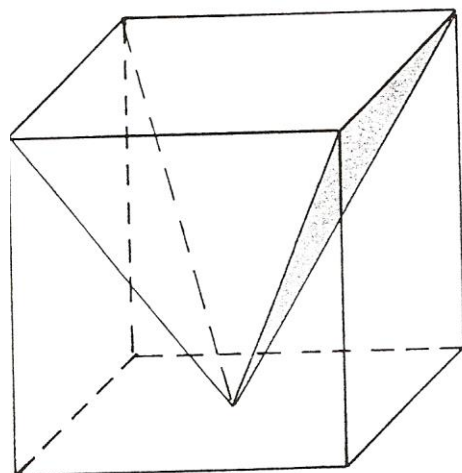
۱۵ - یو مخروط ډوله د اوبو گیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډک شي. دا اوبه په گیلاس کی څومره جگی ولاړې دي؟

۱۶ - یو کافيواله یوه مخروط ډوله د شربت گیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جگه ده. دی دا گیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توگه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ - په څیره  $۲۶۶$  کی ورکړ شوی اهرام ډکي وشمیری

۱۸ - په یوه چت باندې یو د وینو چتپټوونی، چي  $۵$  ،  $۴$  متره جگ دی ایښوول کیږي، چی اړخ اوردوالی یی  $a = 12,5 \text{ m}$  متره او  $b = 9 \text{ m}$  متره دي. د

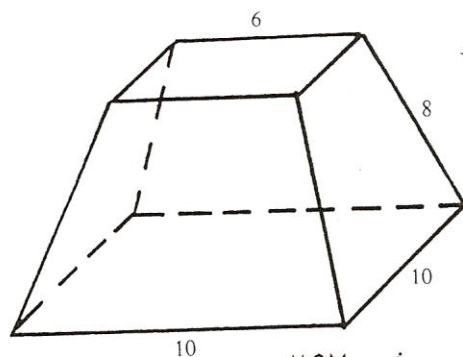




خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷  
متره اوږد دی. د چتپټوونې ډکې  
وشمیری او همداسی د چتپټې  
سرهواره هم وشمیری.

۱۹- د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره  
خومره خاوره باید راوویستل شي،  
که پوره ژي یا غاړه یی ۱۰ متره د  
غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج  
یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ  
سره د کنلوی په لور جوړوي- یی ۶۰  
درجی وي؟



خیره ۲۶۷

۲۰- د یوه هوا ډکې خومره مائیلوالی لري،  
که د یوه ونی ستی هوا ډکې شمیرلو

لپاره چی مخروط ډوله دی د موتي  
قاعدې وکارول شي، د لاندې سره

$$V^* = \pi h [(r_1 + r_2) / 2]^2$$

د  $r_1 = 10$  cm سره

او  $r_2 = 5$  cm مسره؟

۲۱- خومره مسو ټوټه په کار ده،

چی خیره شوي مسخولی جوړه

س کړای شو ( وکړنی په څیس متر؟ د ډیسی ماتي

( خیره ۲۶۷ )

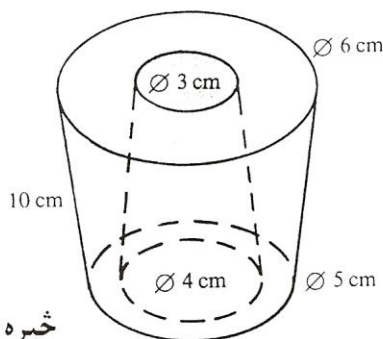


۲۲ - جوړ شوي کارپوتی حومره درنی دي (اندازه په سانتي متره)  
 ۲۳ - د لاندې پڅمخروطونو  $M, O$  او  $V$  وشمیری

پنج کیکل مخروط

Kegelstümpfe:

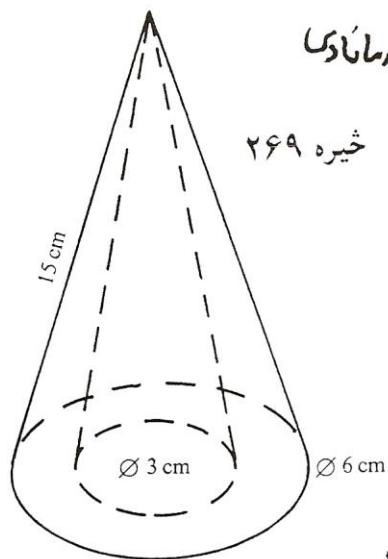
- a)  $r_1 = 12 \text{ cm}; r_2 = 10 \text{ cm};$   
 $h = 8 \text{ cm}$
- b)  $r_1 = 9 \text{ cm}; r_2 = 7 \text{ cm};$   
 $s = 6 \text{ cm}$
- c)  $r_1 = 5 \text{ cm}; h = 7 \text{ cm};$   
 $s = 8 \text{ cm}$



خیره ۲۶۸

د اوسپنې کار لوله Eisenwerkstück  $\rho = 6,5 \text{ g/cm}^3$

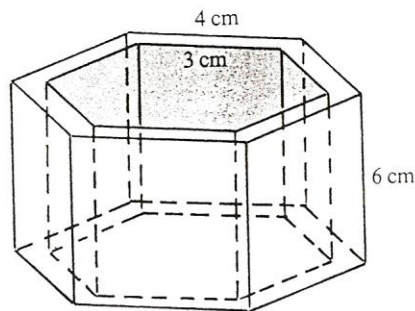
مو په دې ځایونو هم د کلي پرماناډی  
 با غلطت



خیره ۲۶۹

Kunststoffmodell  $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$

پلاستیک مودل



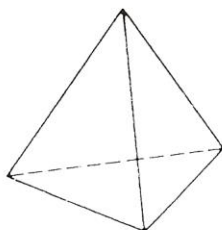
خیره ۲۷۰

Messingsechskantrohr  $\rho = 8,3 \text{ g/cm}^3$

د مسنگ ششپوړ اړخیزه لوله

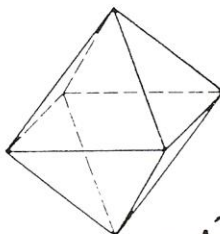
### منظم ډیرهواریز

ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندھواري لري يا له ټوارو رابند وي ، پولوئیدر ( یونانی : ډیرهواریز ) نومیري . مور به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو . د دوي ترمنځ ټيک پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه . دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانگړې توگه په زړه پورې دي ، ځکه چی پاس هوارې او ډکي یې بند دي ، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاي انځوریدلی شي ، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا خیرې لري .



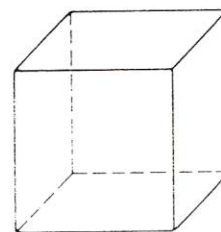
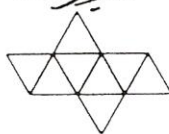
Tetraeder

ټلور هواریز



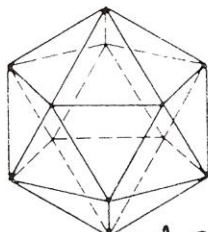
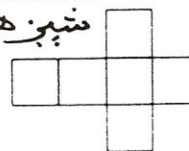
Oktaeder

اټه هواریز



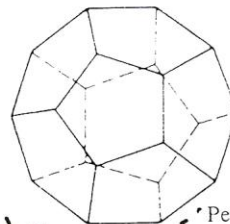
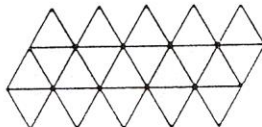
Hexaeder

شپږ هواریز



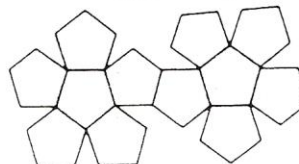
Ikosaeder

دشلهواریز



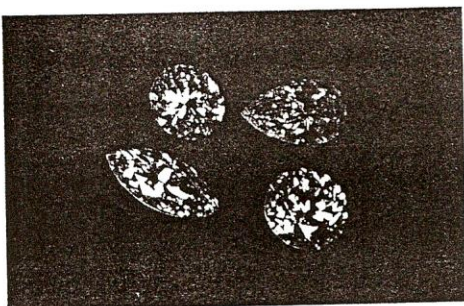
Pentagondodekaeder

پنځه کي ډی دولسهواریز

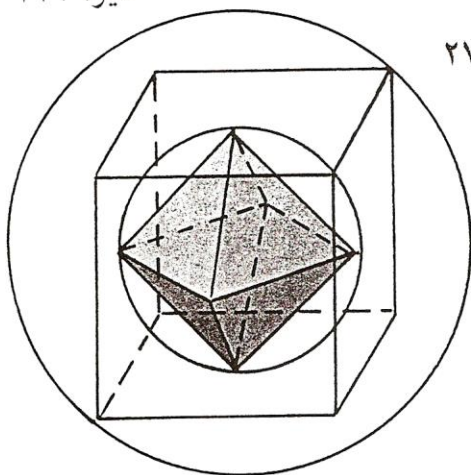


خیره ۲۷۱

دا پنځه منظم بدنونه د هوارو بڼه هواريز ابو کهگ هوار بنديز دي : تيترايډر ( څلور هواريز Tetraeder ) ، هيکسائيډر Hexaeder ( شپږ هواريز ، مکعب ) او کتائيډر Oktaeder ( اته هواريز ) دودیکائيډر ( دولس هواريز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاگون دودیکائيډر Pentagondodekaeder پنځه گوډي دولسهواريزه بلل کيږي ) ، او په همدې توگه ايکوزائيډر Ikosaeder ( شلهواريز ) څيري په تير مخ کې .



څيره ۲۷۲



Würfel und Oktaeder mit In- bzw.

Umkugeln

مکعب او اته هواريز د په گي  
کبي او په را کي غونډيزو  
سره

### بيلگي

د مالگي تيگي مکعب جوړوي ،  
کوپرسولفيد مينرال Fahlerz  
تيترايډر ، د گوگرو کريستال  
دودیکائيډر او الون ( کاليوم  
الومينيوم سولفات ) او کتائيډر  
جوړوي .

څيره ۲۷۳

منظم ډير هواريز پلاتوني ( اډلاطوني )  
( خيالي platonische ) بدنونه هم  
ياديږي ، ځکه چې يوناني فيلوسوف  
او شميرنپوه ( ۴۲۷ تر ۳۴۷ د م .  
پخوا ) په دې نظر وو ، چې څلور  
پخواني عناصر اور ، خاوره ، اوبه ،  
او هوا په خپل واپه فورم تيترايډر ،  
ايکوزائيډر ، او کتائيډر او

هيکسائيډر په گوته کوي . د هغه په  
فکر جهان پخپله يو دودیکائيډر فورم  
لروده . په دې پنځو هر يوه بدن کي کيډي

## سرلیک

شي يوه گردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کی دننه شي يا په بل عبارت دننه راگير شي، نو په دې توگه شپږ دننه - او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي، کومو چی کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانیت به په داسی لاره گرځي، چی د هغوي نیممحورونه د داسی دننه - او دباندې ونډي وړانگو سره برابر شي.

لاندي جدول د دې منظم پولونیدر ډيرهواريزو معلومو لویو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	$\alpha$	r	$\rho$	O	v
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	$a^3$
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لري .  $a =$  د کانتې يا اړخ اوږدوالی ،  $e =$  د گودونو گڼې (تعداد)  $f =$  د هوارو گڼې .  $k =$  بدن اړخونو گڼې ،  $l =$  د هوارو اړخونو گڼې ،  $m =$  په هرکونج کی د کانتو يا اړخونو گڼې ،  $\alpha =$  د گاونډيو هوارو ترمنځ کونج ،  $r =$  چاپيرگري وړانگه ،  $\rho =$  د دننه گري وړانگه ،  $O =$  پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ،  $V =$  ډکي.

پنځه یون ډيرهواريزو ( Einheitspolyeder ) لاندي (  $a = 1$  ) ارزښتونه لري:

Polyeder	r	e	O	v
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوښه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګڼون e، اړخګڼون k او هوارګڼون f لپاره:

$$e + f - k = 2$$

د اویلر ډیرهګوډي یا پولوئید جمله :

په هر صورت دا جمله یواځې د کونوکس یا <sup>دنتلو</sup> نئوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه، چې په کومو کې ټول نیمې د بدن په دننه کې ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګې:

$$8 + 6 - 12 = 2 \quad \text{کوادری:}$$

$$6 + 8 - 12 = 2 \quad \text{اوکتائید:}$$

$$20 + 12 - 30 = 2 \quad \text{دودیکائید}$$

غونډاری یا غونډوسکه (کره) او غونډاري برخي

ولې غونډاری یا غونډوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوتبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کره قدم به ترې واخلي.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټيک نومونه نه ده.)



## سرلیک

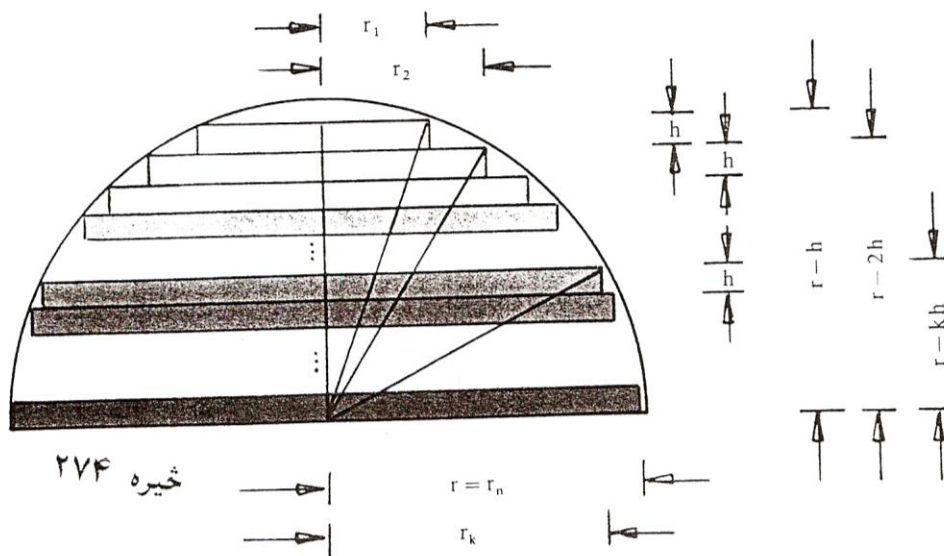
د هندسي يا ځمکچپو هني له مخي غونډاری يا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولگه ده يا د هغو ټکو ځای دی، چي له يوه په

کلکه يا کره ټاکلی ټکی M څخه چي د غونډ منځټکی بلل کيږي همغه واټن  $r$  ولري.

غونډی نه يواځی د جگدرجئيز يا لوړ سيومتري (هره نيمی په همغه وخت کی سيومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ يو ځانگړي رول لري، بلکه هغه مور انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چي ځمکه (نزدې) يو غونډی شکل لري. د بيلگي په توگه په کارتوگرافي کی ځمکه اوږدگريډيو (ميريدیانی Meridiane) باندې ويشل کيږي. په ميريدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانگی R ته بيا يوه لينده په گوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بيا غونډی (گردی استوانی ته ورته) په کوچنيو ستن ډوله چيتروگانو (کردې ټوټی، چي مور ورته په هسکه مينه کی چيترو وايو. د مات منگی څخه گردې څيرې جوړيږي، ټوټه ده) ټوټه کيږي، چي جگوالی يی  $h = r/n$  دی. د يوگونو چيتروگانو وړانگو لپاره باور لري يا صدق کوي (د پيتاگوراس جمله):

$$r_1^2 = r^2 - (r - h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$r_2^2 = r^2 - (r - 2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



$$\begin{aligned}
 r_k^2 &= r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h \\
 r_k^2 &= r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh) \\
 r_k^2 &= 2rkh - k^2 h^2 \\
 r_k^2 &= \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2 \\
 r_k^2 &= r^2 \left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3 \left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)
 \end{aligned}$$

لړۍ

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \frac{2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) - \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \frac{2}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \left( 1 + \frac{2}{n} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right]$$

که د «ستنگیو» گڼون تلم پورته لار شي، نو په نوکانو کې لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډی

$$V = (2/3) \pi r^3 \Rightarrow V_{غونډی} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

د غونډی د پاس هواری د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د گوډ یا کونج ټکي د منځتکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د  $r$  جگوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډی ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توگه بسیا کوي، که چیرې څوک په پام کې ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنشاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډی پاس هواری سره برابر وي. له دې امله باور لري



غونډې  $V =$  د اهرامونو ډکيو زياتون  $= (1/3) \cdot r$  .

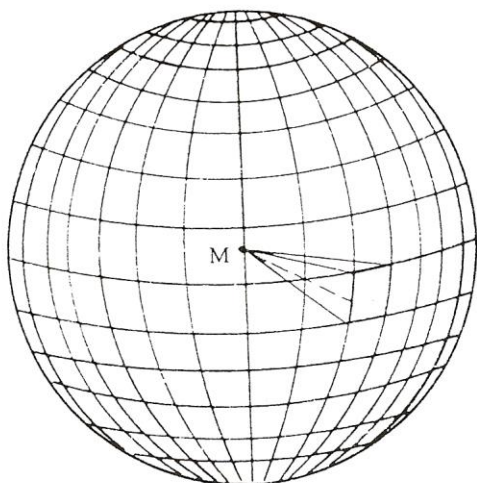
د غونډې پاس يا ټوله هواره

$$O = (4/3) \pi r^3 = \text{د غونډې } O$$

$$O = 4\pi r^2 = \text{د غونډې } O$$

په ټوليزه يا عمومي توگه باور لري

$$O = 4\pi r^2 , V = (4/3) r^3$$



څيره ۲۷۵

پيليلگه:

منځنی ځمکورانگه ۶۳۷۰ کيلو متره

ده . د ځمگي پاسهواره او ډکي څومره

دي؟ ځمکه څومره کتله لري، که د

ځمگي منځنی سختوالي  $5,514 \text{ g/cm}^3$

د مخه ونيول شي يا فرض شي؟

$$O = 5,10 \cdot 10^8 \text{ km}^2 ,$$

$$V = 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 ;$$

$$m = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

د خاليغونډې ډکي همداسی لاس ته راځي لکه د يوې خالي استواني ډکي ( د مخه

لوستل شوی دی) د دوه يو په بل کی پرتو کونځينتري غونډيو توپير يا کمون:

$$V_{\text{خاليغونډې}} = (4/3) \pi (r_1^3 - r_2^3) .$$

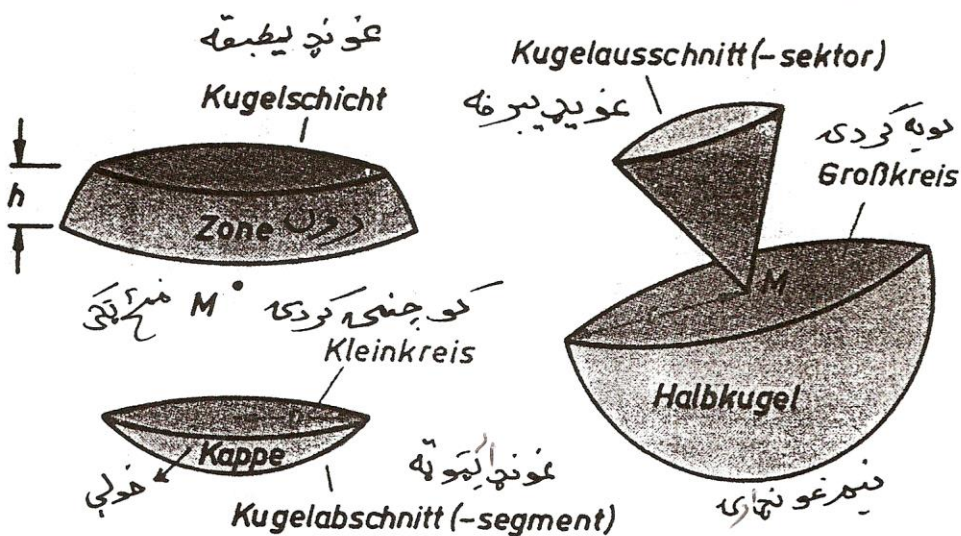
پيليلگه:

د اوسپنی خاليغونډی کومه کتله لري ، که د باندنيمی يي ۱۲ سانتيمتره او

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیتیره ( دینستی یا سختوالی یا ټینګوالی ) وي؟

$$V = (4/3)\pi(6^3 - 5.2^3) = 315.8 \text{ cm}^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463.25 \text{ g}$$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لاندې:



څیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډی له منځتکي تیر شي، نو دوه نیمغونډی او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځتکي تیر نه شي، نو دوه غونډی ټوټې منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډی طبقه منځ ته راځي. که له غونډی یو مخروت ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډی بیرخه منځ ته راځي.

پرتله کړی) د دواړو خولیدو د یو بل سره مساوي کینډولو له لارې لرو:

$$s_1^2 h_2 - s_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لارښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3s_1^2 + 3s_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د گردیتوتی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r-h)}{3} + \frac{\pi s^2 (r-h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکي (\*) کارول کيږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي  $s^2 = h(2r-h)$ . په دې توگه د  $s^2$  لپاره ځای په ځای کوي او له دې لاس

$$V = \frac{\pi h^2 (3r-h)}{3} + \frac{\pi h(2r-h)(r-h)}{3} \quad \text{ته راځي:}$$

$$\Leftrightarrow V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له  $r$  د (\*) په مرسته  $r$  ځای په ځای نشی نو لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3} \pi h \left( \frac{s^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (s^2 + h^2)^2$$

د غونډیبتوتی پوښهواره M، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کيږي، په همغه فکر شمیرل کيږي لکه د غونډی پاس یا ټوله هواره. که د غونډیبرخي د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. ( کړی شو چی غونډیخولی په ځای کپره ولیکو) نو لرو:

$$Mr / 3 = 2 \pi r^2 h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2 \pi r h$$

که د (\*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi \cdot (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهورې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټګردی هواره وړ زیاته شي. د غونډېطبقي پوښهورې ته د غونډیزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یی داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردی هوارې وززیات شي. د غونډیتپوښ پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډیکپرې هواربته د مخروطپوښ وززیات شي.

د غونډاري برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h = \pi(\varrho^2 + h^2) \quad (\text{Kugelkappe})$ $O = 2\pi r h + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$	د غونډاري ټوټه غونډاري خولی
$V = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h \quad (\text{Kugelzone})$ $O = \pi(2r h + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$	غونډاري ټیکلی غونډاري زون
$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{6h} (\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r (2h + \varrho)$	غونډاري برخه

بیلګه:

۱ - د پنیرخرخ د یوه غونډېطبقي فورم یا بنه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیری، که وي :  $\varrho_1 = \varrho_2 = 25 \text{ cm}$  او  $h = 20 \text{ cm}$ .

سرلیک

$$V = (20 \pi / 6) (3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^3$$

$$= 34,458 \text{ dm}^3$$

ورانگه  $r$  د پیتاگوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h/2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نولرو

$$O = \pi (2 \cdot 26,93 \cdot 20 + 2 \cdot 25^2) = 7310,59 \text{ cm}^2 = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲ - یو دلویی لاطو یا لویی خرخی د غونډیتوټی بڼه لري د ټولجگوالی  $r = 16 \text{ cm}$

او سور  $b = 2 \rho = 10 \text{ cm}$  سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جگوالی د پیتاگوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = -2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اویو یا حلونو  $h_1 = 31,2 \text{ cm}$  او  $h_2 = 0,8 \text{ cm}$  سره.

داچی  $h < r$  ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا گټور وي. له دې امله

لاس ته رځي

$$V = 2 \pi \cdot 16^2 \cdot 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$

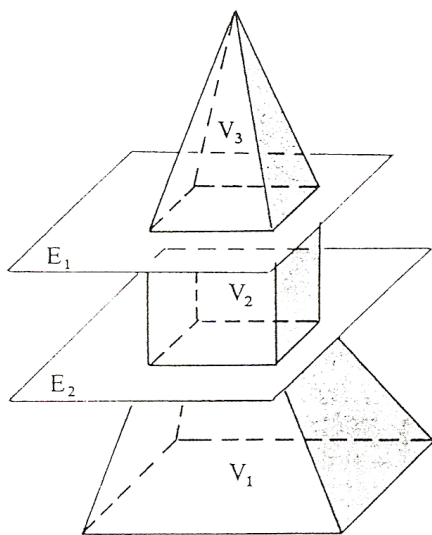
$$O = 16 \pi (2 \cdot 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنگه موچی زیات تر پام تیر شو، گټور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په گټوره توگه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.



په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چي ض معلومو فرمولونو له لارې شميرل کيدی شي.



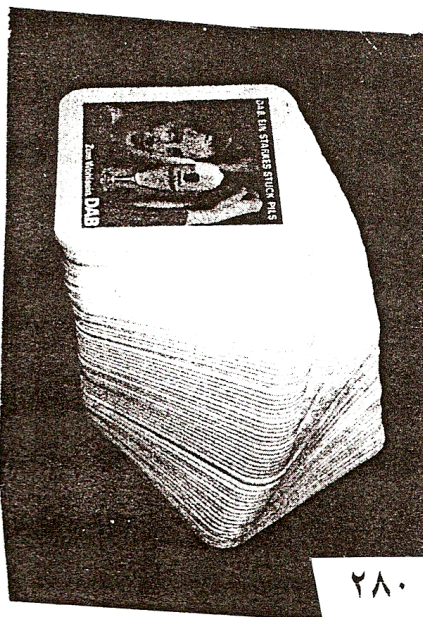
$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

څیره ۲۷۹

بیلگي :

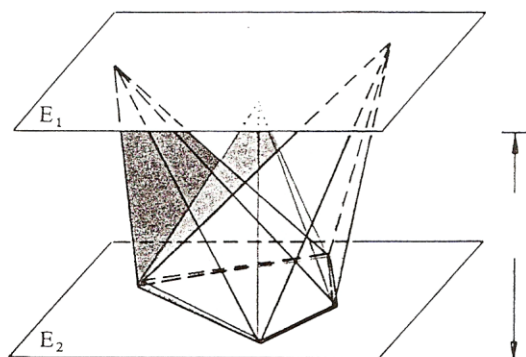
ددې څیره شوي بدن ډکی له یوه پخ اهرام، کواډر یا غبرگارڅیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي. دا جوتیري، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو  $E_1$  او  $E_2$  ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدي شي چي زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي ( مخروط، اهرامونه ) د گیلایس اینسول ټوټی ( داسی ډبل کاغذونه دي چي د پیالیلاندي یا ریکابي یا پشکاب په څیر وي او گیلایسونه پر اینسول کیري ) چي یو په بل اینسول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځای بدلولو له لارې جگوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوری په پام کی نه نیول کیري، ځکه چي په تیوري کی



څیره ۲۸۰

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پندوالی یی په پام کی نه نیول کیږي  
د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنیڅپ دی



جمله :

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي  
لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په  
همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې  
دی کونگرواینڅ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه  
ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جگي او  
برابر بنسټهوارې لري:  $V = (1/2)G.h$   
د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره  
چی د بنسټهوارې سره غبرگه وي،  
په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې  
خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو  
بنکلی میتود رامنځ ته کوي.  
د یوې گردې استوانی یا  
گردیتوتی څخه چی وړانگه  $r$  لري  
او  $2r$  جگ دی دوه د څوکو یا ککړې  
له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه  
غوڅوي ( یو دیابولو ) د  $r = h$  سره.  
داپاتی خالیفورم یوه د شگو ساعت

پوښ راپه گوته کوي. د یوې دویمې همغی سره برابرې گردې استوانی یا گردیتوتی د  
وړانگي  $r$  په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتری له امله بسیا کوي که  
لاندې نیمغونډی او د «شگو» ساعتیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره  
یوه بسټهوارې سره غبرگه هواره راکوي، په غونډی کی گردی په شگوساعتپوښ کی

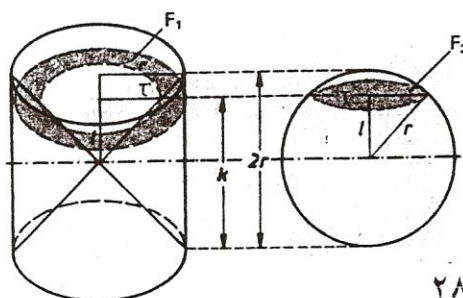


گردیگوته یا گردیکړی. دلته دې  $r'$  د دیابولو څخه منځ ته راغلي گردی وړانگه وي.  $r$  د غونډیغوڅیگردي وړانگه .

د هوارو لپاره چی واټن 1 له همغه بدن منځتکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^2)$$



د وړانگي جملی څخه، برسیره په دې

لاس ته راځي:  $\left( \frac{r'}{r} = 1/r \Rightarrow r' = 1 \right)$  (د شگوساعت)

$$r'/r = 1/r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه گورو چي ډکیمساوی

څیره ۲۸۲

یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی  $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$  دی، ځکه چی  $h = 2r$  دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3) \cdot (h/2) = \pi r^2 \cdot h / 3 = (2/3) \pi r^3$$

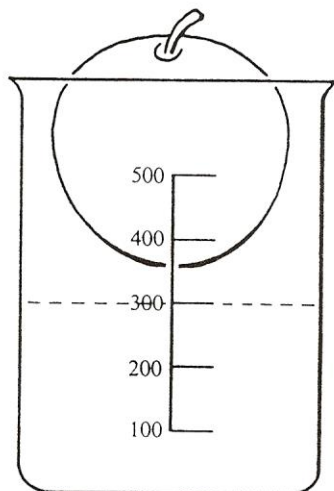
او له دې سره د شگوساعت - او نیمغونډي ډکی :

$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

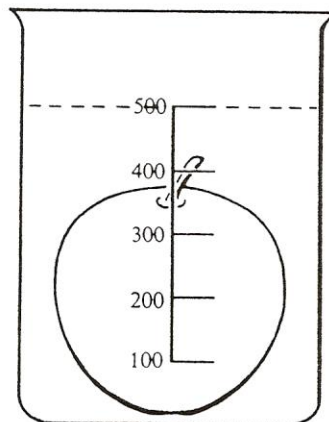
$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیک د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منی یا د یوه

الو ډکي يواځي فزيکي متودونه يا طريقی مرسته کوي چي ډکي يي وشميرل شي. لکه په لاندې څيرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



څیره ۲۸۳



څیره ۲۸۴

### تمرینونه

- ۱ - د هغه بدن ډکي څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي ، که د مکعب په هره هواړه يو ولاړ اهرام کيښول شي د  $s = a$  سره؟
- ۲ - يو تيترايډر څلور هوايز بدن او يو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکي په کوم تناسب يو بل سره پراته دي يا کومه ځانښوونه يو بل سره لري؟
- ۳ - هر منظم پولونيد لپاره يوه دننه غونډی شته . چي د هغه هره هواړه په منځکي کي لمس کوي. ددې وړانگه دی  $r$  وي. د پولونيد ډگي او  $V$  او پاسهوارې  $V = O.r/3$  لپاره دلایل راوړی.

- پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانگه ۲ ولري، په ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.
- ۴- د المان د پارلمان په سر منډه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د ډانگ سره غبرگ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منډه به څومره وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي (  $\rho \sim 19,3 \text{ g/cm}^3$  ;  $l \sim 10 \text{ cm}$  ) اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیري؟
- ۵- یوه غونډی، توته، اهرام ( د هغو بنسټهواره ) برابر وړانگی لري، د اهرام غونډی جگوالی یا جگی داسی وټاکی ، چی الف ( همغه ډکي لري ) د برابره پاسهوارې لري.
- ۶- د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلی متره نیمی لري، له توییږي د یوې گردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا څومره پنډه ده؟
- ۷- د یوې سابونپونکی دیوال به څومره لوي وي، چی دبانډنی نیمی یی سانتی متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلی ه
- ۸- یوه د بنیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتی متره دی. ۲ وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی (  $\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$  )
- ۹- یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
- الف ( دا دننه سمخ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متره وزن ۴۵ گرامه وي؟ ب ) ډکی څومره وزن لري که هایډروجن (  $\rho = 9.10^{-5} \text{ g/cm}^3$  ) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟
- ۱۰- یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راگیر یا خوندي کیري. د م اړخ اوږدوالی 5 cm دی



تف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب ) د دواړو غونډارو ډکي او پاسهواره وشمیری .

۱۱ - د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف ) سپوږمی (  $r = 1735 \text{ km}$  )

ب ) مارس (  $r = 3430 \text{ km}$  )

پ ) وینوس (  $r = 6305 \text{ km}$  )

ت ) جویپتر (  $r = 71800 \text{ km}$  )

۱۲ - د کورکغولې (  $\rho = 0,25 \text{ g/cm}^3$  ) د  $36$  سانتي متره نیمي سره یوه

غونډیدوله د پارې زړی (  $\rho = 11,4 \text{ g/cm}^3$  ) لري. دا د پارېزړی څومره

لوي دي، که غونډی تر نیمایي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ - د یوه لوي سړي سړي  $400$  میلیونه غونډیدوله د سړوپونکی لري، هر یوه د

نیمي  $0,3 \text{ mm}$  سره. د ټولو پونکیو گډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ - یو غونډی، چی وړانگه یی  $r = 10 \text{ cm}$  ده، د یوې هوارې څخه په  $3$

سانتي متره، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې

او ډکي وشمیری.

۱۵ - د پاتی یاد نایادو برخو  $M, V, h$  او  $r$  د لاندې غونډیبرخو لویوالی وشمیری

a)  $r = 6 \text{ cm}$ ;  $h = 5 \text{ cm}$       b)  $M = 50 \text{ cm}^2$ ;  $h = 3 \text{ cm}$

c)  $h = r = 7 \text{ cm}$       d)  $M = 700 \text{ cm}^2$ ;  $r = 10 \text{ cm}$

۱۶ - د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د  $10000$  متره جگوالی څخه لیدل کیدی

شي ( د ځمگی وړانگه  $6370$  کیلومتره ده )

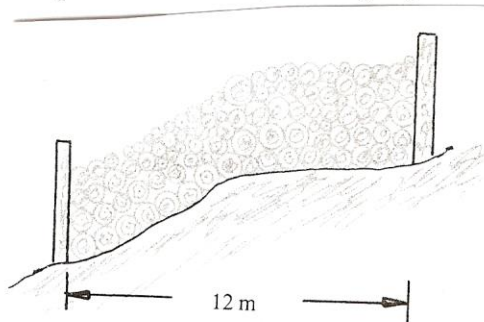
۱۷ - د یوه غونډي نیمي په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي. په ټوټهټکو کی په

نیمي ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم ځانینونه یا تناسب کی

الف ) د پوښهوارې، ب ) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

سره پراته دي؟

۱۸- په يوه غونډي کې، له منځ څخه ليدلو يا کتلو سره ، هوايي (دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا يا د هوا ډکي دي) پرسيدنه، د دريو اړو کواورديناتو څخه برابروي. که دا يو له بل توپير ولري، نو د اليپسوئيد څخه غبرږو، چي اصلي محورونه يي  $a, b$  او  $c$  دي. د ايليپسوئيد ډکي د فرمول  $V = (4/3) a.b.c$  له مخي شميرل کيږي. ځکه په ريښتوني غونډي نه دي، بلکه يو اليپسوئيد، چي اصلي محورونه يي  $a = c = 6378 \text{ km}$  (د اکواتور وړانگه) او  $b = 6357 \text{ km}$  (قطبي وړانگه) لوي دي. (که په کلکه ونيول شي نو د



څيره ۲۸۵

اکواتور وړانگو ترمنځ يو کوچنی توپير شته) د ځمکي ډکي وشميري او د منځ ته تير غونډي او غونډي برخي کي لوستلو سره يي پرتله کړي (

۱۹- په يوه زورندې يا پيچومي باندي ۱ متر اوږد لرگي ډيري شوي، لکه په څيره ۲۸۵ کې چي ليدل کيږي. څومره د هوا متر لرگي دا 1,20 m جگه د لرگو ډيري لري.

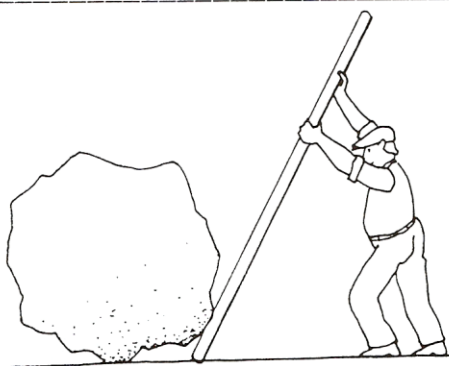
### وکتور شمیرنه

### نڅورونه

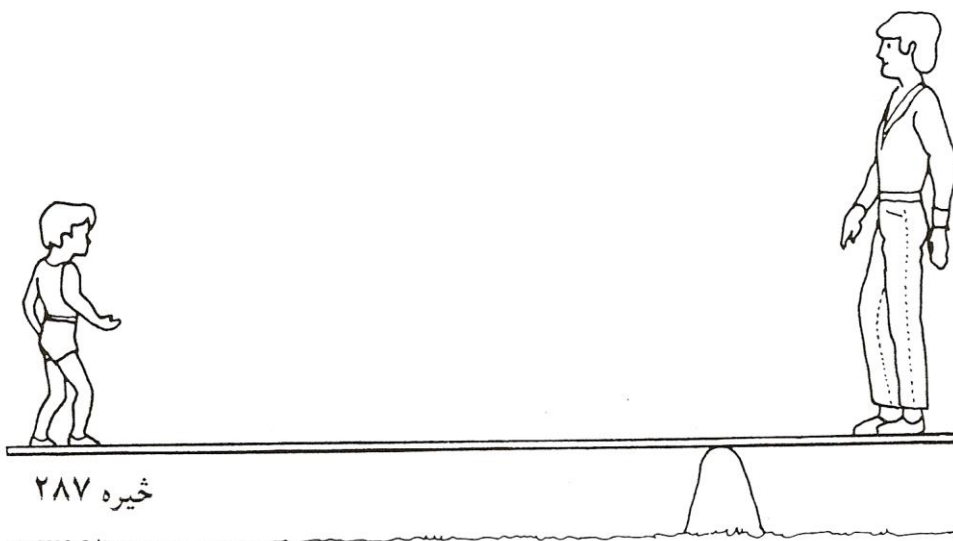
### پیلبلگه

یوه درندې تیگی ته څنگه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مگر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د تیگی لاندې سړی یوه تخته یا اړم نښلوي او یا وړلاندې کوي، د بل سر نه یی لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیگه یو څرخون حرکت باندې راځي.

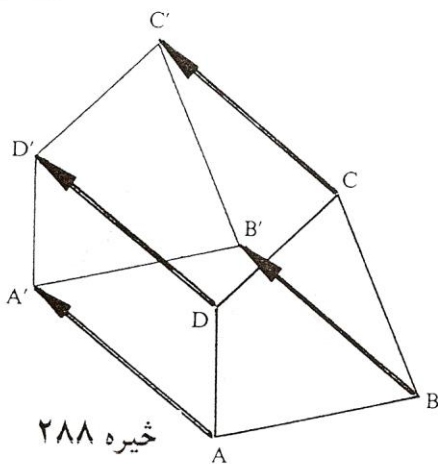
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي « زور د زور اړم = بار د بار اړم ». که تیگه په پوره اندازه اوږده ( او ستابیل ) وي، کیدی چی یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



یا دا حالت د پورته پیلبلگي سره ټیک وښانه څرگند شوی ؟ هیڅ نه پینښیرې، نه څوک په اړم ښکته یا پورته زور ونه کړي بلکه یا راکښ یا ورپورې وهي. هرز باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو و د زور ارزښت سره د زور تاثیر لور هم په نیله لوبه کی وداخل کړو. ددې هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کړي.



**تعریف :** وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. تل د یوه غشي په څیر انځور یږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (گڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځای لور او د غشي څوکه د وکتور لور موخه یا هدف ښایي.



**د وکتورونو لپاره د کارونې ساحې**

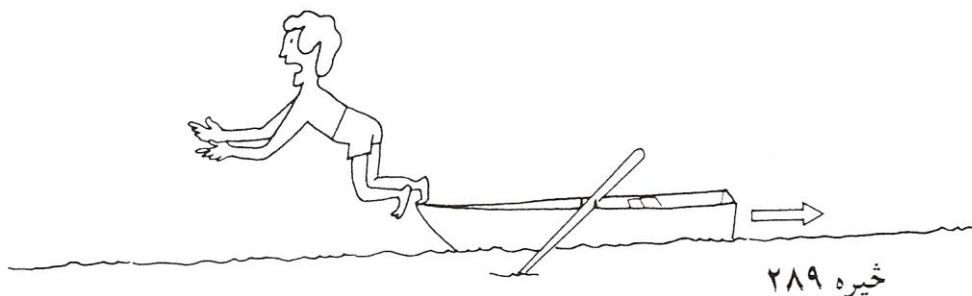
گڼونه د مخنځښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیک کی کښول، لکه زورونه، سرعتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په څیر انځور شي. ( د جلالکوټ څخه و

څیره ✓ کښول په وکتور سره په څښه کیږي



## سرلیک

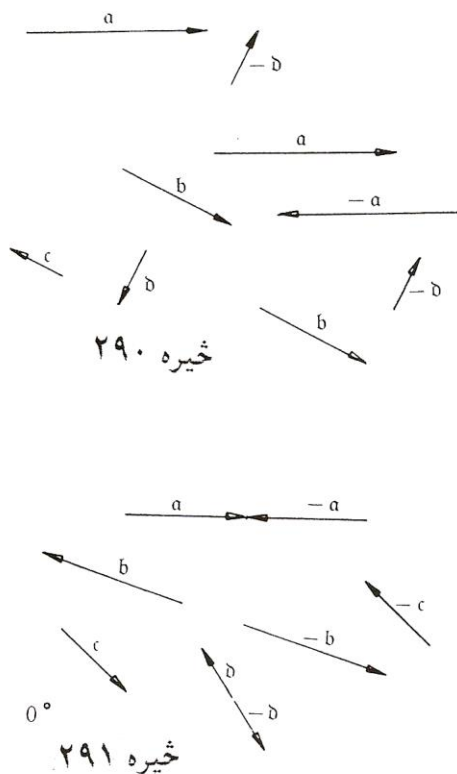
و هسکی مینی ته رانبايي، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رانبايي  
چی څومره اړده ده. وکتور دا را په گوته کوي، چی ایا څوک له جلاکوټ څخه  
هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلاکوټ ته (



داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا  
ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چی له ټکي P و ټکي Q ته لارښودوي،  $\vec{PQ}$  سره په  
نڅښه کيږي.  
بل ډول لیگدودونه یی دي:  $\vec{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$ .

په راکښلو سره که ټکی P' د P څیره او ټکي Q' د Q څیره وي، نو د  $\vec{PQ}$   
اوردوالی او لورد  $\vec{P'Q'}$  یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا  
وگڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرگ او  
کوگرواینڅ غشي دي. له دې امله د ورته ټولگي څخه هم غږیدی شو. ( دا دې ځما  
په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي )



خیره وکتورونه د ایکویوالنختولگی په څیر: دوه وکتورونه ټیک هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت (اوردوالی) او همغه لور ولري.

## تعریف

د  $a$  مطلقه ارزښت  $|a| = a$  دی.  $a$  تل یو نامنفي گڼی دی. وکتورونه د ارزښت ۱ سره مور یوونو وکتورونه یا واحد وکتورونه بولو. وکتورونه د همغه ارزښت سره مگر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څپ وکتورونه بلل کیږي:

$$|a| = |-a| = a$$

$$\vec{PQ} = \mathbf{a} = -\vec{QP} = -(\mathbf{-a})$$

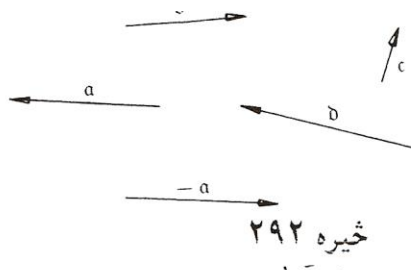
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفر وکتور 0 دی:

$$\vec{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\vec{AA}| = |a| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتور کواردینات د بیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

سرلیک



$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}; \text{ په هواره کي}$$

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}; \text{ په هوا کی}$$

څیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه (اوردوالي):

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = 2,5; |\mathbf{b}| = 2; |\mathbf{c}| = 1; |\mathbf{v}| = 3$$

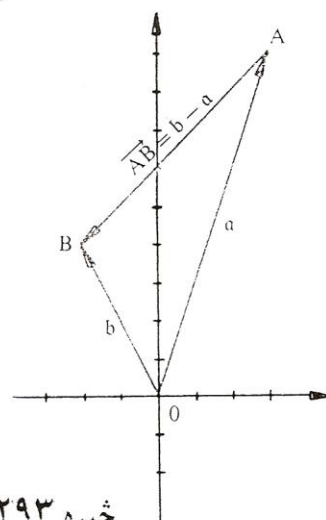
بیلگي:

وي دې  $A(3|9)$  او  $B(-2|4)$  پیل-  
او پایتځي. نو د  $A$  او  $B$  څخه ټاکلی  
وکتور کواورډینات په لاندې ډول لاس ته  
راځي:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 4 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

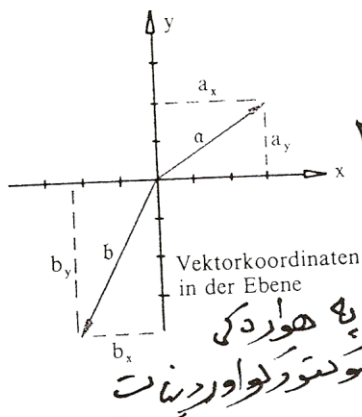
$$-\mathbf{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



جمله: د وکتور ارزښت د پیتاگوراس  
له جملې څخه لاس ته راځي او دا د  
یوگونو کواورډیناتو له لارې:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \text{ په هواره کی}$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ په هوا کې:}$$



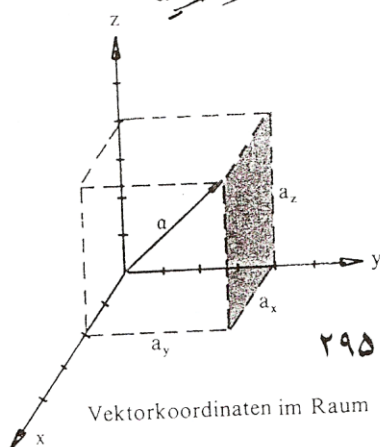
خیره ۲۹۴

بیلگي:

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8,77$$



خیره ۲۹۵

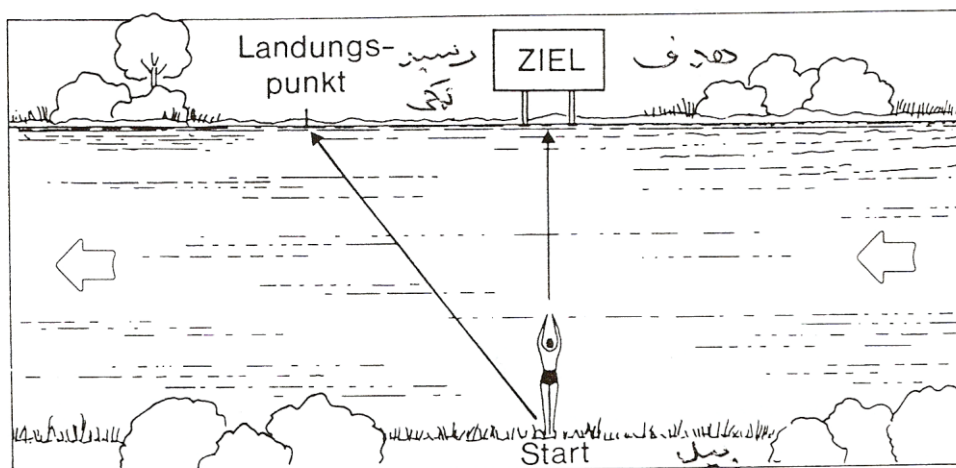
په هوانې وکتور کوآرډینات

### وکتورزیاتون او s-خلوون یا ضربول

پیلبلگه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي. د روانو اوبو څخه د ځان سره ووړ کیري. په ټولیزه -

یا عمومي توگه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یې ولمبل، کوم کچی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

گرافیکي د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل رډي او دا هر یو د یوه غبرگ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرگ اړخیز نیمي د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون، ځمور په څیره کی »



څیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو گرافیکي سره زیاتیري، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمري وکتور په پاگي کینبول شي یعنی د غشی په سر کینبول شي او داسی ورپسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمري وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اڅرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

د څیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي  
 جمله : د زیاتونو کټور کواو دینات همداسی کمونو کټور د پیلو کټور د زیاتون  
 همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

په هوارگي

په فضاگي

پیلگه

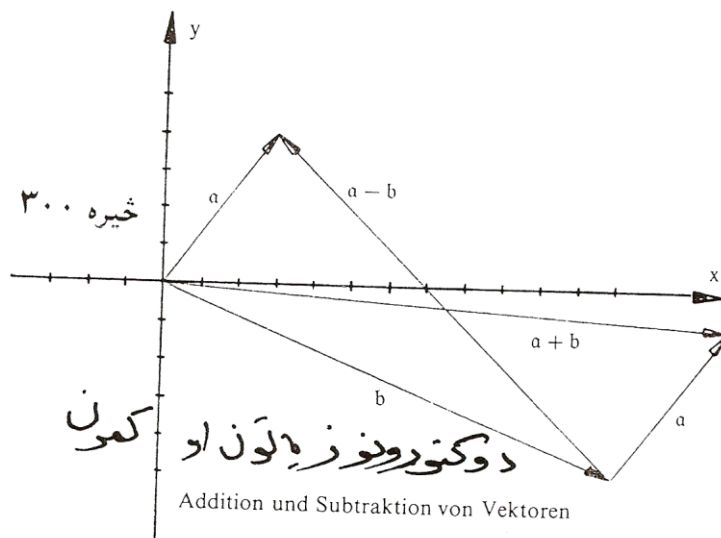
1.  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$     $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ ;    $|a| = 5$     $|b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12,73; \quad |a + b| \approx 15,03$$



## سرلیک

$$2. \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+0 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 3-8 \\ 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4+2+7 \\ 3-0+8 \\ 2-5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{a}$$

دا وروستنی بیلگه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چی له گڼونو سره ځل شوي  
( $s$ -ځلون یا  $\cdot$  ضربونه ) یعنی د سکالار سره ځلونه :

تعریف : وي دې  $s$  یو ریل گڼ ( سکالار هم نومیري )  $\mathbf{a}$  یو وکتور .  
نو  $s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot s$  هغه وکتور لاس ته راکوي ، چی همغه لور ولري لکه  $\mathbf{a}$   
او  $s$ -واره اوږدوالی ولري. وکتور  $\mathbf{a}$  له  $s$  سره ځلیږي، که د وکتور هر  
کومپوننت د  $s$  سره ځل شي:

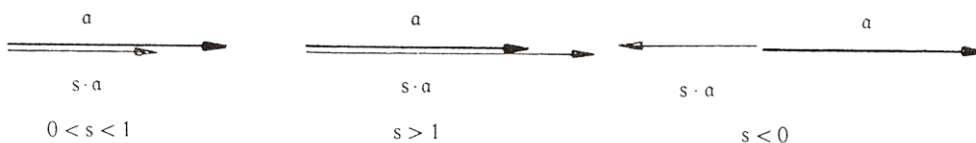
$$s \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix} \quad \text{په هواره کي} \quad , \quad s \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \\ s \cdot a_z \end{pmatrix} \quad \text{په هواکي}$$



$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 5 \\ -0,5 \cdot 7 \\ -0,5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

هندسي د يوه وکتور ځلونه د يوه رييلگن سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلونی يا فاکتور  $s$  په اندازه. د وکتور پيلټگی د کرېنمنځ يا غزونمنځ دی. دلته د  $|s| > 1$  سره وکتور اوږدېږي يا غزېږي» او د  $|s| < 1$  سره وکتور لنډېږي. د  $|s| = 1$  لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که  $s < 0$  وي، نو د وکتور لور راپه څټ کېږي يا راگرځي يا برعکس کېږي.



څیره ۳۰۱؛ د وکتور  $a$  ځلونه د يوه ریيل گن  $s$  سره.

که  $s = 0$  وي، نو  $s \cdot a$  صفر وکتور  $0$  دی.

جمله: په ټوله توگه يا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره لاندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s \cdot a| = |s| \cdot |a|$$

$$(s_1 + s_2) \cdot a = s_1 \cdot a + s_2 \cdot a$$

$$s \cdot (a + b) = s \cdot a + s \cdot b$$

بیلگي:

$$1. \left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -9 \\ -12 \\ -15 \end{vmatrix} \approx 21,21$$

$$\left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |-3| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{50} \approx 21,21$$

$$2. (4-6) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$(4-6) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$3. 3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

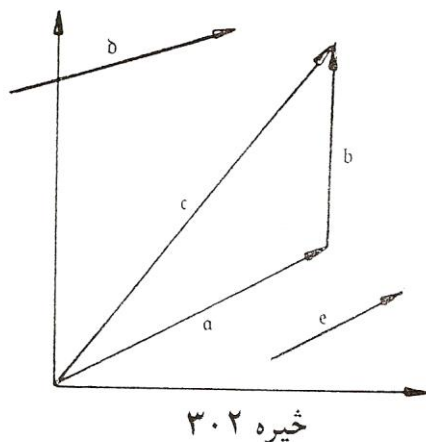
$$3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لایني بلواک بلل کېږي، په غیر له دې لاین خپلواک بلل کېږي. تیک په لاندې توگه افده کېږي:

تعریف: دوه وکتورونه  $\mathbf{a}$  او  $\mathbf{b}$  لایني بلواک دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلگن  $s$  (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې  $s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$  باور ولري. دا وکتورونه لاینخپلواک دي، که انځورونه  $s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$  د هیڅکوم رییل گن  $s$  لپاره ممکنه نه وي.

په هواره ( $R^2$ ) کې تل دري وکتورونه لایني بلواک دي. په هوا ( $R^3$ ) کې تل ۴ وکتورونه لاینبلواک دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کې زیات تر زیات

دري وکتورونه لاینیخپلواک کیدی شي.



لايني خپلواک وکتورونه	لايني بلواک وکتورونه
د بیلگې پو توگه	
$\{a, b\}$	$\{a, e\}$
$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{e, d\}$	$\{a, c, d\}$

بیلگې:

۱ - وکتورونه  $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$  لاینی بلواک دي، ځکه چې

$$s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3.s = 6 & s = -2 \\ 6.s = -12 & s = -2 \\ 11.s = -22 & s = -2 \end{cases}$$

۲ - په خټ یا برعکس، وکتورونه  $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$  لاینیخپلواک دي، ځکه چې

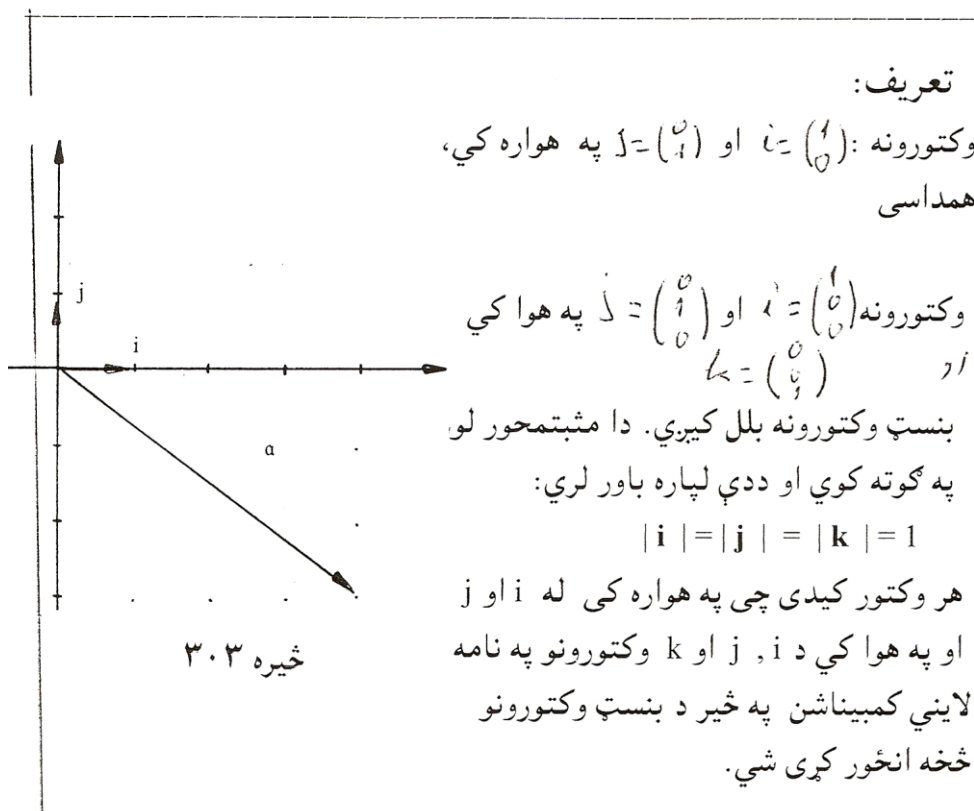
$$s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4.s = 10 & s = -2,5 \\ 6.s = 15 & s = 2,5 \\ 8.s = 20 & s = 2,5 \end{cases}$$

ګورو، چې دلته سره ګډ یا مساوي  $s$  نه شي پیدا کیدی.

## سرلیک

د وکتورونو لاینی خپلواکوالی او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کې د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کېدې شي:

لکه څنګه چې ټکی په کواوردیناتو کې تعریفېږي چې خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسې کېدې شي چې وکتورونه، ځانونه، په خوښه داسې وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چې ځغاستلور یې یو ددې کواوردیناتو محور وي..



بیلګې:

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot i - 3 \cdot j = 4 \cdot i + (-3) \cdot j$$

$$b = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3i + 11j + 6k$$

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلگڼونو سره ځلونی له لارې لري:

د ټولو وکتورونو ډیری  $V$  په هواره کی ( همدا ډول په هوا کی ) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو گروپ جوړوي ( د گروپ تعریف وروسته )، ځکه چی لرو:

اول -  $\alpha + b \in V$  د ټولو  $ba$  لپاره، چی له  $V$  وي رابندیدنه

دوم -  $(a+b)+c = a+(b+c)$  د ټولو  $c, b, a$  لپاره، چی له  $V$  وي

اسوخیاتیو قانون

دریم -  $0 + a = a + 0$  صفر وکتور  $0$  ناپییلی توکی دی

څلورم -  $a + (-a) = (-a) + a = 0$  هر وکتور ته یو په خټ وکتور یعنی

مخامخ وکتور موجود دی

پنځم -  $a + b = b + a$  د ټولو  $a, b$  لپاره، چی له  $V$  وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلونی لپاره د یوه ریل گڼ سره باور لري:

شپږم -  $s \cdot a \in V$  د ټولو  $a$  لپاره، چی له  $V$  وي

اووم -  $1 \cdot a = a$  د ټولو  $a$  لپاره، چی له  $V$  وي

اتم -  $(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$  د ټولو رییلگڼون  $m$  او  $n$  لپاره او هر

وکتور  $a$  لپاره، چی له  $V$  وي.

نهم -  $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$  د ټولو وکتورونو  $a$  او  $b$  لپاره چی له  $V$  وي او

هر رییل گڼ  $m$  لپاره.

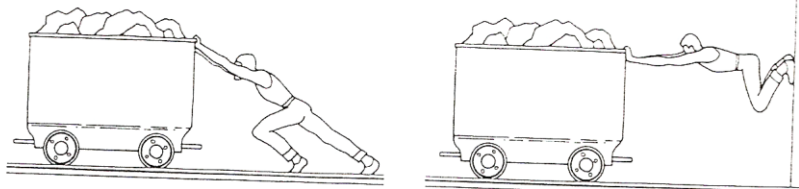
په ټولگیزه توگه یو داسی جوړښتخویونه د وکتور هوایا  $\cdot$  فضا تر نامه یادیری.

## سکالار ځل

وکتورونه لکه چی ومو لیدل، کیدی شي چی سره زیات شي او یا د یوه ریلینګن سره ځل شي . کیدی شي، چی وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟ دا حتی په دوه توپیریډونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتور هوا جوړوي ( د مخه لوستل شوی دی )، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یواځي ارزښت لرې او لور نه لري.

## پیلېلګه :

په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه تیلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟

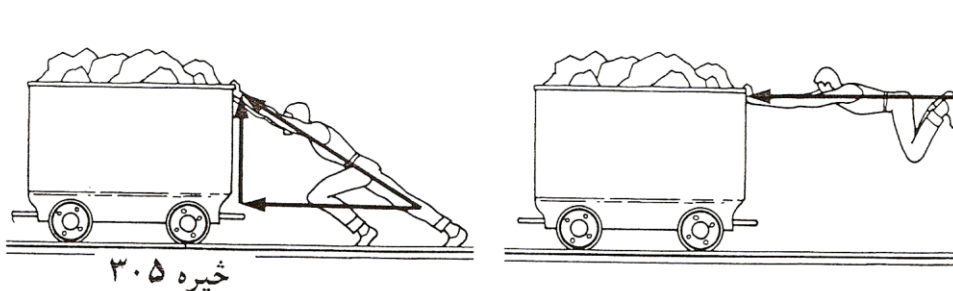


څیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزیک کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چی واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چی واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځي پروت زور واګون د مخ لور ته

په حرکت راولي. په دې توگه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توگه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنی ځواب هم دې، چی ولي کارگر د مخ لور ته تکیه وهي. هغه رسی چی د هغی له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمگي سره غبرگه ځغلي ( = لار ) ، ( نزدې د مټو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چی کونج د ځمگي او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیر پاتي کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریگوډی جوړوي، دا لار سره غبرگ زور د  $F \cdot \cos \alpha$  په څیر لاس ته راځي. کار  $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$  پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار - لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري: دا یو سکالار دی.



تعریف:

د دوه وکتورونو  $a$  او  $b$  یو  $a \cdot b$  سکالار ځل لاندی (ویل کیږي  $a$  ځل  $b$ ) یو یواځنی ریل گڼ پوهیدل کیږی ،

$$a \cdot b = |a||b| \cdot \cos \alpha = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$



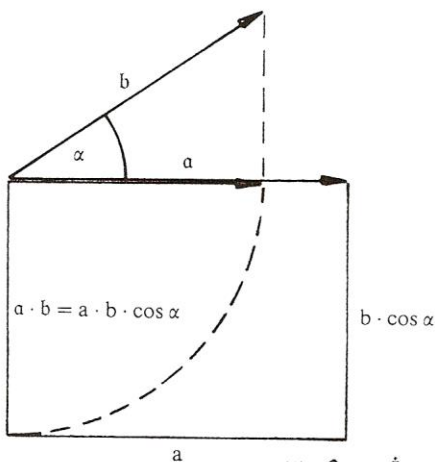
دلته کونج  $\alpha$  د  $a$  او  $b$  وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړ کونجیز هوار متن دی یا هواره ده د اړخونو  $a$  او  $b \cdot \cos \alpha$  سره (د  $b$  پریوستون په  $a$  ). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا  $\cos \alpha \neq 0$  ، یعنی  $90^\circ \neq \alpha$  ده .

د  $b$  ولاړ پریوستون په  $a$  کله کله

په  $b_a = b \cdot \cos \alpha$  سره بنسول کیږي:

$$a \cdot b = a \cdot b_a$$



جمله: د دوه وکتورونو  $a \perp b$  او  $b \perp a$  سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$a \cdot b = 0 \iff a \perp b$$

بیلگه:

د یوه ولاړ کونجیز کواوردینات سیستم (Orthonormal basis) اورتونورمالبنسټي ( یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټو وکتور سکالار ځل د ځان سته تل ۱ دی :

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad , \quad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$



## سرلیک

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j}) \cdot (b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j}) \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x \mathbf{i} \cdot b_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \cdot b_x \mathbf{i} + a_x \mathbf{i} \cdot b_y \mathbf{j} + a_y \mathbf{j} \cdot b_y \mathbf{j} \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1 \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x + a_y b_y \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= b_x a_x + b_y a_y = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتونو لپاره هم بنوول کيډي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونو لپاره باور لري:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + b_y a_y \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د  $\mathbf{a}$  او  $\mathbf{b}$  ترمنځ کونج په لان دي ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

دوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج  $\alpha$  شميرنه د تير منځ مساواتو څخه لاس ته راځي

بيلگي:

$$1. \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$$

$$\text{also auch } \cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$2. \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{a}| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |\mathbf{b}| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,05872 \Rightarrow \alpha \approx 86,63^\circ$$

## وکتورخل

## پییلگه:

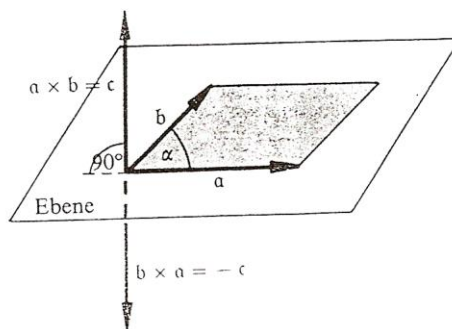
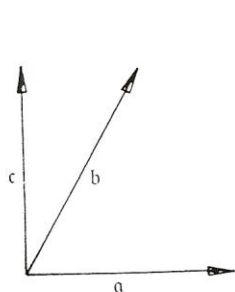
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاص کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباډنډ ډک کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په بنیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .  
 دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په بڼي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدشي.

د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله ( حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت ) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی گډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توگه باور لري:

## تعریف :

د وکتورخل  $a \times b$  لاندې ( اټیران  $b$  ) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري  
 اول . دا وکتوردریگونې  $a, b, c$  په لړپرلپسی یو بڼی سیستم جوړوي  
 دوم. وکتور  $c$  په وکتورونو  $a$  او  $b$  نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

دریم. د وکتور  $c$  ارزښت د  $a$  او  $b$  څخه جوړ غبرگ اړخیز سره مساوي دی

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\alpha) = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$


څیره ۳۰۸ : یو بنی سیستم

کیدى شي، چى د پیچمیخ له

لارې ونبوول شي:

که پیچمیخ له  $a$  و  $b$  ته وڅرخول

شي، نو میخ د  $c$  په لور خوزي یا

حرکت کوي

څیره ۳۰۹

څیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي

اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفر وکتور

دی او یا دواړه سره غبرگ پراته دي ( دا په دې مانا، چى  $\alpha = 0$  او یا  $\alpha = 180^\circ$  )

جمله: وکتور  $c$  د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو  $a$  او  $b$  د کمپوننتوله

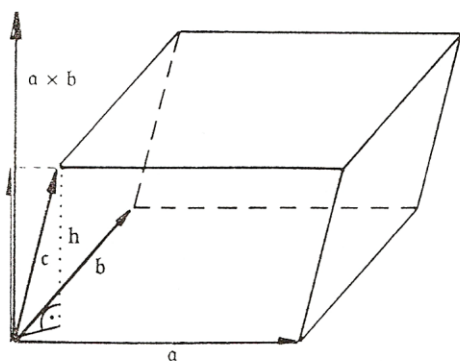
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z) i + (a_z b_x - b_z a_x) j + (a_x b_y - b_x a_y) k$$

لارې لاس ته راوړ کیدی شي

## شپات ځل Spatprodukt یا غبرگهواريزي ځل

د وکتور ځلونه ارزښت هغه غبرگهواريزي هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزيرې. يو دريخوايز يا دريدمينزيونال وينه و غبرهواريز ته شپات يا بيرته همغه شپيرهواريز وايي ( دا د مخه لوستل شوی ) دا کيدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکي داسی شميرل کيږي، چې بنسټهواره د جگي سره ځل کړای شي. دا جگي د  $c$  ولاړ پريوستون دی، په  $a \times b$ . يو هندسي بدنيز Stereometrische اوبی يا حل له دې امله د  $c$  او  $a \times b$  د سکالار ځل له لارې لاس ته راوړل کيږي.



څيره ۳۱۰

### تعريف :

د وکتورونو  $a, b$  او  $c$  څخه غزیدلی شپات يا غبرگهواريز ( Parallelepiped ) ډکي دلاندې ځل څخه شميرل کيږي:

$$V_{\text{Spat}} = (a \times b) \cdot c$$

دا غبرگهواريز ځل مثبت دی، که وکتورونه  $a, b, c$

په دې ترتيب يو لړ پيرلسی بنی سیستم جوړ کړي، په غير له دې بيا منفي دی.

تر هغی، چې بنسټهواره د يوه وکتور له لارې ځان بنای يا بنسول کيږي يا ځان څرگندوي، نو دا ډکي يو سکالار دی.

په ادبياتو کی دا د ځل اټيران نخښه، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

یکل کیري، یعنی لیکو:  $(a \times b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ ، غیرکھواریزخل شمیرنه د  
پترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اټیرانخل لکه د مخه موچی وویل د بنسټوکتورونو د لاینی کومبیشن په  
خیر انخوردلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلگه:

د هغه غیرکھواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ aufgespannt wird?}$$

له دې چی غزیدلی

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غیرکھواریز نو ډکی 15 V.E لري ( یعنی ۱۵ (V,E) ډکیرونونه یا -واحدنه)

تمرینونه

۱ - دواړه وکتورونه  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  ورکړشوي دي. په یوه کوارډیناتسیستم

کی دا لاندې رسم کړی



رسم کړی

$$a) a + 3b \quad , \quad b) 0.5a - 3b \quad , \quad c) 2(a + b)$$

او په هرواړی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ - په هوا یا فضا کی ټکی  $B(2|-1|4)$ ,  $A(1|2|3)$ ,  $O(0|0|0)$  او  $C(-5|7|9)$  ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیري یا څه ډول دي؟

$$a) \vec{OA} \quad b) \vec{BC} \quad c) \vec{AC}$$

$$d) \vec{AB} + \vec{BC} \quad e) \vec{AO} - \vec{BC} \quad f) \vec{AB} - \vec{CD}$$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ - که په یوه هواړه کی دوه وکتورونه  $a$  او  $b$  لایني خپلواک وي، نو هر بل د

دې هواړې وکتور د دې دوه وکتورونو  $a$  او  $b$  د لایني کمبینیشن په څیر

انځوریدلی شي.  $a$  او  $b$  بنسټ جوړوي.

وکتور  $c$  د مساوات  $c = k_1 a + k_2 b$  له لارې د لایني کمبینیشن په څیر

د ریولوگنونو  $k_1$  او  $k_2$  سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د  $k_1$  او  $k_2$

نایژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمپرهنی کتاب

وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a) c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b) c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad c) c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$۴ - وي دي :  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$  . وشمیری:$$

$$a) a.b \quad b) -a.b \quad c) a.a \quad d) b.b$$

$$e) a.(b.a) \quad f) a.(b.a).a$$

او د دواړو وکتورونو ترمنځ کونج.

۵- کونجونه  $\alpha = w(a,b)$  ,  $\beta = w(b,c)$  ,  $\gamma = w(a,c)$  د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکي؟:

۶- د تريگونوميټري يا کونجکچ د کوساين جمله، لکه د مخه مو چي لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیري.

۷- د تالس جمله، چي د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیري:

۸- په خوښه دريگونوي ABC لپاره د پیتاگوراس جمله او د هغی په څټ وشمیري:

$$\vec{AC} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2$$

۹- د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جگجمله وکتوري وښایي.

۱۰- د یوه په خوښه غبرگهواريز ABCD لپاره وشمیري:

۱۱- الف) د غبرگ اپیټ یا غبرگهواريز ډکي وشمیري، چي له

وکتورونو  $b=3$  ,  $a=1$  او  $c=-2$  څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري، که وي:  $(a \times b) \cdot c = 0$  ؟

پ) د یوې بیلگي په مرسته وښایي، چي اټیرانځل اسوځیاتيو نه دی.

ت) د وکتورونو  $b=0$  ,  $a=2$  او  $c=k$  له لارې یو غبرگ

اپیټ ورکړ شوی دی، چي ډکي یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲- یوه سپورتي الوتکه د  $250 \text{ km/h}$  په سرعت د  $N60^\circ O$  په لور الوځي.

سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د  $75 \text{ km/h}$  سرعت لري او دا

الوتکه له پیللارې اړوي. دا نوي الوتلور وټاکي او د الوتکې نوي سرعت!

۱۳ - د وکتورونو  $a$  او  $b$  لپاره کله لاندې اړیکې باورلري؟

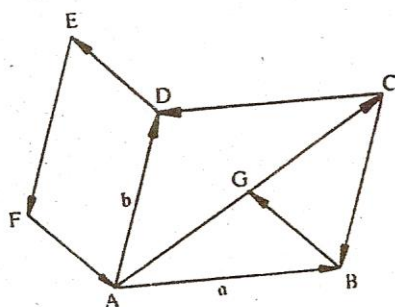
$$a) |a+b| < |a|+|b|, \quad b) |a+b| = |a|+|b|$$

۱۴ - لاندې وکتورونه ورکړ شوي دي:

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} -45 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad e = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

وکتورونه  $c$  تر  $g$  (که ممکن وي) د وکتورونو  $a$  یا  $b$  د ډیرواره په څیر

انځور کړی.



۱۵ - ناټاکلی وکتورونه د  $a$  او  $b$  د

وکتورونو لاینی کمپینیشن په

څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ - یو دريگون  $ABC$  په

$$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ

اوږدوالی او دننې کوجونه وشمیری.

۱۷ - په یوه څلورگون کې دی.  $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ او } d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

د نیمې اوږدوالی وشمیری او د هغې غوڅکونج ( $\leq 90^\circ$ )

۱۸ - یوه کینستی د ټکی  $O$  څخه د  $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  په لور خوزیږي یا حرکت کوي،

دا کینستی تکلور دی، باد د  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$  په لور لېږي.

الف) د باد زور  $F \perp$  برخه څومره لویه ده، چی په زیگل باندې ولاړ پروږي.

یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

## سرلیک

ب) د  $F$  برخور له  $F \perp$  څخه څومره لوي دي، كومه چي كينستي د مخ په لور بيایي؟  
 ۱۹ - يو بار، چي ۱۰۰۰۰ نيوتونه دي د دوه مالو ستنو سره نيول شوي. جورنت يي يو مساوي پښيز دريگودي جوړوي، د بنسټ ۶ متره سره او د پښي اوږدوالي (د ستنې اوږدوالي) ۵ متره دي.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنگه تاثير اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپوننتونه څومره لوي دي؟  
 ۲۰ - د وكتور  $v$  کواوردینات و اور توگونالبنستونو  $(\hat{i})$  او  $(\hat{j})$  ته وشمیری،

که  $|v| = 5$  وي او  $v$  د وكتور  $(\hat{i})$  سره يو د  $55^\circ$  کونج جوړ کړي.

۲۱ - وي دې  $a + b + c = v$ . وشمیری:  $a \cdot d + b \cdot v + c \cdot d$

۲۲ - د څلور ټکود  $A, B, C, D$  او همداسی  $E, F, G, H$  سره يو غبرگ اړخيز

ورکړ شوی دی. د لاندې ورکړنو يا شرطونو سره د هغو هواړي وشمیری

$$a) A = (0|6|0), B = (8|4|0), C = (6|16|0)$$

$$b) E = 1,5|2,5|3,5, F = (0,5|0|2,5), G = (1|0,5|4,5)$$

هغه تراوسه ورك يا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چيرته پروت دی؟

۲۳ - هرام د بنسټ هواړي د کونجونو

$$A = (1|0|2), B = (3|3|7), C = (4|2|12), D = (2|-1|7)$$

سره کوم ټکی لري، چي څوکه يي  $S = (2|4|15)$  وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چي ايا کونجونه رينبټيا په يوه هواړه کي پراته دي.

## تجار تي شميرنه

ځاننيونيز يا متناسب او په خټ يا چپه ځاننيونيز  
يا متناسب بلواک (فنکشنونه)، درېقضية

په ورځني ژوند کې دې ته اړتيا پېښېږي چې ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلگي په توگه د خپليو لويوالي د ځمکې ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسې گڼونو  $a$  او  $b$  د انډول لپاره په زيات وخت کې کمون  $a - b$  کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه گڼونو  $a$  او  $b$  له توپير څخه غږېږو. په ډيرو وختونو کې دا بسيا (کفايت) نه کوي چې د دوه گڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

## پيلبيلگه:

دوه پټې يو  $1800 \text{ m}^2$  او بل  $2000 \text{ m}^2$  يوله بل  $200 \text{ m}^2$  توپير لري. دا د پټيو لويوالي که  $400 \text{ m}^2$  او  $600 \text{ m}^2$  وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ویش د يوه ميراث ویش وي؟ هر ځل به دا يو  $200 \text{ m}^2$  ډيره لاس ته راوړي نسبت و دې بل ته. گورو چې په دوم ویش کې  $400 \text{ m}^2 / 600 \text{ m}^2$  د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش  $1800 \text{ m}^2 / 2000 \text{ m}^2$  ته زيات دی. دا په دې مانا، چې که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کمېږي.

دا مخته پرته بيلگه، بنايي، چې په داسې حالتونو کې دانډول لويی يو بل سره په تناسب يا ځاننيونه کې راوستل کيدی شي



تعریف: که  $a$  او  $b$  دوه له صفر مختلفې لويې يا گڼونې بوي، نو  $a/b$  ویش يا  $a:b$  د تناسب يا ځاننيونه و  $b$  ته بلل کيږي.

بیلگه: ۱ - د ځمکو  $400\text{m}^2$  او  $600\text{m}^2$  لويوالی يو بل سره  $400/600 = 0,6 = 2/3$  تناسب جوړوي يا يو بل سره ځانيسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي  $66,6\%$  جوړوي.

۲ - د پټيو  $1800\text{m}^2$  او  $2000\text{m}^2$  لويوالی يو بل سره په  $1800/2000 = 0,9 = 9/10$

تناسب يا ځاننيونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي  $90\%$  جوړوي.

۳ - د مودل گاډي TT لاین ( لیکو يا پټلیو ) او الماني گاډو د لیکو يا پټلیو سور يو بل سره په لاندې تناسب کی پراته دي

$$12\text{mm}/1435\text{mm} = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ - که يو کړندی په  $30$  دقیقو کې  $70\text{km}$  ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي سرعت تناسب و وخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70\text{km} / \frac{1}{2} h = 140[\text{km}/h] = 140\text{km}/h .$$

۵ - د يوه هوموژين بدن ( د مساويډوله مواد جوړ ) سختوالی  $\rho$  د هغه د کتلې (  $g$  ) ځاننيونه يا تناسب دی، د هغه بدن ډکي (  $\text{cm}^3$  ) ته

$$\rho = m / V [ g / \text{cm}^3 ]$$

د يوه لرگي بلاک سختوالی ( کثافت )، چی درې کيلو گرامه دروند او څلور زره مکعب سانتيمتره ډکی (حجم) لري،  $0,75 g / \text{cm}^3$  دی

$$3000 g / 4000 \text{cm}^3 = 0,75 g/\text{cm}^3 = \rho \text{ سختوالی}$$

مور غواړو، چی اوس ځانونه د بلواک دوه ځانگړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنگه، چی مور په ورځني ژوند کی ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چی له دې امله یی پیژندنه ځمور لپاره خورا مهمه ده.

### پیلبلگه:

۱ - د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. خو لیتره اوبه به په یوه ورځ کی له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟  
که په درې دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی  
طبعاً  $4 \times 1440 = 5760$  لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی  
 $360 \times 5760 = 2102400$  لیتره او یا  $2102400 \div 1000 = 2102.4$  هیکتولیترا اوبه بهیږي.  
۲ - څلور کارگر یوه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته او کانکریت پوي.  
څومره وخت درې کارگره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارگر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریت کړي؟  
که څلور کارگره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارگر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعنی څلور ځله زیات وخت، پس  $36$  ساعته، نو درې کارگر په تعقیب  $12 = 36 : 3$  ساعته او لس کارگر  $3.6 = 36 : 10$  ساعته = درې ساعتونه او  $36$  دقیقې ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریت کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منح کی پروت دی، دقیق په لمړۍ بیلگه کی فنکشن وخت — د اوبو مقدار او په دومه بیلگه کی فنکشن کارگر — د کار ساعتونه. مگر دواړه فنکشنونه پوره په خپل راپورون ډول کی یو له بل توپیر لري:  
۱ - څومره ډیر وخت چی تیریري په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.



۲- خومره چی کارگر زیاتیري همغومره د کار وخت کمیري دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونو یا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکی لیکدود د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱- فنکشن  $f$ : وخت ( دقیقه )  $\leftarrow$  د اوبو ډیری ( ل )

د فنکشن لیکدود ( فنکشن لیکلوقانون ) لري  $x \rightarrow 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسی بریښي  $y = 4x$  ;  $x \in \mathbb{Q}^+$

۲- فنکشن  $g$ : کارگر ( خودانی )  $\leftarrow$  د کار وخت ( ساعت )  $h$

د فنکشن لیکدود لري  $x \rightarrow 36/x$

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسی بریښي  $y = 36/x$  ;  $x \in \mathbb{N}$

### تعریف:

یوه لویه  $x$  و هغی ته تنظیم شوی لوی  $y$  ته سیده متناسب سیده ځانیونه

( په نخښه کی  $y \sim x$  ) بللکیري که د هغوی تناسب یا ځا نیونه

( ویش )  $y/x$  تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی  $y/x = k$  وي.

بلواک (تابع) یا فنکشن  $y = kx$  ( ثابت  $k$  ) د تناسب یا ځانیونی څلورونی

یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغی بلی تنظیم شوی لویي ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده

ځانیونه کی ده، که د هغو ځل تل یو ثابت ارزښت وساتي: یعنی

$$y \cdot x = k \iff y = k/x$$

بلواک یا فنکشن  $y = k/x$  چپه یا په څټ متناسب ( antiproportional )

یا په څټ ځانیونکی بلواک یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن  $y = kx$  د یوې دوه برابره، نیم برابر،  $n$ -برابره پورې د

بلی لویي هم دوه برابره، نیم برابر یا  $n$ -برابره پورې اړه لري.

په چپه یا په خټ متناسب فنکشن  $y = k/x$  کی دوه برابره، نیم برابر ...  $n$  - برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ...  $1/n$ -برابره تعلق لري (اړه لري).  
 په چپه یا په خټ متناسب فنکشن  $y = k/x$  کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په خټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواک یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په خټ متناسب بلواک یا فنکشنونه مونوتون لویدونکی دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

### بیلگي :

۱ - سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیری ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت ( افغانی ) ډیری (کلیوگرام)

ب : په تیزوالی یا سرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$$s(\text{km}) \rightarrow t(\text{s})$$

۲ - ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره

ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شورو د یوه څرگند ټاکلي ټول وزن د وړونکوټیو گڼنه ناسیده متناسب

ده د هرې کوتی یویوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه

گڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول  $a/b = c/d$  یا  $a:b = c:d$  مساوات د تناسب مساوات

یا ځاننیونیز برابرول بلل کیږي ( ویل کیږي چی  $a$  و  $b$  ته ځان داسی نیسي

( یا داسی انډول کی ده ) لکه  $c$  و  $d$  ته ) دلته  $a$  او  $d$  د تناسب یا انډول

## سرلیک

دباندي غړي دي او  $b$  او  $c$  د انډول دننې غړي. په هر تناسب کې د دباندينو غړوځل د دننيو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a/b = c/d \iff a \cdot d = c \cdot b$$

اوس ځان باوري کولی شو چې د دننيو غړو بدلول او يا د دباندينو غړو بدلول يو د بل سره په تناسب يا انډول کې تغير نه راولي. کيدی شي چې ټول دنني غړي د دباندينو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کيدی شي چې يو دبل سره برابر زيات تناسبونه يا انډولونه د يو په بل پسې راتلونکو تناسبونو په څير وليکل شي:

$$a/b = c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته بايد په پام کې وي چې ویش ځانله صورت نيسي يعني تل د دوه گڼونو،

بيلگي :

$$15/5 = 21/7 \text{ يا } 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15 \text{ څخه لاس ته راځي } 5/15 = 7/21 \text{ يا } 21/15 = 7/5$$

$$8/12 = 4/6 = 2/3 \text{ د لپاره لیکو } 8:4:2 = 12:6:3$$

۳ - يو تناسب چې دننه او دباندي غړي يې يو له بل سره برابر وي ناپريکيدونکی

تناسب بولو. په ناپريکيدونکی تناسب يا انډول  $a:m = m:b$  يا  $m:a = b:m$

کې  $m$  منځنی متناسب انډولی بلل کيږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو  $a$  او  $b$  جيومتریکي منځ دی.:

$$a/m = m/b \iff m^2 = a \cdot b \Rightarrow m = \sqrt{a \cdot b}$$

د  $a = 16$  او  $b = 9$  لپاره  $m = 12$  منځنی متناسب داسی دی:

$$16/12 = 12/9$$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځاننیونیزڅنگه لیکل کیږي؟

$$18/x=8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 \cdot 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 \cdot 5) / 8 = 11,25$$

په ترتیب متناسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري:  $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو(انډول برابر ون ) ته لارښودوي، نو بیا درې ورکړشو لویو ته څلورم تناسب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پای(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري. د دریقضی شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفی ورکول باید څرگند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په څټ متناسب بلواک (تابع) یا فنکشن دی.

- د دري قضی پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منح ته راځي :
- ۱ - یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په گوته کوي.
  - ۲ - یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه  $x$  متن کي یا خوندي لري او له هغی سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
  - ۳ - یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون(واحد) په ورته یا مناسب ډیرون پای ورکول کیږي.

پیلبلگه:

یوه الوتکه له الف ځای تر ب ځای پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

## تجارتی شمیرنه ۲۸۱

د درې جملې له لارې یې ځواب:

الف - د شرایطو قضیه ..... 800km - 6h 40 min

یا ..... 800km - 400 min

ب - د پوښتنې قضیه .. ..... 2200 km - x min

پ - پایقضیه ..... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتیب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظیفه د ټيک ځواب لپاره ضروري نیوني دا وي چی سیده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چی د الوتلو واټن لري کيږي په همغه اندازه الوتکه زیات وخت په بر کی نیسي.

یعنی 2200km اوږد واټن په داسی انډول یا تناسب کی دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکویوالنڅ فورم (څیرې-) اوږون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 \cdot 2200) / 800 = 1100$$

۲ - ۴ کارگر د یوه دیوال وهلو لپاره پنځه ورځي ضرورت لري. د ناروغي

له امله یو کارگر د کارلري پاتیري. دا راکمه یا راکوچنی ډله اوس څنگه

مشغول ده؟ دلته یو ناسیده تناسب یا ځاننیونه لرو:

هرڅومره چی کارگر کم وي په همغه اندازه وخت زیاتیري

د تناسب سره شمیرنه	ددریجملی سره شمیرنه
غوښتونکی کاروخت $x$ د $5$ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه $4$ کارگر و درې کارگرو ته	$4$ کارگر - $5$ ورځي $1$ کارگر - $4.5$ ورځي $3$ کارگر - $20/3$ ورځي پس $3$ کارگر - $6\frac{2}{3}$ ورځي
ورځی $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20/3$	یوځاي شوې درې قضیه:
د $30$ جوړه کالیو گنډلو لپاره $12$ درزیان $20$ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به $10$ درزیان د $70$ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟	لمړۍ درېقضیه (سیده متناسب)
دومه درې قضیه (ناسیده متناسب)	$30$ جوړه کالي $70$ جوړه کالي
$12$ درزیان - $20$ ورځي $10$ درزیان - $x$ ورځي	هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي
ورځی - $12$ درزیان -	$10$ جوړه کالی -
ورځی - $12$ درزیان	$70$ جوړه کالی
ورځي - $2$ درزیان -	$70$ جوړه کالي
ورځي - $10$ درزیان	$70$ جوړه کالي
	پس لرو
ورځي $x = (20.7.6)/(3.5) = 56$	



## تمرینونه

۱ - لاندې ځاننیونی یا تناسبونه ساده افاده کړی.

- a)  $200t : 2 \text{ kg}$       b)  $6 \text{ m} : 6 \text{ km}$   
 c)  $4\text{km} / 30\text{min}$       d)  $3,2 \text{ t} : 400\text{dm}^3$

۲ - یوه موټر د  $5500$  کیلو متره اوږدې لار لپاره  $385$  لیتره ډیزل وسزول

الف ( په دې تگډول  $50$  لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب ( د یوې  $430$  کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ - که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسېږو ، نو د  $60$  کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی

په څومره وخت کې رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

- a)  $50\text{km} / \text{h}$       b)  $110 \text{ km} / \text{h}$ ?

۴ - یو ښار پلان د  $1 : 10000$  تناسب یا ځاننیونه ورکړ شوی دی. لاندې

واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

- a)  $5 \text{ cm}$       b)  $33 \text{ mm}$       c)  $1 \text{ dm}$

۵ - یو  $81$  گڼ څنگه په داسی په  $2$  زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چې ځاننیونه

یا تناسب یی داسی وي لکه  $5 : 4$  ؟

۶ - د یوه گڼ او  $5$  کمون ځان نیونه یا تناسب و  $7$  ته داسی دی ، لکه چې د

$5$  کمون ودې گڼ سره، چې  $4$  ته ځا نیسی یا و  $4$  ته تناسب یا ځاننیونه؟

دا گڼ کوم دی؟

۷ - یو فاو وې موټر  $80$  کیلو متره په ساعت کې ځغلي او په دې پسی په  $120$

متره کې وروسته یو بی ایم وې موټر  $120$  کیلو په ساعت کې ځغلي.

الف ( بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب ( بی ایم وې په دې وخت کې څومره واټن وهلی دی؟

پ ( دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې له فاو وې موټر څخه  $40$



متره مخ ته شي ؟

۸ - د سونگ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیدا کیږي. د سونگ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید (Kohlendioxid (Co<sub>2</sub>) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 11 : 3 ده.

خو گرامه سونگسکاره به ۱۰۰ گرامه کولینډیاوکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ - له دریو یو په بل اغیزه مند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ بناغونو سره دا کوچنی څرخى ۴۰۰ وارې په یوه دقیقه کی څرخي یا څرخى.

نور دواړه غابنورڅرخى خو واړه څرخى یا څرخى؟

۱۰ - ۹۰۰ تیري، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو گرامه وزن لري.

۱۱۰۰ تیري به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور

یى ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ - یو د زدکونکو ورځپاڼه « هیلې » د رحمان بابا د لیسی څخه راوځى د

دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکونکی ۳

ساعته کار پرې کوي.

څومره زدکونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیک دوه

ساعته کی وتړي؟

په سلو کی - Prozent- ، په زرو کی - Primille -  
گټه - Zins- او د گټې د گټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د  $a/b$  یا  $c/d$  ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و  
ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کې (خما د شمیرپوهنې کتاب دې وکتل شي)  
به وښوول شي چې څنگه بنسټیز نظم په داسې ماتو کې ټاکل کیدی شي. د انډول  
یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکولی شو چې دواړه مات لاندې په گډ ماتلاندې  
چې 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کې کیدی شي.

### پیلبلگه:

یو جوړ جامي، چې په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدی، په ۴۰ افغانی گرانې شي.  
د گرانبت تناسب یا ځاننونه یې و اولي ارزښت ته څومره دی؟  
دا تناسب  $40/230$  کیدی شي نزدې په یوه مات چې مات لاندې یې  
«۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چې د ویشنی له لارې داسې صورته  
ونیسي:

$$40 / 230 = 0,1739 \text{ پس } 40 / 230 \sim 17,39 / 100$$

قیمتیدل د لمړني قیمت 0,1739 ځله راکوي. داسي هم وایو چې قیمتیدل  
په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیز ارزښت  $G$  سلمه برخه ددې گڼ 1 په سلو کی بلل  
کیري، او ددې لپاره لیکو %1 د  $G$  دی  $G/100$ ، په همدې ډول %  $P$  له  $G$

د گڼ ارزښت  $W = P.G/100$  له لارې ټاکل کېږي،  $P$  په سلو کې جمله او  $W$  په سلو کې ارزښت بلل کېږي.

بنسټ ارزښت  $G$  ځان و 100 ته داسې نيسي لکه د په سلو کې ارزښت  $W$  د په

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخري مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:		
په سلو کې ارزښت	بنسټ ارزښت	د په سلو کې ټاکنه
$W = G.P / 100$	$G = 100.W / P$	$P = 100 \cdot W / G$

بیلگې:

په سلو کې ټاکنه	بنسټ ارزښت	د په سلو کې ارزښت
14 %	د 120 DM	= 16,80 DM

۲ - یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 60 DM , 40 یعنی المانی مارکونه د

مالیا لپاره ( 14% ) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کې ارزښت د په سلو کې ټاکنی 14% وي،

## سرلیک

نو باید  $40,60 / 14DM$  د  $1\%$  د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسی  
بنسټ ارزښت  $(= 100\%)$  د  $G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM$   
لاس ته راځي.

له دې سره بایسکل  $290$  مارکونه بی مالیا ارزښت لري او  $60$  ،  $330$   
ماروکونه د مالیا سره.

کید ی شي، چی سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو  
بنسټ ارزښت د  $114$  په سلو کی کیښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14) \cdot 114DM = 330,60 DM$$

۳- یو جوړ کالي چی  $150$  مارکونه ارزښت لري په  $10\%$  په سلو کی گرانیري، دا  
کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په  $10\%$  په  
سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چی ایا دا کالي به اوس هم  $150$  مارکونه  
ارزښت ولري، که څنگه؟

طبعاً نه، ځکه چی گرانوالی په  $10\%$  مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت  
دی، مگر دا ارزښت یی په دې اوسني ارزښت، چی  $150 + 150 \cdot 10\% = 165DM$   
په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزښت وروسته اوس

$$165 - 165 \cdot 10\% = 165 - 16,50 = 148,50DM$$

مارکونه دی. کله یوه وکتونکی بنسټ ارزښت یو د په سلو کی  
ارزښت سپړل کیږی، کیږی شی چی دا دیو د ساړه لاری وشی.

بیلگي:

اول ( د  $350$  ماروکونو  $14\%$  کی داسی شمیرل کیږي:  $350 \cdot 0,14 = 49 DM$   
دوم ) که د  $4568$  کیلو گرامه بنسټ ارزښت په  $22\%$  کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568 \cdot 0,78 = 3563,04 DM$$

دریم ) که د  $2303 m^2$  بنسټ ارزښت په  $24\%$  جگ شي، نو لاس ته ترې راځي»

$$2303 \cdot (1+0,24) = 2303 \cdot 1,24 = 2855,72 \text{ m}^2$$

لاندي بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بنه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د يوه بنسټ- يا سټه ارزښت G يو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې مور يی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:  
۱ په زرو کی 1 % له G دی  $G / 1000$   
د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولگنې ۱۰۰۰ (په ماتلاندي کی ) ، 1000% له دې سره يو سټه ارزښت دی.

بیلگه :

4,7 % له 3690DM دې: 17,34DM

مور غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی يو ځانگړي بنی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره يا د يوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بدایي يا سرماي) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکونکی څه پیسی باید لاس ته راوی، د ارزښت بایلو تر نامه، چې دې ته د سرمایي گټه وایي. په بانکي معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی گټې ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله گټه بانک د پوروی څخه د ورکړشوي پور په مقابل کی لاس ته راوړي، د دې په څې يا برعکس څوک چې په بانک کی شمیرکتا بچه خلاصوي او په بانک کی پیسی سپما کوي ، نو دمركزي يا ملي بانک په هدايت د

## سرلیک

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به مور د سپما گټه ووايو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورگټی او سپما گټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینشپ کی باید د ساده گټی او داسی په نامه د گټی گټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده گټه کی پوروری د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی گټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا گټه د کال په اخر کی په منظمه توگه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د گټی گټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت گټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د گټی گټه هم خوندي یا شامل ده، دلته هغه د هرکال گټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیري او بیا د ټولو گټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یواځی ساده گټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

## پیلبلگه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانک کی شمیرنه کي په بانک کی اینوولکیږي، چي کلنی گټه یی %4,5 ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینونکي په بانک کی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟  
دلته په پوره هدایت ساده گټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توگه داسی شمیرنو کی د گټی گټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه گټوونکی بډایي یا سرمایه K ( بنسټسرمایه ) ده، او د په سلو کی ارزښت گټه Z ده ( په المانی مارکونو ) ، د په سلو کی مقدار ، چی ما کله په سلو کی ټاکنه ( یعنی په سلو کي څومره اندازه ) بللی په % .



دا چی په دنده یا شمیرنه کې گټه غوښتل شوې ( دمخه برخه دې، یعنی د  
په سلو کې ارزښت دې وکتل شي ) ددې لپاره لاس ته راځي  

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$
دا د یوه کال لپاره گټه ده ، په بنسټیزه بډایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونه دي.  
په درنیمو کالو کې په ساده گټونه بډایي، چی بانکی شمیر یی واز  
کړی  $3,5 . 157,50 = 551,25DM$  لاس ته راوړي. په دې توگه به په سپما  
کتابچه کې  $3500 + 551,25 = 4051,25DM$  (مارکونه) وي.

د گټی وخت  $t$  لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي . ، بیا نو په  
بانکي شمیرنه کې د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره  
۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توگه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی  
صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کې هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل  
کیري ( د سپما ورځ Wertstellung یا Valutierung )، هغه ورځ، چی پیسی بیرته  
له بانک اخستلي کیري یا له بانک بیرته پورته کیري، نه ورسره شمیرل کیري.

د گټی فرمول:  $Z = K.p / 100$  . د ورځنی گټی فرمول:  $Z = K.p.t / 100.360$

## بیلگی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ . ۱۹۹۰ پورې څومره  
گټه کوي، که گټه % 4,75 وي.

د گټی وخت د ورځو په بنسټ شمیرو:  $t = 12 + 60 + 3.360 = 1152$  ورځي.  
د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$



## سرلیک

دوم : یوې بنځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کینښول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانک څخه راواخستلې. دې بډایي یا سرمایي څومره گټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4,0809 \Rightarrow p \sim 4,08\%$   
 دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده گټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جگه شي، که بډایي په ۵, 4 % گټه سپما شوې وي؟
- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4,5 = 8000$

ورځي ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځي

څلورم : یو بډایي ، چې لاتري یې ختلی په ساده گټونه ، چې ۷ ، ۶ په سلو کې ده له بانک څخه د میاشتی ۲۰۰۰ مارکونه گټه اخلي.

دا د لاتري ختنه به څومره جگه وي؟

مور دا د گټې فرمول د بډایي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6,7 .30 = 358208,95DM$   
 لکه چې پوهیږو ، بانکونوپرکسیس یا کار کې د گټې گټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د گټې گټه کلنی شمیرل کيږي او بډایي ته ورزیاتیږي.  
 یو پیلبډایي  $K_0$  ، د یوه کال په اوږدوالي کې د یوې گټې ټاکه یا مقدار  $p\%$  سره په گټه اچول کيږي، د کال په اخر کې د یوې گټې

•••

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p / 100)$$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته  $K_0 \cdot p / 100$  د یوه کال را اچولی گټه ده، د یو کال په پیلبډایي  $K_0$  سره.

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلېدایي د همغی پنیښکټی یا گټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 \cdot P / 100) + (K_0 + K_0 \cdot P / 100) \cdot (P / 100) \\ = K_0 + K_0 \cdot P / 100 + (K_0 \cdot P / 100) \cdot (P / 100)$$

$K_0$  که نوکانو یا غیر دباندي ونيول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2 = K_0(1 + 2 \cdot P / 100 + P^2 / 100) = K_0(1 + P / 100)^2 = K_1(1 + P / 100)$$

له درې کاله وروسته دا بډايي يا سرمايه ده:

$$K_3 = K_0(1 + P / 100)^3 \quad K_3 = K_2(1 + P / 100)$$

که دا شميرنه په ورته توگه دوام پيدا کړي، نو د  $t$  کالو وروسته په ټوليزه توگه لاندې بډايي لاس ته تري راځي

$$K_t = K_0 \cdot (1 + P / 100)^t = K_{t-1} \cdot (1 + P / 100)$$

د  $(1 + p / 100)$  لپاره غواړود لنډونی له امله  $q$  وليکو،  $q$  گټی فاکتور يا گټی ځلونی بلل کيږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د گټی گټی فرمول: يوه بډايي  $K_0$  د  $t$  کالو وروسته د  $p\%$  کلنی

گټی باندې (د گټی جگيدنه) په  $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0 \cdot q^t$  لويه شوې

بيلگه: له درينيمو کلو وروسته په  $4,5\%$  گټه  $3500$  مارکونه په کوم ارزښت لوييږي؟

$$K_{3,5} = K_0 \cdot q^t = 3500 \cdot 1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM مارکونه}$$

د گټیگټی شميرنی سره بډايي  $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots, K_t$  يوه هندسی پرلپسی

جوړوي (ددې لپاره دې ځما د شميرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلېدایي  $K$  او ځلونی

$q = 1 + p / 100$  سره، گرافیکی که وکتل شي، نو د گټی لوييدنی

فنکشن  $q^t = K_t = K_0$  يو اکسپوننشل بلواک انځوروي. د تعريفديري  $D = Q$  سره.

ساده گټه اچونی بيا يو لاینی فنکشن  $t C Q$ ;  $K_t = K_0 (1 + p \cdot t / 100)$  په

نڅبنه کوي. له دې امله بډايي په ساده گټه اچونه دومره چټکه نه لوييږي، لکه چی

په يوه دگټی گټی اچونی باندې.

بيلگی: ۱ - يو د  $4700$  افغانیو مقدار يا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده گټه اچونه

اوب (په د گټی گټی اچونی چی  $4,5\%$  دی ايسوول کيږي. دا هر پایبډايي څومره لويه ده؟

$$a) K_5 = K_0(1 + P \cdot t / 100) = 4700(1 + 4,75 \cdot 5 / 100) = 5816,25 \text{ Af}$$

$$K_5 = K_0 + 1116,25 = 5816,25 \text{ Af}$$

$$b) K_5 = k_0 \cdot q^t = 4700 \cdot 1,0475^5 = 5927,45 \text{ Af}$$

۲ - يوه بډايي د  $50000$  افغانیو په  $3,5 \cdot 97$  واچول شوه او بايد په  $31.12.2001$  راووستل شي.

څومره په  $4,5\%$  گټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له  $31.12.01 - 1$ ) په گټه واچول شي؟

## سرلیک

$$K = [K_0 + K_0 \cdot p \cdot t / 100 \cdot 360] \cdot (1 + p / 100)^n$$

$$= [50000 + 50000 \cdot 4,5 \cdot 237 / 36000] \cdot 1,045^4$$

$$K = 61392,35 \text{ Af}$$

د لویو  $t, q, K_0$  او  $K_1$  په گټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د گټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي  $K_0$  پوښتنه رامنځ ته شي، چی د  $t$  کلونو په  $p\%$  گټونه یا گټه و بډایي  $K_1$  ته بیایي.  $K_0$  د  $K_1$  د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د  $K_0$  شمیرنه په ورکړشوي بډایي  $K_1$  ته چی بیایي دیسکونتونه Diskuntierung یا گټوني بلل کیږي:

$$K_0 = \frac{K_1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t} = \frac{K_1}{q^t} = K_1 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^t$$

دلته  $(1/q)$  د گټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له  $K_1 = K_0 \cdot q^t$  اړیکو څخه لاس ته راغلی، چی د  $K_0$  په لور اوبی یا حل شوي. بیلگي:

- ۱- یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیریدنی له امله یو څه نیسی بانک کی سپما کړي، د  $5\%$  په گټه. دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به خومره لوي، چی دا لمسی په خپله  $25$  کالیزه  $20000$  مارکونه لاس ته راوړي؟ باید په بانک یکی  $23$ ،  $9612$  مارکونه کینبول شي یا سپما شي..
- ۲- یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف  $150000$  مارکونه نغد،  $120000$  مارکونه له دوه کاله وروسته او نور  $150000$  مارکونه د ټولیزه توگه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعنی د کور مالک ته ورکړي. علاقمند ب غواړي، چی  $130000$  مارکونه نغد،  $150000$  مارکونه له درې کالو وروسته او  $140000$  مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي. کوم یو علاقمند گټور دی، که مور  $8\%$  گټه ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړای شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

بیلگه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي ، کومه چی د گټی په گټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی گټی د څلورو کالو لپاره په بانگ کی پاتي شي یا کینسول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف ( کلني ، ب ) نیمکلنی، خ ) میاشتنی، او ت ) په ورځنی گټونه؟

تمرینونه:

- ۱ - یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ، ۴ % کمشو» د دې کالیو لومړنی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟
- ۲ - یو پطلون په ۵ ، ۴ % ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟
- ۳ - د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونو راکمیري، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا څومره قمته ده؟
- ۴ - یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونو گرانیري او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا گرانښت په سلو کی څومره دی؟
- ۵ - رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانگړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

## سرلیک

الف ( یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په گوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد ادا کولو په حالت کې ۳٪ سکونتو.

دلته څومره پیسې ورکول کېږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کې ۲۰٪ ربات لاس ته راوړي، او دا چې هغه پیسې ندې ورکوي، بر سیره پردې ۲٪ سکونتو هم ورکول کېږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.

دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ - په یوه نغدپیسوبیه ۱۴٪ کې د ماليې ورزیاتیري او ۳٪ ربات ورکول کېږي. که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکي شی، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟

دا نغده ارزښت به څومره جگ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ - اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمې پوره کوونو لپاره کلنی ۵، ۱ په زرو گټه باید نیمې ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ - یوه گازره په منځنی توگه 0,5% ویتامین A لري. څو گرامه گازرې به ۱۵ ملي گرامه ویتامین A ولري؟

۹ - په یوه موټر بیولو کنترول کې د یوه موټر څغلونکی څخه د ازمایښی لپاره وینه اخستل کېږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چې موټر څغلونکی 1,7% الکول په وینه کې لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چې د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ - د ارزښت کاغذ ( دا په بانک کې څه کاغذونه دې، چې خلک یی اخلی، په کلنی ټاکلی گټی سره ) یو پیسې اینوونکی ددضیویدند Dividende ( کلنی گټه ده ) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څومره پیسیبه هغه اینودلي وي، که یوه بډايي

په ۵، ۷٪ گټه اینوول شوې وي؟

۱۱ - اباسین په یوه بانکی حساب کې ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴٪ کې گټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتو ټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو



یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له برینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرینیز الجبر

۹ - د شمیرپوهني بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه يا ست تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبیوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگرېزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شميرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمير پوهنې پښتو ډکشنري د شمير پوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې و به غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تيوري

- د بنسټونو لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې -د شمير پوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

سرليک

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ه لمریز کي د شينواریو هسکه مينه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.



د هسکې ميني د لومړني بنوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (بنوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چي هلته يې د شميرپوهني ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کي سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د رياضي څانگه کي د پوهني وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميږي په ۱۹۷۲ کي له لري د ميرمن بناپيري سره واده شوی، چي د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن بناپيري سره په ۱۹۶۳ ز ک کي کوزده کړي وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش وينا کي د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چي څانگه او اباسين نوميری. څانگه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سایکولوژي لوستلي.

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**