



د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د

ساینس د مرکز معینیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست

د ریاضي د تدریس لارښود

یوولسم ټولگی



Ketabton.com

۱۳۹۲ هـ. ش.

د چاپ کال: ۱۳۹۱



د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

د ښوونکي کتاب

د ریاضي د تدریس لارښود

یوولسم ټولگی

د چاپ کال: ۱۳۹۲ هـ. ش.

ليکوالان:

- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی
- سرمؤلف عبدالکبير د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدران) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی
- د مؤلف مرستيال نویدالله هاشمي د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی

علمي او مسلکي ايډيټ:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی ریاست کې
- سرمؤلف ميرنقيب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی
- محمد داؤد غیرت د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی

د ژبې ايډيټ:

- محمد قدوس دکوخیل د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی

دیني ، سياسي او کلتوري کمیټه:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار
- محمد اصف کوچی د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې غړی

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
- دکتور شیر علي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤل
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رئیس.

طرح او ډيزاين:

وليد((نويد)) نسيمي

د چاپ د سمون چارې: محمد کبير حقل د پوهنې وزارت د نشراتو او اطلاعاتو رئیس

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، کوچري دي	پامپریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیري	لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مودی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پیغام

ګرانو استادانو او ښوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې چمتو کېږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم د وخت له غوښتنوسره سم علمي او رغنده پراختیا ومومي. البته نه ښايي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

د ښوونکي د لارښود د اکتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې بنسټ چمتو او ترتیب شوی دی. د تدریس د نويو میتودونو له مخې فعالیتونه او معلوماتي مواد په کې ورزیات شوي دي چې په ډاډه سره به د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو د فعال ساتلو لپاره ګټور او اغېزمن وي.

هیله من یم د دې کتاب منځپانګه، چې د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تالیف او چمتو شوې، ستاسو درنو استادانو د ګټې وړ وګرځي. له فرصت څخه په استفادې د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه غوښتنه کېږي د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې مرسته وکړي چې په دې توګه د پوهنې د نظام موخې او هیلې ترسره شي او ځوان نسل او هېواد ته ښې پایلې او بریاوې ور په برخه کړي.

زموږ ګران استادان او ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې ستره دنده او دروند مسؤلیت لري.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو او ارزښتونو، د ټولنې د څرګندو اړتیاوو، ملي ګټو او وطنپالنې له روحیې او د ساینس او تکنالوژۍ له نوو علمي معیارونو سره سم پراختیا ومومي.

ددې سترې ملي موخې د تر لاسه کولو لپاره د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده ګټورو وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي او د ښوونکي د لارښود د کتابونو په لاسه تالیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه، چې ددې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې برخه اخیستې او همدارنګه له ملي او نړیوالو درنو موسسو او نورو ملګرو هېوادونو څخه، چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي او د ښوونکي د لارښود کتابونو په چاپ او وېش کې یې مادي یا معنوي مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم او د لا نورو مرستو هیله یې لرم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردک

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

ښوونکي سره څو خبرې

ښاغلی ښوونکيه:

د رياضي د ښوونکي د لارښود کتاب، چې د فعالې زده کړې په اساس تاليف شوی، يوازې د ښوونکي دگټې اخيستني لپاره دی، د زده کوونکو په لاس کې دې نه لوېږي.

د ښې او مؤثرې زده کړې او تدريس لپاره بايد دا لاندې ټکي په پام کې ونيول شي:

(۱) ټولگي ته د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو لکه (د سلام او احوال پوښتنه، د ټولگي تنظيم، حاضري اخيستلو، د کورنۍ دندې له ليدلو، د تېر لوست ارزونې او د امکان په صورت کې د تېر او راتلونکي لوست ترمنځ د اړيکې له پيدا کولو وروسته په نوي درس پيل وکړئ.

(۲) درسي گټور مواد، چې په چاپيريال کې پيدا کېږي او په لارښود کې يې يادونه شوې له مخکې يې ټولگي ته راوړئ.

(۳) په دې لارښود کې په کارول شوو ميتودونو سربېره له هغو گټورو ميتودونو څخه هم کار اخيستلای شئ، چې د دندې په اوږدو کې مو کارولي او تجربه کړي دي.

(۴) په دغه کتاب کې د تدريس پړاوونه په عملي شکل په پام کې نيول شوي دي. که په سمه توگه عملي شي په يقين سره چې ستاسو تدريس به گټور واقع شي.

(۵) د امکان تر پولې په موضوع کې اضافي معلومات چمتو شوي دي. دا معلومات په تدريس کې له تاسو سره مرسته کوي. په همدې توگه کولای شئ د زده کوونکو احتمالي پوښتنو ته د ډاډ وړ ځوابونه ووايئ. له دې امله ضروري بريښي چې د موضوع له تدريس د مخه هغه په غور ولولئ او ځان پرې پوه کړئ.

(۶) يو ۴۵ دقيقه يي درسي ساعت داسې وېشل شوی دی چې په ټاکل شوي وخت کې تدريس وشي او درس پای ته ورسېږي. که په هغه ټاکل شوي وخت کې ونه شئ کړای چې هغه عملي کړئ، نو واک لرئ چې هغه وختونه لنډ يا زيات کړئ د بېلگې په ډول: د درس د جريان فعاليت د مؤلفانو له خوا ۲۸ دقيقې ټاکل شوی دی. که ستاسو له نظره هغه زيات وي، کولای شئ د بېلگې په توگه هغه ۲۰ دقيقې کړئ او پاتې نورې اته دقيقې به نورو فعاليتونو ورزياتې کړئ.

(۷) د تدريس په بهير او د فعاليتونو په سرته رسولو کې ټولو زده کوونکو ته برخه ورکړئ

(۸) تمرينونه بايد په ټولگي کې د زده کوونکو په گډون حل شي.

(۹) که چيرې د يوه تمرين پوښتنې زياتې وي، يو شمېر دې د درس د پياوړتيا په پړاو کې د زده کوونکو له خوا په ټولگي کې حل او پاتې نورې دې زده کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړل شي.

(۱۰) د هر څپرکي په پای کې اړوند تمرين ته ځای ورکړ شوی دی. کوبښن دې وشي چې د سختو او اسانه پوښتنو په پام کې نيولو سره د څپرکي د تمرين پوښتنې په دوو، دريو او يا څلورو درسي ساعتونو کې، يا هر څومره چې تاسو يې غوره بولئ، د زده کوونکو له خوا حل شي.

(۱۱) د رياضي په درسي کتاب کې امکان لري چې ځينې طباعتي اشتباهگاني موجود وي او د تجديد نظر تر وخته نشي کيدای چې اصلاح شي ليکن د رياضي د لارښود د ليکلو په وخت کې په پام کې نيول شوي دي، محترم ښوونکي کولای شي چې د لارښود له مخې يې اصلاح کړي.

په درناوي

لړليک

مخ

سرليک

لومړۍ څپرکۍ مخروطي مقاطع

- ۱ • مخروطي مقاطع
- ۴ • الپس (Ellipse)
- ۶ • قطرونه او راسونه، د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه، د الپس تناظري مرکز، د الپس تناظري محور او عن‌المركزيت
- ۸ • د بيضوي معادله
- ۹ • د بيضوي معادله (دويم حالت)
- ۱۲ • د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (لومړۍ حالت)
- ۱۴ • د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (دويم حالت)
- ۱۹ • پارابولا
- ۲۱ • د پارابولا معادله (لومړۍ حالت)
- ۲۳ • د پارابولا معادله (دويم حالت)
- ۲۶ • د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي
- ۲۸ • د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي (دويم حالت)
- ۳۲ • هايپربول
- ۳۴ • د هايپربول معادله
- ۳۶ • د هايپربول معادلې (دويم حالت)
- ۴۰ • د هغې هايپربول معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (لومړۍ حالت)
- ۴۲ • د هغې هايپربول معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي (دويم حالت)
- ۴۵ • د يوې کرښې موقعيت نظر مخروطي مقاطعو ته
- ۵۱ • د لومړي څپرکي د عمومي پوښتنو حل

دويم څپرکۍ مثلثات

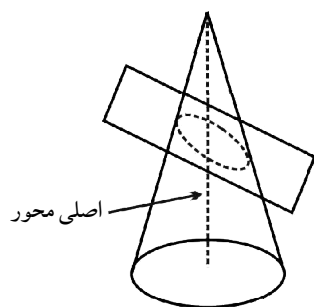
- ۶۱ • د ساين قانون
- ۶۲ • د ساين د قضیې ثبوت په منفرد الزاويه مثلث کې
- ۶۵ • د کوساين قانون
- ۶۸ • د تانجنټ قانون
- ۷۴ • مثلثاتي مطابقتونه
- ۷۹ • مثلثاتي معادلې
- ۸۴ • دويمه درجه مثلثاتي معادلې
- ۸۷ • د دوه مجهوله مثلثاتي د معادلو سېسټمونو حل
- ۹۳ • د دويم څپرکي د عمومي پوښتنو حل

درېم څپرکۍ فضايي هندسه

- ۱۰۳ • اساسي مفاهيم او اکسيومونه
- ۱۰۵ • په درې بعدي فضا کې کرښه او مستوي
- ۱۰۷ • د دوو مستقيمو کرښو او دوو مستويگانو نسبتي حالتونه
- ۱۱۰ • په فضا کې موازي مستقيم خطونه
- ۱۱۵ • په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه
- ۱۱۸ • په فضا کې موازي مستقيم خطونه او موازي مستويگانې
- ۱۲۱ • په فضا کې متعامدې مستقيمي کرښې او مستويگانې

۱۲۳	• په فضا کې موازي مستوي گانې
۱۲۵	• د درېم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	څلورم څپرکی ترادفونه
۱۲۷	• ترادفونه
۱۳۰	• حسابي ترادف
۱۳۳	• په يوه حسابي ترادف کې n - ام حد پيدا کول
۱۳۵	• د حسابي ترادف وسطي حد
۱۳۷	• هارمونيکي ترادف
۱۴۰	• هندسي ترادف
۱۴۳	• په يوه هندسي ترادف کې n - ام حد پيدا کول او د هندسي ترادف وسطي حد
۱۴۶	• د ترادفونو قسمي مجموعه
۱۵۳	• د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه
۱۵۶	• د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل
۱۵۹	• لايتناهي هندسي سلسلې
۱۶۲	• د څلورم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	پنځم څپرکی لوگاريتم
۱۶۷	• اکسپوننشيال تابع گانې
۱۷۳	• لوگاريتم
۱۷۵	• لوگاريتمي تابع گانې
۱۷۸	• معمولي لوگاريتم او طبيعي لوگاريتم
۱۸۰	• د لوگاريتم قوانين
۱۸۴	• د لوگاريتم د يوې قاعدې اړول په بله قاعده
۱۸۸	• کرکټرستيک او ماتريس
۱۹۰	• د لوگاريتم جدول
۱۹۳	• انټي لوگاريتم
۱۹۵	• خطي انټرپولېشن
۱۹۸	• د لوگاريتمي او اکسپوننشيال معادلو حل
۲۰۲	• درياضيکي عمليو په سرته رسولو کې له لوگاريتم څخه کار اخېستنه
۲۰۵	• د پنځم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	شپږم څپرکی مټريکسونه
۲۱۱	• مټريکسونه
۲۱۴	• د مټريکس ډولونه
۲۱۶	• د مټريکسونو جمع او تفریق
۲۱۸	• په مټريکس کې د سکالر ضرب
۲۲۱	• د دوو مټريکسونو ضرب
۲۲۴	• د يوه مټريکس ترانسپوز مټريکس
۲۲۶	• ډيټرمينانټ
۲۲۹	• د ډيټرمينانټ خاصيتونه
۲۶۱	• د 2×2 مرتبې مټريکسونو ضربي معکوس
۲۳۴	• له معکوس مټريکس څخه په کار اخېستني سره د خطي معادلو د سيستم حل
۲۳۷	• د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه
۲۴۰	• د معادلو د سيستم حل د گوس (Gouse) په طريقه
۲۴۲	• د شپږم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	اووم څپرکی وکتورونه
۲۴۹	• د وضعه کمياتو په سيستم کې وکتورونه
۲۵۲	• د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی
۲۵۵	• وکتورونه په سطح او فضا کې
۲۵۸	• په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

۲۶۲	• د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه
۲۶۵	• د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل
۲۶۹	• د وکتوري ضرب حاصل
۲۷۱	• د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل
۲۷۳	• د مخلوط ضرب حاصل یا درې گونی ضرب
۲۷۷	• د اووم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
	اتم څپرکی احصایه
۲۸۵	• د بدلونونو ضریب
۲۸۸	• په نورمال منحنی کې تېتوالی (پراگندهگي)
۲۹۱	• د نورمال توزیع د ډول شاخصونه
۲۹۵	• د پرسوب ضریب
۲۹۸	• څو متحول له ټولنې
۳۰۰	• د پراگنده گي گراف
۳۰۳	• پیوستون او د پیوستون ضریب
۳۰۷	• د خطي میلان معادله
۳۱۰	• د اتم څپرکي د عمومي پوښتنو حل
۳۰۱	• د څپرکي پوښتنې
	نهم څپرکی احتمالات
۳۱۷	• پرمو تېشن یا ترتیب
۳۲۱	• ترکیب
۳۲۸	• تبدیل
۳۳۱	• د بینوم قضیه
۳۳۴	• دوه جمله یي احتمال
۳۲۳	• د نهم څپرکي د عمومي پوښتنو حل



لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

مخروطي مقاطع

د درسي کتاب (3) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي	ددې لوست په پای کې زده کوونکي و توانېږي چې: • مخروط وپېژني او د مخروطي مقاطع په مفهوم پوه شي. • له يوې چارې څخه په کار اخېستنې سره د يوې مستوي په توگه، مخروط په څو حالتونو (افقي، مايل او عمودي) ډول پرېکړې مخروطي مقاطع په لاس راځي او لاسته راغلي شکلوته يو له بله تشخيص کړي. • د پورته پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	چاره، گازرې، بياتي او کاغذ، د مخروطي مقاطع د تعريف د عنوان اړوند شکل، د شکل چارټ د کتاب 4 مخ
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی د سلام او احوال پوښتنې او د زده کوونکو د ځواب له اورېدو څخه وروسته جوړ کړی چارټ دې د ټولگي مخې ته ځوړند کړي او وړودي پوښتنې دې له هغو وپوښتي، که چيرې ځوابونه ونشي ويلای ښوونکی دې په لاندې ډول توضيح کړي: • که چيرې يو مخروط د يوې مستوي په واسطه په افقي ډول قطع شي د هغه مقطع د اديرې شکل لري. • که چيرې يو مخروط د يوې مستوي په واسطه په مايل ډول قطع شي يوه بيضوي ترېنه جوړېږي.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):	ښاغلی ښوونکی دې د مخروطي مقاطعو تعريف د تختې پرمخ وليکي او اړونده چارټ چې مخکې له مخکې يې جوړ کړی دی د ټولگي په مخکې ځوړند کړي. • مخروط، اصلي محور، مؤلّد، راس، پورتنی او ښکتنی برخه او د مخروط د تشکيلولو لاره دې زده کوونکو ته توضيح کړي. • ښوونکی د مخروطي مقاطعو تعريف زده کوونکو ته بيانوي. • ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي هرې ډلې ته دې دوې، دوې گازرې له يوې چارې سره او يا يوه دانه بياتي او د درملو پوړۍ (چې مخروطي) شکل لري، توزيع ورکړي، چې زده کوونکي د کتاب د 3 مخ فعاليت په منظمه توگه سرته ورسوي.

یعنې په اصلي محور یې عمود قطع کړي، (افقي مستوي) له اصلي محور سره مایل او له مؤلّد خط سره یې موازي قطع کړي، دوې سر پر سر گازرې دې له لارښوونې سره سمې قطع کړي او په پای کې د دریم مخ وروستی فعالیت دې له هدایت سره سم سرته ورسوي.

- په پای کې دې ښوونکي د هرې ډلې استازی راوغواړي، ترڅو د خپل فعالیت پایله نورو ته توضیح کړي، که چیرې په توضیح او کار کولو کې تېروتنه کوي، د بلې ډلې استازي ته دې دنده ورکړي، ترڅو د فعالیت پایله خپلو ټولگيوالو ته بیان کړي. د ستونزو په صورت کې دې ښوونکي مرسته وکړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلي ښوونکي دې د لوست د لارښه تحکیم لپاره 2,1 پوښتنې په ټولگي کې د زده‌کوونکو په گډون سره حل کړي.

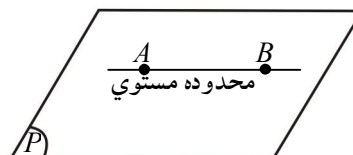
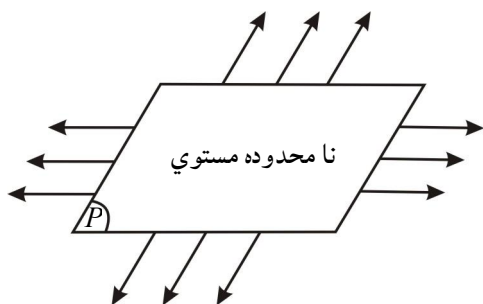
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلي ښوونکي دې د زده‌کوونکو د پوهې او مهارت د ارزونې لپاره له زده‌کوونکو څخه وپوښتي:

1. کوم هندسي شکلونو ته مخروطي مقاطع ویل کېږي؟
2. څوک کولای شي چې د تختې پر مخ یوې مستوي او یو مخروط ته داسې تقاطع ورکړي چې د تقاطع په پایله کې یوه دایره جوړه شي. همدارنگه یو بل زده‌کوونکي دې داسې تقاطع ورکړي چې د هغه له تقاطع څخه یو الپس جوړ شي.

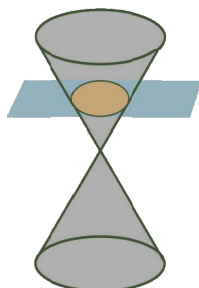
8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

مستوي یوه لومړنۍ (نه تعریف شوې) اصطلاح منل شوې ده، خو کولای شو د ولاړو او بېو سطحه، د میز سطحه د کاغذ د یوې پانې سطحه او یا د یوې هواړې ټوټې سطحه د یوې مستوي په توگه وپېژنو؛ له دې امله د یوې مستوي د ښودلو لپاره له لاندې شکلونو څخه کار اخیستل کېږي:



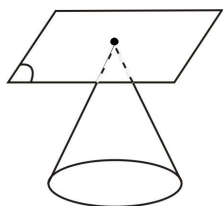
9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

- 1- د پورتنی شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې گډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.



حل که چیرې یوه مستوي مخروط داسې قطع کړي، چې په اصلي محور باندې عمود او یا د مخروط له قاعدې سره موازي وي، په دې صورت کې گډ فصل یې یوه دایره ده؛ لکه په مخامخ شکل کې:

که چیرې یوه مستوي د مخروط له قاعدې سره موازي وي او د مخروط له راس سره تماس ولري د تقاطع ځای یې یو ټکی دی، لکه په شکل



2- که چیرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په

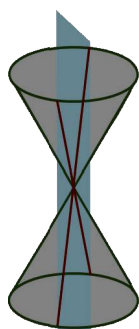
برکې ولري، گډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

حل که چیرې یوه مستوي د دواړو مخروطونو اصلي

محورونه په برکې ولري، په دې صورت کې د مستوي او

مخروطونو گډ فصل دوه متقاطع خطونه دي چې د کتاب په

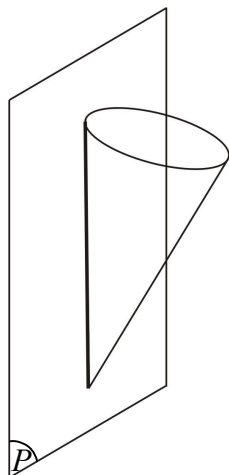
4 مخ کې لیدل کېږي.

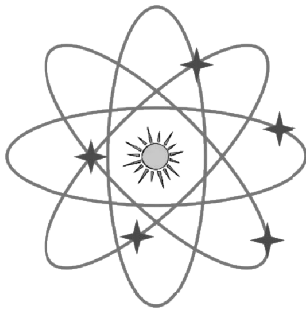


3- د یوې مستوي او مخروط گډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

حل که چیرې یوه مستوي یو مخروط قطع کړي چې اصلي

محور په برکې ولري؛ نو گډ فصل یې یو خط دی.





لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

الپس (Ellipse)

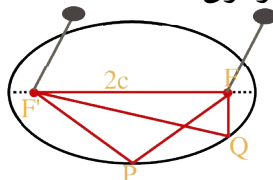
د درسي کتاب (5) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي و توانېږي: • الپس وپېژني او په مفهوم يې پوه شي. • د الپس محراقونه، راسونه، اصلي محور، او د الپس مؤلډ وپېژني. • پورتنۍ اصطلاحگانې (نومونه) په شکل کې وښودلای شي. • د دوو مېخونو او تار څخه په کار اخېستنې سره يوه بيضوي يا <i>Ellipse</i> رسم کړای شي. • له پورته پوهې او مهارت څخه په خپل ورځني ژوند کې کار واخلي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	شېشې مېخونه له تار سره يا د اړتيا په اندازه طناب د 4 انچه اوسپنيز يا د لرگيو له مېخونو سره، وروډي چارټ او د دويم فعاليت چارټ
4- د وروډي برخې توضيح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی د سلام او لومړنيو فعاليتونو له اجرا کولو څخه وروسته وروډي چارټ د ټولگي مخې ته ځوړند کړی او زده کوونکو ته ووايي چې تاسې د جغرافيايي په مضمون کې لوستي دي چې سيارې د لمر په چاپيره بيضوي مسير سرته رسوي او په شکل کې يې ورته وښايست.

5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):

ښاغلی ښوونکی! که چيرې د زده کوونکو مېزونه داسې وي چې وکولای شو د هغو پر مخ شېشې مېخونه ټک و هو، په دې صورت کې زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د کتاب د 5 مخ لومړۍ فعاليت سرته ورسوي، پرته له هغه زده کوونکي له ټولگي څخه بهر وباسي، په دوو ډلو يې و وېشي، په دوو ټکو کې د لرگيو يا 4 انچه مېخونو په ټک و هو لو سره يو حلقه شوی تار چې فاصله يې د دواړو مېخونو له منځ څخه لږ څه زياته وي داسې چې مېخونه د حلقې په منځ او ورسره نښتې وي، وروسته يو لرگوټی له حلقې سره نښتی د مېخونو په شا او خوا و خوځوی



و به لېدل شي چې د خوځېدلي لرگوټي مسير د يوې بيضوي شکل جوړوي. هغه ټکي چې په هغو کې مېخونه ټکول شوي دي د الپس يا بيضوي محراقونه بلل کېږي.

ښاغلی ښوونکی د دويم فعاليت چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوی، زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د دوو ټکو

ترمنځ د فاصلې له فورمول يعني $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ څخه په کار اخېستنې سره د MF' , MF او AA'

اوږدوالی پیدا کړي، همدارنگه د $|MF| + |MF'|$ د جمعې حاصل په لاس راوړي، په پای کې له ډلو څخه یو یا دوه کسه راوغواړئ، چې خپل ډله ییز کارونه نورو ته توضیح کړي.

ښاغلی ښوونکی د لومړي فعالیت دریم (5مخ جزء) زده کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړې.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د تحکیم ورکولو لپاره د دویم فعالیت دریم جزء چې په 6 مخ کې دی، د زده کوونکو په گډون سره د پوښتنې او ځواب په شکل د تختې پر مخ سرته ورسوئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د ډاډینې لپاره چې زده کوونکو پوهه او مهارت حاصل کړي دی او که نه؟ له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتئ:

1. الپس څه ډول هندسي شکل ته ویل کېږي؟
2. څوک کولای شي چې الپس رسم او د هغه محراقونه وښيي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

غواړو چې د $M(1, \frac{3}{2})$ او $F(1, 0)$ ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړو؛ نو:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$MF = d_1 = \sqrt{(1-1)^2 + (\frac{3}{2}-0)^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}$$

$$d_2 = MF' = \sqrt{\{1 - (-1)\}^2 + (\frac{3}{2} - 0)^2}$$

$$d_2 = MF' = \sqrt{(1+1)^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$|MF| = \frac{3}{2}, \quad |MF'| = \frac{5}{2}, \quad |MF| + |MF'| = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$AA' = \sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2+2)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

څرنگه چې $AA' = |MF| + |MF'| = 2a$ دی؛ نو ثابت شوه چې $AA' = 4$ دی.

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

قطرونه او راسونه، د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه، د الپس تناظري مرکز، د الپس تناظري محور او عن المركزيت

د درسي کتاب (6 او 7) مخونه

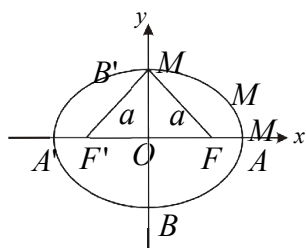
د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي و توانېږي چې:
- پوهنيزه	• د الپس قطرونه او راسونه وپېژني، د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه باندې پوه شي، د
- مهارتي	الپس تناظري مرکز او تناظري محور وپېژني او همدارنگه د عن المركزيت په مفهوم پوه شي.
- ذهني	• د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه د فيثاغورث له قضیې څخه په کار اخېستنې سره پيدا کړي او همدارنگه له شکل څخه په کار اخېستنې سره د الپس عن المركزيت په لاس راوړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د 6 او 7 مخونو د شکلونو چارټونه
4- د ورودې برخې توضیح (5 دقیقې)	څرنگه چې پورتنی عنوانونه د الپس فرعي عنوانونه دي؛ نو له دې امله ورودې پوښتنې نه لري چې توضیح ورکړل شي.

5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):

ښاغلی ښوونکی دې د سلام، احوال پوښتنې او نورو لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست عنوان د تختې پر مخ وليکي او د کتاب د 6 مخ شکل چارټ دې د ټولګي مخې ته وځړوي، وروسته دوه زده کوونکي راوغواړي، ترڅو لومړی زده کوونکی د الپس قطرونه په شکل کې وښيي او نوم یې واخلي د مثال په ډول AA' او BB' د الپس قطرونه دي او دویم زده کوونکی دې د الپس راسونه مشخص او نوم یې واخلي. وروسته له دریم زده کوونکي څخه پوښتنه وکړي چې د الپس کبیر قطر او صغیر قطر له چارټ څخه په کار اخېستنې سره وښيي، چې AA' د الپس کبیر قطر او BB' د الپس صغیر قطر دی.

يادونه ښاغلی ښوونکی دې له یوه زده کوونکي څخه پوښتنه وکړي که چیرې د M ټکي د صغیر قطر په راسونو یعنې په B او یا B' چې د الپس راسونه دي واقع شي، په دې صورت کې $\overline{MF}$ او $\overline{MF'}$ فاصلې څه ډول رابطه غوره کوي. که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای، ښوونکی دې ووايي چې په هغه صورت کې $MF = MF'$ کېږي.



$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a \Rightarrow \overline{MF} = a$$

د FMO په قائم الزاویه مثلث کې د فيثاغورث له قضیې سره سم $a^2 = b^2 + c^2$

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

پورتنی فورمول د الپس د محراقونو او قطر ترمنځ اړیکه ښيي.

- ښاغلی ښوونکی دې له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړي چې د یوه الپس تناظري مرکز او تناظري محور وښيي، که چیرې زده‌کوونکي ونشي کړای چې تناظري مرکز او تناظري محور وښيي، وروسته دې ښوونکي وروښيي.
 - همدارنګه ښوونکی دې پوښتنه وکړي چې: څوک کولای شي د الپس عن‌المرکزیت تعریف کړي؟
- په هغه صورت کې چې زده‌کوونکي د عن‌المرکزیت تعریف ونشي کړای، خپله ښوونکی دې تعریف کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل یقین لپاره چې زده‌کوونکو پورتنی موضوع ګانې زده‌کړي دي او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتي:

1. څوک کولای شي چې د الپس قطرونه او راسونه وښيي؟
2. څوک د الپس د اوږد او لنډ قطرونو ترمنځ اړیکه د فورمول په واسطه وبلای شي؟
3. له یوه زده‌کوونکي څخه پوښتنه وکړئ چې عن‌المرکزیت څه شی دی، تعریف یې کړی؟
4. په کوم دلیل د تل لپاره $e < 1$ دی؟

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که چیرې په بیضوي کې د کبیر قطر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟
حل که چیرې په بیضوي کې د کبیر قطر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، بیضوي په دایره بدلېږي؛ یعنې دغه ډول منحنی ته دایره ویل کېږي.

2- که چیرې د بیضوي عن‌المرکزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

حل څرنگه چې $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ ده؛ نو له دې څخه $c = 2$ او $a = 3$ قیمت اخلي.

د محراقونو او قطرونو ترمنځ د اړیکې له فورمول یعنې $a^2 = b^2 + c^2$ څخه کار اخلو او د b قیمت په لاس راوړو.

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = (3)^2 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$$

$$b = \pm \sqrt{5}$$

$$\text{کبیر قطر} = 2a$$

$$\text{صغیر قطر} = 2b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{کبیر قطر}}{\text{صغیر قطر}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

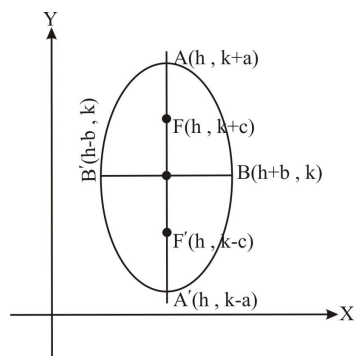
لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د بیضوي معادله

د درسي کتاب (9) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي د لوست په پای وټوانېږي چې: • د الپس یا بیضوي په معادله پوه شي. • د الپس معادله په لاس راوړای شي. • د الپس د فورمول په مرسته پوښتنې حل کړای شي. • له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د کتاب د 9 مخ د دویم شکل چارټ په ډبل خط، د گراف کاغذ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې له مخکې مو جوړ کړی دی، د تختې پرمخ وځړوی او له زده کوونکو څخه وړودي پوښتنه وکړي، ترڅو زده کوونکي د هغې په اړه فکر وکړي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی دې د 9 مخ فعالیت یوه زده کوونکي ته ورکړي چې د تختې پر مخ یې سرته ورسوي، په عین وخت کې دغه فعالیت نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په گرافي کاغذ کې یې سرته ورسوي. ښوونکی دې د زده کوونکو له کار او فعالیت څخه څارنه وکړي او ضعیفو زده کوونکو ته دې لارښوونه او ورسره مرسته وکړي. په پای کې هغه زده کوونکی چې فعالیت یې د تختې پر مخ سرته رسولی نورو زده کوونکو ته دې خپل کار توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې دې بل زده کوونکي ته دنده ورکړل شي چې فعالیت په تخته سرته ورسوي. هغه زده کوونکي چې تېروتنه یې کړې ده، خپله تېروتنه دې اصلاح کړي. ښاغلی ښوونکی دې د زده کوونکو په فعال گډون سره د پوښتنو او ځوابونو په ډول د الپس معادله ثبوت کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د کتاب د 11 مخ دویم مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د باور د پیدا کولو لپاره چې زده کوونکو لوست زده کړی، او که نه؟ له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتي: 1. څوک د الپس معادله پر تخته لیکلای شي؟ 2. که د الپس محراقونه د x پر محور وي، څوک د الپس د راسونو مختصات لیکلای شي؟	



لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د بیضوي معادله - دویم حالت

د درسي کتاب (10) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

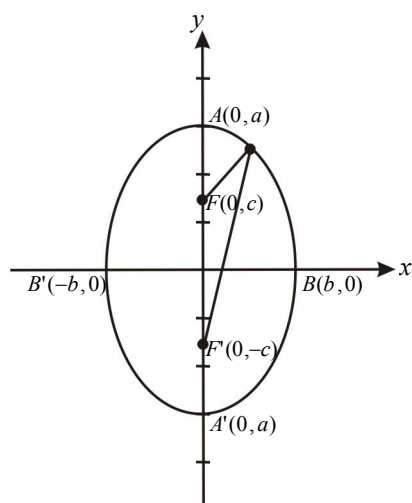
1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د الپس په معادله پوه شي. • د الپس معادله په لاس راوړای شي. • د الپس د فورمول په مرسته پوښتنې حل کړای شي. • له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنې او ځوابونه، ډله‌ییز او انفرادي کار	
3- مرستندویه مواد: په دې مخ کې د وړودي برخې د پوښتنې رسم شوی چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې مو جوړ کړی دی، د ټولګي په مخ کې وځړوی او پوښتنه وکړې، په تېر لوست کې د الپس محراقونه د x پر محور باندې پراته وو، نو د الپس معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ په لاس راغله، اوس که چیرې محراقونه د y پر محور باندې وي، د الپس معادله به څه شکل ولري؟ که چیرې ځواب مو په لاس را نه وړ، نو ورته ولیکئ چې معادله یې $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ده او شکل یې همغه گراف دی چې په چارټ کې رسم شوی دی.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې) • ښاغلی ښوونکی د 10 مخ لومړۍ مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولګي کې حل کړی. • ښاغلی ښوونکی دې زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو دریم مثال د یو بل سره په مشوره حل کړي. • ښاغلی ښوونکی دې زده‌کوونکو له ډلو څخه کتنه وکړي چې زده‌کوونکي د مثال حل له کتاب څخه نقل ونکړي. • ښاغلی ښوونکی دې فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي. • کوښښ دې وشي چې په هره ډله کې لایق او ضعیف زده‌کوونکي تنظیم شي. • ښاغلی ښوونکی دې د فعالیت په پای کې د هرې ډلې استازي راوغواړي چې خپل ډله‌ییز کار نورو ته د تختې پرمخ توضیح کړي که چیرې ونه توانېږي، مرسته او لارښوونه ورته وکړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکیم لپاره د کتاب 12 مخ څلورم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه د زده‌کوونکو په فعال ګډون سره په ټولګي کې حل کړی.	

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د ډاډ لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. څوک د الپس معادله په هغه صورت کې لیکي چې محراقونه یې د x پر محور وي؟
2. څوک د الپس معادله په هغه صورت کې لیکلای شي چې محراقونه یې د y پر محور وي؟
3. څوک د الپس معادله لیکلای شي، چې د اوږده قطر نیمایي اوږدوالی 5cm او د لنډ قطر نیمایي اوږدوالی یې 2.5cm وي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات



$$MF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

$$MF' = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2}$$

$$MF + MF' = 2a \quad \dots \quad I$$

MF او MF' په I رابطه کې وضع کوو:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a \quad \dots \quad II$$

II معادله ساده کوو:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$x^2 + (y-c)^2 = (2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$-4cy = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} \quad / \div (-4)$$

$$cy = -a^2 + a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

$$cy + a^2 = a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cy + a^2)^2 = a^2 \{x^2 + (y+c)^2\}$$

$$c^2 y^2 + 2a^2 cy + a^4 = a^2 \{x^2 + y^2 + 2cy + c^2\}$$

$$c^2 y^2 + 2a^2 cy + a^4 = a^2 x^2 + a^2 y^2 + 2a^2 cy + a^2 c^2$$

$$a^2 x^2 + a^2 y^2 - c^2 y^2 - a^4 + a^2 c^2 = 0$$

$$y^2 (a^2 - c^2) + a^2 x^2 - a^2 (a^2 - c^2) = 0$$

$$y^2 b^2 + a^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$y^2 b^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 باندې ویشو:

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1 - لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

د (a) جز حل: د پوښتنو د حل لپاره لومړی باید اوږد قطر، لنډ قطر او د محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړو.

a) $a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$

څرنګه چې $a > b$ ده؛ نو له دې امله محراقي محور یې د x له محور سره موازي دی.

$c^2 = 20 \Rightarrow c = \pm\sqrt{20}$ یا $c = \pm 2\sqrt{5}$

څرنګه چې a د اوږده قطر نیمایي اوږدوالی دی؛ یعنې اوږد قطري یې له $2a$ سره مساوي دی او $2c$ د محراقي محور

اوږدوالی رانښيي؛ نو:

$|AA'| = 2a = 2 \cdot 6 = 12$

$|FF'| = 2c = 2 \cdot (2 \cdot \sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

د (b) جز حل:

b) $a^2 = 100 \Rightarrow a = \pm 10$

$b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$

بیا هم لیدل کېږي چې $a > b$ ده او محراقي محور یې د x له محور سره موازي دی.

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 100 - 36 = 64$, $\boxed{c = \pm 8}$

$|AA'| = 2a = 2 \cdot 10 = 20$

$|FF'| = 2c = 2 \cdot 8 = 16$

2 - د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن المکزیت یې 0.8 وي.

حل پوهېږو چې: $e = \frac{c}{a} = 0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$c = 4$, $a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$, $\boxed{b = \pm 3}$

څرنګه چې $a > b$ دی؛ نو محراقي محور یې د x له محور سره موازي دی او معادله یې په لاندې ډول ده:

$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$ یا $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي (لومړۍ حالت)

د درسي کتاب (13) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي • د هغې الپس په معادلې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي پوه شي. • الپس په هغه صورت کې رسم کړای شي چې د مرکز او محراقونو مختصات ورکړل شي. • د الپس د مرکز ځای د h او k د قیمتونو په پام کې نیولو سره تعیین کړای شي. • د پورتنۍ پوهې او مهارت له اجرا کولو څخه د خوښۍ احساس وکړي.	2- د زده کړې لارې: پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندویه مواد: د کتاب د 13 مخ د معادلو شکل یعنې $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ او $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ معادلو چارټونه.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې مو جوړ کړی دی، د ټولګي په مخ کې ځوړند کړی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای ښاغلی ښوونکی شکل ته اشاره وکړي او د الپس مرکز چې مختصات یې د (h, k) مرتبه جوړه ده او په $O(h, k)$ سره ښودل شوې ده، زده کوونکو ته وروښایست. څرنگه چې د الپس محراقونه په هغه خط باندې دي، چې د x له محور سره موازي دی؛ نو معادله یې $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ده او همدارنگه د $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ معادله د هغه الپس معادله ده چې محراقونه یې په هغه خط باندې دي چې د y له محور سره موازي دی. دغه دا رښیې چې د دغې الپس مرکز له پورتنیو شرطونو سره سم د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه ده.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکو ته دنده ورکړې چې د 13 مخ فعالیت په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. په عین وخت کې دې دغه فعالیت یو زده کوونکی د تختې پر مخ سرته ورسوي. ښاغلی ښوونکی دې څارنه وکړي چې زده کوونکي د خپل فعالیت په سرته رسولو کې بوخت دي او که نه؟ ترڅو د تختې له مخې یې نقل نه کړي. د فعالیت په پای کې هغه زده کوونکی چې د تختې مخې ته ولاړ دی خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. که چیرې د دغه زده کوونکي په کار کې تېروتنه ولیدل شي، ښاغلی ښوونکی دې لارښوونه ورته وکړي، ترڅو نور زده کوونکي خپلې تېروتنې اصلاح کړي. ښاغلی ښوونکی لومړۍ حالت چې محراقي محور د x له محور سره موازي دی، له چارټ څخه په کار اخیستنې سره د پوښتنو او ځوابونو په طریقې (د زده کوونکو په ګډون) په ټولګي کې کار وکړي؛ یعنې: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ معادله ثبوت کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې لوست ته د تحکیم ورکولو لپاره د 14 مخ لومړۍ مثال په ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په طريقه حل کړي.

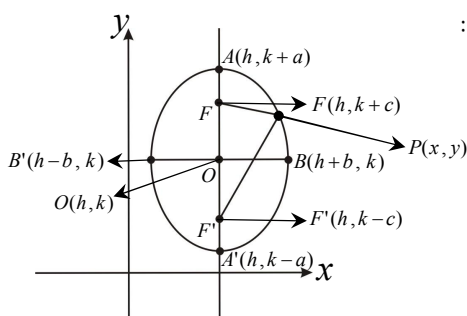
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو د ارزونې لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. څوک د هغه الپس معادله لیکلای شي چې مرکزيې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟
2. د هغه الپس معادله څوک لیکلای شي چې مرکزيې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د 15 مخ دویم حالت ثبوت د الپس له تعریف څخه په کار اخیستنې سره لرو:



$$|PF| + |PF'| = 2a \quad \dots \text{ I}$$

$$|PF| = \sqrt{(x-h)^2 + \{y-(k+c)\}^2} = \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2}$$

$$|PF'| = \sqrt{(x-h)^2 + \{y-(k-c)\}^2} = \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2}$$

د $|PF|$ او $|PF'|$ قیمتونه په I رابطه کې وضع کوو:

$$\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2} + \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} = 2a \quad \dots \text{ II}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2} = 2a - \sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} \quad \dots \text{ III}$$

د III رابطې دواړه خواوې مربع کوو؛ نو لرو چې:

$$(x-h)^2 + \{(y-k)-c\}^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} + (x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - 2c(y-k) + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} + (x-h)^2 + (y-k)^2 + 2c(y-k) + c^2$$

$$-2c(y-k) - 2c(y-k) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} = -4c(y-k) - 4a^2$$

دواړه خواوې په (-4) وېشو، نو لرو:

$$= -4a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} c(y-k) + a^2 = a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2}$$

$$\{c(y-k) + a^2\}^2 = \left[a\sqrt{(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2} \right]^2 \quad \text{اوس بیا د پورته مساوات دواړه خواوې مربع کوو:}$$

$$c^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + \{(y-k)+c\}^2]$$

$$c^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + (y-k)^2 + 2c(y-k) + c^2]$$

$$c^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^2c^2$$

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = -a^4 + a^2c^2$$

د مساواتو دواړه خواوې په (-1) کې ضربوو؛ نو لرو چې:

$$(y-k)^2(a^2 - c^2) + a^2(x-h)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$(y-k)^2b^2 + a^2(x-h)^2 = a^2b^2$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{وضع کوو:}$$

$$\frac{(y-k)b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-k)}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{د پورته مساواتو دواړه خواوې په } a^2b^2 \text{ وېشو:}$$

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د هغې بیضوي معادله چې مرکزي یو اختیاري ټکی وي (دویم حالت)

د درسي کتاب (15) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي • زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • پوه شي چې د محراقي محور موقعیت ته په تغیر ورکولو سره (د x له محور سره موازي یا د y له محور سره موازي) د الپس د معادلې شکل تغیر مومي. • د الپس یا بیضوي شکل ته په کتو سره د الپس معادله تعیین کړای شي. • د $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ او $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ معادلو ته په کتو سره پوه شي چې د بیضوي شکل څه ډول یا محراقي محور کوم دی؟	2- د زده کړې لارې: پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار 3- مرستندویه مواد: د کتاب 15 مخ د بیضوي د شکل چارټ 4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) د لومړۍ حالت وړودي برخې په دې ځای کې هم صدق کوي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی په کتاب کې د دویم حالت ثبوت زده کوونکو ته دنده ورکړل شوې ده، فکر کېږي چې دا د زده کوونکو لپاره یو څه ستونزمنه ده. په دې خاطر چې په پوښتنو کې هم درې پوښتنې په دې اړه شتون لري، نو ثبوت یې په اضافي معلوماتو کې موجود دی، هغه مطالعه کړئ، د پوښتنو او ځوابونو په طریقه د زده کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره په ټولګي کې کار وکړئ. د زده کوونکو ګډون شرط دی، د سم ځواب په ویلو سره زده کوونکو ته تحسین او وهڅوئ. ښاغلی ښوونکی دې د درسي کتاب د 15 مخ یادونې له لوستلو څخه وروسته، د 15 مخ دویم مثال د زده کوونکو په فعال ګډون سره په ټولګي کې حل کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لوست د ښه تحکیم لپاره زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشئ او د کتاب د 16 مخ دریم مثال ورته ورکړئ چې د یو بل په مشوره یې حل کړي. تاسو د زده کوونکو له ډله ییز کار څخه څارنه وکړئ، فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړئ. د فعالیت په پای کې له ډلو څخه یو یا دوه زده کوونکي راوغواړئ ترڅو خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره له زده کوونکو څخه په لاندې ډول وپوښتنئ:	

1. په شکل کې څوک د الپس د محراقونو، راسونو او مرکز مختصات ښودلای شي؟
 2. څوک د محراقونو او راسونو مختصات، د اوږد قطر او لنډ قطر اوږدوالي له لاندې معادلو څخه پیدا کولای شي:

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1, \quad b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

دویمه پوښتنه د کتاب د 16 مخ له پوښتنو څخه ده، چې حل یې د پوښتنو په حل کې شتون لري.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \quad b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

حل:

$$a) \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

د بیضوي مرکز $(h, k) = (-3, 1)$ یعنې $h = -3$ ، $k = 1$ دی.

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

څرنگه چې د $(y-k)^2$ مخرج لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د y له محور سره موازي دی او له $a^2 = b^2 + c^2$ رابطې څخه په کار اخیستنې سره، c په لاس راوړو:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{aligned} F(h, k+c) &= F(-3, 1+\sqrt{7}) \\ F'(h, k-c) &= F'(-3, 1-\sqrt{7}) \end{aligned} \right\} \text{د محراقونو مختصات}$$

$$\left. \begin{aligned} A(h, k+a) &= A(-3, 1+3) = (-3, 4) \\ A'(h, k-a) &= A'(-3, 1-3) = (-3, -2) \end{aligned} \right\} \text{د راسونو مختصات}$$

$$b) x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$$

لومړی له کاملې مربع څخه کار اخلو او معادله په معیاري ډول لیکو:

$$x^2 + 4x + 2(y^2 - 6y) + 20 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 2(y^2 - 6y + 9 - 9) + 20 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2\{(y-3)^2 - 9\} + 16 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-3)^2 - 18 + 16 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-3)^2 - 2 = 0$$

$$(x+2)^2 + 2(y-3)^2 = 2$$

$$\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

له پورتنی معادلې څخه معلومېږي چې د $(x+2)^2$ مخرج لوی دی؛ یعنې د بیضوي محراقي محور د x له محور سره موازي دی:

$$a^2 = 2, \quad a = \pm\sqrt{2}$$

$$b^2 = 1, \quad b = \pm 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 2 - 1 = 1, \quad c = \pm 1$$

لیدل کېږي چې د بیضوي مرکز $(h, k) = (-2, 3)$ یعنې: $h = -2, k = 3$ دی.

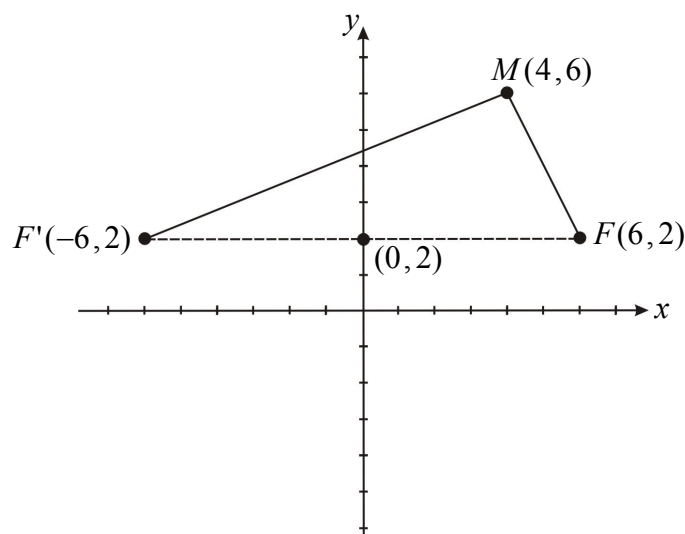
$$\left. \begin{aligned} A(h+a, k) &= A(-2+\sqrt{2}, 3) \\ A'(h-a, k) &= A'(-2-\sqrt{2}, 3) \end{aligned} \right\} \text{د راسونو مختصات}$$

$$\left. \begin{aligned} F(h+c, k) &= F(-2+1, 3) = F(-1, 3) \\ F'(h-c, k) &= F'(-2-1, 3) = F'(-3, 3) \end{aligned} \right\} \text{د محراقونو مختصات}$$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکزي یې د $(0, 2)$ ټکی، محراق یې د $(6, 2)$ ټکی او د $(4, 6)$ له ټکې څخه تیره شي.

يادونه: دا پوښتنه په درسي کتاب کې په ټایپ کې غلطه شوې ده، نو په پورته ډول یې اصلاح کړی.

حل:



د بیضوي د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$|AF| + |AF'| = 2a, \quad |MF| + |MF'| = 2a$$

$$|MF| = \sqrt{(4-6)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|MF'| = \sqrt{\{4 - (-6)\}^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(10)^2 + (4)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$|MF| + |MF'| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29} = 2(\sqrt{5} + \sqrt{29}) = 2a$$

$$a = \sqrt{5} + \sqrt{29}, \quad |FF'| = 2c = 2 \cdot 6 = 12$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{29})^2 - (6)^2 = 5 + 2\sqrt{5}\sqrt{29} + 29 - 36 = 2\sqrt{145} - 2$$

$$b^2 = 22.08 \Rightarrow \boxed{b = \pm 4.7}$$

$$\frac{(x-0)^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{29})^2} + \frac{(y-2)^2}{(2\sqrt{145} - 2)^2} = 1 \quad \text{له : د بیضوي معادله عبارت دی له}$$

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنگه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المکزیت پیدا او گرافونه یې رسم کړئ:

$$a) \quad 9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$$

$$b) \quad 16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$$

حل (a): بیا هم له تکمیل مربع څخه کار اخلو:

$$9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$$

$$9x^2 - 36x + 25y^2 - 150y + 36 = 0$$

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 6y) + 36 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25(y^2 - 6y + 9 - 9) + 36 = 0$$

$$9(x - 2)^2 - 36 + 25(y - 3)^2 - 225 + 36 = 0$$

$$9(x - 2)^2 + 25(y - 3)^2 = 225 \quad / \div 225$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$O(h, k) = O(2, 3)$$

څرنگه چې د $(x - 2)^2$ مخرج د $(y - 3)^2$ د مخرج په پرتله لوی دی؛ یعنې $a > b$ څخه ده، نو د بیضوي محراقي محور د x له محور سره موازي دی؛ نو:

$$\left. \begin{aligned} A(h + a, k) &= A(2 + 5, 3) = A(7, 3) \\ A'(h - a, k) &= A'(2 - 5, 3) = A'(-3, 3) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B(h, k + b) &= B(2, 3 + 3) = B(2, 6) \\ B'(h, k - b) &= B'(2, 3 - 3) = B'(2, 0) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F(h + c, k) &= F(2 + 4, 3) = F(6, 3) \\ F'(h - c, k) &= F'(2 - 4, 3) = F'(-2, 3) \end{aligned} \right\}$$

$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 5 = 10 \text{ د اوږده قطر اوږدوالی}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ د لنډ قطر اوږدوالی}$$

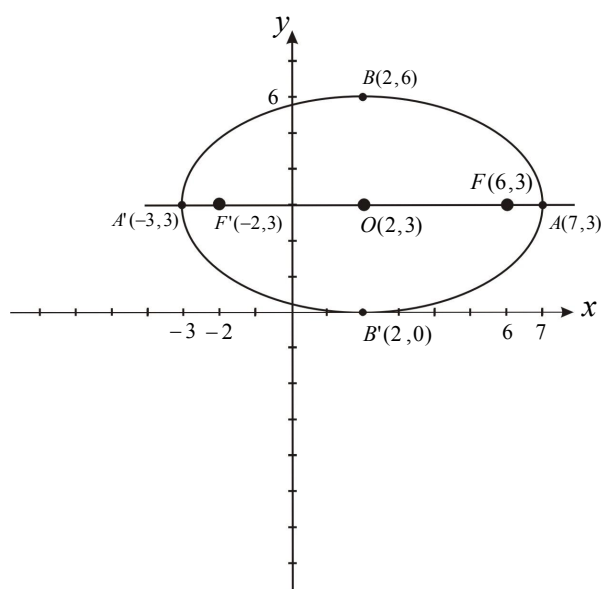
$$|FF'| = 2c = 2 \cdot 4 = 8 \text{ د محراقونو ترمنځ فاصله}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ عن المکزیت}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات

د لنډ یا صغیر قطر مختصات

د محراقونو مختصات



(b حل

$$16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$$

$$16x^2 + 96x + 4y^2 - 8y + 84 = 0$$

$$16(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 2y) + 84 = 0$$

$$16(x^2 + 6x + 9 - 9) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 - 144 + 4(y-1)^2 - 4 + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 - 64 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 64 \quad / \div 64$$

$$\boxed{\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1}$$

معلومه‌بیری چي د $(y-1)^2$ مخرج د $(x+3)^2$ له مخرج څخه لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د y له محور سره موازي دی او د بیضوي د مرکز مختصات $(h,k) = (-3,1)$ ، $h = -3, k = 1$ دي.

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12, \quad c = \pm\sqrt{12}$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{aligned} A(h, k+a) &= A(-3, 1+4) = A(-3, 5) \\ A'(h, k-a) &= A'(-3, 1-4) = A'(-3, -3) \end{aligned} \right\}$$

د کبیر قطر د راسونو مختصات

$$\left. \begin{aligned} B(h+b, k) &= B(-3+2, 1) = B(-1, 1) \\ B'(h-b, k) &= B'(-3-2, 1) = B'(-5, 1) \end{aligned} \right\}$$

د صغیر قطر د راسونو مختصات

$$\left. \begin{aligned} F(h, k+c) &= F(-3, 1+2\sqrt{3}) \\ F'(h, k-c) &= F'(-3, 1-2\sqrt{3}) \end{aligned} \right\}$$

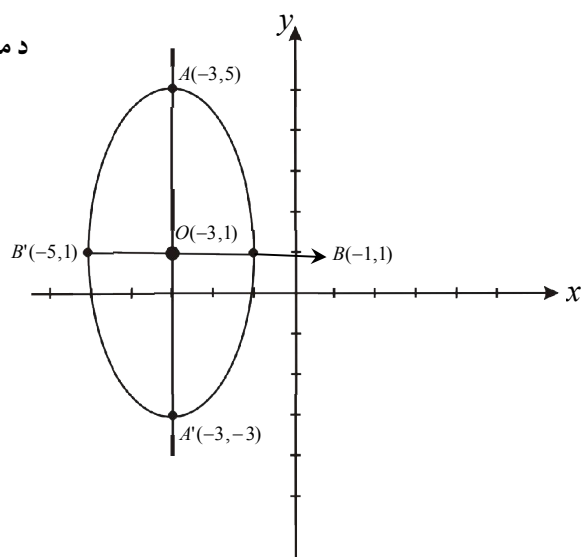
د محراقيونو مختصات

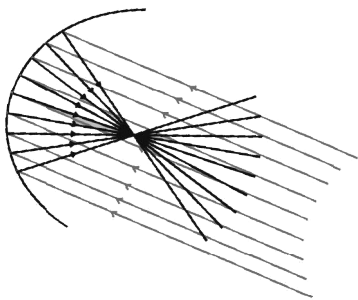
$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 4 = 8 \text{ د اوږده قطر اوږدوالی}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 2 = 4 \text{ د لنډ قطر اوږدوالی}$$

$$|FF'| = 2c = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \text{ د محراقيونو ترمنځ فاصله}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ عن المركزیت}$$





لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

پارابولا

د درسي کتاب (17) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي د لوست په پای کې به په دې و توانېږي چې: • پارابولا به د يوې مخروطي مقاطع په توگه وپېژني او د هغه په مفهوم به پوه شي چې پارابولا يو ډول منحنی ده. • له پارابوليکو شکلونو څخه په انجنیري کې يعنې د پلونو، د کرکيو او داسې نورو شيانو په جوړلو کې کار واخېستلای شي. • د پارابولا د اهميت په پوهېدلو سره به د خوښی احساس وکړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د وروډي پوښتنې چارټ، د فعالیت چارټونه او نور اړوند چارټونه.
4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او حال پوښتنې څخه وروسته د کتاب 17 مخ د فعالیت اړوند چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوی او له زده کوونکو څخه وروډي پوښتنه وپوښتې، ترڅو د هغې په اړه فکر وکړي او ځواب ورکړي. پرته له هغه ښاغلی ښوونکی دې وایي هغه شعاع چې د مقعرې عدسې له اصلي محور سره موازي وي او وروسته له انعکاس څخه له یوه ټکي تېرېږي چې هغه ټکي ته محراق وايي او په F' سره یې ښيي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: • ښاغلی ښوونکی د فعالیت چارټ چې مخکې مو په ډبل خط رسم کړی، د ټولگي په مخ کې وځړوی. • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ترڅو نوموړی فعالیت د یو بل سره په مشوره سرته ورسوي. د فعالیت په پای کې د یو یا دوو ډلو استازو ته دنده ورکړی چې خپل فعالیت نورو ته توضیح کړي. که چیرې د فعالیت په توضیح کولو کې تېروتنه وکړي لارښوونه ورته وکړي. • ښاغلی ښوونکی د فعالیت پایله له زده کوونکو څخه وپوښتې که چیرې زده کوونکو ځواب ورته کړای شو، ښوونکی دې د فعالیت پایله چې د پارابولا تعریف دی، زده کوونکو ته وایي. • ښاغلی ښوونکی هغه چارټ چې په کې د پارابولا و تر رسم شوی دی، د ټولگي په مخ کې وځړوي او له زده کوونکو څخه پوښتنه وکړي. څوک د پارابولا و تر ښودلای شي؟ څوک د پارابولا و تر تعریفولای شي؟ که چیرې زده کوونکي په ځواب ورکولو باندې بریالی شول ښه ده، پرته له هغه ښاغلی ښوونکی و تر په شکل کې وروښيي او تعریف یې ورته کوي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د لوست د لابنه تحکیم لپاره، د پارابولا، تناظري محور، هادي خط او راس د زده‌کوونکو په فعال گډون سره توضیح کړي.

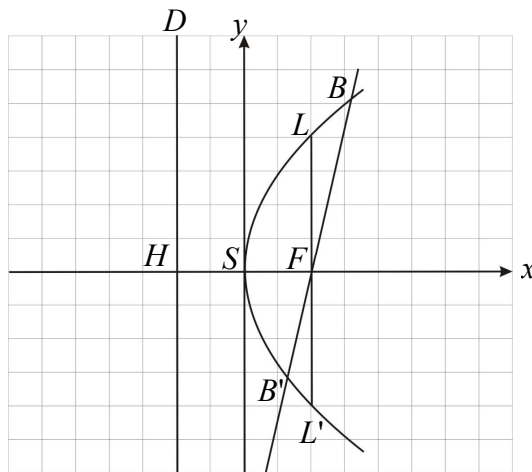
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره چې زده‌کوونکي پوه شوي دي او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه په لاندې ډول وپوښتي:

1. پارابولا څه ډول یو منحنی دی؟
2. څوک کولای شي چې په شکل کې د پارابولا راس، هادي خط او محراق وښايي؟

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.



حل:

د محراقي وتر تعریف داسې دی: هغه خط چې له محراق څخه تېر او د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا محراقي وتر بلل کېږي او همدارنګه عمودي وتر هم له محراق څخه تېر او د F په نقطه کې عمود وي، د پارابولا دوه ټکي سره نښلوي؛ نو هر عمودي وتر محراقي وتر هم کېدای شي.

د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د محراق او راس ترمنځ د فاصلې څلور برابره دی؛ یعنې: $LL' = 4\overline{FS}$

پوهېږو چې $\overline{FS} = \overline{SH}$ او $\overline{FH} = 2\overline{SF}$ دی؛ نو محراقي وتر $LL' = 4\overline{SF} = 4\left(\frac{\overline{HF}}{2}\right) = 2\overline{FH}$ دی، په پایله کې ویلای شو چې د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ دوه برابره دی.

$$y^2 = 4px$$

$$x^2 = 4py$$

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د پارابولا معادله (لومړۍ حالت)

د درسي کتاب (19) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د پارابولا معادله وپېژني او د الپس له معادلې سره يې توپير وکړای شي. • پوه شي چې د $y^2 = 4px$ او همدارنگه $x^2 = 4py$ د هغو پارابولا معادلې دي چې راسونه يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې دي. • په بېلابېلو حالتونو کې له شکل څخه په کار اخېستلو سره د پارابولا معادله په لاس راوړای شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله یيز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د 19 او 20 مخونو د پارابولا د شکلونو چارټونه
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته په 19 مخ کې د پارابولا د شکل چارټ چې د لومړي حالت اړوند شکل دی، د ټولگي په مخ کې ځوړند کړی، په داسې حال کې چې $y^2 = 4px$ او $x^2 = 4py$ معادلې په نوموړي چارټ کې لیکل شوي دي. له زده کوونکو څخه وپوښتی چې دغه شکل په کومه معادله پورې اړه لري، ترڅو زده کوونکي په دې اړه فکر وکړي. په هغه صورت کې چې ځواب ور نه کړای شي د فعالیت په سرته رسولو سره څرگندېږي چې نوموړی شکل له $y^2 = 4px$ معادلې سره مطابقت لري، ځکه چې د پارابولا محراق F د x پر محور باندې دی.
5- د لوست بهير او فعالیت (28 دقيقې):	• ښاغلی ښوونکی: زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د له ځوړند شوي چارټ څخه په کار اخېستو سره فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. • ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له ډلو څخه څارنه وکړی، فعالې ډلې تشويق او ضعيفو ډلو ته لارښوونه وکړی. • ښاغلی ښوونکی یوه زده کوونکي ته دنده ورکړی چې د MF او MK قیمتونه پر تخته پیداکړي او د تعریف په رابطه کې یعنې $MF = MK$ کې يې وضع کړي او په پایله کې به د پارابولا معادله په لاس راوړي. په عین وخت کې دې نور زده کوونکي دغه فعالیت پرته له دې چې له تختې څخه يې نقل کړي، په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي د فعالیت په پای کې هغه زده کوونکي چې فعالیت يې پر تخته سرته رسولی، خپل فعالیت نور و زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې دې بل زده کوونکی د هغه تېروتنې د ښوونکي په مرسته اصلاح کړي.

• ښاغلی ښوونکی دې په پای کې د $P > 0$ او $P < 0$ حالتونه زده‌کونکو ته بیا وایي او په شکلونو کې دې وروښيي.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا ښه تحکیم لپاره د 20 مخ لومړۍ مثال له زده‌کونکو سره د پوښتنو او ځوابونو په شکل کار وکړي، تر څو زده‌کونکي ښه زده‌کړه وکړای شي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره چې زده‌کونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتي:

1. د پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي څوک لیکلای شي؟
2. په کوم صورت کې د پارابولا خوله ښی او په کوم صورت کې د پارابولا څوکه کېږي لور ته خلاصه وي؟
3. که چیرې د پارابولا محراق د x پر محور باندې وي، معادله به یې څه شکل ولري؟

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د پارابولا معادله (دویم حالت)

د درسي کتاب (21) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • د پارابولا معادله وپېژني په هغه صورت کې چې محراق یې د y په محور باندې وي. • له شکل څخه په کار اخیستنې سره د پارابولا معادله په لاس راوړای شي او د دوو نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړي. • زده کوونکي به په دې پوه شي چې که چیرې $P > 0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده او که چیرې $P < 0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندویه مواد:	د کتاب د 21 مخ چارټونه
4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د کتاب د 21 مخ لومړۍ چارټ د ټولګي مخې ته وځړوي او له زده کوونکو څخه وپوښتي، که چیرې د پارابولا محراق F د y په محور باندې او هادي خط یې د x له محور سره موازي وي، څوک کولای شي د پارابولا معادله په لاس راوړي؟ ښايي چې زده کوونکي چپ پاتې شي، نو د لوست بهیر داسې پیل کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی دې یو زده کوونکی راوغواړي چې د پارابولا له تعریف څخه په کار اخیستنې سره د $MF = MK$ رابطه پر تخته ولیکي. • دویم زده کوونکی دې له فورمول څخه په کار اخیستنې سره د $\overline{MF}$ او $\overline{MK}$ اوږدوالی په لاس راوړي. • دریم زده کوونکی دې د $\overline{MF}$ او $\overline{MK}$ قیمتونه د $MF = MK$ په رابطه کې وضع کړي. • بالاخره دریم زده کوونکی دې د ښوونکي په مرسته د رابطې دواړه خواوې مربع کړي او د پارابولا معادله چې $x^2 = 4py$ ده، په لاس راوړي. • ښاغلی ښوونکی دویم او دریم چارټ د ټولګي په مخ کې وځړوي او د P بېل بېل حالتونه یعنې که چیرې $P < 0$ او یا $P > 0$ وي، په پام کې ونیسي او زده کوونکو ته یې په شکل کې وښايست.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لوست د تحکیم لپاره د کتاب 22 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولګي کې په زده کوونکو باندې کار وکړي، د اړتیا په صورت کې دې له زده کوونکو سره مرسته وکړي.	

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ د ترلاسه کولو لپاره له زده‌کوونکو څخه په لاندې ډول وپوښتی:

1. څوک د پارابولا معادله چې محراق یې د y په محور وي، لیکلای شي؟
2. څوک ویلای شي د $x^2 = 4py$ او $y^2 = 4px$ معادلو ترمنځ توپیر څه دی؟
3. څوک کولای شي چې د دواړو حالتونو شکلونه پر تخته رسم کړي؟

نوټ چارټونه دې د تخته له مخ څخه لرې شي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیت کمیات او د هادي (موجه خط) معادلې پیدا او گرافونه یې رسم کړئ.

حل:

$$y^2 - 4x = 0$$

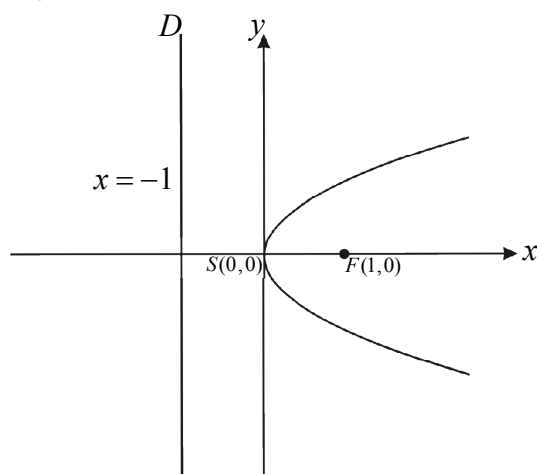
$$y^2 = 4x, \quad 4p = 4 \Rightarrow p = 1 > 0$$

څرنگه چې $P > 0$ دی؛ نو د پارابولا خوله د x پر محور ښي خواته خلاصه ده.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S(0,0) \quad \text{د پارابولا د راس مختصات}$$

د محراق مختصات $F(P,0) = F(1,0)$

$$\left. \begin{array}{l} x = -P \\ x = -1 \end{array} \right\} \text{د هادي خط معادله}$$



د معادلې عمومي شکل $y^2 = 4Px$

$$x^2 = 2y$$

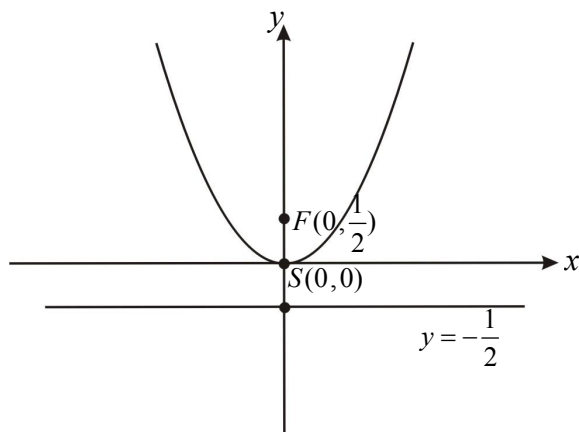
$$4P = 2 \Rightarrow P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} > 0$$

معلومېږي چې $P = \frac{1}{2} > 0$ دی؛ نو د پارابولا خوله د y پر محور پورته خواته خلاصه ده.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 0, \quad x = 0 \\ 2y = 0, \quad y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S(0,0) \quad \text{د راس وضعیت کمیات}$$

د محراق وضعیه کمیات $F(0, P) = F(0, \frac{1}{2})$

د هادي خط معادله $y = -P \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$



2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ:

- a) $S(0,0)$ $F(0,5)$
b) $S(0,0)$ $F(-2,0)$

حل (a):

د راس له وضعیه کمیاتو څخه معلومېږي چې د پارابولا راس د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی او له محراق څخه څرگندېږي چې $P = 5 > 0$ دی؛ نو د پارابولا خوله د y پر محور پورته خواته خلاصه ده او د هغې پارابولا معادله چې خوله یې د y پر محور پورته خواته خلاصه وي، عمومي شکل یې $x^2 = 4Py$ دی.

$$x^2 = 4Py, \quad x^2 = 4 \cdot 5y \Rightarrow \boxed{x^2 = 20y}$$

حل (b):

- b) $S(0,0)$ $F(-2,0)$

د پارابولا راس د وضعیه کمیاتو په مبدا کې پروت دی او د محراق له مختصو څخه څرگندېږي چې $P = -2 < 0$ دی؛ نو د پارابولا خوله د x پر محور کېنې خواته خلاصه ده، عمومي معادله یې عبارت ده له: $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4Px, \quad y^2 = 4(-2)x \Rightarrow \boxed{y^2 = -8x}$$

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

د درسي کتاب (23) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • د هغې پارابولا د معياري معادلې په شکل به پوه شي چې راس يې يو اختياري ټکی وي. • د $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ او $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ معادلو د شکلونو په توپير باندې به پوه شي. • د پارابولا معادله په هغه صورت کې چې راس يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه وي وليکلای شي او پوښتنې به حل کړای شي. • له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه به خوښي ښکاره کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د 23 مخ او 24 دوه لومړي چارټونه
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی د 23 مخ د شکل چارټ په توش قلم رسم د $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ او $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ معادلې پر هغې وليکي او د ټولگي په مخ کې يې وڅړوي وروسته وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتي، ترڅو د هغې په اړه فکر وکړي، که چيرې زده کوونکي ځواب ونشي ويلای، د فعاليت له اجرا کولو څخه وروسته به پوه شي چې د $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ معادله د هغه پارابولا معادله ده، چې د راس مختصات يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه دی.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د 23 مخ دوه فعاليتونه چې په (•) ټکی نښانې شوي دي سرته ورسوي. وروسته د MF او MN فاصلې د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ فورمول څخه په کار اخېستو سره پيدا او د $\overline{MF} = \overline{MN}$ په مساوات کې يې وضع کړي او بيا به د مساوات د دواړو خواوو له مربع او ساده کولو وروسته لاندې معادله په لاس راوړي: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ پورتنۍ معادله په يقيني توگه د هغې پارابولا معادله ده چې د راس مختصات يې (h, k) او د وضعيه کميات په مبدا کې واقع نه دی. ښاغلی ښوونکی دې د زده کوونکو له ډله ييز کار څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشويق او له ضعيفو ډلو سره مرسته وکړي.	

په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړئ چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي او د فعالیت د اجرا په ترڅ کې لارښوونه او مرسته ورسره وکړي.

ښاغلی ښوونکی دې د کتاب 24 مخ دوه لومړي چارټونه د ټولګي په مخ کې وڅړوي او په وار سره دې دوه زده کوونکي راوغواړي ترڅو د $P > 0$ او $P < 0$ په صورت کې اړونده شکلونه زده کوونکو ته وروپېژني.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 26 مخ لومړی پوښتنه د زده کوونکو په ګډون په ټولګي کې حل کړي.

د همدې مخ دویمه پوښتنه زده کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د زده کړې د ډاډ په هکله زده کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

1. د هغې پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي، ولیکئ.
2. د پارابولا معادله په هغه صورت چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پر تخته ولیکئ.
3. که چیرې $P > 0$ وي، د پارابولا خوله کومې خواته خلاص ده او که چیرې $P < 0$ وي، د پارابولا خوله به کومې خواته خلاصه وي؟

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختاري ټکی وي (دويم حالت)

د درسي کتاب (24) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • پوه شي، که چيرې د پارابولا تناظري محور د y له محور سره موازي وي، د پارابولا معادله له $(x-h)^2 = 4P(y-k)$ څخه عبارت ده. • پورتنۍ معادله د شکل او د پارابولا له تعريف څخه په کار اخېستنې سره په لاس راوړای شي. • د پورتنۍ مهارت او پوهې له حاصلولو څخه خونې بېنکاره کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار	
3- مرستندويه مواد: د 24 مخ د دوو وروستيو شکلونو چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته له زده کوونکو څخه وپوښتې که چيرې د پارابولا تناظري محور د y له محور سره موازي وي، د پارابولا معادله به څه شکل ولري؟ ښاغلی ښوونکی دې جوړ شوی چارټ د ټولگي په مخ کې وڅېړي، احتمال لري چې له شکل څخه په کار اخېستنې سره زده کوونکي وکولای شي، د پارابولا معادله په لاس راوړي؛ ځکه په لومړۍ حالت کې مو چې معادله پيدا کړي وه، هغه له دوی سره مرسته کوي.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو د هغه معلوماتو له مخې چې له تېر لوست څخه يې لري له يو بل سره په مشوره د پارابولا د معادلې دويم حالت حاصل کړي. • د زده کوونکو د فعاليت له کارولو څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې وهڅوي او له ضعيفو ډلو سره مرسته وکړي. د دويم حالت ثبوت د اضافي معلوماتو په توگه کار شوی دی. • لومړۍ مثال د پوښتنې او ځواب په شکل د زده کوونکو په گډون په ټولگي کې حل کړي. • دويم مثال په زده کوونکو باندې د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې کار وکړي.	
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې) ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکيم لپاره درې مثال په ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولگي کې کار وکړي. درېمه پوښتنه زده کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړي.	

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د ډاډ لپاره په لاندې ډول وپوښتی:

1. د پارابولا معیاري معادله څه شکل لري؟ (یو زده‌کوونکی دې پر تخته ولیکي)
2. څوک کولای شي د هغې پارابولا شکل رسم کړي چې د تناظر محور یې د y له محور سره موازي وي او په هغې کې وترونه او محراق په گوته کړي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې پارابولا معادله پیدا کړي، په داسې حال کې چې:

$$S(1,3), F(-1,3)$$

یادونه: په درسي کتاب کې د a جز اضافه غلط تایپ شوی دی.

حل:

$$S(1,3) \Rightarrow h=1, \quad k=3$$

$$F(-1,3) \Rightarrow h+p=-1, \quad k=3$$

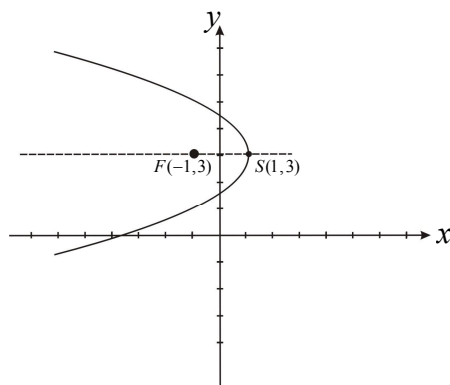
$$1+P=-1 \Rightarrow P=-2$$

څرنگه چې $P < 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د x پر محور کینې خوا ته خلاصه ده او د داسې پارابولا عمومي معادله عبارت ده له:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(y-3)^2 = 4(-2)(x-1) \Rightarrow \boxed{(y-3)^2 = -8(x-1)}$$

نو:



2- د $(y-1)^2 = 12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او گراف یې رسم کړئ.

$$(y-1)^2 = 12(x-4)$$

$$k=1, \quad h=4, \quad 4p=12 \Rightarrow p=3$$

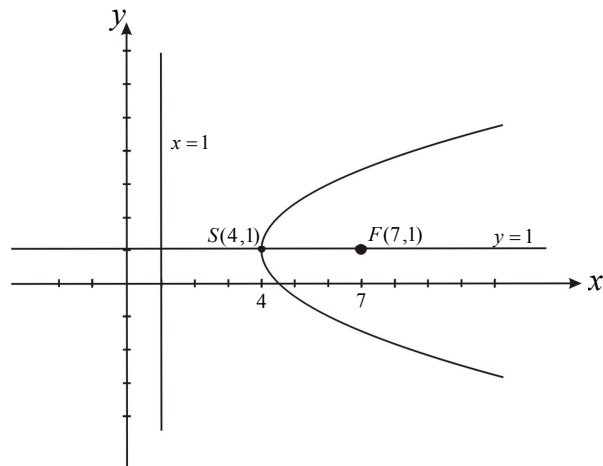
معلومېږي چې $P > 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د x پر محور ښي لوري ته خلاصه ده.

د راس مختصات $S(h, k) = S(4, 1)$

د محراق مختصات $F(h + p, k) = F(4 + 3, 1) = F(7, 1)$

د هادي خط معادله $x = h - p \Rightarrow x = 4 - 3 = 1$ ، $x = 1$

د تناظر محور $y = k$ ، $y = 1$



3- لاندې معادلې د پارابولا د معياري معادلې په ډول وليکئ او گراف يې رسم کړئ.

a) $y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$

b) $x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$

حل a) له کاملې مربع څخه په کار اخېستني سره لرو چې:

$$y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 - 9 + 8x + 41 = 0 \Rightarrow (y - 3)^2 + 8x + 32 = 0$$

د پارابولا معادله: $(y - 3)^2 = -8(x + 4)$

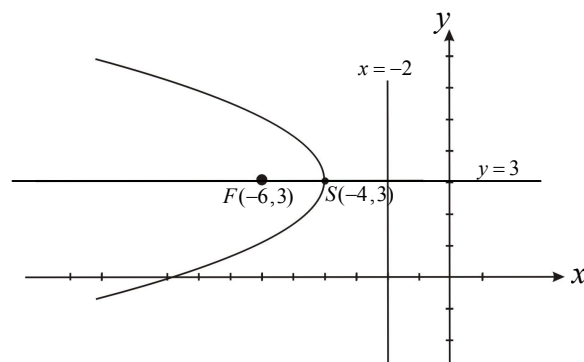
$$h = -4 , \quad k = 3 , \quad S(h, k) = S(-4, 3) , \quad 4P = -8 , \quad P = -2$$

څرنگه چې $P < 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د x پر محور کېن لوري ته خلاصه ده.

د محراق مختصات $F(h + p, k) = F(-4 + (-2), 3) = F(-6, 3)$

د مؤجه خط معادله $x = h - p$ ، $x = -4 + 2 = -2$ ، $x = -2$

د پارابولا تناظري محور $y = k$ ، $y = 3$



حل b) بیا هم له کاملې مربعې څخه کار اخلو:

$$x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 6y - 53 = 0$$

$$(x-1)^2 - 6y - 54 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 6y + 54$$

$$(x-1)^2 = 6(y+9) \text{ د پارابولا معیاري معادله}$$

$$h=1, \quad k=-9, \quad S(h,k)=S(1,-9) \text{ د پارابولا راس}$$

$$4P=6 \Rightarrow P=\frac{3}{2}$$

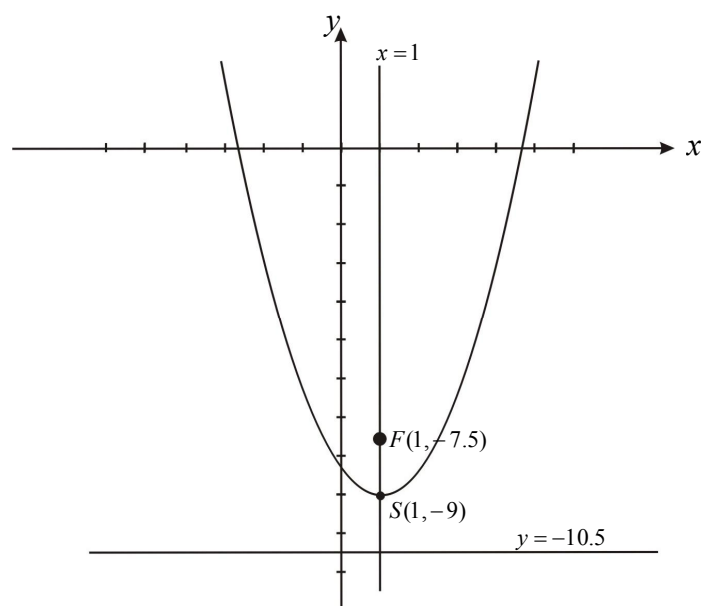
څرنگه $P > 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د y پر محور پورته خواته خلاصه ده.

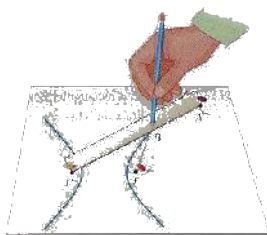
$$F(h, p+k) = F(1, \frac{3}{2} - 9) = F(1, \frac{3-18}{2}) = F(1, -7.5) \text{ د محراق مختصات}$$

$$y = k - p \Rightarrow y = -9 - \frac{3}{2} = \frac{-18-3}{2} = \frac{-21}{2} = -10.5$$

$$y = -10.5 \text{ د موجه خط معادله}$$

$$x = h \Rightarrow x = 1 \text{ د تناظر محور}$$





لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

هايپربولا (Hyperbola)

د درسي کتاب (27) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • د هايپربولا په مفهوم پوه شي. • عنالمرکزيت، تناظري محورونه او د هايپربولا راسونه وپېژني. • هايپربولا له نورو مخروطي مقاطعو سره تشخيص کړای شي. • د يوې هايپربولا اجزاوې په رسم کې وښودلای شي. • د پورتنۍ پوهې او مهارت له حاصلولو څخه په خپل ځان ډاډمن شي.	
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د 27 مخ د هايپربولا چارټ او 28 مخ د هايپربولا د شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی وروسته له سلام او احوال پوښتنې له زده کوونکو څخه وړودي پوښتنه وپوښتنې، ترڅو د هغې په هکله زده کوونکي فکر کولو ته اړ شي که چيرې زده کوونکي پوښتنې ته ځواب ورنشي کړای او په دې صورت کې د فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته ځواب په لاس راوړي.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):	• ښاغلی ښوونکی هغه چارټ چې مخکې مو تيار کړی دی، د ټولگي په مخ کې وڅړوی او يو زده کوونکی راوغواړی چې فعاليت پر تخته سرته ورسوي. په عين وخت کې دغه فعاليت د ټولگي نورو زده کوونکو ته ورکړی چې په انفرادي توگه يې په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. د فعاليت په پای کې هغه زده کوونکی چې د تختې مخکې ته ولاړ دی، خپل فعاليت دې نورو ته توضيح کړي. که چيرې د زده کوونکي توضيحات سم وي، ښه ده، له هغه پرته يوه داوطلب زده کوونکی ته دنده ورکړی چې فعاليت پر تخته سرته ورسوي. ښاغلی ښوونکی دې د اړتيا په صورت کې لارښوونه ورته وکړي او هغه زده کوونکي چې د فعاليت په اجرا کې يې تېروتنه کړې ده، خپله تېروتنه دې اصلاح کړي. د فعاليت په پايله کې د هايپربولا تعريف لاسته راځي چې $A'A = 2a$ کېږي، پر تخته وليکي. • ښاغلی ښوونکی د کتاب د 28 مخ چارټ د ټولگي په مخ کې وڅړوی د پوښتنو او ځوابونو په ډول له زده کوونکو څخه، د هايپربولا محراقونه، راسونه، تناظري محورونه او د هايپربولا هادي وروپېژني. • همدارنگه د هايپربولا عنالمرکزيت فارمول $e = \frac{c}{a}$ توضيح او د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه دې پر تخته پيدا کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د لوست د لارښه تحکیم لپاره یو زده‌کوونکی راوغواړي چې د 28 مخ د شکل په لېدلو سره د هایپربولې اجزاوې توضیح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی، زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره اړوزي:

1. څوک هایپربولې تعریفولای شي؟
2. څوک د هایپربولې محراقونه، راسونه او هادي خطونه په رسم کې ښودلای شي؟

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

حل:

له عن‌المركزیت $e = \frac{c}{a}$ رابطې څخه په کار اخیستنې سره د a او b عددونو ترمنځ اړیکه د یو بل له جنسه پیدا کړی، یعنې:

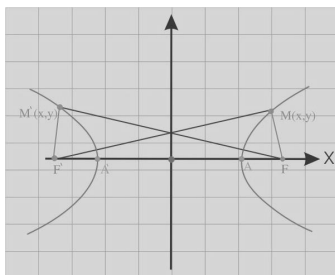
$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

د a او b عددونو او عن‌المركزیت ترمنځ اړیکه



لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د هايپربول معادله

د درسي کتاب (29) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • هايپربولا وپېژني او د هايپربول په تعريف پوه شي. • د تعريف په پام کې نيولو سره د شکل له مخې د تعريف رابطه وليکي. • د هايپربول معادله د تعريف او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په کار اخېستنې سره په لاس راوړای شي. • له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه خوښي وکړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنې او ځوابونه، ډله ييز او انفرادي کار	
3- مرستندويه مواد: د 29 مخ د هايپربول د شکل د وړودي برخې چارټ او د فعاليت چارټ	
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته وړودي چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوي، د زده کوونکو پام عنوان ته راواړوي، وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتي، همدارنگه وپوښتي هغه هايپربولا چې راس يې د کميات وضعيه د x پر محور باندې وي، محراقونه به يې په کوم ځای کې پراته وي؟ ښايي چې يو شمېر زده کوونکي له فکر کولو څخه وروسته ځواب ووايي چې د x پر محور باندې، او له هغې پرته ښاغلی ښوونکی د فعاليت اړوند چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوي او محراقونه چې د x پر محور باندې پراته دي، ور وښيي.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): • ښاغلی ښوونکی، زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب د 29 مخ فعاليت له يو بل سره په مشوره سرته ورسوي؛ يعنې PF او PF په لاس راوړي او د تفريق په رابطه يعنې په $PF - PF = 2a$ رابطه کې يې وضع کړي، څرنگه چې د پارابولا له موضوع څخه پوهېږي، د معادلې دواړه خواوې دې مربع او ساده کړي. په پايله کې به د هايپربول معادله؛ يعنې $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ په لاس راوړي. • ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له ډلو څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې وهڅوي او له ضعيفو ډلو سره مرسته او ورته لارښوونه وکړي. • ښاغلی ښوونکی کوښښ وکړي چې په هره ډله کې لايق او ضعيف زده کوونکي شتون ولري.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښه پوهېدو لپاره د کتاب د 31 مخ لومړۍ مثال د زده‌کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره پر تخته حل کړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو د زده‌کړې د ارزونې لپاره له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. څوک هایپرېولا تعریف کولای شي؟
2. څوک دهغې هایپرېولا معادله لیکلای شي چې راس یې د وضعیه کمیاتو په محورو نو باندې وي؟

لومړۍ څپرکي: مخروطي مقاطع

د هايپربول د معادلې دويم حالت (مقاطع محور يعني AA' د y پر محور پروت وي)

د درسي کتاب (30) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کونکي به په دې وتوانېږي چې: • د متقاطع محور (AA') د ځای په پام کې نيولو سره د هايپربول د دوو معادلو يعني $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ او $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ په توپير پوه شي. • په پورتنیو دواړو صورتونو کې د هايپربول منحني ترسيم کړای شي. • د اړتيا په صورت کې د هايپربول له فورمولونو او شکلونو څخه کار واخلي. • د پورتنیو موضوعاتو په عملي کولو سره د خوښي احساس وکړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنې او ځوابونه، ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	ددې لوست د اضافي معلوماتو چارټ د 31 او 32 مخونو چارټونه.
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ معادله پر تخته وليکي او له زده کونکو څخه وپوښتي: ایا ویلای شئ چې د هايپربول راسونه او محراقونه په کوم محور باندې پراته دي؟ که چیرې زده کونکي په ځواب ویلو بریالی نشي، نو هغه چارټ چې د کتاب د 32 مخ له دویم مثال څخه جوړ شوی دی، د ټولګي په مخکې ځوړند کړئ او د هايپربول اجزای زده کونکو ته وروپېژنی.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	• ښاغلی ښوونکی دې زده کونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د یو بل په مشوره د $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ معادله له نوموړي چارټ څخه په کار اخیستنې سره ثبوت کړي. • ښاغلی ښوونکی دې د زده کونکو د ډله ییز کار او فعالیت څخه څارنه وکړي. فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز کار نورو زده کونکو ته توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې له بلې ډلې دې یو داوطلب زده کونکی راشي، د هايپربول معادله دې پر تخته ثبوت او توضیح کړي. د اړتیا په صورت کې لارښوونه ورته وکړي. • ښاغلی ښوونکی د هايپربول د مجانبونو عنوان پر تخته وليکي او له یوه زده کونکي څخه وغواړي چې د $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ له معادلې څخه د مجانبونو معادله چې له $y = \pm \frac{b}{a}x$ څخه عبارت ده، ثبوت کړي. • ښاغلی ښوونکی په هره برخه کې پوښتنه وکړي او زده کونکي دې استدلال وکړي او ځواب دې ووايي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښه پوهېدو لپاره د 31 مخ دویم مثال د زده‌کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره پر تخته حل کړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ:

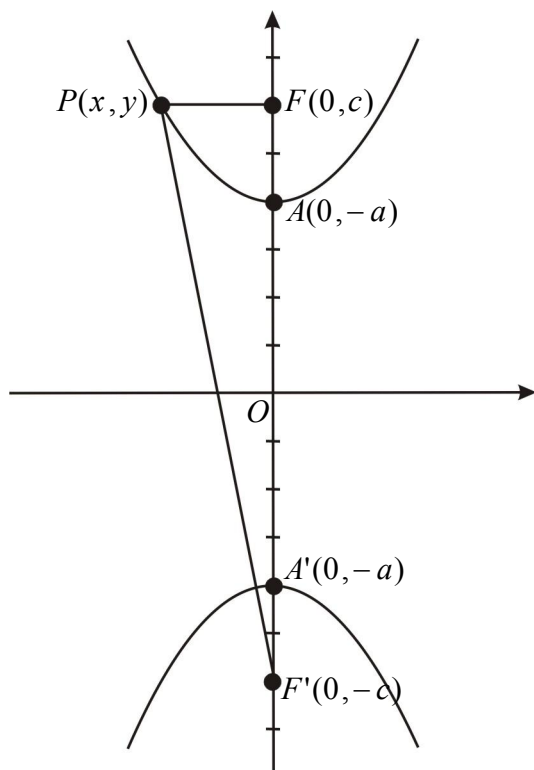
1. که چیرې د AA' قاطع محور د y پر محور باندې پروت وي، د هایپربول معادله کومه ده؟
2. څوک د عن‌المرکزیت فارمول پر تخته لیکي او د هغې د اجزاو و نومونه اخلي.
3. که چیرې د AA' قاطع محور د y پر محور پروت وي، د هایپربول مجانب به کوم شکل ولري؟

يادونه: هره پوښتنه دې له یوه زده‌کوونکي څخه وشي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

دویم حالت: د $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ معادلې ثبوت: د

هایپربول له تعریف سره سم، په یوه مستوي کې د هغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هایپربول بلل کېږي، لیکلای شو:



$$|PF'| - |PF| = 2a \quad \dots I$$

له شکل څخه پوهېږو چې:

$$|PF'| = \sqrt{(x-0)^2 + \{y - (-c)\}^2}$$

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

اوس پورتنی قیمتونه په I رابطه کې وضع کوو:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} &= 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \quad \dots II\end{aligned}$$

د II رابطې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2cy + c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2 \\ 4cy - 4a^2 &= 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \quad \dots III\end{aligned}$$

د III رابطې دواړه خواوې پر 4 باندې وېشو:

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \quad \dots IV$$

د IV رابطې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\begin{aligned}(cy - a^2)^2 &= a^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2) \\ c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 &= a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2 \\ c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= -a^4 + a^2c^2 \\ y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\ y^2b^2 - a^2x^2 &= a^2b^2\end{aligned}$$

څرنگه چې $c^2 - a^2 = b^2$ دی؛ نو لرو:

د پورتنی معادلې دواړه خواوې پر a^2b^2 وېشو:

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

د محراقونو او راسونو مختصات په شکل کې نومول شوي دي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د $4x^2 - y^2 = 16$ هایپربول له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې گراف رسم کړئ.

حل لومړی معادله په سټنډرډ شکل اړوو؛ یعنې د معادلې اطراف په 16 باندې وېشو:

$$4x^2 - y^2 = 16 \quad / \div 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

معلومه شوه چې د هایپربول متقاطع محور د x محور دی او مرکزي په مبدا کې پروت دی.

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2, \quad A(2, 0), \quad A'(-2, 0) \text{ د هایپربول راسونه}$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4, \quad B(0, 4), \quad B'(0, -4) \text{ د هایپربول د غیر حقیقي راسونو مختصات}$$

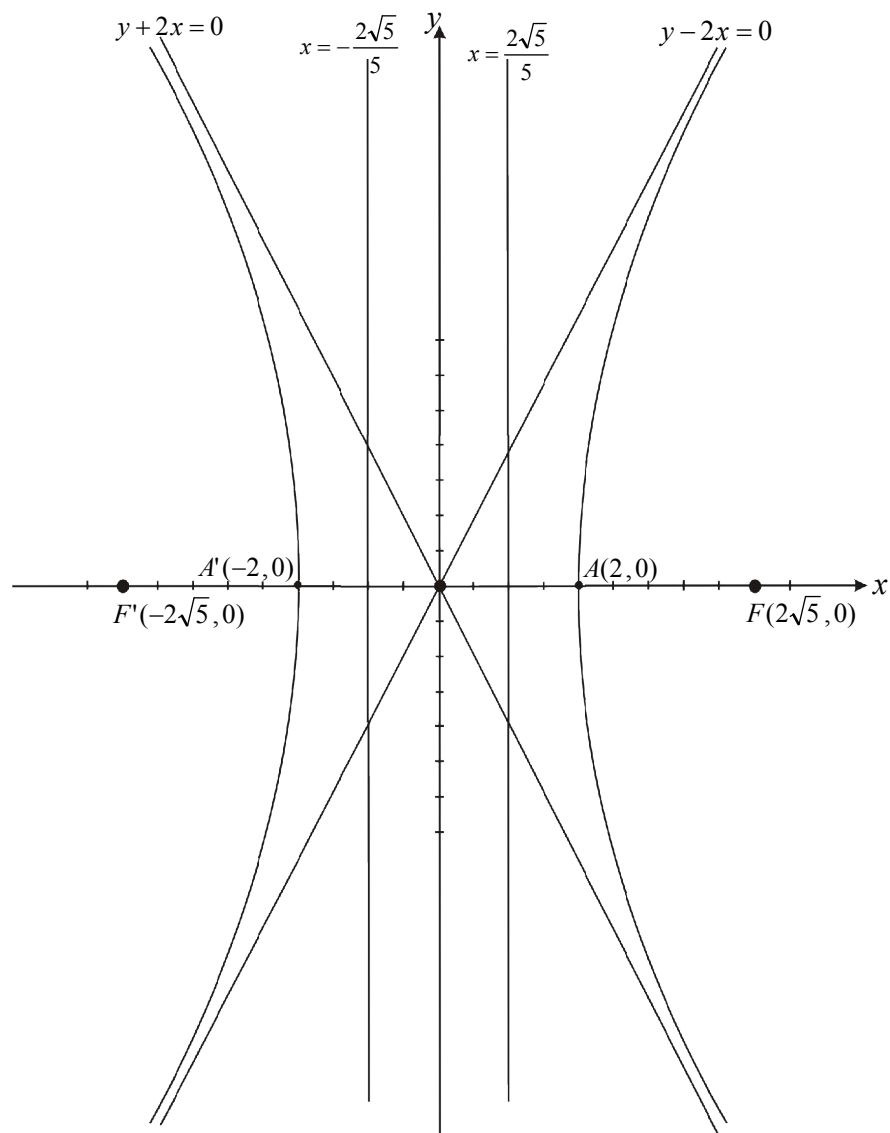
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 4 = 20$$

$$c = \pm 2\sqrt{5}$$

$$F(c, 0) = F(2\sqrt{5}, 0), \quad F'(-c, 0) = F'(-2\sqrt{5}, 0) \text{ د محراقونو مختصات}$$

د مجانبونو معادلې $y = \pm \frac{b}{a}x$, $y = \pm \frac{4}{2}x \Rightarrow y = \pm 2x$, $y + 2x = 0$, $y - 2x = 0$

د مؤجه خطونو معادلې $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a}{\frac{c}{a}} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{2^2}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د هغې هايپربولا معادله چې مرکزي يې يو اختياري ټکی وي (لومړۍ حالت)

د درسي کتاب (33) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • د هغې هايپربولا معادله وپېژني چې مرکزي يې يو اختياري ټکی وي. • د شکل په لېدو او د تعريف د رابطې په پام کې نيولو سره د هايپربولا معادله په لاس راوړای شي او پوښتنې حل کړای شي. • د محراقونو او راسونو مختصات د شکل له مخې وټاکلی شي. • د پورتنیو مفهومونو له بريالۍ اجرا څخه خوښي ښکاره کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار
3- مرستندويه مواد:	د کتاب د 33 مخ د هايپربولا چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعاليتونو (سلام او احوال پوښتنې...) څخه وروسته وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، ترڅو زده کوونکي د پوښتنې په اړه فکر وکړي، ښه ده چې زده کوونکي ځوابونه ووايي. ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو د ځوابونو له اورېدو وروسته ووايست: څرنگه چې نورې مخروطي مقاطع لکه الپس او پارابولا داسې معادلې درلودلې چې مرکزي يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه و. په همدې ډول هايپربولا هم يو له هغه مخروطي مقاطعو څخه ده، کېدای شي چې مرکزي يې د وضعيه کميات په مبدا کې نه وي، يعنې اختياري ټکی وي.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):	• ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو په ډله یيزه توگه خپل فعاليت سرته ورسوي، که چېرې زده کوونکي په نوموړي فعاليت کې د هايپربولا د شکل په رسمولو سره بريالي نشي، هغه وخت چارټ د ټولگي په مخ کې وځړوي او لارښوونه ورته وکړي چې چارټ ته په کتو سره زده کوونکي د هايپربولا معادله په لاس راوړي.
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې لوست تحکيم ووموي د يوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله یيز کار نور زده کوونکو ته توضيح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ لپاره چې زده‌کوونکو څه زده‌کړه کړې او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. څوک د هغې هایپربول معادله لیکلې شي چې مرکزيې د وضعیه کمیات په مبدا کې وي؟
2. څوک د هغې هایپربول معادله لیکلې شي چې مرکزيې د وضعیه کمیات په مبدا کې نه وي.
3. څوک کولای شي له شکل څخه په کار اخېستنې سره په $|PF'| - |PF| = 2a$ معادله کې د PF' او PF قیمتونه وضع کړي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د مجانبونو د معادلو لاس ته راوړلو لپاره د هایپربول معادله $(\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1)$ په پام کې نیسو:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \Rightarrow -a^2(y-k)^2 = a^2b^2 - b^2(x-h)^2$$

$$a^2(y-k)^2 = b^2(x-h)^2 - a^2b^2, \quad (y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 - b^2$$

یا

$$(y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{(x-h)^2} \right\}$$

په پورتنۍ اړیکه کې، که چیرې x لایتناهي ته تقرب وکړي، د $\frac{a^2}{(x-h)^2}$ حد صفر ته تقرب کوي؛ نو له پورتنۍ اړیکې څخه

$$(y-k)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 \quad \text{لرو:}$$

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h) \quad \text{د پورتنۍ معادلې دویم جذر نیسو:}$$

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}(x-h) + k} \quad \text{د مجانبونو معادله}$$

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د هغې هايپربولې معادله چې محراقونه يې د y له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي (دويم حالت)

د درسي کتاب (34) مخ

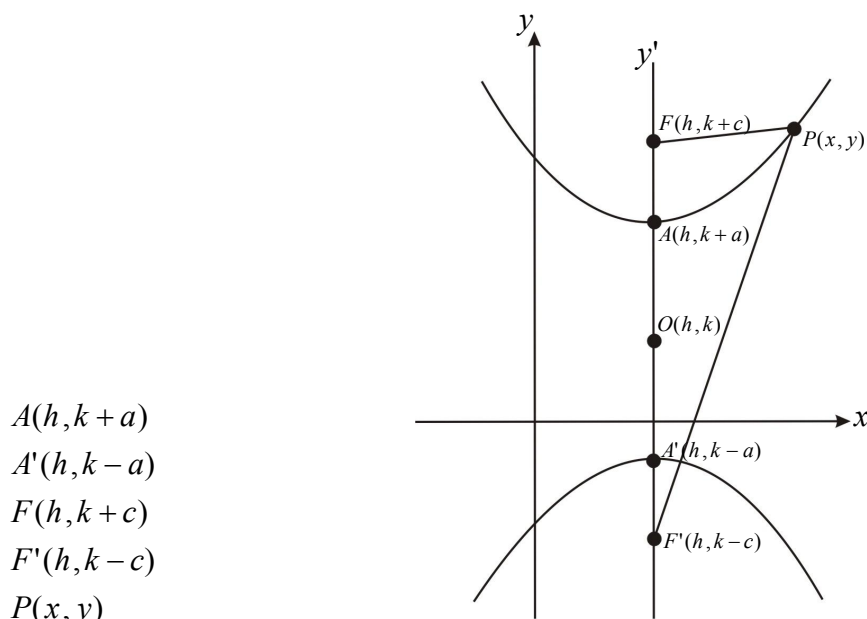
د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کونکي به په دې وتوانېږي چې: • د هغې هايپربولې شکل چې محراقونه يې د y پر محور يا د y له محور سره په موازي محور پراته وي، رسم کړي. • د ورکړل شوي شرط لاندې د هغې د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې وټاکي. • او د $(\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1)$ معادله په لاس راوړای شي. • د پورتنۍ پوهې او مهارت په حاصلولو سره به د رياضي د لازياتې پوهې له حاصلولو سره علاقه مند شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ييز کار
3- مرستندويه مواد:	د کتاب د 34 مخ د هايپربولې د شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې)	د لومړي حالت وړودي پوښتنه د همدې لوست لپاره هم صدق کوي.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): • ښاغلی ښوونکی د $(\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1)$ معادله پر تخته وليکي، په معادله کې د هايپربولې ټولې اجزايې وروپېژني، د $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ په برخه کې لنډه تبصره وکړي. • ښاغلی ښوونکی دې د 32 مخ لومړۍ مثال د پوښتنې او ځواب په توگه په ټولگي کې حل کړي. • ښاغلی ښوونکی دې د کتاب د 36 مخ دويم مثال يعنې $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله پر تخته حل کړي او يو زده کوونکی دې راوغواړي چې د هغې معياري معادله وليکي، نور زده کوونکي دې په عين وخت کې نوموړۍ مثال په خپلو کتابچو کې حل کړي (له کتاب څخه دې گټه وانخلي). د فعاليت په پای کې دې يو زده کوونکی خپل فعاليت نورو زده کوونکو ته توضيح کړي چې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې اصلاح کړي.	
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې) د لوست د لارښه پوهېدو لپاره ښاغلی ښوونکی دې د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې زده کوونکو ته وروښي.	
7- د لوست د پايلې ارزونه: (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه وازمويي: 1. څوک د $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ او $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ معادلو توپير ويلاى شي؟	

2. څوک کولای شي د پورتنیو دوو معادلو شکلونه په ساده ډول پرتله کړي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د هایپرېولا د معادلې د دویم حالت ثبوت:



$$A(h, k+a)$$

$$A'(h, k-a)$$

$$F(h, k+c)$$

$$F'(h, k-c)$$

$$P(x, y)$$

$$|PF| - |PF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2})^2 = (2a + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2})^2$$

$$(x-h)^2 + (y-(k+c))^2 = 4a^2 + 2 \cdot 2a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + (x-h)^2 + (y-(k-c))^2$$

$$y^2 - 2y(k+c) + (k+c)^2 = 4a^2 + 4a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2$$

$$-2yk - 2yc + k^2 + 2kc + c^2 = 4a^2 + 4a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} - 2yk + 2yc + k^2 - 2kc + c^2$$

$$-2yc + 2kc = 4a^2 + 4a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + 2yc - 2kc$$

$$-4yc + 4kc - 4a^2 = 4a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} \quad / \div 4$$

$$-yc + kc - a^2 = a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2}$$

$$-c(y-k) - a^2 = a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} \quad / \cdot (-1)$$

$$(c(y-k) + a^2)^2 = (-a \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2})^2$$

$$c^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^4 = a^2[(x-h)^2 + (y-(k-c))^2]$$

$$c^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^4 = a^2(x-h)^2 + a^2[y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2]$$

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2y^2 - 2a^2y(k-c) + a^2(k-c)^2 - 2a^2c(y-k) - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + 2a^2yc + a^2(k-c)^2 - 2a^2yc + 2a^2ck - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2[k^2 - 2kc + c^2] + 2a^2ck - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 - 2a^2kc + a^2c^2 + 2a^2ck - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2c^2 - a^4$$

$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2(c^2 - a^2)$$

خرنگه چې $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$ دی؛ نو:

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2[y^2 - 2yk + k^2] + a^2b^2$$

$$c^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$

$$a^2(y-k)^2 + b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2(y-k)^2 + a^2b^2$$

$$b^2(y-k)^2 - a^2(x-h)^2 = a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$

$$\frac{b^2(y-k)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \quad \text{د هایپرېولا د دویم حالت معادله:}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$ معادله د هایپرېولا په معیاري معادلې باندې واړوئ.

حل: د پورتنۍ معادلې له مخې معلومېږي چې $A \neq B$ او مختلف اشاره دی.

$$9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$$

$$9(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) - 79 = 0$$

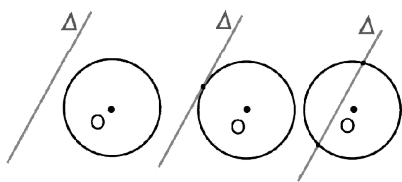
$$9(x^2 + 6x + 9 - 9) - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 79 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 81 - 4(y-2)^2 + 16 - 79 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 144 \quad / \div 144$$

$$\frac{9(x+3)^2}{144} - \frac{4(y-2)^2}{144} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1} \quad \text{د هایپرېولا معیاري معادله}$$



لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

د یوې کرښې موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

د درسي کتاب (37) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • د یوې کرښې او مخروطي مقاطعو د نسبتي حالتونو پر مفهوم پوه شي. • د دایرې او د مستقیمې کرښې معادلې وپېژني. • له معادلو څخه په کار اخیستنې سره دایره او د مستقیم خط گراف رسم کړای شي. • د دایرې موقعیت له یوې کرښې سره وټاکلای شي. • بالاخره د پورتنۍ پوهې او مهارت له حاصلولو څخه خوښ شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار	
3- مرستندویه مواد: د کتاب 37، 38، 39 او 40 مخونو چارټونه	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له زده کوونکو څخه وروډي پوښتنه وپوښتی چې هغوی د دایرې او مستقیم خط د حالتونو په اړه فکر وکړي او نظر ورکړي، البته د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته به وروډي پوښتنه حل کړای شي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو د ځوابونو له اورېدو څخه وروسته د کتاب 37 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخ کې ځوړند کړی او زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د 37 مخ فعالیت سرته ورسوي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړی چې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته ورسره وکړي، ترڅو هغه زده کوونکي چې تېروتنه یې کړي وي خپله تېروتنه اصلاح کړي. • ښاغلی ښوونکی یو داوطلب زده کوونکی د ټولګي مخ ته راوغواړي چې د $x^2 + y^2 = 9$ دایره د وضعیه کمیاتو په سېسټم کې پر تخته رسم کړي. له یوه بل داوطلب زده کوونکي څخه وغواړي چې د $y = x + 3$ مستقیمه کرښه هم رسم کړي، بیا ښوونکی شکل ته اشاره کوي او له یوه زده کوونکي څخه پوښتنه کوي: • کرښې دایره په څو ټکو کې قطع کړې ده؟ د زده کوونکو د ځواب له اورېدو څخه وروسته د لومړي مثال په حل د پوښتنو او ځوابونو په طریقه پیل کوي. • ښاغلی ښوونکی دې دویم او دریم مثال د زده کوونکو په فعال ګډون او برخې اخیستنې سره حل کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښوونې لپاره څلورم مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولګي کې حل کړی، بیا د $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ معادله پر تخته ولیکئ او مناقشه وکړئ چې پورتنۍ معادله په کوم صورت کې د دایرې، په کوم حالت کې د الپس او په کوم صورت کې د هایپربول معادله ده؟ همدارنګه د پارابولا معادله به څه شکل ولري؟

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډه شي چې زده‌کونکو زده‌کړه، کړې ده او که نه؟ زده‌کونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوئ:

1. یوه مستقیمه کرښه د مخروطي مقاطعو له هر یوه سره څو حالتونه لري؟
2. که چیرې $\Delta = 0$ وي، ایا مستقیمه کرښه دایره قطع کوي که نه؟ که چیرې دایره قطع کوي؛ نو په څو ټکو کې؟
3. په کوم صورت کې مستقیمه کرښه له مخروطي مقاطعو سره په یوه ټکي کې مماس وي؟

لومړۍ څپرکۍ: مخروطي مقاطع

پوښتنې

د درسي کتاب (40) مخ

د لوست وخت: (يو يا دوه درسي ساعتونه)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به په دې وتوانېږي چې: • هريو له مخروطي مقاطعو (دايره، الپس، پارابولا او هايپربول) د معادلو له مخې تشخيص کړای شي. • اړونده پوښتنې حل کړي. • د پوښتنو له حل څخه به په خپل ځان ډاډمن شي.	
2- د زده کړې لارې:	ډله ييز انفرادي، پوښتنې او ځوابونه.
3- مرستندويه مواد:	
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې)	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): • ښاغلی ښوونکی د کتاب 40 مخ د لومړۍ پوښتنې د a جزء ټولگي کې د پوښتنو او ځوابونو په شکل حل کړی. • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو د لومړۍ پوښتنې b جزء په خپلو ډلو کې حل او وروسته د يوې ډلې له استازي څخه وغواړي چې د خپل حل په اړه توضيحات ورکړي چې نورو زده کوونکو ته روښانه شي. • ښاغلی ښوونکی د لومړۍ پوښتنې c جزء يوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته يې حل کړي. په عين وخت کې دغه پوښتنه نورو ته هم ورکړی چې په انفرادي توگه يې په خپلو کتابچو کې حل کړي او د زده کوونکو څارنه وکړي چې له تختې څخه يې نقل نکړي. وروسته د تختې مخې ته ولاړ زده کوونکی خپل حل دې نورو ته توضيح کړي، که چيرې کومه تېروتنه شتون ولري، لارښوونه او مرسته ورسره وکړي، چې نور زده کوونکي خپلې تېروتنې اصلاح کړي. په هغه صورت کې چې پوښتنې په يوه ساعت کې حل نشي د رياضي په بل درسي ساعت کې دې پاتې پوښتنې حل شي.	
9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه: 1- لاندې معادلې د هغوی د گرافونو د منحنی له مخې و ټاکي: a) $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ b) $9x^2 + 9y^2 = 27$ c) $25x^2 + 16y^2 = 400$ d) $x^2 - y^2 = 0$ e) $y^2 + 6y - x + 2 = 0$	

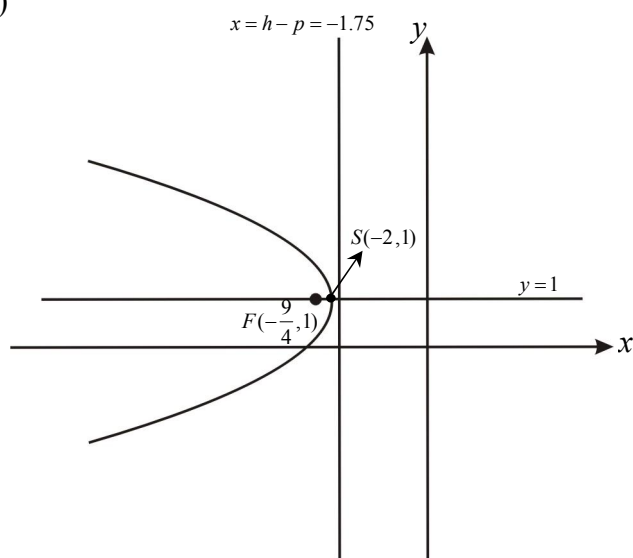
حل: a) مخکې له دې چې پوښتنه حل کړو لومړی باید د پوښتنې ټولې اجزاوې تکمیل مربع شي چې د منحنی په تشخیص کې مرسته کوي.

$$y^2 - 2y + 1 - 1 + x + 3 = 0$$

$$(y-1)^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = -(x+2)$$

پورتني معادله د هغې پارابولا معادله ده چې راس یې په $(-2, 1)$ ټکي کې دی او $4p = -1$ یا $p = -\frac{1}{4} < 0$ ده، نو د پارابولا محراق د x له محور سره پر موازي محور او خوله یې کینې خواته خلاصه ده.

$$F(h+p, k) = F(-2 - \frac{1}{4}, 1) = F(-\frac{9}{4}, 1)$$



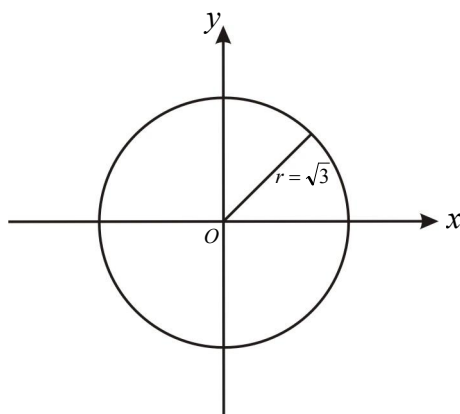
حل: b)

$$9x^2 + 9y^2 = 27$$

$$9(x^2 + y^2) = 27 \div 9$$

$$x^2 + y^2 = 3$$

پورتني معادله د هغې دایرې معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیات په مبدا کې دی او شعاع یې $r = \sqrt{3}$ ده.



(c: حل)

$$25x^2 + 16y^2 = 400 \quad / \div 400$$

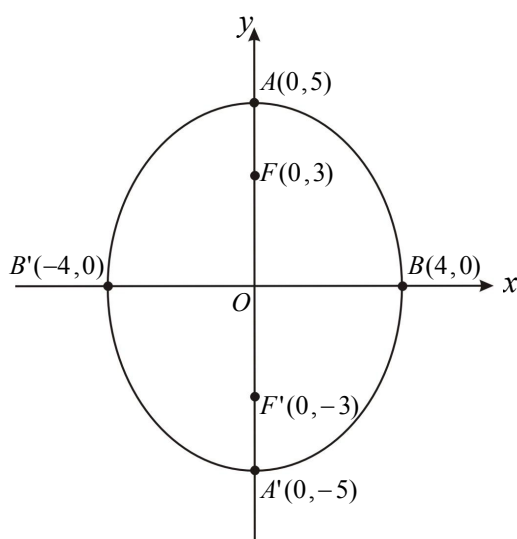
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

پورتنی معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکزي یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، اوږد قطري یې د y پر محور پروت دی.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 25, \quad a = \pm 5 \\ b^2 = 16, \quad b = \pm 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c^2 = a^2 - b^2 \\ c^2 = 25 - 16 = 9, \quad c = \pm 3 \end{array}$$

$$|AA'| = 2a = 10, \quad |BB'| = 2b = 8, \quad |FF'| = 2c = 6$$

$$A(0,5), \quad A'(0,-5), \quad B(4,0), \quad B'(-4,0), \quad F(0,3), \quad F'(0,-3)$$

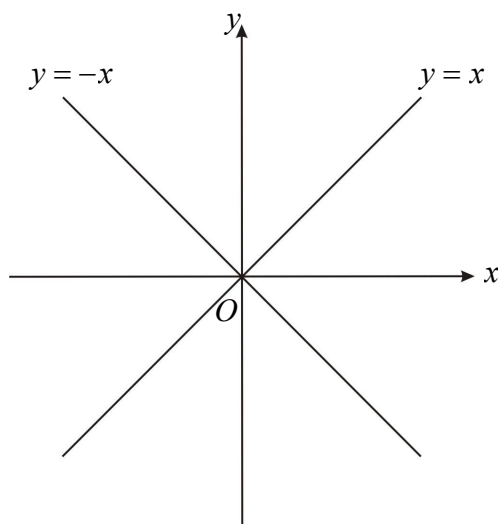


(d: حل)

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$-y^2 = -x^2 \Rightarrow y^2 = x^2, \quad y = \pm x$$

د هغو خطونو معادله ده چې د تقاطع ټکی یې د وضعیه کمیاتو مبدا ده.



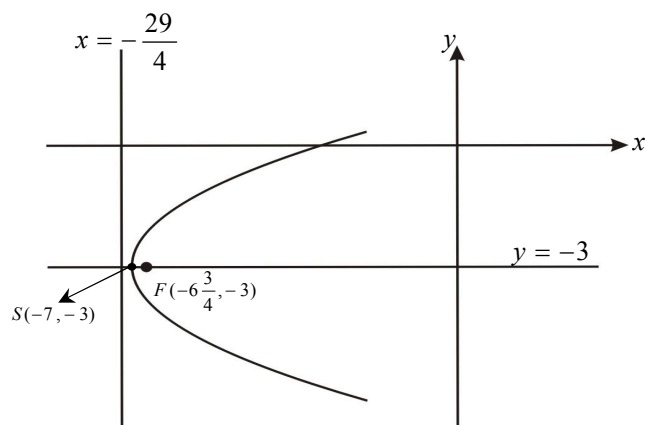
حل: (e)

$$y^2 + 6y - x + 2 = 0$$

$$y^2 + 6y + 9 - 9 - x + 2 = 0$$

$$(y+3)^2 - (x+7) = 0$$

$$(y+3)^2 = x+7$$



پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده چې راس

یې د $(-7, -3)$ په ټکي کې پروت دی او $4p = 1$

یا $p = \frac{1}{4} > 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د x له محور

سره پر موازي محور ښي خواته خلاصه ده محراق

یې $F(h+p, k)$ یا $F(-6\frac{3}{4}, -3)$

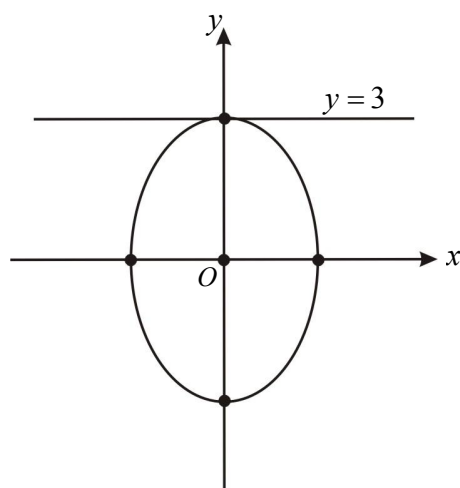
2- د $9x^2 + 4y^2 = 36$ الپس او د $y = 3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

حل:

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$9x^2 + 4(3)^2 = 36$$

$$9x^2 + 36 = 36 \Rightarrow 9x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$



ویلای شو چې د $y = 3$ خط له بیضوي سره مماس

دی او له بیضوي سره د تماس ټکی یې عبارت دی

له $(0, 3)$ څخه.

3- د $y = x$ خط او $x^2 - 2y^2 = 4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 - 2y^2 = 4$$

$$y^2 - 2y^2 = 4$$

$$-y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = -4$$

څرنگه چې $y = x$ دی، نو:

معلومېږي چې y^2 یو منفي عدد دی، معادله حل نه لري؛ نو هایپربول او $y = x$ خط یو بل نه قطع کوي.

د لومړي څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه ترې تا و کړئ.

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت دی له:

(a) بیضوي (b) دایره (c) هایپربول (d) دوه متقاطع خطونه

2- د الپس محراقونه هغه ټکي دي چې د الپس له مرکز څخه:

(a) برابر و اټن ولري (b) مختلف و اټنونه لري

(c) د اوږده قطر نیمایي و اټن لري (d) د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چیرې M د الپس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

(a) $|MF| - |MF'| = 2a$ (b) $|MF| + |MF'| = a$

(c) $|MF| + |MF'| = 2a$ (d) $|MF| + |MF'| = 0$

4- د الپس عن المركزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

(a) $e = \frac{a}{c}$ (b) $e = \frac{c}{a}$ (c) $e = \frac{b}{c}$ (d) $e = \frac{c}{b}$

5- په Ellips کې د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

(a) $a^2 = b^2 - e^2$ (b) $a^2 + b^2 = c^2$

(c) $a^2 = b^2 + e^2$ (d) $a^2 = b^2 + c^2$

6- د $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ په معادله کې $p > 0$ سره وي، نو:

(a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. (b) د پارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده.

(c) د پارابولا خوله بني خواته خلاص ده (d) د پارابولا خوله کینې خواته خلاص ده.

7- د $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$ د پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

(a) $F(-1, -2)$ (b) $F(-1, 4)$ (c) $F(-1, 2)$ (d) $F(-4, -1)$

8- که چیرې F او F' د هایپربول محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربول د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

(a) $|PF| + |PF'| = 2a$ (b) $|PF| - |PF'| = a$

(c) $|PF| - |PF'| = 2a$ (d) $|PF| - |PF'| = 0$

9: د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

(a) د y محور ته (b) د x محور ته

(c) د x او y محورونو ته (d) د وضعیه کمیاتو مبداتو

10: په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربول عن المركزیت ښیي؟

(a) $e < 1$ (b) $e = 1$ (c) $e > 1$ (d) $e = -1$

11: د $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ د بیضوي د اوږده قطر موقعیت:

(a) د y پر محور باندې دی. (b) د x پر محور باندې دی.

(c) د x پر محور عمود دی. (d) د y له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. په څه نوم یادېږي؟

(a) کره (b) دایره (c) پارابولا (d) بیضوي

13: د $y^2 = -4(x+2)$ پارابولا د راس مختصات عبارت دی له:

(a) (2,4) (b) (4,2) (c) (2,0) (d) (-2,0)

14: د $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$ معادله عبارت ده له:

(a) دایرې (b) بیضوي (c) پارابولا (d) هایپربولا

15: د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

حل:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{9(x-1)^2 - 4(y-2)^2}{36} = 1 \quad / \cdot 36$$

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$9x^2 - 18x + 9 - 4y^2 + 16y - 16 = 36$$

$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 7 - 36 = 0$$

$$9x^2 - 4(2x)^2 - 18x + 16(2x) - 43 = 0$$

$$9x^2 - 16x^2 - 18x + 32x - 43 = 0$$

$$-7x^2 + 14x - 43 = 0 \quad / (-1) \Rightarrow 7x^2 - 14x + 43 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 4 \cdot 7 \cdot 43 = 196 - 1204 = -1008$$

معلومېږي چې $\Delta < 0$ ده او معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري؛ نو د $y = 2x$ خط له هایپربولا سره هېڅ گډ ټکی نه لري.

16: د $2y = 3x$ مستقیم خط د $2y^2 - 6y + 5x - 12 = 0$ منحنی په څو ټکو کې قطع کوي؟

حل:

$$2y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$2y^2 - 6y + 5x - 12 = 0$$

$$2\left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2}x + 5x - 12 = 0$$

$$2 \cdot \frac{9}{4}x^2 - 9x + 5x - 12 = 0$$

$$\frac{9}{2}x^2 - 4x - 12 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$9x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 - 4(9)(-24) = 64 + 864 = 928$$

څرنگه چې $\Delta > 0$ ده؛ نو نوموړی مستقیم خط هایپربولا په دوو ټکو کې قطع کوي.

17 : لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړۍ هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$$a) x^2 + 4y^2 = 4$$

$$b) 9x^2 + 2y^2 = 15$$

$$c) 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$$

$$d) x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$$

حل (a) :

$$a) x^2 + 4y^2 = 4 \quad / \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

پورتنۍ معادله د هغې بیضوي معادله ده چې مرکزي یې په مبدا کې او محراقي محور یې د x محور دی. د گراف درسمولو لپاره مرکز، محراقونه، اوږد قطر او لنډ قطر پیدا کوو:

$$a^2 = 4, \quad a = \pm 2, \quad A(2, 0), \quad A'(-2, 0)$$

$$b^2 = 1, \quad b = \pm 1, \quad B(0, 1), \quad B'(0, -1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

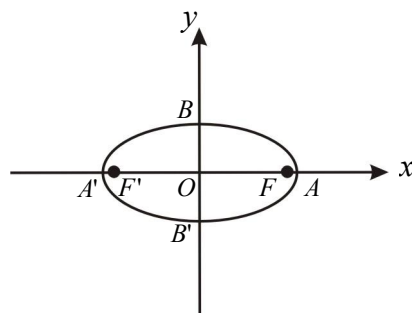
$$c^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} = \pm 1.73$$

$$\left. \begin{aligned} F(c, 0) &= F(\sqrt{3}, 0) \\ F'(-c, 0) &= F'(-\sqrt{3}, 0) \end{aligned} \right\} \text{محراقونه}$$

$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ د اوږده قطر اوږدوالي}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 1 = 2 \text{ د لنډ قطر اوږدوالي}$$

$$|FF'| = 2c = 2\sqrt{3} \text{ د محراقونو ترمنځ واټن (فاصله)}$$



حل (b) :

$$b) 9x^2 + 2y^2 = 15$$

$$9x^2 + 2y^2 = 15 \quad / \div 15$$

$$\frac{9x^2}{15} + \frac{2y^2}{15} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{9}{15}x^2}{\frac{9}{15}} + \frac{\frac{2}{15}y^2}{\frac{2}{15}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1.666} + \frac{y^2}{7.5} = 1$$

پورتنۍ معادله د الپس معادله ده، نو څرنگه چې محراقونه د y پر محور باندې دي، د گرافونو درسمولو لپاره د الپس محراقونه پیدا کوو:

$$a^2 = 7.5 \Rightarrow a = \pm 2.73$$

$$b^2 = 1.66 \Rightarrow b = \pm 1.28$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 7.5 - 1.66 = 5.84 \Rightarrow c = \pm 2.41$$

$$\left. \begin{aligned} A(0, a) &= A(0, 2.73) \\ A'(0, -a) &= A'(0, -2.73) \end{aligned} \right\} \text{د اوږده قطر راسونه}$$

$$\left. \begin{aligned} B(b, 0) &= B(1.28, 0) \\ B'(-b, 0) &= B'(-1.28, 0) \end{aligned} \right\} \text{د لنډ قطر راسونه}$$

$$\left. \begin{aligned} F(0, c) &= F(0, 2.41) \\ F'(0, -c) &= F'(0, -2.41) \end{aligned} \right\} \text{د محراقونو مختصات}$$

معلومېږي چې $A \neq B$ او یو شان علامې لري؛ نو پورتنی معادله د یوې بیضوي معادله ده، د گراف رسم دې د زده‌کوونکو په واسطه وشي.

حل (c):

$$c) 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$$

$$16(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 10y) + 225 = 0$$

$$16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 10y + 25 - 25) + 225 = 0$$

$$16(x-3)^2 - 144 + 9(y-5)^2 - 225 + 225 = 0$$

$$16(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 144$$

$$\frac{16(x-3)^2}{144} + \frac{9(y-5)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

څرنگه چې د $(y-5)^2$ مخ‌خړ لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د y له محور سره موازي دی.

د بیضوي مرکز $(h, k) = (3, 5)$

$$a^2 = 16, \quad a = \pm 4 \quad A(h, k+a) = A(3, 5+4) = A(3, 9)$$

$$b^2 = 9, \quad b = \pm 3 \quad A'(h, k-a) = A'(3, 5-4) = A'(3, 1)$$

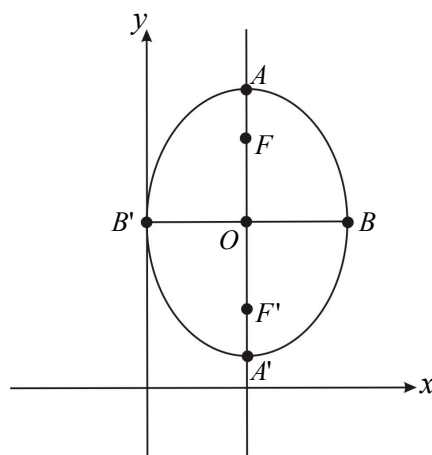
$$B(h+b, k) = B(3+3, 5) = B(6, 5)$$

$$B'(h-b, k) = B'(3-3, 5) = B'(0, 5)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 = 7, \quad c = \pm\sqrt{7}$$

$$F(h, k+c), \quad F(3, 5+\sqrt{7})$$

$$F'(h, k-c), \quad F'(3, 5-\sqrt{7})$$



حل (d):

$$d) \quad x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 - 36 - 120y + 288 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 120y + 252 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 120y - 252$$

$$(x + 6)^2 = 120(y - 2.1)$$

$$h = -6, \quad k = 2.1 \quad S(h, k) = (-6, 2.1) \text{ د پارابولا راس}$$

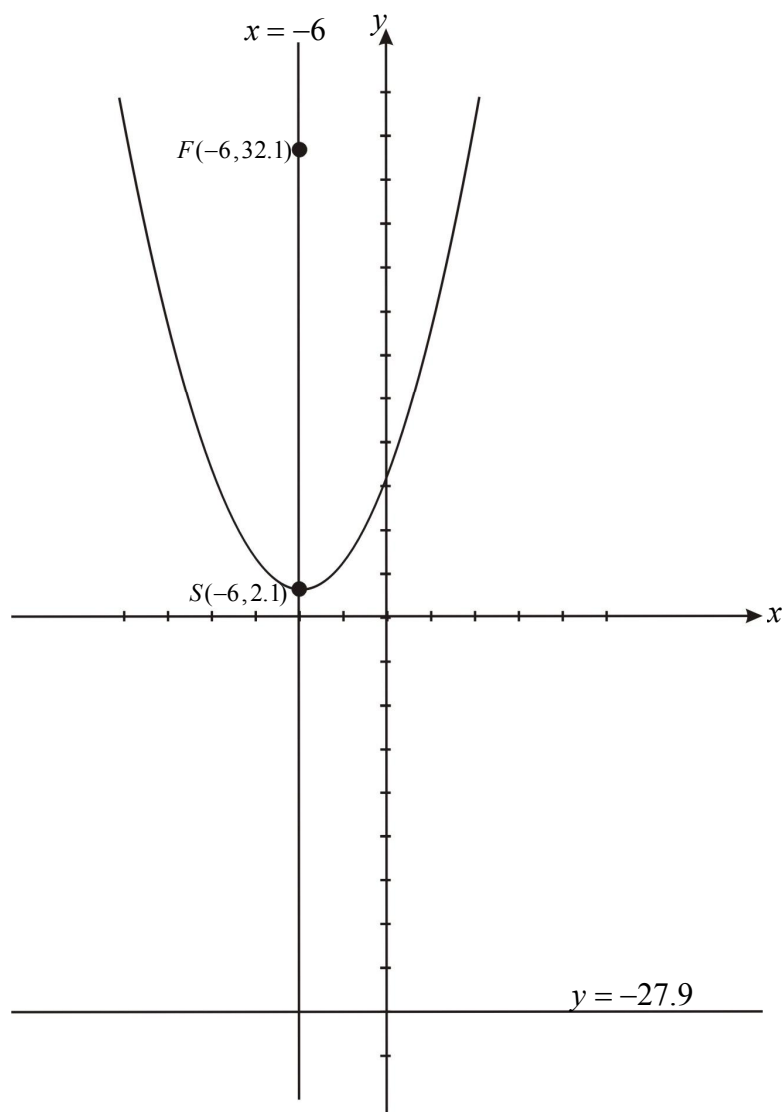
$$4P = 120 \Rightarrow P = 30$$

څرنگه چې $P > 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د y پر محور پورته خواته خلاصه ده.

$$F(h, k + p) = F(-6, 2.1 + 30) = F(-6, 32.1) \text{ د پارابولا محراق}$$

$$y = k - p = 2.1 - 30 = -27.9 \text{ د مؤجه خط معادله}$$

$$x = h = -6 \text{ د تناظر محور}$$



18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

(a) (0,0) مرکزي مختصه، $a = -2$ او $e = 0.75$ دي او لوی قطريې د y پر محور باندې پروت دی.

(b) (0,0) مرکزي مختصه، $b = 64$ او $e = 0.5$ دي او لوی قطريې د x پر محور باندې پروت دی.

حل a: که چیرې د لوی قطر نیمایي a وي؛ نو:

$$a = 2, \quad e = \frac{c}{a} = 0.75 = \frac{3}{4}, \quad c = a \cdot e = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{16-9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{7}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

حل b:

$$e = 0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2, \quad b^2 = a^2 - a^2 e^2$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2), \quad (64)^2 = a^2 \cdot (1 - \frac{1}{4}) = a^2(\frac{4-1}{4})$$

$$(64)^2 = a^2(\frac{3}{4}) \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3}(64)^2 = \frac{(2 \cdot 64)^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{\frac{4 \cdot (64)^2}{3}} + \frac{y^2}{(64)^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{د بیضوي معادله}$$

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټولې اجزاوې پیدا کړئ.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (b) \quad 4(x-1)^2 + y^2 = 4 \quad (a)$$

حل a:

$$4(x-1)^2 + y^2 = 4 \quad / \div 4$$

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

څرنگه چې د y مخرج لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور (اوږد قطر) د y له محور سره موازي دی.

$$h = 1, \quad k = 0$$

د بیضوي مرکز $(h, k) = (1, 0)$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \pm \sqrt{3}$$

د بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'| = 2a = 2 \cdot 2 = 4$

د بیضوي د لنډ قطر اوږدوالی $|BB'| = 2b = 2 \cdot 1 = 2$

د بیضوي د کبیر قطر د راسونو مختصات $A(h, k+a) = (1, 2)$, $A'(h, k-a) = (1, 0-2) = (1, -2)$

د محراق مختصات $F(h, k+c) = (1, \sqrt{3})$, $F'(h, k-c) = (1, -\sqrt{3})$

د بیضوي د صغیر قطر د راسونو مختصات $\left. \begin{aligned} (h+b, k) &= (1+1, 0) = (2, 0) \\ (h-b, k) &= (1-1, 0) = (0, 0) \end{aligned} \right\}$

حل b)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

بیا هم لیدل کېږي چې د y^2 مخخ لوی دی؛ نو د بیضوي محراقي محور د y له محور څخه عبارت دی.

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$c = \pm\sqrt{5}$$

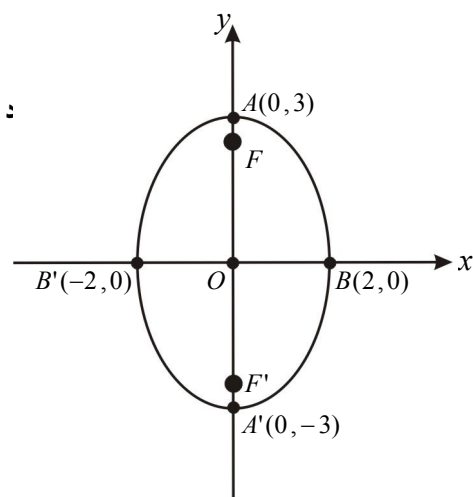
د بیضوي د کبیر قطر د راسونو مختصات $\left. \begin{aligned} A(0, a) &= A(0, 3) \\ A'(0, -a) &= A'(0, -3) \end{aligned} \right\}$

د بیضوي د صغیر قطر د راسونو مختصات $\left. \begin{aligned} B(b, 0) &= (2, 0) \\ B'(-b, 0) &= (-2, 0) \end{aligned} \right\}$

د کبیر قطر اوږدوالی $|AA'| = 2a = 2 \cdot 3 = 6$

د صغیر قطر اوږدوالی $|BB'| = 2b = 2 \cdot 2 = 4$

د بیضوي د محراقونو مختصات $\left. \begin{aligned} F(0, c) &= F(0, \sqrt{5}) \\ F'(0, -c) &= F'(0, -\sqrt{5}) \end{aligned} \right\}$



20: د پارابولا لاندې معادلي لومړي په معیاري شکل ولیکئ او بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$$x^2 - 11y = 0 \quad (a)$$

$$y^2 - 4y - 4x + 2 = 0 \quad (b)$$

حل a)

$$x^2 - 11y = 0$$

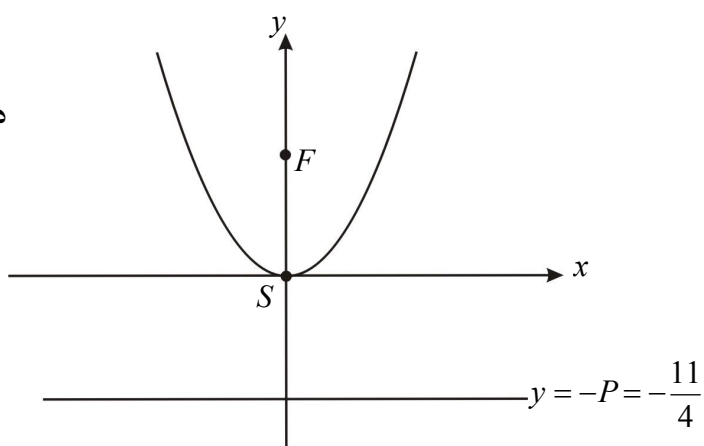
$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 11y, \quad 4P = 11 \Rightarrow P = \frac{11}{4}$$

څرنگه چې $P > 0$ ده؛ نو د پارابولا خوله د y پر محور پورته خواته خلاصه ده او راس یې په مبدا کې واقع دی.

محراق $F(0, p) = F(0, \frac{11}{4})$

د مؤجه خط معادله $y = -P = -\frac{11}{4}$



حل b)

$$y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 - 4x + 20 = 0$$

$$(y - 2)^2 - 4x + 16 = 0$$

$$(y - 2)^2 = 4x - 16$$

$$(y - 2)^2 = 4(x - 4)$$

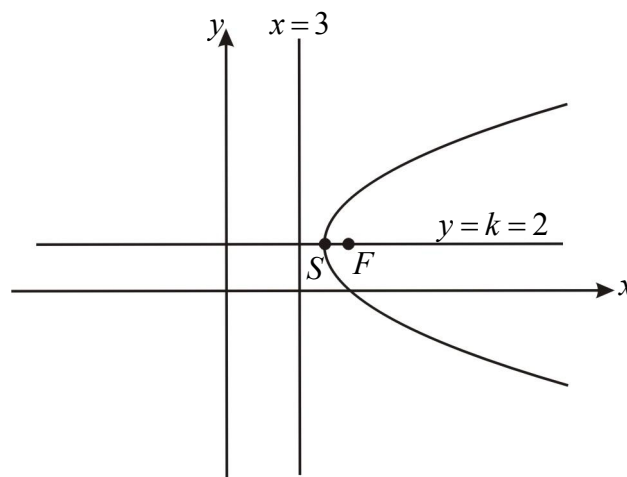
$$4P = 4, \quad P = 1 > 0$$

د پارابولا راس $S(h, k) = S(4, 2)$

محراق $F(h + p, k) = F(4 + 1, 2) = F(5, 2)$

د مؤجه خط معادله $x = h - p = 4 - 1 = 3$

د تناظري محور معادله $y = k = 2$



21: د هایپرېولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول وپړئ:

$$4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0 \quad (a)$$

$$2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0 \quad (b)$$

حل a)

$$4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$$

$$-y^2 - 8y + 4x^2 - 32 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$y^2 + 8y - 4x^2 + 32 = 0$$

$$y^2 + 8y + 16 - 16 - 4x^2 + 32 = 0$$

$$(y + 4)^2 - 4x^2 + 16 = 0$$

$$(y + 4)^2 - 4x^2 = -16 \quad / \div (-16)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$$

حل b

$$2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$2(y^2 + 2y) - (x^2 - 10x) - 25 = 0$$

$$2(y^2 + 2y + 1 - 1) - (x^2 - 10x + 25 - 25) - 25 = 0$$

$$2(y+1)^2 - 2 - (x-5)^2 + 25 - 25 = 0$$

$$2(y+1)^2 - (x-5)^2 - 2 = 0$$

$$2(y+1)^2 - (x-5)^2 = 2 \quad / \div 2$$

$$\boxed{\frac{(y+1)^2}{1} - \frac{(x-5)^2}{2} = 1}$$

22: د هغې هايپربولا معادله پيدا كړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د راسونو مختصات او $y = \pm \frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

حل پوهېږو چې د مجانبونو عمومي معادله $y = \pm \frac{b}{a}x$ ده، هغه وخت چې د هايپربولا متقاطع محور د x له محور سره موازي وي.

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{5}{4}x \Rightarrow a = 4, \quad b = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{يا} \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

23: د هغې هايپربولا معادله پيدا كړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی يې 4 واحد وي.

حل:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1-1}{2} = 0, \quad k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

د هايپربولا مرکز $(h, k) = (0, 3)$

$$|FF'| = 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

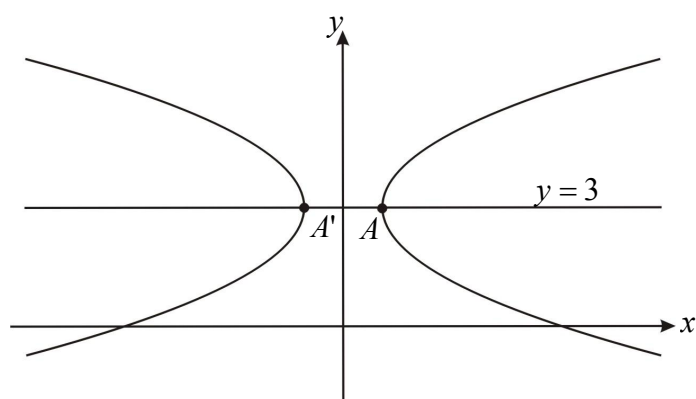
$$|AA'| = \sqrt{(1-1)^2 + (3-3)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(2)^2} = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{x^2 - \frac{(y-3)^2}{3} = 1}$$



24: د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربول په څو نقطو کې قطع کوي؟

حل:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad / \cdot (36)$$

$$9(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow 9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 4y^2 + 16y - 16 = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 4(2x)^2 + 16(2x) - 16 = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 16x^2 + 32x - 16 = 36$$

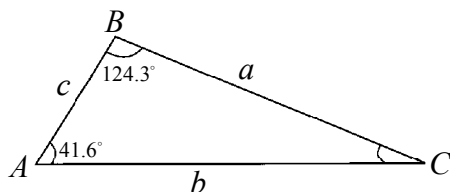
$$-7x^2 + 50x - 7 = 36 \Rightarrow -7x^2 + 50x - 43 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$7x^2 - 50x + 43 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2500 - 4 \cdot 7 \cdot 43, \Delta = 2500 - 1204 = 1296$$

$$\Delta = 1296 > 0$$

څرنگه چې $\Delta > 0$ ده؛ نو $y = 2x$ خط هایپربول په دوو نقطو کې قطع کوي.



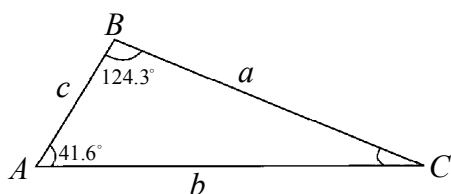
دویم څپرکی: مثلثات

د ساین قانون (Law of sine)

د درسي کتاب (49) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د یوې زاوېې د ساین د قانون په مفهوم پوه شي. • د دوو ضلعو او یوې زاوېې او یا د دوو زاوېو او یوې ضلع د لرلو په صورت کې د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړای شي. • په هر مثلث کې د ساین قانون ثبوت کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره په خپل ځان ډاډمن شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار
3- مرستندویه مواد:	د هر لوست اړونده د شکلونو چارټونه په داسې رنگ چې ولیدل شي، د وړودي پوښتنې چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د وړودي پوښتنې چارټ د ټولګي په مخ کې وځړوي او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتي چې د هغه د حل په اړه فکر وکړي. په هغه صورت کې چې زده کوونکي ونشي کولای پوښتنې ته ځواب ورکړي، د فعالیت د اجرا او د ساین د قضیې له ثبوتولو څخه وروسته وړودي پوښتنه حل کړي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): بناغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، تر څو د کتاب 49 مخ فعالیت سرته ورسوي. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی دې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. د زده کوونکو د تېروتنې په صورت کې ښوونکی دې د کتاب 49 مخ له دویم چارټ څخه په کار اخیستنې سره د ساین قانون زده کوونکو ته په پوره برخه ورکولو سره ثبوت کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)	ښوونکی دې لوست ته د لښه تحکیم لپاره د کتاب 51 مخ لومړۍ مثال د پوښتنې او ځواب په توګه حل کړي. (د کتاب د نوموړي مخ د مثلث د شکل چارټ دې د ټولګي په مخ کې وځړوي.)
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) بناغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده کوونکو لوست ښه زده کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتي: 1. له یوه زده کوونکي څخه دې پوښتنه وشي چې د ساین قضیه کومه موضوع بیانوي او فورمول دې ولیکي؟ 2. بل زده کوونکی دې راوغواړي، تر څو د $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ تناسب له مخې د b ضلعې اوږدوالی پیدا کړي.	



دویم څپرکی: مثلثات

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې

د درسي کتاب (50) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • په منفرج الزاویه مثلث کې د ساین د قانون پر مفهوم پوه شي. • د دوو ضلعو او یوې زاوېې او یا یوې ضلعې او دوو زاوېو په لرلو سره د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړي. • په ټولنه کې له دې موضوع سره د مخامخ کېدو په صورت کې ستونزه حل کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په لاس ته راوړلو سره د ریاضي له پوهې سره علاقه پیدا کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار
3- مرستندویه مواد:	د کتاب د 50 او 52 مخونو چارټونه
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	بناغلی ښوونکي دې د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د منفرج الزاویه مثلث چارټ د ټولګي په مخ کې وڅړوي او له زده کوونکو څخه دې پوښتنه وکړي چې لیا کولای شئ د ساین قضیه په منفرج الزاویه ملث کې ثبوت کړئ. ښوونکي دې زده کوونکو ته د فکر کولو وخت ورکړي او زده کوونکي دې ځواب ووايي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): بناغلی ښوونکي: په هغه صورت کې چې زده کوونکي سم ځواب ونشي ویلای، د 50 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوي او په لنډ ډول د a او b په غزېدلو ضلعو باندې په ترتیب سره د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاعګانې رسم او د چارټ په مخ کې ونښاست، وروسته د پوښتنې او ځواب په طریقه (د زده کوونکو په ګډون) د ساین رابطه چې له $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ څخه عبارت ده په لاس راوړي. ښوونکي دې د کتاب د 52 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوي. ښوونکي دې له یوه زده کوونکي څخه وغواړي چې د نوموړي مخ دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په انفرادي ډول (د کتاب د حل له لیدو پرته) په خپلو کتابچو کې حل کړي. په پای کې تختې ته ولاړ زده کوونکي دې خپل حل نورو زده کوونکو ته واضح کړي، که چیرې دده په حل کې تېروتنه ولیدل شي، بل زده کوونکي دې راوغواړي، ترڅو د هغه تېروتنه رفع کړي. ښوونکي دې د فعالیت په ترڅ کې زده کوونکي وڅاري چې له کتاب څخه کار وانخلي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دې د لوست د ښه تحکیم لپاره د کتاب 52 مخ دویم چارټ د ټولګې په مخکې وځړوي او زده‌کوونکي دې په مناسبو ډلو ووېشي. چې د نوموړي مخ دریم مثال یو د بل سره په مشوره حل کړي (ښوونکی دې د هغو زاویو ساین چې زده‌کوونکي ورته اړتیا ولري ووايي).
ښوونکی دې زده‌کوونکو ته اجازه ورته کړي چې د فعالیت د اجرا په ترڅ کې کومه ډله له کتاب څخه کار واخلي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست ښه زده کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتی:

1. ایا په قائم‌الزاویه، حاده‌الزاویه او منفرج‌الزاویه مثلثونو کې د یوه مثلث د زاویو او ضلعو ترمنځ اړیکه توپیر لري

او که نه؟ هغه اړیکه ولیکئ؟

2. په یوه متساوي‌الساقین قائم‌الزاویه مثلث کې، که چیرې یوه ضلع یې 10cm اوږدوالی ولري، د مثلث زاویې او

ضلعې حساب کړئ؟

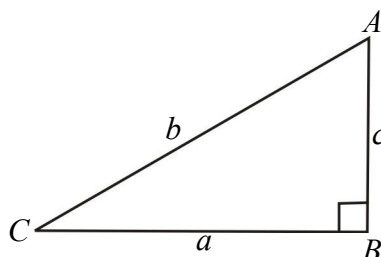
8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د ساین د قانون ثبوت په قائم‌الزاویه مثلث کې:

$$\sin A = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} \dots (1)$$

$$\sin C = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{c}{\sin C} \dots (2)$$

$$\sin B = \frac{b}{b} \Rightarrow b = \frac{b}{\sin B} \dots (3)$$



د (1)، (2) او (3) اړیکو له پرتله کولو څخه لرو چې:

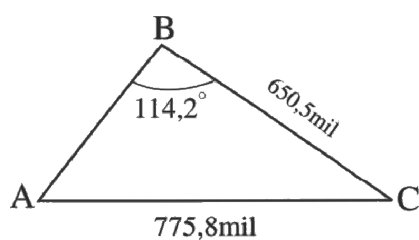
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ واحد وي، د B د زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: پورتنۍ پوښتنه د ساین له قانون څخه په کار اخېستنې نه حل کېږي. ولې دغه پوښتنه د کوساین له قانون څخه په کار اخېستلو سره حلېږي، چې تراوسه زده‌کوونکو نه دی لوستی. یوازې دغه پوښتنه د زده‌کوونکو د ارزونې لپاره په پام کې نیول شوې ده، چې ایا زده‌کوونکي موضوع ته متوجه کېږي او که نه؟

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



حل: د ساين د قانون په پام کې نيولو سره لرو:

$$a = 650.5 \text{ mil}$$

$$b = 775.3 \text{ mil}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{650.5 \cdot \sin 114.2^\circ}{775.8} = \frac{650.5 \cdot 0.9121}{775.8} = \frac{593.33}{775.8} = 0.765$$

$$A = \arcsin 0.764 = 49.9^\circ$$

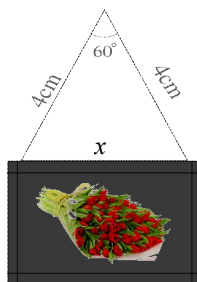
$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (49.8 + 114.2) = 180^\circ - 164^\circ = 16^\circ$$

$$\hat{C} = 16^\circ$$

$$c = \overline{AB} = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{775.8 \cdot \sin 16^\circ}{\sin 114.2^\circ} = \frac{775.8 \cdot 0.27}{0.9121}$$

$$c = \overline{AB} = \frac{209.46}{0.9121} = 229.6 \text{ mil}$$

$$c = 229.6 \text{ mil}$$



دویم څپرکی: مثلثات

د کوساین قانون (Law of cosine)

د درسي کتاب (55) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د کوساین قانون او د هغه په فورمول پوه شي. • د یوې زاوېې او دوو مجاورو ضلعو په لرلو سره د مثلث دریمه ضلع پیدا کړي، همدارنګه د مثلث د دوو مجاورو ضلعو په لرلو سره د هغو ضلعو ترمنځ زاویه پیدا کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار
3- مرستندویه مواد:	د وروډي پوښتنې د شکل چارټ او د کتاب 55، 57 او 58 مخونو د شکلونو چارټونه
4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي پوښتنې چارټ د ټولګي په مخکې وځړوي او وروډي پوښتنه وپوښتي، ترڅو زده کوونکي د هغه په اړه فکر وکړي او خپل نظر ووايي که چیرې د حل لاره پیدا نشي کړای. د فعالیت د سرته رسولو په پایله کې به وکولای شي چې حل یې کړي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې:	
• ښاغلی ښوونکی د کتاب 55 مخ دویم چارټ د ټولګي په مخکې وځړوي. • زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. • د ډلو د فعالیت د اجرا کولو د بهیر څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره مرسته او لارښوونه وکړي. • د فعالیت په پای کې دې د یوې ډلې استازی خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته د تختې پر مخ توضیح کړي. که چیرې توضیح یې سمه او فعالیت یې صحیح سرته رسولی وي، نورې ډلې دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي. • د کتاب 57 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کوونکو په واسطه حل کړی. • یوه زده کوونکي ته دنده ورکړي چې د درسي کتاب 57 مخ دویم مثال پر تخته حل کړي. په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته ورکړي چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي. (له کتاب څخه کار وانهخلي). په پای کې تختې ته ولاړ زده کوونکي دې خپل فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چیرې سم حل شوی وي، نور زده کوونکي دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې	
ښاغلی ښوونکی لوست ته د لارښه تحکیم لپاره د کتاب 57 مخ دریم مثال د پوښتنې او ځواب پر طریقه په زده کوونکو باندې حل کړی.	

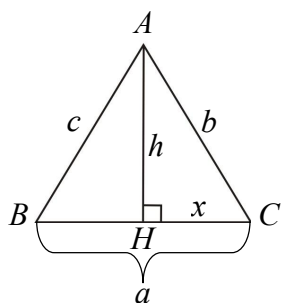
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کونکو لوست ښه زده‌کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتئ:

1. یوه زده‌کونکي ته دنده ورکړئ چې څلورم مثال پر تخته حل کړي.
2. له یوه زده‌کونکي څخه وغواړئ ترڅو د کوساین قضیه بیان کړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 56 مخ د فعالیت اړونده رابطو ثبوت: د AHC په قائم‌الزاویه مثلث کې لرو:



$$\overline{AH}^2 = h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2 = b^2 - x^2$$

همدارنگه په نوموړي مثلث کې:

$$c^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$\overline{BH} = a - x$$

نو:

$$c^2 = (a - x)^2 + h^2$$

$$c^2 = (a - x)^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$$

د AHC په مثلث کې:

$$\cos C = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos C$$

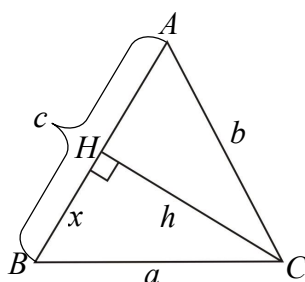
$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

اوس غواړو چې $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ رابطه په لاس راوړو.

د BHC په مثلث کې لرو چې: $h^2 = a^2 - x^2$

له بلې خوا د AHC په مثلث کې لرو:



$$b^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$b^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

په پورتني رابطه کې یې د h پر ځای قیمت وضع کوو:

$$b^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$$

د BHC په مثلث کې:

$$\cos B = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos B$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$-2ac \cos B = b^2 - a^2 - c^2$$

$$2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

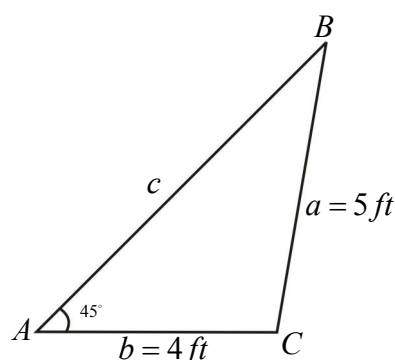
1. که چیرې د ABC په مثلث کې $b = 4\text{ ft}$, $a = 5\text{ ft}$ او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاوې پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \cdot \sin 45^\circ}{5}$$

$$\sin B = \frac{4 \cdot 0.707}{5} = \frac{2.828}{5} = 0.565$$

$$\hat{B} = \sin^{-1} 0.565 \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 34.4^\circ}$$



$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (45^\circ + 34.4^\circ) = 180^\circ - 79.4^\circ = 100.6^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{C} = 100.6^\circ}$$

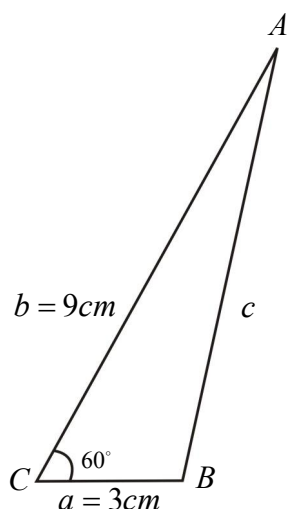
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 100.6^\circ$$

$$c^2 = 41 - 40(-0.1839) = 41 + 7.356 = 48.356$$

$$\boxed{c = 6.953\text{ ft}}$$

2. که چیرې په یوه مثلث کې $a = 3\text{ cm}$ او $b = 9\text{ cm}$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي، د c ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

حل:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 9 + 81 - 2 \cdot 3 \cdot 9 \cos 60^\circ$$

$$c^2 = 90 - 54 \cdot \frac{1}{2} = 90 - 27 = 63$$

$$\boxed{c = 7.93\text{ cm}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

دویم څپرکی: مثلثات

د تانجنټ قانون (Law of tangent)

د درسي کتاب (59) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د تانجنټ په قانون پوه شي. • له نوموړي قانون څخه په کار اخېستنې سره نامعلومې زاوېې او نامعلومې ضلعي پيدا کړای شي. • له پورته پوهې او مهارت څخه خوښي ښکاره کړي او د رياضي له زده کړې سره علاقمند شي.	
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار
3- مرستندويه مواد:	د وړودي پوښتنې اړوند د تانجنټ د فورمول چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته هغه چارټ چې د $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$ فورمول په کې لیکل شوی دی، د ټولګي په مخکې وڅړوی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې چې د هغې په اړه خپل نظرونه ووايي. په هغه صورت کې چې سم ځواب ونشي ویلای، په لنډه توګه ورته ووايېست، د لوست بهیر په لاندې ډول پیل کړی.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، چې د کتاب 59 مخ فعالیت د یو بل سره په مشوره سرته ورسوي، د زده کوونکو د ډله ییز فعالیت له اجرا کولو څخه څارنه وکړي. فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي. ښاغلی ښوونکی تاسې باید د تانجنټ قانون ثبوت مخکې له مخکې لوستی وي، ترڅو وکولای شئ د زده کوونکو له ډلو سره مرسته وکړي. البته د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته زده کوونکي د تانجنټ قانون هم په ډلو کې ثبوتوي، چې له دې قانون څخه په کار اخېستنې سره کولای شو د یو مثلث نامعلومې ضلعي او یا نامعلومې زاوېې پيدا کړو. باید په پام کې ولری چې د پورتنی فعالیت د سرته رسولو پړاوونه دې د یوې ډلې د استازي په مرسته پر تخته توضیح شي او ښوونکی دې مرسته ورسره وکړي. ښاغلی ښوونکی د کتاب 60 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه پر یوه زده کوونکي باندې حل کړی.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی تې لوست ته د تحکیم ورکولو لپاره د ضرب او تحویل رابطې یعنې
 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$ او $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$ د زده کونکو په واسطه
 پر تخته کار وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده کونکو لوست زده کړې دی او که نه؟ له زده کونکو څخه لاندې
 پوښتنې وپوښتي:

1. څوک د تانجنټ قانون ویلای شي؟

2. که چیرې $A = 60^\circ$, $B = 30^\circ$ او د مثلث یوه ضلع $b = 5\text{cm}$ وي، له تانجنټ د قانون څخه په کار اخیستنې سره د

نوموړي مثلث a ضلع پیدا کړئ؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 60 مخ فعالیت اړوندو رابطو ثبوت:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = D$$

$$\frac{a}{\sin A} = D \Rightarrow a = D \sin A \quad \dots 1$$

$$\frac{c}{\sin C} = D \Rightarrow c = D \sin C \quad \dots 2$$

د 1 او 2 رابطې یو ځلې خوا په خوا جمع او بیا تفریق کوو:

$$c + a = D \sin C + D \sin A = D(\sin C + \sin A) \quad \dots 3$$

$$c - a = D \sin C - D \sin A = D(\sin C - \sin A) \quad \dots 4$$

دریمه اړیکه پر څلورمې اړیکې باندې وېشو:

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{D(\sin C + \sin A)}{D(\sin C - \sin A)} = \frac{\sin C + \sin A}{\sin C - \sin A} \quad \dots 5$$

د ضرب او تحویل له فورمول څخه د $\sin C + \sin A$, $\sin C - \sin A$ قیمتونو په 5 اړیکه کې وضع کوو.

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{2 \sin \frac{C+A}{2} \cdot \cos \frac{C-A}{2}}{2 \cos \frac{C+A}{2} \cdot \sin \frac{C-A}{2}} = \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{C+A}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \tan \frac{C+A}{2} \cdot \cot \frac{C-A}{2}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

څرنگه چې $\cot \frac{C-A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C-A}{2}}$ دی؛ نو:

اوس $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D$ وضع کړو لرو چې:

$$b = D \sin B \quad \dots 1$$

$$c = D \sin C \quad \dots 2$$

$$b + c = D \sin B + D \sin C = D(\sin B + \sin C) \quad \dots 3$$

$$b - c = D \sin B - D \sin C = D(\sin B - \sin C) \quad \dots 4$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{D(\sin B + \sin C)}{D(\sin B - \sin C)} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \tan \frac{B+C}{2} \cdot \cot \frac{B-C}{2} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}} \Rightarrow \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

دویم څپرکی: مثلثات

د تانجنټ قانون (دویم مثال)

د درسي کتاب (63) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د تانجنټ له قانون څخه په کار اخیستنې سره د یو مثلث ضلعې او زاوېې پیدا کړای شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېز کار
3- مرستندویه مواد:	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی د سوال او ځواب په طریقه د کتاب د 61 مخ دویم مثال په ټولګي کې کار وکړی. د وخت د لرلو په صورت کې د کتاب 62 مخ د پوښتنو a جزء یوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته یې حل کړي. په عین وخت کې دغه پوښتنه نورو زده کوونکو ته هم ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل حل نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې دې ښوونکی مرسته ورسره وکړي. هغو زده کوونکو چې فعالیت یې په خپلو کتابچو کې سرته رسولې دي، خپل فعالیت دې د تخته له حل سره پرتله کړي د اړتیا په صورت کې دې په خپل فعالیت کې لازم اصلاحات راوړي.	
8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه: د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ. a) که چیرې $\hat{C} = 75^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $a = 35\text{ft}$ وي. b) که چیرې $\hat{\alpha} = 45^\circ$, $b = 37\text{m}$ او $\hat{\gamma} = 75^\circ$ وي. حل a) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ)$ $\hat{A} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$	

د تانجنټ له قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}}{\tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}} = \frac{35+b}{35-b} = \frac{\tan \frac{45^\circ + 60^\circ}{2}}{\tan \frac{45^\circ - 60^\circ}{2}} = \frac{\tan 52.5}{\tan(-7.5)} = \frac{1.303}{-0.131} = -9.946$$

$$\frac{35+b}{35-b} = -9.946 \Rightarrow 35+b = -9.946(35-b)$$

$$35+b = -348.11 + 9.946b$$

$$b - 9.946b = -348.11 - 35$$

$$-8.946b = -383.11$$

$$b = \frac{-383.11}{-8.946} = 42.82$$

$$\boxed{b = 42.82 \text{ ft}}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}$$

$$\frac{c+35}{c-35} = \frac{\tan \frac{75^\circ + 45^\circ}{2}}{\tan \frac{75^\circ - 45^\circ}{2}} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 15^\circ} = \frac{1.732}{0.267} = 6.486$$

$$c+35 = 6.486(c-35) = 6.486c - 227.01$$

$$c - 6.486c = -227.01 - 35 \Rightarrow -5.486c = -262.01 \Rightarrow c = \frac{-262.01}{-5.486} \Rightarrow \boxed{c = 47.76 \text{ ft}}$$

حل b)

$$\alpha = 45^\circ, \quad a = ?$$

$$\gamma = 75^\circ, \quad b = ?$$

$$\beta = ?$$

$$b = 37m$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\boxed{\beta = 60^\circ}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{45^\circ + 60^\circ}{2}}{\tan \frac{45^\circ - 60^\circ}{2}} = \frac{\tan 52.5}{\tan(-7.5)}$$

$$\frac{a+37}{a-37} = \frac{1.303}{-0.131} = -9.946$$

$$a+37 = -9.946(a-37)$$

$$a+37 = -9.946a + 368.002$$

$$a+9.946a = 368.002 - 37 = 331.002$$

$$10.946a = 331.002$$

$$a = \frac{331.022}{10.946} = 30.24$$

$$a = 30.24m$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan \frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

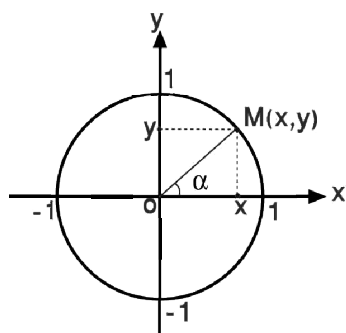
$$\frac{c+30.24}{c-30.24} = \frac{\tan \frac{75+45}{2}}{\tan \frac{75-45}{2}} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 15^\circ} = \frac{1.739}{0.267} = 6.513$$

$$c+30.24 = 6.486(c-30.24) = 6.486c - 196.136$$

$$c - 6.486c = -196.136 - 30.24 \Rightarrow -5.486c = -226.376$$

$$c = \frac{-226.376}{-5.486} = 41.26$$

$$c = 41.26m$$



دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي مطابقونه

د درسي کتاب (63) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثاتي مطابقت په مفهوم پوه شي. • د مثلثاتي مطابقتونو او مثلثاتي معادلو توپیر وکړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره د خوښی احساس وکړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ییز کار
3- مرستندویه مواد:	د وړودي پوښتنې د شکل چارټ او د کتاب 64 مخ چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی دې د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وړودي پوښتنه چې ایا $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ یو مطابقت دی او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه وپوښتي، ترڅو د هغه په اړه فکر وکړي. وړودي پوښتنه د کتاب 63 مخ د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته حلېږي. ځکه په فعالیت کې ثبوت کېږي چې $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ یو مطابقت دی.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډول و وېشي چې د کتاب 63 مخ فعالیت په ډله‌ییزه توګه سرته ورسوي، ددې فعالیت په سرته رسولو سره به د مطابقت په مفهوم پوه شي. فعالیت داسې سرته رسول کېږي چې که چېرې د α قیمتونو په ترتیب سره د A او B په افادو کې وضع کړو معلوم به شي چې $A = B$ او یا $\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}$ کېږي، چې دا یو مطابقت دی. ښاغلی ښوونکی د ډله‌ییز کار له سرته رسولو څخه وروسته د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل فعالیت نورو ته توضیح کړي او تاسې مرسته ورسره وکړئ. ښاغلی ښوونکی دواړه چارټونه د ټولګي په مخ کې وڅړوي او د کتاب 63 مخ په چارټ کې وښایست چې د مثلثاتي دایرې شعاع یو واحد دی. ښاغلی ښوونکی د کتاب 64 مخ له چارټ څخه په کار اخیستنې سره د $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مطابقت د پوښتنې او ځواب په طریقه په داسې حال کې چې زده‌کوونکي په کې پوره ونډه ولري، ثبوت کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لارښه تحکیم لپاره د کتاب 65 مخ $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ او $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ مطابقتونه یوه زده‌کونکي ته ورکړي چې پر تخته یې ثبوت کړي، په عین وخت کې دغه مطابقت نورو زده‌کونکو ته هم ورکړي چې د $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ او $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ چې اساسي مطابقتونه دي، له دې څخه په کار اخیستنې سره په خپلو کتابچو کې حل کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ لپاره له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې:

1. مثلثاتي مطابقت څه ډول مثلثاتي افاده ده؟
2. څوک کولای شي چې د $\beta = 90^\circ$ قیمت لپاره د $\frac{\cot \beta}{\csc \beta - 1}$ افاده ساده کړي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

(د کتاب 65 مخ فعالیت)

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

د $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ قیمت په پورتنۍ رابطه کې ږدو:

$$\frac{1}{1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha$$

څرنگه چې $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ دی؛ نو: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha$

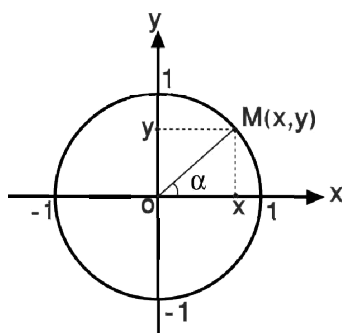
له اساسي مطابقتونو څخه پوهېږو چې د یوې زاوېې کوسیکنټ د هغه زاوېې د سین له معکوس سره مساوي دی، نو:

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

اوس غواړو چې $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ رابطه ثبوت کړو:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

له اساسي مطابقت څخه پوهېږو چې: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ؛ نو $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$



دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي مطابقونه

د درسي کتاب (65) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثالونو له حل څخه په کار اخېستنې سره له هغو سره ورته پوښتنې حل کړای شي. • د مثلثات له اساسي مطابقونو څخه په کار اخېستنې سره مطابقونه ثبوت او ورکړل شوي افادې ساده کړای شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېيز کار	
3- مرستندويه مواد:	
4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست بهير داسې پيل کړی او زده کوونکو ته وواياست چې ددې عنوان د فعاليت په اړه په تېر لوست کې درته لارښوونه شوې ده.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): • ښاغلی ښوونکی د کتاب 65 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړی. • د کتاب د 65 مخ دویم مثال يوه زده کوونکي ته ورکړی چې د ټولگي پر تخته يې حل کړي. په عين وخت کې نور زده کوونکي دې دغه مثال په داسې حال کې په کتابچو کې حل کړي چې کتابونه خلاص نه کړي. د لوست په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعاليت نور و زده کوونکو ته توضیح کړي. که چيرې له کومې ستونزې سره مخامخ شي، بل زده کوونکی دې ستونزې پر تخته حل کړي. • درېم مثال د کتاب 66 مخ څلورم مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړي. • زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 66 مخ پنځم مثال په ډله ييزه توگه د يو بل په مشوره حل کړي. په پای کې د يوې ډلې استازي دې خپل ډلېيز کار نور و زده کوونکو ته توضیح کړي.	
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې) ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو ترمنځ د مثبت او سالم رقابت د پيدا کولو لپاره زده کوونکو ته ووايي، څوک کولای شي چې 6 او 7 مثالونه په داوطلبانه توگه په ټولگي کې حل کړي او نمرې وگتي.	

دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي مطابقونه (د 8، 9 او 10 مثالونو حل)

د درسي کتاب (67-68) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثات له اساسي مطابقونو څخه په کار اخېستنې سره مثالونه او پوښتنې حل کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېيز کار
3- مرستندويه مواد:	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته په لاندې ډول د مثالونو په حل پيل وکړی.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب د 67 مخ د اتم مثال اړونده مطابقت د يو بل په مشوره حل کړي. (د فعاليت په بهير کې له کتاب څخه استفاده و نه شي) ښاغلی ښوونکی د فعاليت په بهير کې د زده کوونکو له ډلو څخه څارنه او فعالې ډلې تشويق له ضعيفو ډلو سره مرسته وکړي. د ډلېيز کار په پای کې د يوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل فعاليت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. ښاغلی ښوونکی د کتاب 67 مخ نهم مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړی.	
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې) ښاغلی ښوونکی لوست ته د لښه تحکيم ورکولو لپاره د کتاب د 68 مخ لسم مثال په ټولگي کې د پوښتنې او ځواب په طريقه حل کړی.	
7- د لوست د پايلې ارزونه: (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې د ډاډ لپاره له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي. 1. کومې معادلې ته مثلثاتي مطابقت ويلای شو؟ 2. څوک کولای شي چې مثلثاتي اساسي مطابقونه پر تخته وليکي؟	
8- د تمرين او پوښتنو ځوابونه: 1. د مثلثاتو د اساسي اړيکو په پام کې نيولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پيدا کړی. a) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$ b) $\sqrt{\sec^2 \beta - 1}$ c) $\frac{1}{\cos 80^\circ}$	

حل:

$$a) \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ} = \tan 250^\circ$$

$$b) \sqrt{\sec^2 \beta - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} = \sqrt{\tan^2 \beta} = \tan \beta$$

$$c) \frac{1}{\cos 80^\circ} = \sec 80^\circ$$

2. هر افاده د $\sin \beta$ له جنسه پيدا کړئ.

$$a) \cot \beta \cos \beta, \quad b) \cot^2 \beta$$

حل:

$$a) \cot \beta \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \cos \beta = \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} - \sin \beta$$

$$b) \cot^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$$a) \frac{\csc \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} = \cos \alpha$$

$$b) \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 1 - 2\cos^2 x$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$$

$$d) \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$$

يادونه: په درسي کتاب کې د $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$ مطابقت په $\frac{1}{\csc \alpha - \tan \alpha} = \csc^2 \alpha + \tan \alpha$ مطابقت بدل شوی دی.**حل:**

$$a) \frac{\csc \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{1}{\sin \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{\frac{1}{\sin \alpha}}{\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1} = \cos \alpha$$

$$b) \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1}$$

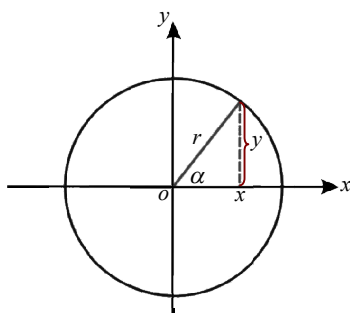
$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 + 2\cos \alpha)}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}$$

$$= \frac{\sin \alpha(1 + 2\cos \alpha)}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 + 2\cos \alpha)}{\cos \alpha(1 + 2\cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$d) \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$



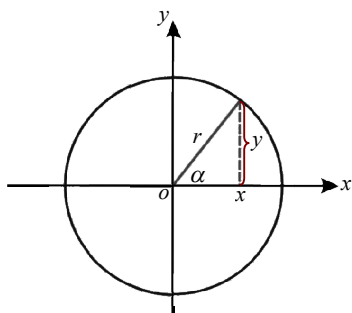
دویم څپرکی: مثلثات

مثلثاتي معادلې

د درسي کتاب (69) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثاتي معادلو په مفهوم پوه شي. • د مثلثاتي معادلو او د مثلثاتي مطابقتونو ترمنځ په توپیر پوه شي. • مثلثاتي معادلې حل کړي. • د پورته پوهې او مهارتونو په لرلو سره په ځان باور پیدا کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله‌ییز کار
3- مرستندویه مواد:	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وړودي پوښتنه له زده‌کوونکو څخه وپوښتې، ترڅو د پوښتنې په اړه فکر وکړي. په هغه صورت کې چې ځواب ونشي ویلای، ورته ووايي چې که چیرې α ته مختلف قیمتونه ورکړو او د معادلې کینه خوا له ښي خوا سره مساوي شي؛ نو دا معادله یو مطابقت دی، ولې که چیرې د α په ځینو قیمتونو سره ښي خوا له کینې خوا سره مساوي نه شي مطابقت نه دی، یوه معادله ده.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی، زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب د 69 مخ فعالیت له یو بل سره په مشوره حل کړي، د زده‌کوونکو له ډله‌ییز کار څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره مرسته وکړي. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله‌ییز فعالیت نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې مرسته ورسره وکړي. ښاغلی ښوونکی د کتاب 70 مخ لومړی مثال چې د لومړۍ حالت ($a \sin x + b = 0$) سره مطابقت لري د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولګي کې حل کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی: لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د 71 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولګي کې حل کړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست ښه زده کړی دی او که نه؟ له هغوی څخه په لاندې ډول وپوښتي: 1. څوک کولای شي چې د ساین له جنسه د یوې مثلثاتي معادلې عمومي شکل ولیکي؟ 2. څوک د $5 \sin x - 2 = 0$ او $2 \sin x - 5 = 0$ معادلو د حل په اړه مناقشه کوي؟ 3. د یوې زاوېې د ساین د تحول ساحه څوک لیکي؟	



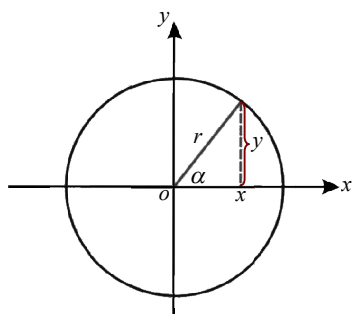
دویم څپرکی: مثلثات

د مثلثاتي معادلو دویم حالت $a \cos x + b = 0$

د درسي کتاب (71) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثاتي معادلو مختلف شکلو ته وپېژني. • مثلثاتي معادلې حل کړي. • د مثلثاتي معادلو له حلولو څخه خوښ شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېبیز کار
3- مرستندويه مواد:	د کتاب د 71 مخ د شکل چارټ
4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست بهیر په لاندې ډول پیل کړی.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی، د کتاب 71 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخ کې وڅړوی او لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په توګه په ټولګي کې حل کړی.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی: لوست ته د لاسنه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 72 مخ دویم مثال یوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته یې حل کړي، په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړی چې له کتاب څخه له کار اخیستنې پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعالیت توضیح کړي، که چېرې حل یې سم وي، نو هغو زده کوونکو ته چې تېروتنې یې کړي دي، خپلې تېروتنې دې اصلاح کړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې ډاډه شي، لاندې پوښتنې ترې وپوښتې: 1. $\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ له کومې درجې سره مطابقت لري؟ 2. څوک د $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ معادلې د حل سټ لیکلای شي؟	



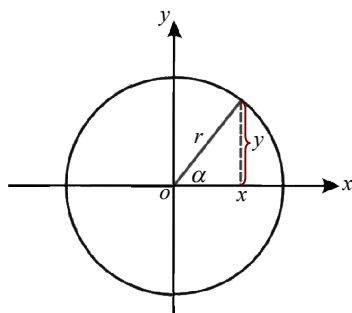
دویم څپرکی: مثلثات

د مثلثاتي معادلو دریم حالت $a \tan x + b = 0$

د درسي کتاب (72) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثاتي معادلو د دریم حالت د حل په طریقې پوه شي. • مثلثاتي معادلې حل کړای شي. • د پورتنۍ معادلې د حل سټ وټاکلای شي. • د مثلثاتي معادلو له حلولو څخه د ریاضي د پوهې له حاصلولو سره مینه پیدا کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار
3- مرستندویه مواد:	د کتاب د 72 مخ د مثال چارټ
4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی دې لومړني فعالیتونه سرته ورسوي. (سلام، احوال پوښتنې، تنظیمول...)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لومړی مثال چې په هغه کې $a = 1$ او $b = -\sqrt{3}$ ده، د پوښتنې او ځواب په توګه په ټولګي کې حل کړي او د معادلې د حل سټ چې کوترمینل زاوېې دې ولیکي. ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکو ته ووايي چې خپل کتابونه وتری او یوه زده کوونکي ته دنده ورکړي چې د کتاب د 73 مخ دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل حل نورو زده کوونکو ته توضیح کړي او د معادلې د حل سټ دې هم پر تخته ولیکي، که چیرې ستونزه ولري بل داؤطلب زده کوونکي ته دنده ورکړي چې نوموړی مثال حل کړي. ښاغلی ښوونکی د اړتیا په صورت کې زده کوونکي ته لارښوونه وکړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لوست د لښه تحکیم لپاره زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د یو بل په مشوره د کتاب 73 مخ دریم مثال حل کړي. ښاغلی ښوونکی د فعالیت په بهیر کې د زده کوونکو له ډله ییز کار څخه څارنه کوي، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره دې مرسته وکړي، د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازي ته دنده ورکړي چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، که چیرې دده په فعالیت کې تېروتنه شتون ولري لارښوونه ورته وکړي او یا بل زده کوونکي ته دنده ورکړي چې پوښتنه سمه حل کړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو د پوهې او مهارت له زده کړې څخه ځان ډاډمن کړي، نولاندې پوښتنې له هغوی څخه وپوښتي: 1. د $\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$ معادلې عمومي حل عبارت دی له $x = K\pi + \frac{7\pi}{12}$. څوک کولای شي چې د $K = 3$ لپاره د معادلې حل پیدا کړي.	



دویم څپرکی: مثلثات

د مثلثاتي معادلو څلورم حالت $a \cot x + b = 0$

د درسي کتاب (73) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثاتي معادلو د څلورم حالت د حل په طريقه پوه شي. • هغه معادلې چې $a \cot x + b = 0$ شکل ولري، حل کړای شي. • له پورته معادلې سره د مشابه معادلو د حل په سټ پوه شي او د پورته معادلو له حلولو څخه خوښ شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډله ییز کار	
3- مرستندويه مواد: د کتاب د 74 مخ د دریم مثال چارټ	
4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته لومړی مثال چې د $a \cot x + b = 0$ معادلې ته ورته دی او په هغه کې $a = 1$ او $b = -1$ ده پر تخته وليکي او بیا د لوست بهیر پیل کړي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د کتاب د 74 مخ د شکل چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او د 73 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په شکل په ټولګي کې حل کړي. (زده کوونکو ته د مثال په حلولو کې برخه ورکړي.)	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره دویم مثال یعنې د $\cot 3x = \cot x$ معادله د یوه زده کوونکي په واسطه په ټولګي کې حل کړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډمن شي، د خپل ډاډ لپاره د 74 مخ د پوښتنو a جزء په ډله ییزه توګه په زده کوونکو باندې حل کړي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې د خپل ډله ییز کار توضیح وکړي.	
8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه: د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړي: a) $3 \cos x + 5 = 0$ b) $4 \tan x + \cot x - 5 = 0$ c) $\tan x = \sqrt{3}$	

حل (a):

$$3 \cos x = -5$$

$$\cos x = \frac{-5}{3} = -1.6$$

څرنگه چې $\cos x$ د هرې زاوېې د $[-1, 1]$ په انټروال کې تحول کوي؛ یعنې: $-1 \leq \cos x \leq 1$ نو داسې زاوېه نشته چې کوساین یې -1.6 وي، نو پورتنۍ معادله حل نه لري.

حل (b):

$$4 \tan x + \cot x - 5 = 0$$

لومړۍ معلومو چې معادله د حل وړ ده او که نه، ددې لپاره د معادلې د حل د امکان شرط تطبیقوو:
نو باید چې: $c^2 \geq 4ab$ وي.

$$a = 4, \quad b = 1, \quad c = 5$$

$$c^2 = 25, \quad 4ab = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$$

څرنگه چې $c^2 \geq 4ab$ ده؛ نو معادله د حل وړ ده، لیکلای شو چې:

$$4 \tan x + \frac{1}{\tan x} = 5 \quad / \cdot \tan x$$

$$4 \tan^2 x + 1 = 5 \tan x \Rightarrow 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 3$$

$$\tan x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$

هغه کوچنۍ مثبتې زاوېه یا قوس چې تانجنټ یې (1) وي، هغه له 45° یا $\frac{\pi}{4}$ څخه عبارت ده؛ یعنې:

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{نو: } x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x = \tan^{-1} \frac{1}{4} \Rightarrow x = 14.03^\circ$$

هغه کوچنۍ مثبتې زاوېه چې تانجنټ یې $\frac{1}{4}$ دی عبارت ده له 14.03° څخه، نو عمومي حالت یې: $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

حل (c):

$$\tan x = \sqrt{3}, \quad x = \tan^{-1} \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

هغه کوچنۍ مثبتې زاوېه چې تانجنټ یې $\sqrt{3}$ دی عبارت دی له $\frac{\pi}{3}$ ؛ نو عمومي حل یې عبارت دی له: $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$

دویم څپرکی: مثلثات

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

د درسي کتاب (75) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د مثلثاتي دویمه درجه معادلې په مفهوم پوه شي. • دویمه درجه معادله حل کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په حاصلولو سره د رياضي له علم سره علاقمند شي.	
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېبیز کار
3- مرستندويه مواد:	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د لوست بهير پيل کړی. ځکه چې وړودي پوښتنه شتون نه لري، چې د هغې په اړه توضيحات ورکړل شي.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): د کتاب 75 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړی. زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب د 76 مخ دویم مثال په ډلېبیزه توگه د يو بل په مشوره حل کړي. ښاغلی ښوونکی له زده کوونکو څخه څارنه وکړي چې له کتاب څخه کار وانخلي. په پای کې د يوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډلېبیزه فعاليت نورو زده کوونکو ته توضيح کړي او تاسې مرسته ورسره وکړي.	
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې) ښاغلی ښوونکی زده کوونکو ته ووايي چې د لوست کتابونه وتري. لوست ته د لابنه تحکيم ورکولو لپاره د کتاب د 77 مخ درېم مثال يوه زده کوونکي ته ورکړي چې پر تخته يې حل کړي. په عين وخت کې دغه مثال دې نور زده کوونکي هم په خپلو کتابچو کې حل کړي. د فعاليت په پای کې هغه زده کوونکي چې تختې ته ولاړ دي خپل فعاليت دې نورو زده کوونکو ته توضيح کړي، که چيرې دده په کار کې تېروتنه شتون ولري، بل زده کوونکي ته دنده ورکړي چې تېروتنه يې اصلاح کړي.	
7- د لوست د پايلې ارزونه: (5 دقيقې) د زده کوونکو له زده کړې د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي: 1. څوک کولای شي چې د دویمې درجې مثلثاتي معادلې عمومي شکل ووايي؟ 2. څوک د لومړۍ درجه او دویمې درجې مثلثاتي معادلو توپير پر تخته ليکلاي شي؟ 3. څوک کولای شي چې په دویمه درجه مثلثاتي معادله کې ثابت عددونه وښيي.	

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې معادلو د حل ستونزه پیدا کړئ.

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \quad -2$$

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad -3$$

حل 1:

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos 2x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1 / \cdot (-1)$$

$$-\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

پوهېږو چې $1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$ دی؛ نو په ځای یې ږدو:

$$-\cos 2x = \cos x \Rightarrow -\cos 2x - \cos x = 0$$

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

اوس که $\cos x = y$ وضع کړو؛ نو لرو چې:

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$y_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1} \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi + \frac{\pi}{3}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \cos^{-1}(-1), \quad x = \pi$$

$$A_2 = \{2k\pi + \pi / k \in \mathbb{Z}\}, \quad A = A_1 \cup A_2 = \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

حل 2:

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0$$

که چیرې $\cos x = y$ وضع کړو؛ نو:

$$3y^2 + 2y - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = \pm 8$$

د Δ له قیمت څخه معلومه شوه چې پورتنۍ معادله د حل وړ ده.

$$y_1 = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1, \quad y_2 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = \cos^{-1}(1) \Rightarrow x = 0^\circ$$

هغه کوچنۍ زاویه چې د هغې کوساین 1 وي، له 0° څخه عبارت ده او د حل سټ یې:

$$A = \{2k\pi + 0^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cos x = \frac{-5}{3}$$

او $\cos x = \frac{-5}{3}$ امکان نه لري؛ ځکه د هرې زاوېې کوساین د $+1$ او -1 ترمنځ تحول کوي، نو د حلونو سټ یې د A له سټ څخه عبارت دی.

حل 3:

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \div \cos^2 x$$

$$\tan^2 x - (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\tan^2 x + 0.73 \tan x - 1.73 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (0.73)^2 - 4(1)(-1.73) = 0.53 + 6.92 = 7.45$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7.45} = \pm 2.73$$

$$\tan x = \frac{-0.73 + 2.73}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = \tan^{-1}(1) \Rightarrow x = 45^\circ \quad \text{یا} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan x = \frac{-0.73 - 2.73}{2} = \frac{-3.46}{2} = -1.73$$

$$x = \arctan(-1.73) = \tan^{-1}(-1.73) \Rightarrow x = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \left\{ (2k-1)\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دویم څپرکی: مثلثات

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټمونو حل (لومړی او دویم ډولونه)

د درسي کتاب (79-81) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټم او یا د هغه ډولونه وپېژني. • په دې پوه شي چې $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ او $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$ هر یو یو سېسټم دی. • د دوه مجهوله معادلو سېسټم حل او د هغه له حلولو څخه د خوښې احساس وکړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، انفرادي او ډلېز کار
3- مرستندویه مواد:	د وړودي پوښتنې اړونده معادلو د سېسټمونو چارټ په روښانه لیک.
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنيو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وړودي پوښتنه له زده‌کونکو څخه وپوښتې چې د هغې په اړه فکر وکړي او له زده‌کونکو څخه پوښتنه وکړي چې د چارټ پر مخ لیکل شوې معادلې له څو سېسټمونو څخه جوړې شوې دي؟ د وړودي پوښتنې ځواب دا دی، هو: کولای شو چې د مثلثاتي معادلو سېسټم حل کړو. د مثالونو په حلولو سره د هو ځواب په حقیقت بدلېږي، خو د پوښتنې دویمه برخه په اضافي معلوماتو کې ورکړل شوې ده او توضیح کېږي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	ښاغلی ښوونکی عنوان (لومړی ډول معادله) پر تخته ولیکي، د پوښتنې او ځواب په طریقه دغه لوست پای ته ورسوي. د کتاب د 80 مخ لومړی مثال چې $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ دی، پر تخته ولیکي او له یوه زده‌کونکي څخه وغواړي چې د چارټ پر مخ له لیکل شوو معادلو سره یې پرتله کړي په هغو کې د a او α قیمتونه ولیکي. که چېرې زده‌کونکي ستونزې ولري، ښاغلی ښوونکی دې ووايي چې چارټ او ورکړل شوي مثال ته په کتو سره $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ده. په همدې ډول د پوښتنې او ځواب په طریقه او زده‌کونکو ته په فعال برخه ورکولو سره مثال په ټولګي کې حل کړي. ښاغلی ښوونکی وروسته له دې چې د دویم ډول معادلو سېسټم مو زده‌کونکو ته توضیح کړ، دویم مثال د لوست د تحکیم لپاره حل کړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ترڅو د یو بل په مشوره دویم مثال حل کړي. په دې وخت کې د زده کوونکو کتابونه باید تړلي وي.)

ښاغلی ښوونکی د ډله ییز کار په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت توضیح کړي. البته د اړتیا په صورت کې مرسته ورسره وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

د زده کوونکو له زده کړې څخه د ډاډ لپاره زده کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه وازوي:

1. څوک کولای شي چې د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټم وليکي؟
2. څوک ویلای شي چې د لومړي ډول د مثلثاتي معادلو سېسټم له څو سېسټمونو څخه جوړ شوی دی؟
3. څوک د لومړي ډول اړوند د مثلثاتي معادلو سېسټمونه لیکي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د لومړي ډول د مثلثاتي معادلو اته سېسټمونه چې په متن کې یې نومونه اخېستل شوي دي په لاندې ډول دي:

1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$
3) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$	4) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$
5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$	6) $\begin{cases} \cos x - \cos y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$
7) $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$	8) $\begin{cases} \cos x - \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دویم څپرکی: مثلثات

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټمونو حل (دریم او څلورم ډول)

د درسي کتاب (82-84) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د دریم او څلورم ډول د معادلو سېسټمونه وپېژني. • د پورته یاد شویو معادلو سېسټم حل کړای شي. • د پورته معادلو له پېژندلو او حلولو څخه په خپل نفس باورمند شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب	
3- مرستندويه مواد: د دوه مجهوله معادلو د سېسټم د دریم او څلورم ډول چارټونه.	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته په لاندې ډول د لوست بهیر پیل کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی د لوست عنوان (د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټم دریم ډول) پر تخته ولیکي او د دریم ډول د معادلو د سېسټم اړونده چارټ د ټولګي په مخکې وځړوي. وروسته دریم مثال پر تخته ولیکي له یوه زده کوونکي څخه وغواړي چې د a او α قیمتونه په ورکړل شوي مثال کې ونیسي. وروسته د پوښتنو او ځوابونو په طریقه نوموړی مثال په ټولګي کې حل کړي. ښاغلی ښوونکی د څلورم ډول د معادلو سېسټم پر تخته ولیکي په داسې حال کې چې د څلورم ډول د معادلو د سېسټم چارټ د ټولګي په مخکې ځوړند وي، ددې سېسټم د حل شرطونه هم پر تخته ولیکي او د پوښتنو او ځوابونو په طریقه زده کوونکو ته په فعال برخه ورکولو سره څلورم مثال په ټولګي کې حل کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره څلورم مثال د یوه داوطلب زده کوونکي په واسطه په تکراري ډول حل کړي.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې) ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي دې په لاندې پوښتنو سره وازوي: 1. څوک د دریم ډول د مثلثاتي معادلو سېسټم لیکلای شي؟ 2. څوک د څلورم ډول د مثلثاتي معادلو سېسټم لیکلای شي؟	

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دویم څپرکی: مثلثات

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سېسټمونو حل (پنځم او شپږم ډولونه)

د درسي کتاب (85-87) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د پنځم او شپږم ډول سېسټمونه له نورو ډولونو سره تشخيص کړای شي. • دا ډول معادلې حل کړای شي. • د پورته دوو ډولونو د سېسټمونو د حل په شرط پوه شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	هغه چارې چې په هغه کې پنځم او شپږم ډول ليکل شوي وي.
4- د ورودې برخې توضيح (5 دقيقې)	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د پنځم ډول د معادلو د سېسټم چارې د ټولگي په مخکې وځړوي او له زده کونکو څخه داسې وپوښتي څوک کولای شي چې په پنځم ډول کې دوه سېسټمونه په جلا، جلا توگه وليکي؟ که چيرې زده کونکي ونه شو کړای په هغه صورت کې $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$ د يوه سېسټم په توگه او $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$ د بل سېسټم په توگه وروپېژني.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):	ښاغلی ښوونکی د کتاب د 85 مخ پنځم مثال د پوښتنې او ځواب په طريقه د زده کونکو په گډون په ټولگي کې حل کړی. د شپږم ډول معادلو د سېسټم چارې د ټولگي په مخکې ځوړند کړي او د کتاب د 87 مخ شپږم مثال چې د شپږم ډول معادلو له سېسټم سره مطابقت لري، هم د پوښتنې او ځواب په طريقه په ټولگي کې حل کړی.
6- د زده کړې تحکيم: (7 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی د لوست د لايښه تحکيم لپاره شپږم مثال په يوه داوطلب زده کونکي باندې په ټولگي کې حل کړی.
7- د لوست د پايلې ارزونه: (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کونکي د لاندې پوښتنو په واسطه و ارزوي: 1. څوک د پنځم ډول د معادلو سېسټم پر تخته ليکي؟ 2. څوک د شپږم ډول د معادلو سېسټم پر تخته ليکي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 87 مخ د شپږم مثال توضیح:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = 2$$

په صورت او مخرج کې د $\tan x$ او $\tan y$ قیمتونه لیکو:

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}{\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y}} = 2$$

پوهېږو چې $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)$ او همدارنګه $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)$ دی؛ نو:

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin(x + y)} = 2 \Rightarrow 2 \sin(x + y) = \sin(x - y)$$

څرنگه چې $x - y = \frac{\pi}{2}$ دی؛ نو:

$$2 \sin(x + y) = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin(x + y) = 1$$

$$\sin(x + y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{6}, \quad x - y = \frac{\pi}{2}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وویاست چې په کوم ډول پورې اړه لري؟

$$a) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$

حل (a): د $x + y = \frac{\pi}{4}$ معادلې د دواړو خواوو تانجنټ نیسو:

$$\tan(x + y) = \tan \frac{\pi}{4}$$

څرنگه چې $\tan x + \tan y = 1$ په پام کې نیول شوی دی، نو:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1$$

$$\frac{1}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1 \Rightarrow 1 - \tan x \cdot \tan y = 1$$

$$-\tan x \cdot \tan y = 1 - 1$$

$$\tan x \cdot \tan y = 0 \quad \dots I$$

$$\tan x + \tan y = 1 \quad \dots II$$

له II رابطې څخه د $\tan x$ قیمت په لاس راوړو او په I رابطه کې ږدو:

$$\tan x = 1 - \tan y$$

$$(1 - \tan y) \cdot \tan y = 0 \Rightarrow \tan y - \tan^2 y = 0$$

$$\tan y(1 - \tan y) = 0, \quad \tan y = 0 \Rightarrow y = \tan^{-1} 0 = 0^0, \quad 1 - \tan y = 0 \Rightarrow \tan y = 1$$

$$y = \tan^{-1}(1) \Rightarrow y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

اوس د y قیمتونه په I معادله کې ږدو او د x قیمتونو لپاره زاویه (قوس) په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = 0$$

$$y = 0^\circ \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ$$

$$y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan x \cdot 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 0, \quad x = 0^\circ$$

او ناوېلی پاتې نشي چې نوموړی سېستم په څلورم ډول پورې تړلی دی.

حل (b):

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$

پورتنی سېستم په هېڅ یو له شپږ ډولونو څخه چې لوستی مو دی اړه نه لري.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \tan x = 2 \Rightarrow x = \arctan 2 = 63.434^\circ$$

نو $x = 63.434^\circ$ دی، اوس د x قیمت په لومړي معادله کې وضع کوو:

$$x - y = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$63.434^\circ - y = 60^\circ \Rightarrow y = 63.434^\circ - 60^\circ = 3.434^\circ \Rightarrow y = 3.434^\circ$$

د دویم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

لاندې پوښتنې په څېر سره ولولئ، هرې یوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه کړئ.

1. که چیرې $A = 20^\circ$ ، $b = 10\text{cm}$ او $c = 7\text{cm}$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:

a) 16.4cm b) 16cm c) 15.9cm **(d) 4.176cm**
2. که چیرې $a = 8$ ، $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاوېې اندازه عبارت ده له:

a) 28° b) 29° **(c) 29.4°** d) 28.5°
3. که چیرې $A = 48^\circ$ ، $B = 22^\circ$ ، $a = 5\text{ft}$ وي، د b اوږدوالی عبارت دی له:

a) 8ft **(b) 8.5ft** c) 9ft d) -9.5ft
4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له:

a) $\tan x$ b) $\frac{1}{\tan x}$ c) $\cot x$ **(d) $\tan^2 x$**

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چیرې د $A = 30^\circ$ ، $c = 8$ ، $b = 5$ واحد وي، د a ضلع او $\sin C$ پیدا کړئ.

حل:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 89 - 80 \frac{\sqrt{3}}{2} = 89 - 40\sqrt{3} = 89 - 40 \cdot 1.73 = 89 - 69 = 20$$

$$a = \sqrt{20} = 4.47$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \sin 30^\circ}{\sqrt{20}}$$

$$\sin C = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.8945$$

$$\sin C = 0.8945$$

2. که په یوه مثلث کې $a = 8$ ، $b = 5$ ، $c = 10$ واحد وي، د B زاوېې اندازه پیدا کړئ.

حل: د کوساین له قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{64 + 100 - 25}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{164 - 25}{160} = \frac{139}{160} = 0.8687$$

$$\cos B = 0.8687 \Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}(0.8687)$$

$$\hat{B} = 29.7^\circ \approx 30^\circ$$

3. د ABC په مثلث کې که $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \sqrt{3}, \quad b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 4 + 3 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 7 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

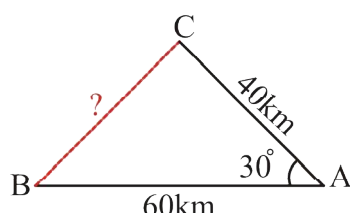
$$\cos B = \frac{1 + 3 - 4}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4 - 4}{2\sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\hat{B} = \cos^{-1}(0^\circ) \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 90^\circ}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{1 + 4 - 3}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\hat{C} = 60^\circ}$$



4. دوې بهرې د A له ټکي څخه په دوو مختلفو خواوو داسې په حرکت پیل کوي چې د منځ زاویه یې 30° ده، که له یوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بهرې 40 km او دویمه بهرې 60 km واټن وهلی وي، د دوو بهریو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

حل: د کوساین له قانون څخه گټه اخلو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (40)^2 + (60)^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cos 30^\circ \Rightarrow a^2 = 1600 + 3600 - 4800 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 5200 - 2400 \cdot 1.73 = 5200 - 4152 \Rightarrow a^2 = 1048 \Rightarrow a = \sqrt{1048} = 32.37 \text{ km}$$

$$\boxed{a = 32.37 \text{ km}}$$

5. $\cot^2 \beta$ د $\sin \beta$ او $\cos \beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

حل:

$$\cot^2 \beta = \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1 \Rightarrow \cot^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$

$$\cot^2 \beta = \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \Rightarrow \cot^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta}$$

6. لاندې مطابقونه ساده کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A & b) \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A \\ c) \tan A + \cot A = 2 \csc 2A & d) \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \\ e) \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan(45 + \frac{A}{2}) & f) \cos \alpha \cos(60 - \alpha) \cos(60 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha \end{array}$$

حل:

يادونه: د a جز په درسي کتاب کې غلط شوی دی، سم يې دا دی:

$$\begin{array}{l} a) \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A \\ \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{2 \sin A \cos A}{1 + \cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A + \cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2 \sin A \cos A}{2 \cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A \\ b) \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A \\ \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 A)}{1 + (2 \cos^2 A - 1)} = \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 A}{1 + 2 \cos^2 A - 1} = \frac{2 \sin^2 A}{2 \cos^2 A} = \tan^2 A \\ c) \tan A + \cot A = 2 \csc 2A \\ \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} = \frac{1}{\cos A \sin A} \end{array}$$

که صورت او مخرغ دواړه په 2 کې ضرب کړو، نو لرو چې:

$$\tan A + \cot A = \frac{2}{2 \sin A \cdot \cos A} = \frac{2}{\sin 2A} = 2 \cdot \frac{1}{\sin 2A} = 2 \csc 2A$$

په پایله کې: $\tan A + \cot A = 2 \csc 2A$

$$d) \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$$

صورت ته په بېل ډول او مخرغ ته په بېل ډول انکشاف ورکړو:

$$\begin{aligned} & 1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B) \\ & 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ & = 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - (2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1)(2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1) + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ & = 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - (4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ & = 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ & = 4 \cos^2 \frac{B}{2} - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ & = 4 \cos^2 \frac{B}{2} (1 - \cos^2 \frac{A}{2}) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{A}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ & = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} (\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}) = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) \end{aligned}$$

نو صورت ته له انكشاف وركولو څخه وروسته: $1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B) = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$
اوس مخرج ته په لاندې ډول انكشاف وركوو:

$$\begin{aligned} 1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B) &= 1 + 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - (2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1)(2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1) + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - (4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 1 - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} - 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} (1 - \cos^2 \frac{B}{2}) + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} (\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}) \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cdot \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) \end{aligned}$$

مخرج ته له انكشاف وركولو څخه وروسته لرو:

$$1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B) = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cdot \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$$

اوس د صورت او مخرج قيمتونه په اصل مطابقت کې ږدو:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} &= \frac{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})}{4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \\ \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} &= \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \text{ په پايله کې:} \end{aligned}$$

يادونه: د e جز مطابقت په درسي كتاب کې په لاندې ډول اصلاح كړئ.

ددې مطابقت د حل لپاره له بني لوري څخه كين لوري په لاس راوړو:

$$e) \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan(45^\circ + \frac{A}{2})$$

$$\begin{aligned} \tan(45^\circ + \frac{A}{2}) &= \frac{\tan 45^\circ + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan \frac{A}{2}} = \frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2}} = \frac{1 + \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{1 - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}} = \frac{\frac{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{\frac{\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

اوس د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\tan(45^\circ + \frac{A}{2}) = \frac{(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}) (\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2})}{(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}) (\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2})}$$

$$\tan(45^\circ + \frac{A}{2}) = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{1 - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos A}{1 - \sin A}$$

$$\text{نو: } \tan(45^\circ + \frac{A}{2}) = \frac{\cos A}{1 - \sin A}$$

يادونه: په کتاب کې غلطه ټايپ شوېده، اصلاح يې کړئ.

$$f) \cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cdot (\cos 60^\circ \cos \alpha + \sin 60^\circ \sin \alpha)(\cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha) \\ &= \cos \alpha \cdot (\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha)(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha) = \cos \alpha \cdot (\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} \cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{3}{4} \cos^3 \alpha \\ &= \cos^3 \alpha + \frac{3}{4} \cos \alpha = \frac{1}{4} (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) \end{aligned}$$

څرنگه چې $4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$ دی؛ نو:

$$\cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$$a) \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$b) \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

$$c) 4 \cos \beta - 2 = 0$$

$$d) \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$

$$e) \cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$$

حل (a): لومړی $\cos x = y$ سره تعویضوو:

$$y^2 - 3y + 2 = (y - 2)(y - 1) = 0$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 1$$

امکان نه لري $\cos x = y = 2$

$$\cos x = y = 1 \Rightarrow x = \cos^{-1} 1 = 0^\circ$$

د معادلې د حل سټ عبارت دی له:

$$A = \{x / x = 0^\circ + 2\pi, 0^\circ + 4\pi, \dots\}$$

$$A = \{x / x = 0^\circ + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$b) \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

حل (b):

$$\cos^2 x(1 + \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 0, \cos^2 x + 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 x = -1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{-1} \text{ امکان نه لري}$$

د حل سټ يې عبارت دی له:

$$A_1 = \left\{ x / x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ x / x = 2\pi - \frac{\pi}{2}, 4\pi - \frac{\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ x / x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) 4\cos \beta - 2 = 0$$

حل (c):

$$4\cos \beta - 2 = 0 \Rightarrow 4\cos \beta = 2 / \div 4$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{1}{2}$$

$$\beta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1 = \left\{ \beta / \beta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 4\pi, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \beta / \beta = 2\pi - \frac{\pi}{3}, 4\pi - \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ \beta / \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$d) \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$

حل (d):

$$\cos x - \sqrt{3}(\sqrt{1 - \cos^2 x}) = 1$$

$$-\sqrt{3}(\sqrt{1 - \cos^2 x}) = 1 - \cos x / \cdot (-1)$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{1 - \cos^2 x}) = \cos x - 1 \text{ دواړه خواوې مربع کوو:}$$

$$3(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 2\cos x + 1$$

$$3 - 3\cos^2 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$-4\cos^2 x + 2\cos x + 2 = 0 / \cdot (-1)$$

$$4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$$

اوس $\cos x = y$ وضع ڪو:

$$4y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(4)(-2) = 4 + 32 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 6$$

$$y_{1,2} = \frac{+2 \pm 6}{2 \cdot 4}$$

$$y_1 = \frac{8}{8} = 1$$

$$y_2 = \frac{2-6}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = y_1 = 1 \Rightarrow x = \cos^{-1} 1, \quad x_1 = 0^\circ$$

$$\cos x = y_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}), \quad x_2 = 120^\circ$$

$$e) \cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$$

حل (e): پوهڻو چڻي $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ڏي: $\cos^2 x + 3 \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x} + 1 = 0$

دواڻه خواوڻي مربع ڪو: $\cos^2 x + 1 = -3 \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$\cos^4 x + 2 \cos^2 x + 1 = 9 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \Rightarrow \cos^4 x + 2 \cos^2 x + 1 = 9 \cos^2 x - 9 \cos^4 x$$

$$\cos^4 x + 9 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 9 \cos^2 x + 1 = 0$$

$$10 \cos^4 x - 7 \cos^2 x + 1 = 0$$

ڪه چيري $\cos^2 x = y$ سره تعويض ڪرو، نو:

$$10y^2 - 7y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(10)(1) = 49 - 40 = 9$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 3$$

$$y_1 = \frac{7+3}{2 \cdot 10} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{7-3}{2 \cdot 10} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad x_{1,2} = \arccos(\pm \sqrt{\frac{1}{2}})$$

$$x_1 = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 135^\circ$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad x_{3,3} = \arccos(\pm \sqrt{\frac{1}{5}})$$

$$x_3 = \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \arccos(\frac{\sqrt{5}}{5}) = 63^\circ$$

$$x_4 = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \arccos(-\frac{\sqrt{5}}{5}) = 116^\circ$$

8. ایا د $2 \sin^2 x - \cos x = 2 \cos 2x + \sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

حل: ددې لپاره چې ثبوت کړو ایا پورتنۍ رابطه مطابقت دی او که معادله؛ نو د څو مختلفو زاویو قیمتونه په کې پرېکړه چېرې په ټولو قیمتونو کې مساوات صدق وکړي؛ نو مطابقت دی او که په ټولو قیمتونو کې مساوات صدق ونه کړي، نو معادله ده. څو لاندې قیمتونه په پام کې نیسو:

$$x = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 230^\circ, 280^\circ, 360^\circ$$

$$x = 30^\circ \Rightarrow 2(\sin 30^\circ)^2 - \cos(30^\circ) = 2 \cos(2 \cdot 30^\circ) + \sin 30^\circ \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{3} \neq 3$$

$$x = 45^\circ \Rightarrow 2 \sin^2(45^\circ) - \cos(45^\circ) = 2 \cos(2 \cdot 45^\circ) + \sin 45^\circ$$

$$2 \cdot \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 - \sqrt{2} \neq \sqrt{2}$$

$$x = 60^\circ \Rightarrow 2 \sin^2(60^\circ) - \cos 60^\circ = 2 \cos(2 \cdot 60^\circ) + \sin 60^\circ$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 \neq \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{یا} \quad 2 \neq -2 + \sqrt{3}$$

څرنگه چې معلومېږي د څو قیمتونو په اېښودلو سره مساوات صدق نه کوي؛ نو پورتنۍ اړیکه مطابقت نه دی، بلکې یوه معادله ده.

9. لاندې معادلې حل کړئ.

د a, c, d او e جزونه په اوومه پوښتنه کې حل شوي دي، دلته یوازې د b جز حلوو:

$$b) \tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0$$

حل: که چېرې $\tan x = y$ وضع کړو، نو:

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 3)(y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 3, \quad y_2 = 1$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \tan^{-1} 1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = 3 \Rightarrow x_2 = \tan^{-1} 3 = 71.56^\circ$$

10. لاندې افادې ساده کړئ.

$$a) \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$$

$$b) 1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = ?$$

$$c) \cos 4x + 2 \sin^2 2x$$

$$d) (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2$$

حل (a):

$$a) \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} = \frac{\tan 15^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan(15^\circ + 15^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل (b): پوهېږو چې $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ دی؛ نو:

$$b) 1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha$$

حل (c):

$$c) \cos 4x + 2 \sin^2 2x$$

$$\cos 4x = \cos(2x + 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2 \sin^2 2x \quad *$$

$$\cos 4x + 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \sin^2 2x + 2 \sin^2 2x = 1$$

حل (d):

$$d) (\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x)^2$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)^2 = \cos^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x$$

$$\cos^2 2x + \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x = 1 + 2 \sin 2x \cos 2x = 1 + \sin 4x$$

11. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$$a) \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$$

یادونه: په درسي کتاب کې د $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$ جز اضافي ټایپ شوی دی.

حل (a):

$$a) \tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} \\ = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 1 \Rightarrow \sin(x+y) = \cos x \cos y$$

څرنگه چې په خپله پوښتنه کې $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ دی؛ نو:

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x+y = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + \cos(x-y) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad / \cdot 2$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(x-y) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

$$x+y = \frac{\pi}{4} \quad \dots (1)$$

$$x-y = \frac{\pi}{4} \quad \dots (2)$$

د 1 او 2 رابطې خوا په خوا سره جمع کوو:

$$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$x+y = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4} - x$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{y = 0^\circ}$$

حل (b):

$$b) \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = 1$$

$$\sin(x-y) = \cos x \cos y \quad \dots *$$

$$\sin(x+y) = \cos(x-y)$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

له * رابطې څخه په کار اخېستې سره لرو، چې:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x-y) + \sin x \sin y$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin x \cos y - \cos x \sin y + \sin x \sin y$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \sin y = \sin x \sin y \quad / \div \sin x \sin y$$

$$\frac{2 \cos x}{\sin x} = 1$$

$$2 \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\cot x} = 2$$

$$\tan x = 2 \Rightarrow x = \arctan 2 \Rightarrow \boxed{x = (63.43^\circ)}$$

$$\tan x - \tan y = 1$$

$$\tan y = \tan x - 1 = 2 - 1$$

$$\tan y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{4}}$$



دریم څپرکی: فضايي هندسه

اساسي مفهومونه او اکسيومونه

د درسي کتاب (95) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهني • د اکسيومونو او اکسيومونو په مفهوم پوه شي. • د اساسي مفهومونو او اکسيومونو توپير وکړای شي. • له اساسي مفهومونو او اکسيومونو څخه په ورځني ژوند کې کار واخلي.	د زده کونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:
2- د زده کړې لارې:	ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنې او ځوابونه
3- مرستندويه مواد:	د مستوي چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې) بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د نوي څپرکي لومړۍ لوست داسې پيل کړی: • د اقليدس په نامه د رياضي نامتو عالم څوک پېژني؟ • په عمومي توگه اقليدس د هندسې په کومو برخو کې نړېوالو ته خدمت کړی دی؟ که چيرې زده‌کونکي ځواب ووايي ښه به وي له هغه پرته تاسو ورته ووايست چې يوناني اقليدس له ميلاد څخه 325-270 کاله مخکې د مصر په سکندريه کې ژوند کړی، نوموړي د سطح او فضايي هندسې يو نامتو پوه او عالم ؤ چې په خپل ټول عمر کې يې د رياضياتو خصوصاً د هندسې په برخه کې خدمت کړی دی چې تراوسه نړېواله کچه د هغه هندسي مفاهيم او زده‌کړو څخه د ژوندانه په چارو کې کار اخلي. هغه د هندسې د مفاهيمو په برخه کې څېړنې ترسره کړي دي: 1. په دوو بُعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي. 2. هغه هندسي مفاهيم، چې په درېو اړخونو (بُعدونو) کې خپل کېږي فضا يې هندسه نومېږي.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): بناغلی ښوونکی دې اساسي مفهومونو په برخه کې لکه اوليه اصطلاح گانو، قضيو او اکسيومونو په برخه کې په لنډ ډول معلومات ورکړي او زيار دې وباسي چې د امکان تر حده له هر بيان سره سم مثال ووايي. همدارنگه د منلو شوو اوليه اصطلاح گانو (تعريف شوی نه دي) په برخه کې د زده‌کونکو په فعالې برخه اخېستنې او گډون سره گام په گام کار وکړي. چې هغوی د پورته شيانو هر يوه په مفهوم پوه شي. بيا دې لومړی، دويم او دريم اصولونه د زده‌کونکو په واسطه بيان شي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. بناغلی ښوونکی دې د مستوي مفهوم د محيطي (چاپيريال) ساده مثالونو په ويلو سره څرگند کړي او مستوي دې په شکل يا هغه چارټ کې چې مخکې يې جوړ کړی دی، زده‌کونکو ته وروښيي، وروسته دې د مستوي لومړی، دويم او دريم اصولونه	

له زده‌کوونکو څخه وپوښتل شي.

کولای شئ د کاغذ مخ، تخته، د ولاړو اوبو سطح د مستوي په توگه ومنئ او اکسيومونه يې په عملي ډول کار وکړئ. همدا ډول د متقاطع مستويگانو اکسيومونه په هکله چې يو گډ فصل جوړوي معلومات ورکړئ.

په پای کې د مسطحې هندسې او فضايي هندسې په برخه کې داسې معلومات ورکړئ.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسم کولو ته اړتيا نشته، خو په فضايي هندسه کې ورته اړتيا شته، زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د مستطيل يا متوازي الاضلاع په ډول ښيي، هغه مستويگانې چې په شکلونو کې ښودل شوي دي، په همدې پراخوالي سره نه دي، بلکې تر لايتناهي پورې امتداد لري؛ خو دا د يوې اوارې سطحې ښوونه ده، هغه اکسيومونه چې په مسطحه هندسه کې شتوالی لري، په فضايي هندسه کې هم کار ورڅخه اخېستل کېږي، په فضايي هندسه کې ځانگړي اکسيومونه هم شته چې هر يو يې په کتاب کې بيان شوی دی.

6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

د لوست د لارښه تحکيم لپاره په انفرادي توگه له زده‌کوونکو څخه د اوليه اصطلاحگانو، اکسيومونو په برخه کې پوښتنې وکړئ، کوبښن وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه واورئ. دستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوې ده او که نه؟ له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او ځوابونه يې په لاس راوړئ:

1. د ليل او برهان څه شی دی؟
2. د قضیې د سموالي لپاره څه شي ته اړتيا ده؟
3. څوک د خط لومړی اکسيوم وايي؟
4. د مستوي د ښوولو لپاره څوک مثال ويلی شي؟

د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1. څرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکی مېز په پرتله تېنگ دی؟
حل څرنګه چې له هر درېو ټکو څخه يوه مستوي تېرېږي؛ نو د څلورو پښو مېز کله ناکله يوه پښه يې په سطح نه لگېږي، خو درې پښې لرونکی مېز له دغې نيمګړتيا څخه خلاص دی.

2. ولې نقطه، خط او مستوي لومړنۍ اصطلاحگانې بولي؟
حل څرنګه چې نقطه د يوه ذهني مفهوم په توګه پېژنو او هغه تعريف شوې نه ده؛ نو د لومړۍ اصطلاح په توګه يې پېژنو. همدارنګه د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې له دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يو مستقيم خط تېرېدلای شي کوم ځانګړی تعريف نه لري (تعريف شوی نه دی)؛ نو مستقيم خط هم د لومړنۍ اصطلاحگانو په توګه پېژنو.

3. له دوو نقطو څخه څو مستويگانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي؟

حل له دوو نقطو څخه بې شمېره مستويگانې تېرېدلای شي، چې دغه دوه نقطې په کې پرتې وي.



دریم څپرکی: فضايي هندسه

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي (لومړۍ برخه)

د درسي کتاب (97) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په درې بُعدي فضا کې د خط او مستوي په مفهوم پوه شي. • پوه شي چې په درې بُعدي فضا کې ژوند کوو. • په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي تشخیص کړای شي. • په درې بُعدي فضا کې د ژوند ټولې چارې سرته ورسوي.
2- د زده کړې لارې:	انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	قلمونه یا لښتې، د کاغذ پاڼې
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي او داسې وپوښتي: 1. په فضا کې دوه قلمونه په خپل منځ کې کوم یا څو حالتونه لري؟ 2. په فضا کې دوه کتابونه په خپل منځ کې کوم یا څو حالتونه لري؟ 3. په فضا کې یو قلم او یو کتاب یا د کاغذ پاڼه کوم یا څو حالتونه لري؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه واورئ او له هغه پرته تاسو درې واړه حالتونه، متقاطع، منطبق او موازي ورته څرگند او تشریح کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی د درې بُعدي فضا مفهوم زده کوونکو ته ووايېست، چې یوه له نه تعریف شوي او له لومړنیو اصطلاحگانو څخه ده او یادونه وکړي د لایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي. همدارنګه د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت چې په ترتیب سره یو بُعد او دوه بُعدونه لري او هریو د فضا د سیت یوه برخه (جز) ده، په عملي توګه داسې وروښایست چې د کاغذ مخ د یوې مستوي په توګه او قلم د یوه مستقیم خط په توګه ومني، زده کوونکي په دریو ډلو ووېشي ورته ووايېست: • لومړۍ ډله دې قلم پر کاغذي مستوي باندې داسې کېږدي چې قلم له کاغذ څخه تېر یغني کاغذ سوري کړي او حالت دې بیان کړي. • دویمه ډله دې قلم پر کاغذي مستوي باندې داسې کېږدي چې د قلم او کاغذي مستوي ټولې نقطې ګډې وي او حالت دې بیان کړي.	

- دریمه ډله دې قلم او کاغذي مستوي په فضا کې داسې ونیسي چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري یعنې امتداد یې هم یو بل قطع نه کړي او حالت دې بیان کړي.

که چیرې زده‌کونکي ستونزې ولري مرسته او لارښوونه وکړي په عملي توګه سرته ورسوي، درې واړه حالتونه ورته بیان او د هر یوه حالت شکل پر تخته باندې رسم کړي چې زده‌کونکي یې د متقاطع، منطبق او موازي حالتونو په ډول پوه او وپېژني.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست لائحېم او زده‌کړې لپاره په انفرادي ډول له زده‌کونکو څخه داسې وپوښتي:

- که چیرې مستوي او مستقیم خط یو په بل منطبق وي، په دې صورت کې څو مشترکې نقطې لري؟
- که چیرې مستوي او مستقیم خط متقاطع وي، څو مشترکې نقطې لري؟
- که چیرې مستوي او مستقیم خط هیڅ مشترکه نقطه ونه لري کوم حالت غوره کوي؟

کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي، شکلونه یې رسم کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډمن شي چې ایا زده‌کړې صورت موندلی دی او که نه؟ د لاندې پوښتنو ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي.

1. څوک ویلی شي که چیرې یو مستقیم خط او مستوي یوه مشترکه نقطه ولري کوم حالت بلل کېږي؟
2. څوک یو مستقیم خط او مستوي داسې رسمولای شي چې یو پر بل منطبق وي؟
3. څوک کولای شي یو مستقیم خط او یوه مستوي داسې رسم کړي چې یو له بل سره موازي وي؟

دریم څپرکی: فضايي هندسه

د دوو مستقیمو کرښو او دوو مستوي گانو نسبي حالتونه (دویمه برخه)

د درسي کتاب (98-99) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د دوو مستقیمو کرښو او دوو مستوي گانو د نسبي حالتونو په مفهوم پوه شي. • د دوو مستقیمو کرښو حالتونه رسم کړای شي. • د دوو مستوي گانو حالتونه رسم کړای شي. • پورتنۍ پوهه او مهارت په ورځنۍ ژوند کې وکاروي.
2- د زده کړې لارې:	انفرادي، ډله ییز کار، پوښتنه او ځواب
3- مرستندویه مواد:	د کاغذ پانې، لښتې
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته لوست د لاندې پوښتنو په کولو سره پیل کړی: 1. څوک کولای شي په فضا کې د موازي خطونو ډول وښيي؟ 2. څوک په فضا کې د متقاطع خطونو ډول ښودلای شي؟ 3. څوک په فضا کې دوې مستوي چې یو پر بل منطبق وي، ښودلای شي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه واورئ او له هغه پرته تاسو د لښتو او کاغذي پانې په کارولو سره مثالونه ورته ووايست او د لوست بهیر داسې پیل کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی: زده کوونکو ته ووايست چې د میز مخ د یوې مستوي او لښتې د مستقیمو کرښو په توګه منو. بیا یوه زده کوونکي ته بلنه ورکړئ ورته ووايست دا دوه لښتې د مېز پر مخ داسې کېږدي چې ګډ ټکي ونلري او امتداد ورکوونکي هم یو بل قطع نکړي. که چیرې زده کوونکي وکولای شي ښه به وي له هغه پرته تاسو مرسته وکړي، په همدې ډول یو بل داوطلب زده کوونکی راوغواړئ چې همدا دوه لښتې د میز پر مخ داسې کېږدي چې یوه مشترکه نقطه ولري. خو د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي. بیا دریم داوطلب زده کوونکی راوغواړئ چې یوه لښته د مېز څخه پر مخ او بله له میز د باندې داسې کېږدي، چې کومه مشترکه نقطه ونه لري او متناظر حالت وښيي. په پای کې هغه درې حالتونه (موازي، متقاطع، متناظر) چې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې یو له بل سره لري د کتاب له مخې تشریح او درې واړه حالتونه یې پر تخته باندې رسم او وښايست. په همدې ډول بیا درې نور داوطلب زده کوونکي په	

وار سره د ټولگي مخې ته راوغواړئ د کاغذ دوه پانې چې هره یوه یې د مستوي په توگه منلي دي، ورکړی، چې د دوو مستوي گانو درې حالتونه متقاطع، منطبق او موازي ونیسي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. په پای کې ښوونکی دې درې واړه حالتونه پر تخته باندې د شکلونو له مخې تشریح او تعریف کړي.

- زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وویاست چې هره ډله دې د مستقیم خط او مستوي درې واړه حالتونه او هم د دوو مستوي گانو ترمنځ درې واړه حالتونه په خپلو کتابچو کې رسم کړي او ښوونکي دې د کار څارنه وکړي، په پای کې د دوو ډلو استازي د تختې څنگ ته راځي او د خپل فعالیت په برخه کې نورو ډلو ته معلومات ورکوي، که چیرې کومه ډله تېروتنه کوي د هغوی پام تېروتنې ته راواړوي او سم ډول یې ورته وښیاست.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لارښه تحکیم لپاره زده کوونکو ته په لاندې ډول پوښتنې ورکړئ او ځوابونه یې له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ:

- که چیرې دوه مستقیم خطونه لږ تر لږه دوه مشترکې نقطې ولري کوم حالت غوره کوي؟
 - که چیرې دوه مستوي گانې لږ تر لږه درې مشترکې ټکي (نقطې) ولري، داسې چې ټکي د یوه مستقیم خط په امتداد پرتې نه وي، څه ډول مستوي گانې بلل کېږي.
 - که چیرې دوه مستقیم خطونه هېڅ مشترکه نقطه ونلري څه ډول خطونه بلل کېږي؟
- کوښښ وکړئ چې پورته پوښتنو ته زده کوونکي ځوابونه ورکړي، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د لوست پایله وازمويي او ډاډمن شي؛ نو له زده کوونکو څخه دې په لاندې ډول وپوښتي:

1. په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
2. له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
3. په کوم حالت کې دوه مستوي گانې یو پر بل باندې منطبق کېدای شي؟
4. د دوو مستوي گانو تقاطع یو ټکی دی او که یو خط؟

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

- 1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟
- حل** پوهېږو چې له دوو نقطو څخه یوازې او یوازې یو مستقیم خط تېرېدلای شي؛ نو څرنگه چې د R او T له نقطو څخه د RT خط تېرېږي او نوموړي نقطې په مستوي کې پرتې دي؛ نو د هغو ترمنځ مستقیم خط یعنې RT مستقیم خط په مستوي کې پروت دی.

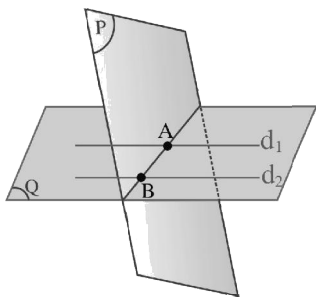
2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟
حل که چیرې د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي په دې صورت کې د P مستوي په یوه نقطه کې قطع کولای شي.

3- که چیرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

حل که چیرې د $\overline{AB}$ مستقیم خط له P مستوي سره دوې ګډې نقطې ولري نو د $\overline{AB}$ مستقیم خط ټول ټکي د P پر مستوي پراته دي یا ویل کېږي چې مستقیم خط له مستوي سره منطبق او یا مستقیم خط په مستوي کې پروت دی.

4- د A, B او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او همدارنګه د A, B او C نقطې د p' په مستوي کې هم پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

حل لیدل کېږي چې د P او P' مستوي ګانې دوې ګډې نقطې لري په داسې حال کې چې نوموړي نقطې د یوه مستقیم خط په امتداد پرتې نه دي، نو د P او P' مستوي ګانې یو په بل باندې منطبق دي.



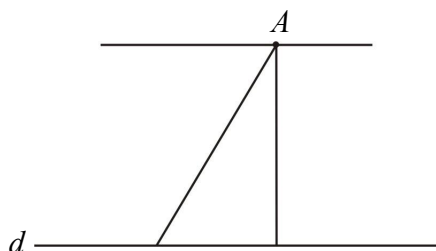
دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې موازي مستقيم خطونه (لومړۍ برخه)

د درسي کتاب (101) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعتونه)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په فضا کې د موازي مستقيم خطونو په مفهوم پوه شي. • په فضا کې موازي مستقيم خطونه رسم کړای شي. • د اړتيا په وخت کې يې وکاروي او خوښي وکړي.
2- د زده کړې لارې:	ډله‌يز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد.
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د لوست عنوان او وړودي شکل ته راوگرزوي او وپوښتي: 1. په وړودي شکل کې څو مستوي گانې ليدل کېږي؟ 2. په وړودي شکل کې څه ډول مستقيمونه ليدل کېږي؟ او يو له بل سره کوم حالت لري؟ که چيرې زده‌کوونکي ځوابونه ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو د هغو په برخه کې لنډ معلومات ورکړئ او د هغه په ادامه د لوست پيل وکړئ.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): لومړۍ د موازي خطونو اکسيوم له زده‌کوونکو څخه وپوښتي ښايي چې ځواب ووايي، وروسته زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي او د کتاب (101) مخ فعاليت ورکړي چې په خپلو کتابچو کې له بحث او خبرو وروسته يې سرته ورسوي. د فعاليت له سرته رسولو وروسته دې د دوو ډلو استازي خپل ډله‌يز فعاليت نورو ته تشرېح کړي که چيرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، تېروتنه يې د هغې ډلې په واسطه صحيح او اصلاح کړي چې صحيح کار يې کړی وي. بيا ورپسې زده‌کوونکو ته هغه قضيه چې له يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې او يوازې يو موازي مستقيم خط رسمولای شو او بس، بيان کړئ او معلومات ورکړئ. د لابنه پوهېدو لپاره پر تخته باندې يو مستقيم خط د (d) او يوه نقطه د (A) چې په مستقيم پرته نه وي داسې رسم کړئ.	



وروسته درې داوطلب زده‌کونکي په وار سره راوغواړئ، ورته ووايست یو یې د A له نقطې څخه پر d باندې عمود، دویم یې د A له نقطې څخه د غیر موازي (مقاطع) او دریم یې د A له نقطې څخه له d سره موازي رسم کړي. بیا پوښتنه وکړئ: څوک ویلای شي د A له نقطې څو نور موازي مستقیمونه رسمولای شو؟

که زده‌کونکي ځواب ووايي ښه ترښه، له هغه پرته تاسو ورته ووايست له یوې نقطې څخه په یوه خط باندې لایتناهي مقاطع رسم کولی شو، خو یوازې او یوازې یو موازي او یو عمودي رسم کیدای شي او بس.

په پای کې دا هم ورته ووايست د A له یوې نقطې او d مستقیم څخه یوازې یوه مستوي تېرېږي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکیم لپاره یو زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ چې د نوموړي قضیې شکل پر تخته رسم کړي، نور زده‌کونکي دې ډاکار په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. که چیرې کوم زده‌کونکی د قضیې ثبوت وکولای شي ودې کړي.

له هغه پرته تاسو یې د شکل له مخې ثبوت او زده‌کونکي ورباندې پوه کړئ.

په انفرادي توګه له زده‌کونکو څخه دقضیې په اړه پوښتنې وکړئ او په شفاهي توګه ځوابونه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړئ.

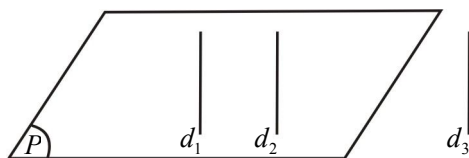
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره ارزونه وکړي.

1. له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم سره څو موازي مستقیمونه رسمولای شو؟
 2. څوک کولای شي له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره موازي خط رسم کړي؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

- 1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي، ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟



حل څرنگه چې $d_2 \parallel d_3$ دی، غواړو ثبوت کړو چې $d_1 \parallel d_2$.

که چیرې د d_1 خط د d_2 له خط سره موازي وي؛ نو دواړه د P په مستوي کې پراته دي او که چیرې د d_1 خط د d_2 له خط سره موازي نه وي، په دې صورت کې د P مستوي چې د d_1 خط په کې پروت دی د d_2 خط د A په ټکي کې قطع کوي.

لیدل کېږي چې د d_2 خط د d_3 له خط سره موازي دی، نو d_3 د p مستوي هم قطع کوي، په داسې حال کې چې د p مستوي د d_3 خط نشي قطع کولی، ځکه چې d_1 او d_3 خطونه یو له بل سره موازي او د P په متسوي کې پراته دي. له بلې خوا پوهېږو چې $d_2 \parallel d_3$ دی؛ نو د P مستوي د d_2 مستقیم خط هم نشي قطع کولای، په دې صورت کې ویلای شو

چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه د P په مستوي کې شامل او یو له بل سره موازي دي.

اوس ښیو چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یو له بل سره هېڅ گډ ټکی نه لري. فرض کوو چې d_1 او d_2 مستقیم خطونو گډ ټکی (O) وي، کولای شو د (O) له ټکي څخه دوه موازي خطونه له d_3 خط سره رسم کړو. چې دا نظر د 102 مخ قضیې ته چې مخکې تاسو لوستې ده، نا شونی ده؛ نو په نتیجه کې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یو له بل سره موازي دي؛ یعنې $d_1 \parallel d_2$

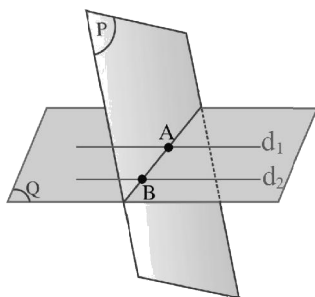
2- که چیرې د E او F مستوي گانې سره موازي وي او د L_1 مستقیم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي ایا $L_1 \parallel L_2$ دی؟

حل څرنگه چې د E او F مستوي گانې یو له بل سره موازي دي د L_1 او L_2 مستقیم خطونه چې په ترتیب د E او F په مستوي گانو کې واقع دي؛ نو ویلای شو چې د L_1 او L_2 مستقیم خطونه هم یو له بل سره موازي یا یو له بل سره متناظر دي.

3- که چیرې د E او F مستوي گانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او همدارنگه د F گډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟

حل

ددې پوښتنې په حل کې ویلای شو چې د نوموړو مستوي گانو په موقعیت یا نسبي حالتونو پورې اړه لري، کېدای شي چې موازي او هم کېدای شي چې متقاطع شي؛ یعنې که چیرې له گډ فصل سره یې موازي قطع کړي؛ نو گډ فصلونه سره موازي او له هغه پرته گډ فصلونه متقاطع دي.



دریم څپرکی: فضاي هندسه

په فضا کې موازي مستقيمونه (دويمه برخه)

د درسي کتاب (101) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د دوو موازي مستقيمونو او متقاطع مستوي گانو په مفهوم پوه شي. • دوه موازي مستقيمونه د يوې مستوي په واسطه قطع کړي شي. • د تقاطع حالت يې پيدا کړي شي. • د پورته حالتونو په سرته رسولو خوښي ښکاره کړي او خوند ورځني واخلي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ييز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد.
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د لومړي برخې په ادامه ورپسې بل لوست داسې پيل کړی: چې د تېر لوست لنډه يادونه د پوښتنو په کولو سره وکړي او زده کوونکي دې ځوابونه ووايي. ډېره پاملرنه وکړي چې زده کوونکي سم ځواب ووايي او که نه؟ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وواياست چې د درسي کتاب د 102 مخ فعاليت سرته ورسوي. په ډلو کې د فعاليت له سرته رسولو وروسته د هرې ډلې استازی خپل فعاليت نورو ته تشرېح کوي، که چيرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي د هغوی پام تېروتنې ته راواړوي. چې صحيح يې کړي بيا نوموړی فعاليت په عملي توگه ديوه داؤ طلب زده کوونکي په واسطه داسې سرته ورسوي چې دوه لښتې په موازي ډول د ميز په سطحې باندې کښېږدي او د يوې پاڼې په واسطه يې قطع کړي، له نورو زده کوونکو څخه وپوښتي د کاغذ د پاڼې او لښتې چې په يوه مستوي کې دي، ايا تقاطع يې ټکي دي که خط؟ که زده کوونکي ستونزې ولري تاسو شکل پر تخته رسم او تشرېح يې کړي. په پای کې د اړوند فعاليت قضيه د کتاب له مخې بيان او مفهوم يې تشرېح کړی، چې زده کوونکي يې پر مفهوم باندې پوه او د يو بل په مقابل کې استدلال وکړي شي. وروسته يو داؤ طلب زده کوونکي تختې راوغواړي چې قضيه د شکل له مخې داسې ثبوت او تشرېح کړي چې نور زده کوونکي هم په کې فعاله ونډه واخلي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښه تحکیم لپاره له زده‌کونکو څخه په انفرادي ډول داسې پوښتنې وکړئ:

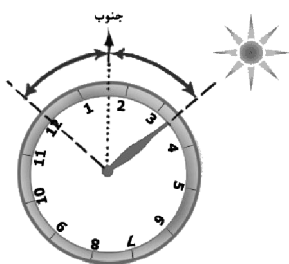
1. که چیرې دوه مستقیم خطونه موازي وي او د P مستوي یوله هغو څخه قطع کړي ایا بل یې هغه قطع کولای شي؟
2. که چیرې یوه مستوي دوه موازي خطونه قطع کړي، ایا دا دواړه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې پراته دي، که په بېل بېل مستوي‌ګانو کې؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره ارزونه وکړئ.

1. که چیرې دوه مستوي‌ګانې متقاطع وي، ایا ویلای شو چې تقاطع یې یوه نقطه ده که یو خط؟
2. د دوو مستوي‌ګانو د تقاطع فصل په یوه مستوي کې وي او که په دواړو کې؟



دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه

د درسي کتاب (103) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو ترمنځ د زاويې پر مفهوم پوه شي. • زده کوونکي د موازي ضلعو په رسمولو سره مساوي زاويې رسم کړای شي. • له پورته پوهې او مهارت څخه په مسطحه هندسې کې هم کار واخېستلای شي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ییز او انفرادي کار، پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	د اړتیا وړ مواد
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راواړوي او ورڅخه وپوښتي: • څوک ویلای شي که چیرې د یوې زاويې د دویمې ضلعې دوران د ساعت له عقربې سره سم (عین لور) حرکت وکړي زاویه مثبت ده او که منفي؟ • څوک ویلای شي که چیرې د یوې زاويې د دویمې ضلعې دوران د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاویه مثبت ده او که منفي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ځوابونه ورته ووايست د لوست بهیر او فعالیت پیل کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی: زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، دنده ورکړي چې د کتاب (103) مخ فعالیت له هدایت سره سم سرته ورسوي. د زده کوونکو د کار څارنه وکړي که چیرې کومه ډله پوښتنه کړي لارښوونه وکړي. د فعالیت د سرته رسولو وروسته د هرې ډلې استازی خپل فعالیت پر تخته نورو ډلو ته تشریح کوي که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، د یوې بلې ډلې یا یو داوطلب زده کوونکي په واسطه یې اصلاح کړي. بیا یو داوطلب زده کوونکی راوغواړي چې د همدې فعالیت د اړوندې قضیې شکل پر تخته رسم کړي؛ نور زده کوونکي دې په خپل کتابچو کې رسم کړي، د شکل د سموالي لپاره دې زده کوونکي شکلونه د تختې له شکل سره پرتله کړي، وروسته تاسود قضیې مفهوم ورته بیان او تعریف کړي. ثبوت یې د شکل له مخې د زده کوونکو په فعال گډون او برخې اخېستنې سره سرته ورسوي. بیا یو زده کوونکی تختې ته راوغواړي ورته ووايست چې موازي ضلعې او مساوي زاويې په نښه کړي، په همدې ډول دوه نور داوطلب زده کوونکي په وار سره راوغواړي چې د قضیې لومړی او دویمه پایله بیان، شکلونه یې پر تخته رسم کړي، که چیرې زده کوونکي له ستونزو سره مخامخ کېږي مرسته او لارښوونه وکړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښوونې لپاره لاندې پوښتنې چې له نوي لوست سره اړیکې لري ورکړئ او ځوابونه دې زده‌کوونکي ووايي.

1. هغه زاوې چې په ترتیب سره یې ضلعې یوه په یوه موازي او هم جهت وي، نوموړي زاوې تل یو له بله سره مساوي دي؟

2. هغه زاوې چې ضلعې یې یوه په یوه موازي او مختلف جهت وي، تل یو له بله سره مساوي دي؟
له ځواب ویلو وروسته دوه زده‌کوونکي په وار سره راوغواړئ چې نوموړي زاوې پر تخته باندې رسم او اندازه کړي او نور زده‌کوونکي دې خپلې تېروتنې سمې کړي.

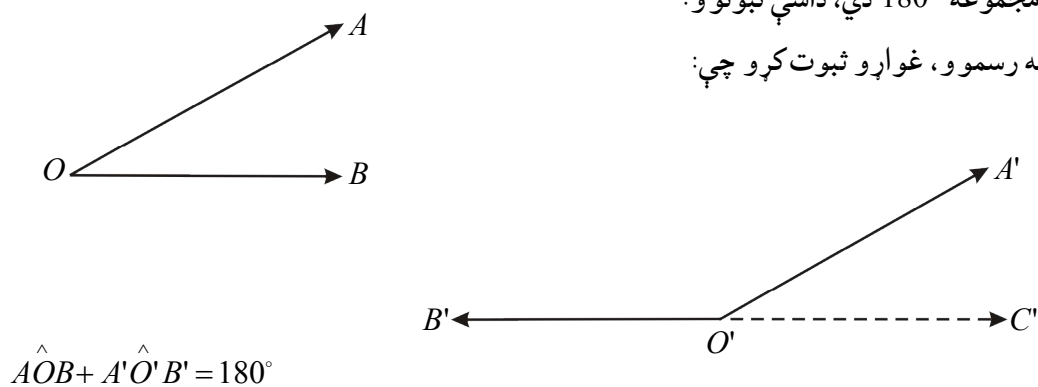
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره ارزونه وکړي:

1. څوک کولای شي دوه مساوي زاوې چې ضلعې یې یوه په یوه موازي او هم جهت وي، رسم کړي؟
2. څوک کولای شي داسې دوه زاوې چې ضلعې یې یوه په یوه موازي او مختلف جهت وي، رسم کړي؟
پوښتنې د زده‌کوونکو په واسطه حل او ځوابونه په لاس راوړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

که چیرې د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهت او د هغوی یوه، یوه ضلع موازي او مختلف جهتونه ولري، ددې دواړو زاویو مجموعه 180° دي، داسې ثبوتوو:
لومړی شکلونه رسموو، غواړو ثبوت کړو چې:



د O له نقطې څخه د OB له ضلعې سره موازي او مختلف جهت رسموو.
په شکلونو کې لیدل کېږي چې $OA \parallel O'A'$ ، $OB \parallel O'B'$ دي، همدارنګه OA او $O'A'$ ضلعې هم جهت، OB او $O'B'$ ضلعې مختلف جهت دي، د مخکې قضیې له مخې لیکلای شو: $\hat{AOB} = \hat{A'O'C'}$
له بلې خوا پوهېږو چې $\hat{A'O'C'} + \hat{A'O'B'} = 180^\circ$
اوس له پورتنۍ مساوات څخه د $\hat{A'O'C'}$ زاوې مساوي قیمت په لیکلو سره لیکو: $\hat{AOB} + \hat{A'O'B'} = 180^\circ$

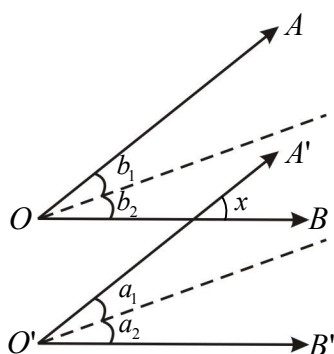
9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې له ضلعې سره موازي وي، ایا د هغو زاویو نورې ضلعې هم یوه له بلې سره موازي دي. ولې؟

حل: د تېر لوست، د لوستل شوي قضیې له مخې (په فضا کې د یوې زاویې چې دوه په دوه موازي او هم جهت ضلعې ولري یو له بل سره مساوي دی).

څرنگه چې د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي دي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې له یوې ضلعې سره موازي ده؛ نو نورې ضلعې یې هم سره موازي دي.

2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاویو، ناصف الزاویې هم یو له بل سره موازي او ایا یو پر بل عمود دي.



حل: په $\angle AOB$ زاویه کې $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$

او په $\angle A'O'B'$ زاویه کې $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$

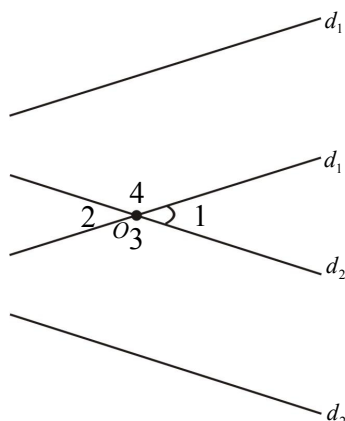
څرنگه چې $\hat{x} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \dots$ (متواقي له مخې) او همدارنگه $\hat{x} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \dots$ (متواقي له مخې) کېږي؛ نو له بلې خوا پوهېږو چې $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$ او $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$ ده؛ نو:

$$2\hat{a}_1 = 2\hat{b}_1 \Rightarrow \hat{a}_1 = \hat{b}_1, \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2$$

همدارنگه له پوښتنې څخه پوهېږو چې $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ سره موازي دي او ونښول شو چې $\hat{a}_1 = \hat{b}_1$ ده؛ نو که چیرې دوی زاویې سره مساوي او یوه، یوه ضلع یې موازي وي؛ نو بله ضلع یې هم خامخایو له بله سره موازي ده.

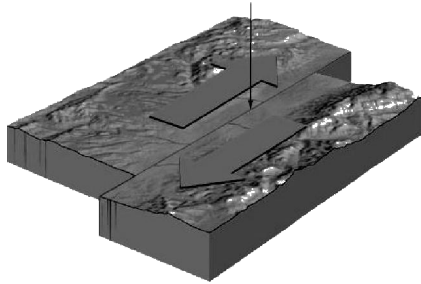
په نتیجه کې که چیرې د دوو زاویو ضلعې دوه په دوه سره موازي وي؛ نو د هغو زاویو ناصف الزاویې هم سره موازي دي.

3- د d_1, d_2 دوو متناfro مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.



حل: د d_1 او d_2 دوه متناظر خطونه په فضا کې په پام کې نیسو،

د مستوي د (O) له اختیاري ټکي څخه د Od_1 او Od_2 خطونه په ترتیب له d_1 او d_2 سره موازي رسمو، لکه په شکل کې څلور زاویې چې د Od_1 او Od_2 خطونو په واسطه جوړېږي، دوه په دوه یو له بل سره مساوي او یا یو د بل متممې دي.



دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې موازي مستقيم خطونه او موازي مستوي گانې

د درسي کتاب (105) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په فضا کې د مستقيم خطونو او مستوي گانو په موازي حالتونو پوه شي. • د متقاطع مستوي گانو له گډ فصل سره موازي مستقيم رسم کړای شي. • له پورتنۍ پوهې او مهارت څخه په ورځنۍ ژوند کې کار واخېستلای شي او خوبي ښکاره کوي.	
2- د زده کړې لارې: ډله ییز او انفرادي کار، پوښتنه او ځواب	
3- مرستندويه مواد: د کاغذ دوي پانې- لښتې او ميز	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راواړوي او ورڅخه وپوښتي: • څوک ويلای شي څه وخت يو مستقيم خط له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي؟ • کوم دوه مستقيم خطونو ته يو له بل سره موازي ويل کېږي؟ • کيدای شي چې په فضا کې دوي مستوي گانې يوه له بلې سره موازي وي؟ زده کوونکو ته وخت ورکړی چې پورتنۍ ځوابونه ووايي له هغه پرته تاسو په لنډه توگه معلومات ورکړئ، بيا د لوست بهير او فعاليت پيل کړئ.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، دنده ورکړي چې د کتاب (105) مخ فعاليت له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي. په یاد ولری چې دا فعاليت په درې قضيو پورې اړه لري. له فعاليت وروسته د دوو ډلو استازي راځي او د خپل ډلې کارونه ته تشریح او څرگندوي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. وروسته په عملي توگه د زده کوونکو په گډون سره داسې کار وکړي يو داوطلب زده کوونکی د ټولگي مخې ته راوغواړي ورته ووايست چې دا دوي لښتې د خطونو په توگه او د مېز سطح د يوې مستوي په توگه ومني. غوښتل شوي زده کوونکي ته ووايست چې يوه لښته د مېز په سطحې باندې کښېږدي او بله لښته په فضا کې داسې ونيسي چې د نوموړې لښتې سره موازي وي، که زده کوونکی ستونزه ولري، مرسته او لارښوونه وکړي، بيا له زده کوونکو څخه پوښتنه وکړي: ایا دا لښته يوازې د مېز په سطحې باندې له پرتې لښتې سره موازي ده او که د مېز له سطحې سره هم موازي ده؟	

ښايي چې زده‌کونکي ځواب ووايي له هغه پرته شکل په تخته باندې رسم د قضیې مفهوم ورته بیان او ثبوت یې د زده‌کونکو په فعالې برخې اخیستنې سره وکړي. په همدې ډول دویم داوطلب زده‌کونکي د ټولگي مخې ته راوغواړي یوه لښته او دوی پانې د کاغذ ورکړي د کاغذ دواړه پانې دې څنګ، په څنګ داسې ونیسي چې له تقاطع یې یو ګډ فصل منځ ته راشي او لښته دې په فضا کې داسې ونیسي چې له ګډ فصل سره موازي ډول غوره کړي او پوښتي؛ دا لښته یوازې له ګډ فصل سره موازي ده که له مستوي ګانو سره هم موازي ده؟ که زده‌کونکي ځواب ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو ورته ووايست دا لښته له مستوي ګانو سره هم موازي ده.

په پای کې ددې فعالیت د اړوند قضیې مفهوم بیان او شکل یې پر تخته باندې رسم د شکل له مخې د زده‌کونکو په ګډون او فعالې برخې اخیستنې سره ثبوت کړي.

په همدې ډول د درسي کتاب 106 مخ وروستی قضیه د پوښتنې او ځواب په توګه د زده‌کونکو په فعالې برخې اخیستنې سره د شکل له مخې پر تخته باندې ثبوت کړي او مفهوم یې له زده‌کونکو څخه وپوښتي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکي د لوست د لارښوونې لپاره څو تنه زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړي د هرې قضیې مفهوم او بیان ورکړي ورته ووايست چې د قضیو له بیان سره سم شکلونه پر تختې باندې رسم کړي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکي ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ د لوست په اړه داسې پوښتنې وکړي:

1. که چیرې Δ د یو مستقیم خط له یوې مستوي سره موازي وي، ایا د Δ مستقیم له هغه خطونو سره چې په مستوي کې پراته دي موازي دي؟ (ځواب هو)
2. که چیرې د Δ مستقیم خط له دوو متقاطع مستوي ګانو سره موازي وي، ایا د Δ مستقیم خط د نوموړي مستوي ګانو له ګډ فصل سره هم موازي دي؟ (ځواب هو)

کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

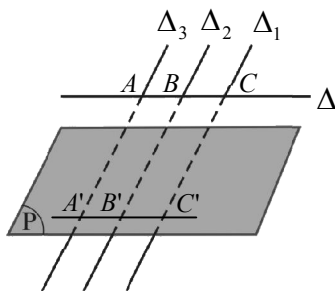
1- که چیرې d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستوي ګانې له هغو سره رسمولای شې؟

حل: که چیرې دوه خطونه سره موازي وي له هغو سره بې

شمېره موازي مستوي ګانې رسم کیدای شي.

d_1 _____

d_2 _____



2- که چیرې Δ_1 ، Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده، قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

حل: که چیرې Δ_1 ، Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د Δ مستقیم خط د A ، B او C په ټکو کې قطع کړي او د P مستوي نوموړي خطونه د A' ، B' او C' په ټکو کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{A'B'}$ خطونه سره موازي دي، څرنگه چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده، نو $AA'BB'$ شکل یوه متوازي الاضلاع ده، همدارنگه د $\overline{BC}$ او $\overline{B'C'}$ خطونه سره موازي دي؛ له دې امله $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ دی، همدارنگه د $\overline{BC}$ او $\overline{B'C'}$ خطونه سره موازي دي، نو د $BB'CC'$ شکل هم یوه متوازي الاضلاع ده؛ چې په نتیجه کې $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ دی.



دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې متعامدې مستقيمي کرښې او مستوي گانې

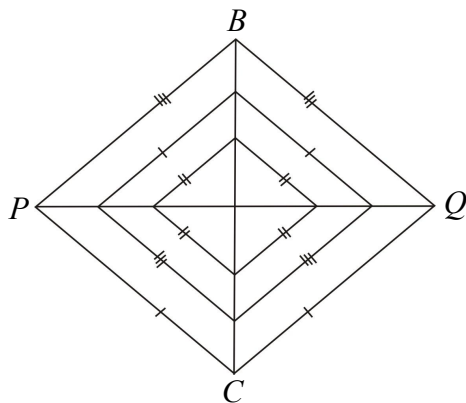
د درسي کتاب (107) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په فضا کې د متعامد مستقيمو کرښو او مستوي گانو په مفهوم پوه شي. • په فضا کې يو پر بل باندې متعامد مستقيم خطونه او مستوي گانې رسم کړای شي. • د اړتيا په وخت کې له متعامدو مستقيم خطونو او مستوي گانو څخه کار واخېستلای شي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ییز او انفرادي کار
3- مرستندويه مواد:	چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی: د سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوگرځوی او وپوښتی: • که چیرې د Δ مستقیمه کرښه د P په مستوي باندې د (O) په ټکي کې عمود وي، ایا هغه ټول مستقيم خطونه چې د مستوي د همدې (O) له ټکي څخه تېرېږي د Δ پر مستقيمي کرښې عمود دي؟ ښاغلی ښوونکی که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي، پرته له هغه کوښښ وکړي چې د پوښتنې ځواب په لنډه توگه ووايست، هو ټول هغه مستقيمو چې د مستوي د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقيم باندې عمود دي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې):	ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د درسي کتاب (107) مخ فعالیت له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي او شکل یې په بشپړ ډول رسم کړي. وروسته دې د دوو ډلو استازي د رسم شوي شکل طریقه نورو ته تشریح او توضیح کړي. که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي. کوښښ وکړي چې تېروتنه یې د دوستي په فضا کې د بلې ډلې په واسطه سمه شي؛ یعنې د یوه سالم رقابت په منځ ته راوړلو یوه ډله د بلې ډلې تېروتنې سمې کړي، په پای کې ښوونکی د همدې مخ د قضیې مفهوم ورته بیان او شکل دې مرحله په مرحله په بشپړ ډول پر تخته باندې رسم کړي او ثبوت دې د شکل له مخې د زده کوونکي څخه د پوښتنې او ځواب په ډول وشي. ښاغلی ښوونکی کوښښ وکړي هغه کرښې یو پر بل عمود یا یو له بل سره مساوي او همدارنگه هغه شکلو ته چې یو په بل انطباق منونکي وي، د زده کوونکو په واسطه پیدا کړي، که چیرې زده کوونکي ستونزې ولري، تاسو یې په جلا، جلا ډول ورته پیدا او وښایست. په پای کې یې ثبوت د هغه چارټ له مخې چې مخکې مو جوړ کړی دی د زده کوونکو په گډون او فعالې ونډې اخېستنې سره سرته ورسوي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم او پوځوالي لپاره د کتاب د 108 مخ فعالیت زده کوونکو ته ورکړی چې هر یو یې



په انفرادي ډول په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي، وروسته درې تنه زده کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړي چې هر یو یې د فعالیت یوه، یوه برخه سرته ورسوي او تشریح یې کړي، که چیرې ستونزې ولري، مرسته اولارښوونه وکړي او مخامخ شکل پر تخته باندې رسم مساوي اندازې یې وروښایاست.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده کړه شوي ده او که نه؟ د لوست په اړه داسې پوښتنې وکړي:

1. که چیرې د Δ مستقیمه کرښه د P پر مستوي باندې د (O) په ټکي کې عمود وي، ایا کیدای شي ټول هغه

مستقیمونه چې د (O) له ټکي څخه تېرېږي د Δ پر مستقیم عمود وي؟

2. که چیرې دوه مستقیم خطونه د Δ پر مستقیم خط چې د مستوي د (O) له نقطې څخه تېرېږي عمود وي، ایا د Δ

مستقیم په هغه مستوي باندې چې ددې دوو مستقیمو له تقاطع څخه تېرېږي، هم عمود دي؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ او شکلونه یې پر تخته باندې رسم کړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که چیرې د d_1 او d_2 خطونه یو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي گانې رسمولای شئ؟

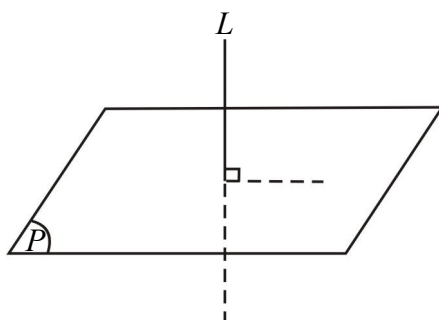
حل: که چیرې دوه خطونه سره موازي وي، له هغو سره بې شمېره موازي مستوي گانې رسمولای شو.

d_1 _____

d_2 _____

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آیا ټولې هغه مستوي گانې چې د L خط په کې پروت دی، د P پر مستوي

باندې عمود دي؟



حل: (هو) که چیرې د L خط د P پر مستوي عمود وي،

په دې صورت کې ټولې هغه مستوي گانې چې د L خط په

کې پروت دی، د P پر مستوي باندې عمود دي.



دریم څپرکی: فضايي هندسه

په فضا کې موازي مستوي گانې

د درسي کتاب (109) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په فضا کې د دوو موازي مستوي گانو په مفهوم پوه شي. • په فضا کې د دوو موازي مستوي گانو په جوړښت به پوه شي. • په فضا کې موازي مستوي گانې به رسم کړای شي. • د اړتيا په وخت کې موازي مستوي گانې وکارولای شي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ییز او انفرادي کار، پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • د کتاب د وړودي برخې مخامخ شکل څو پوره (طېقې) لري؟ • د پورته پور کړکۍ، د کښته پور له کړکيو سره څه ډول حالت لري؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته د هغو د موازي والي حالتونه تشریح او څرگند کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي ورته و وایست چې د درسي کتاب 109 مخ فعالیت له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي، د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دریو ډلو استازي راوغواړي چې خپل سرته رسولی فعالیت نور و ته توضیح کړي، د کومې ډلې د تېروتنې په صورت کې بله داوطلب ډله دې هغه داسې اصلاح کړي چې د ټولو د قناعت وړ وگرځي. بیا د یوه زده کوونکي په واسطه د (110) مخ هغه دوه شکلونه چې په فعالیت کې $d_1 // \Delta_1$ او $d_2 // \Delta_2$ دي، پرتخته رسم کړی د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړي. همدارنگه یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغواړي چې دوې موازي مستوي گانې د شرطونو له مخې پرتخته او نور زده کوونکي دې په خپلو کتابچو کې رسم کړي، یو له بل سره دې پرتله کړي. په پای کې د شکلونو له مخې د قضیې مفهوم او پایله ورته بیان او ثبوت یې د زده کوونکو په گډون او فعالې برخې اخېستنې سره، د پوښتنې او ځواب په ډول سرته ورسوي، ترڅو زده کوونکي د قضیې په مطلب ښه پوه شي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره له زده‌کوونکو څخه په لاندې ډول پوښتنې وکړې، چې ځوابونه ووايي:

- څوک کولای شي څلور مستقیم خطونه داسې رسم کړي چې نوموړي خطونه دوه په دوه متقاطع او هم دوه په دوه یو له بل سره موازي وي؟

- ایا د پورته هرې متقاطع جوړې خطونو څخه یوه مستوي تېرېږي؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه په انفرادي ډول له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، که چیرې کوم زده‌کوونکی تېروتنه کوي د بل داوطلب زده‌کوونکي په واسطه یې تېروتنه اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي چې زده‌کړه شوي ده او که نه؟ د ارزونې لپاره داسې پوښتنې وکړې:

1. په فضا کې د دوو موازي مستويگانو امکان شته؟

2. څوک د دواړو موازي مستويگانو رسمولای شي؟

3. موازي مستويگانې څو مشترکې نقطې لري؟

کولای شئ په همدې ډول نورې پوښتنې وکړئ او ځوابونه یې له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، تر څو سمه ارزونه وشي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

که چیرې د E او F مستويگانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه د E په مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 \parallel L_2$ دی؟

حل: که چیرې د E او F مستويگانې سره موازي وي او د L_1 او L_2 مستقیم خطونه په اختیاري لورې په ترتیب سره د E او F په مستويگانو کې واقع وي، څرنگه د E مستوي د F له مستوي سره موازي ده؛ نو ټول هغه خطونه چې د E په مستوي کې پراته دي، له هغه ټولو خطونو سره چې د F په مستوي کې دي موازي دي، په پایله کې ویلای شو $L_1 \parallel L_2$ دي.

د دریم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (څلور درسي ساعتونه)

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړۍ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي څخه مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

- (a) د AB له خط سره موازي ده. (b) د AB خط يې له منځه تيرېږي.
(c) د AB خط عمودي ناصف دی. (d) د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تيرېږي.

2- که د Δ خط د P په مستوي باندې عمود وي، نو:

(a) د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

(b) د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

(c) د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

(d) د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي ده.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاو څخه يوه مستوي نه تيرېږي له:

(a) له هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی. (b) له دوو متقاطع خطونو څخه.

(c) د يو خط او دهغې له خارجې نقطې څخه. (d) څلور متمايزې (مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

(a) که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي ده.

(b) که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

(c) که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

(d) که دوي مختلفې مستوي گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړي مستوي گانې د ياد شوې ټکي په امتداد شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دی.

(a) که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

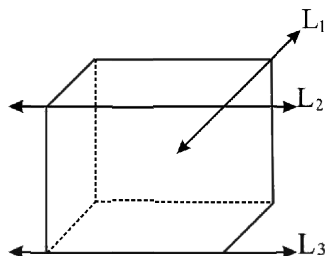
(b) که يو خط يوه له متقاطع مستويگانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

(c) که يو خط يوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

(d) که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ.

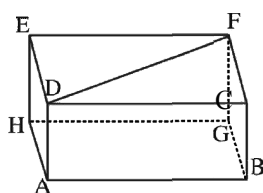
1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوې سره موازي وي، نوموړي مستقیم خطونه په خپل منځ کې عمود کېدای شي؟
حل: نوموړي خطونه په خپلو منځو کې عمود کېدای نشي.



2- په لاندې مستطیل کې د L_1 , L_2 , او L_3 خطونو موقعیت نظریو بل ته څرگند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

حل: د L_1 او L_2 خطونه په یوه سطح کې دي، خو د L_3 خط د L_1 او L_2 خطونه ښکته خواته موقعیت لري. L_2 او L_1 خطونه متقاطع خو د L_2 او L_3 خطونه نوموازي دي، نو L_1 او L_3 خطونه متنافر دي.

3- که د P_1 او P_2 مستويگانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستويگانې په خپل منځ کې موازي دي؟
حل: هو، که چېرې د P_1 او P_2 مستويگانې د P پر مستوي باندې عمود وي؛ نو P_1 او P_2 مستويگانې پخپل منځ کې سره موازي دي.



4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.

(a) د دوو مستويگانو نومونه واخلئ چې پر $\overline{AD}$ عمود وي او ووايئ ولې عمود دي؟

(b) د درېو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

(c) د $\hat{E}DF$ زاویه قایمه ده.

(d) د $\hat{DFC}$ زاویه قایمه ده.

حل:

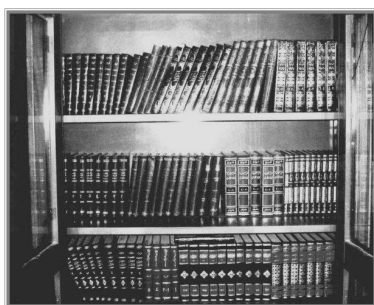
(a) د $ABGH$ او $DCFE$ مستويگانې د معکب مستطیل دوې سطحې دي او یو له بل سره موازي دي. د یوې قضیې په اساس چې وایې که چېرې دوې مستويگانې په یو خط عمود وي، په خپل منځ کې موازي دي؛ نو څرنگه چې نوموړي دواړه مستويگانې موازي دي؛ نو ځکه په $\overline{AD}$ خط عمودي دي.

(b) $\overline{ED}$, $\overline{AH}$ او $\overline{FC}$ خطونه پر $ABCD$ مستوي باندې عمود دي

(c) د $\hat{E}DF$ زاویه قایمه نه ده؛ ځکه چې پورتنۍ شکل یو مکعب مستطیل دی، د $\hat{EDC}$ زاویه یوه قایمه ده، په داسې حال

کې چې د $\hat{E}DF$ زاویه د $\hat{EDC}$ له زاوې څخه کوچنۍ ده.

(d) د $\hat{DFC}$ زاویه قایمه نه ده؛ ځکه چې $\hat{EFC}$ زاویه قایمه؛ یعنې 90° ده، ولې د $\hat{DFC}$ زاویه د $\hat{EFC}$ له زاوې څخه کوچنۍ ده؛ نو ځکه قایمه نشي کېدلای.



څلورم څپرکی: ترادفونه

ترادفونه Sequences

د درسي کتاب (117) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د ترادفونو، متزايد ترادفونو او متناقصو ترادفونو په مفهوم پوه شي. • ترادفونه جوړ او a_n حدیې پیدا کړای شي. • د ترادفونو په جوړولو او n-ام حد په پیدا کولو سره خوښي ښکاره او په ځان باور پیدا کړي.	
2- د زده کړې لارې: انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب ...	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او وپوښتي: • څوک کولای شي ووايي چې د طبیعي عددونو د هر وروستیو او مخکینیو عددونو ترمنځ توپیر څو دی؟ • څوک کولای شي په ترتیب 8 عددونه له کوچني څخه د لوی خواته وليکي؟ • څوک کولای شي 12 عددونه له لوی څخه د کوچني خواته وليکي؟ همدارنگه د کتاب د وړودي شکل په برخه کې معلومات و غواړي او کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړي، له هغه پرته تاسولنډ معلومات ورکړي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی یوه داوطلب زده کوونکي ته بلنه ورکړي چې په ترتیب سره تر شلو پورې ټول جفت عددونه وليکي او بیا وپوښتي چې د هر دوو پرله پسې عددونو ترمنځ توپیر څو دی؟ که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي له هغه پرته تاسو ځواب ووايست. په همدې ډول یو بل زده کوونکي راوغواړي چې په ترتیب سره تر شلو پورې ټول طاق عددونه پر تخته وليکي، بیا وپوښتي چې د هر دوو پرله پسې عددونو ترمنځ توپیر څو دی؟ ښايي زده کوونکي ځواب ووايي د ځواب د نه ویلو په صورت کې تاسو ځواب ووايست او هم ووايست چې لومړی یې د جفت عددونو د ترادف په نامه او دویم یې د طاق عددونو د ترادف په نامه یادېږي، چې د جفت عددونو ترادف د $2n$ او د طاق عددونو ترادف د $2n-1$ په واسطه په لاس راځي. په پای کې د ترادف تعریف ورته بیان او د تعریف ناحیه یې (طبیعي	

عددونه) د قیمتونو ناحیه یې (حقیقي عددونه) ورته وویاست او دا ترادف یعنې $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ چې د ترادف په نامه یادېږي پر تخته ولیکئ او هم ورته وویاست ترادف باید مرتب او منظم شکل ولري، نه نامرتب او غیر منظم شکل. زده‌کونکي په مناسبو ډلو وېشئ د کتاب 117 مخ فعالیت ورکړئ چې د بحث او خبرو وروسته د هریوه ترادف پراختیایي شکل ولیکي، وروسته د متزایدو او متناقصو ترادفونو په برخه کې پوښتنې وکړئ چې هره ډله په وار سره ځواب ووايي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

بیا دوه زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې یو یې د $a_n = n^2$ ترادف او بل یې د $b_n = \frac{n}{3}$ ترادف د $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ لپاره پیدا کړي، دریم زده‌کونکی دې په هغو کې متزاید او متناقص ترادف وښيي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم او زده‌کړې لپاره د کتاب 118 مخ دویم مثال د یو داوطلب زده‌کونکي په واسطه حل کړئ او نور زده‌کونکي دې په خپل کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي، په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

پاملرنه وکړئ چې زده‌کونکي ترادف په منظم او مرتب ډول لیکي او که نه؟ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډ من شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

1. د ترادف د تعریف ناحیه کوم عددونه کیدای شي؟
2. د ترادف د قیمتونو ناحیه کوم عددونه کیدای شي؟
3. ایا نامرتب یا غیر منظم عددونه یو ترادف جوړولای شي؟

کوښښ وکړئ چې هر ځواب په وار سره له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی دې په ردیفونو کې د عددونو ترتیب په پام کې ونیسي؛ لکه:

$$1) 1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

$$2) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$$3) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$$

چې د ردیفونو مثالونه دي. ټکی، ټکی او درې ټکی (....) رابښي چې عددونه دوام لري په عمومي ډول د عددونو ترتیب: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ تر یوې ځانګړې قاعدې لاندې د ردیف یا Sequence په نامه یادېږي.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ عددونه دي چې هر یو یې د رډیف د حد په نامه یادېږي، څرنگه چې د طبیعي عددونو شمېر نه ختمېږي، نو ددې رډیف د حدونو شمېر هم بې شمېره او اخري حد یې نه شو ټاکلی، معمولاً یو رډیف د هغه د $n - \text{ام حد یعنې } a_n$ په مرسته تعریفېږي چې د لاندې سلسلې حدونه داسې ښوول کېږي، په داسې حال کې چې $n > 0$ وي:

$$0, 1, 0, 1, 0, \dots, \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$0, 2, 0, 2, 0, \dots, [1 + (-1)^n]$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- په لاندې ترادفونو کې $n - \text{ام حد وټاکئ؟}$

$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots \end{array} \right\}$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1 \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3n} \end{array} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2- که یو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

حل n ته له طبیعي عددونو څخه قیمت ورکوو:

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1} = \frac{(-1)^{1+1}}{1} = \frac{(-1)^2}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2} = \frac{(-1)^3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{3} = \frac{(-1)^4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{4} = \frac{(-1)^5}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{(-1)^{5+1}}{5} = \frac{(-1)^6}{5} = \frac{1}{5}$$

$$a_6 = \frac{(-1)^{6+1}}{6} = \frac{(-1)^7}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

څلورم څپرکی: ترادفونه

حسابي ترادف *Arithmetic sequence*

د درسي کتاب (119) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)



1- د زده کړې موخې • د حسابي ترادف په مفهوم پوه شي. • حسابي ترادفو نه جوړ او هر حد يې پيدا کړای شي. • د حسابي ترادفونو په اړوند پوښتنې وکړای شي. • ددې پوهې او مهارت په سرته رسولو سره په ځان باور پيدا او خوښي ښکاره کړي.	- پوهنيزې - مهارتي - ذهنيتي
2- د زده کړې لارې: ډله ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...	
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او وپوښتي: • مخامخ څو شکلونه وينئ؟ • په هر شکل کې څو کرۍ (حلقې) ليدل کېږي؟ • د هر دوو پرله پسې شکلونو د کرېو ترمنځ توپير څو دي؟ • ايا توپيرونه مساوي دي او که نه؟ زده کوونکي د هر شکل کرۍ شمېرې او د هر دوو پرله پسې شکلونو د حلقو توپير په گوته کوي د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي او ورته ووايست چې توپيرونه يو ثابت عدد دي.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د کتاب 119 مخ فعاليت ورکړي چې له خبرو او بحث وروسته فعاليت سرته ورسوي، د فعاليت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي په پای کې د دريو ډلو استازی خپل سرته رسولي فعاليت نورو ته د يو مثال په ورکولو سره توضيح کوي. که کومې ډلې تېروتنه کړي وي کوښښ وکړي تېروتنه يې د يوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بيا تاسو د حسابي ترادف تعريف ورته بيان او په هغو کې گډ توپير (<i>Common differents</i>) لومړۍ حد (a_1) وروښايست داسې چې د متزايد او متناقص ترادفونو خاصيتونه د (d) په اشارې پورې اړه لري د کتاب د مثالونو په واسطه چې $d > 0, d < 0$ وي، تشرېح او توضيح کړي. يو داوطلب زده کوونکي ته بلنه ورکړي چې د کتاب د 120 مخ لومړۍ مثال پر تخته حل او نور زده کوونکي دې په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، په پای کې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کوي، د تېروتنې په صورت کې هغه اصلاح او ځانونه پرې وپوهوي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم او پوهې لپاره زده‌کونکي په وارسره تختې ته راوغواړي چې د کتاب دویم مثال د (a) او (b) اجزاوې پر تخته حل کړي او څرگندويې کړي چې کوم یو یې ترادف دی او کوم یو یې ترادف نه دی، په عین وخت کې دې نور زده‌کونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډ من شي ایا زده‌کونکو لوست زده کړی او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې زده‌کونکي و ارزوي:

1. که چیرې $d < 0$ وي، ترادف متزايد دی او که متناقص؟
 2. که چیرې $d > 0$ وي، ویلاي شئ چې ترادف متزايد دی او که متناقص؟
 3. که چیرې د هرو دوو پرله پسې حدونو توپیر ثابت عددونه وي؛ حسابي ترادف کیدای شي؟
 4. څوک د حسابي ترادف تعریف ویلی شي؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو یې بیا هم ورته توضیح کړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د ریډفونو د هرو دوو پرله پسې حدونو فرق یو پېژندل شوی او ثابت عدد دی $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ ریډف چې د حسابي ریډف (*Arithmetic sequence*) یا حسابي تصاعد (*Arithmetic progression*) په نامه یادېږي او هر حد یې نظر د هغه مخکني حد څخه یو ثابت او پېژندل شوی فرق لري چې د مشترک تفاضل په نامه یادېږي او په d سره ښوول کېږي کیدای شي d یو مثبت یا منفي عدد او یا هم صفر وي.

په همدې ډول که چیرې پوښتنه وشي په کوم صورت کې د b, a او c عددونه یو حسابي ریډف جوړوي. باید ورته و وایاست د تصاعد د تعریف په پام کې نیولو سره تل په یو حسابي تصاعد کې داسې رابطه شتوالی ولري:

$$b - a = c - b$$

همدارنگه پورته رابطه د حسابي تصاعد وسطي حد په لاس راوړو چې په ټولو حسابي ریډفونو کې مطابقت کوي.

$$b - a = c - b \Rightarrow b + b = c + a$$

$$2b = c + a \Rightarrow b = \frac{c + a}{2}$$

b د یو ریډف د دوو حدونو ترمینځ وسطي عدد دی چې د a او c په منځ کې قرار لري او دا خاصیت په ټولو حسابي ریډفونو کې صدق کوي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب (126) مخ د دويمې او څلورمې پوښتنې حل.

2- ايا $\frac{3}{4}$, 1 , $\frac{5}{4}$ يو حسابي ترادف تشکيلوي؟ د پوښتنې د سوالی په صورت کې يې مشترک توپير پيدا کړئ.

حل ددې پوښتنې د پوهېدو لپاره چې پورتنی ترادف حسابي ترادف دی او که نه؟ بايد د هر دوو پرله پسې حدونو ترمنځ گډ توپير ثابت عدد وي.

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4} - 1 = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

څرنگ چې گډ توپير ثابت عدد يعنې $\frac{1}{4}$ دی، نو راکړل شوی ترادف، حسابي ترادف دی.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$ ، $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي، د d قيمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{2} \\ n = 10 \\ a_{10} = \frac{84}{2} = 42 \\ d = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a_1(n-1)d \\ a_n - a_1 = (n-1)d \\ d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{42 - (-\frac{1}{2})}{10-1} = \frac{42 + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{84+1}{2}}{9} = \frac{\frac{85}{2}}{9} = \frac{85}{18} = 4.7\bar{2} \end{array}$$

څلورم څپرکی: ترادفونه



په یوه حسابي ترادف کې $n - 1$ ام حد پیدا کول

د درسي کتاب (121) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د $a_n = a + (n-1)d$ په رابطه کې n, a, a_n او d وپېژني. • په نوموړي رابطه کې نامعلوم یا غوښتل شوي حد یا برخه پیدا کړای شي. • د اړتیا په وخت کې لاس ته راغلی فورمول او نورې برخې یې وکاروي.
2- د زده کړې لارې:	ډلېز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...
3- مرستندويه مواد:	د اړتیا وړ مواد ...
4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته یو ځل بیا د زده کوونکو پام د تېر لوست شکل ته راوگرځوي او وپوښتي: • که چیرې په یوه حسابي ترادف کې لومړۍ حدي (a)، گډ توپیر (d) راکړل شوی وي، څوک کولای شي $n - 1$ ام حد یې پیدا کړي؟ • څوک د $a_n = 2, 6, 10, \dots$ په ترادف کې لومړۍ او گډ توپیر ښودلای شي. ښايي چې زده کوونکي ځوابونه ووايي له هغه پرته تاسو ځوابونه ورته و وایاست او بیا د لوست بهیر پیل کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي او د کتاب حسابي ترادف یعنې $5, 7, 9, 11, 13, \dots$ پر تخته ولیکي ورته و وایاست چې هره ډله دې له خبرو او بحث وروسته په نوموړي ترادف کې لومړۍ حد، گډ توپیر پیدا او بیا دې د یوې رابطې له مخې دویم حد، درېم حد، څلورم حد، پنځم حد، شپږم حد... ونیسي او هره ډله دې کونښن وکړي چې د پیدا شوو رابطو له مخې د a_n عمومي رابطه هم په لاس راوړي. د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته تشریح کوي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. د موضوع د مهموالي له امله تاسو هم په بشپړ ډول د $n - 1$ ام حد پیدا کولو لپاره گام په گام کار وکړئ چې په پایله کې د $a_n = a + (n-1)d$ عمومي فارمول ثبوت او په لاس راوړئ، ترڅو زده کوونکي وکولای شي په نوموړي رابطه کې n, a, d او a_n وپېژني، بیا دوه داوطلب زده کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړي چې هریو د په ترتیب سره لومړی مثال او دویم مثال پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې هم عینې مثالونه د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. که چیرې د تختې په حل کې کومه تېروتنه وي، د یو بل داوطلب زده کوونکي په واسطه یې اصلاح کړئ، د ستونزو په

صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ، په پای کې دې زده‌کونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکیم او پوهې لپاره د کتاب 123 مخ فعالیت په لاندې ډول زده‌کونکو ته ورکړی چې په خپلو کتابچو کې حل کړي:

$$a_4 = 3, \quad a_{25} = 87, \quad -315 \text{ - ام حد یې په لاس راوړی.}$$

$$a_4 = a + (n-1)d = a + (4-1)d \Rightarrow a + 3d = 3$$

$$a_{25} = a + (n-1)d = a + (25-1)d \Rightarrow \pm a \pm 24d = \pm 87$$

$$-21d = -84 \Rightarrow d = \frac{-84}{-21} = 4$$

په پورته معادلو کې لومړی a او d پیدا، وروسته 315 حد دې پیدا کړي، لومړی دې زده‌کونکي په خپلو کتابچو کې حل او په پای کې دې یو داوطلب زده‌کونکی هغه پر تخته حل کړي، ترڅو زده‌کونکي په خپلو تېروتنو پوه شي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې زده‌کونکي و ارزوي:

1. د $a_n = a + (n-1)d$ رابطه په پام کې ونیسئ:

- a_n د ترادف څوم حد ښیي؟

- a د ترادف کوم حد ښیي؟

- n په یوه ترادف کې څه شي ښیي.

- d په یوه ترادف کې څه شي ښیي.

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- د مخامخ ترادف 35 - ام حد پیدا کړئ. $\dots, 12, 5, -2$

حل پوهېږو چې پورتنۍ ترادف یو حسابي ترادف او گډ توپیر یې 7 دی، نو د n - ام حد پیدا کولو له فورمول څخه کار اخلو.

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 \\ d = 7 \\ n = 35 \\ a_{35} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ a_{35} = -2 + (35-1) \cdot 7 \\ a_{35} = -2 + 34 \cdot 7 \\ a_{35} = -2 + 228 = 236 \end{array}$$

$$a_{35} = 236$$

څلورم څپرکی: ترادفونه



د حسابي ترادف وسطي حد

د درسي کتاب (123) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د حسابي ترادف د وسطي حد هارمونيکي ترادف پر مفهوم پوه شي. • د حسابي ترادف وسطي حد او هارمونيکي پوښتنې حل کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره د موضوع په اړه ورځني ستونزې حل او په ځان ډاډمن شي.	
2- د زده کړې لارې: ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...	
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د موضوع د ښه پوهېدو لپاره د زده‌کوونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرزوي: • څوک کولای شي د 5 او 7 عددونو حسابي وسط پیدا کړي. • د 19 او 17 عددونو ترمنځ کوم عدد دی؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو د هرې پوښتنې ځواب د اړوندې عمليې په واسطه پیدا کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست که چیرې د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه؛ لکه: a_n, a_{n-1} او a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې a_{n-1} او a_{n+1} معلوم وي، څرنگه کولای شو د a_n یعنې وسطي حد پیدا کړو. زده‌کوونکي له کتاب څخه استفاده نه کوي په خپلو ډلو کې دې بحث ورباندې وکړي او فعالیت دې سرته ورسوي، په پای کې د درېو ډلې استازي خپل کار نورو ته توضیح کوي د تېروتنې په صورت کې مرسته وکړي که چیرې ټولو ډلو تېروتنې کړي وي، تاسو د $\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ په افاده کې د هر یوه قیمت په اېښودلو سره a_n وسطي حد په لاس راوړئ. یو داوطلب زده‌کوونکي ته بلنه ورکړي چې د فورمول په تطبیق کولو سره لومړی مثال پر تخته حل کړي په همدې ډول دویم داوطلب زده‌کوونکي تخته ته راوغواړي چې دویم مثال پر تخته حل او د x قیمت له پیدا کولو وروسته یې ترادف وليکي او نور زده‌کوونکي دې عین کار د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. په پای کې دې خپل حلونه له تخته سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.	

په همدې ډول د 123 مخ يادونه چې د يوه حسابي ترادف له لومړي حده پرته دوه نور حدونه ورکړل شوي دي. دهغو له مخې دې گډ توپير په لاس راوړي. (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) که چيرې زده‌کوونکي ونه شي کولای، تاسوي يې له اضافي معلوماتو څخه په استفادې سره ثبوت کړئ.

6- د زده کړې تحکيم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکيم او پوهې لپاره د کتاب 124 مخ لومړی مثال زده‌کوونکو ته ورکړي چې د کتاب له لېدو پرته يې په خپلو کتابچو کې حل کړي او ترادف يې بشپړ کړي. د کار څارنه وکړي. په پای کې يو داوطلب زده‌کوونکی نوموړی مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره و ارزوي:

1. که چيرې a_n د يوه حسابي ترادف وسطي حد وي دهغه مخکنی او وروستی حد په څه شي سره ښودلای شو؟
2. د يوه حسابي ترادف وسطي حد د يوه حسابي ترادف د دوو پرله پسې حدونو له مجموع سره مساوي کيدا شي؟
3. که د يوه ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1} , a_n او a_{n+1} ولرو د نوموړي حسابي ترادف وسطي حد د کوم فورمول په واسطه افاده کېږي.

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته تشرېح او توضېح کړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی که چيرې په حسابي ترادف کې يوازې د n -ام او m -ام حدونه معلوم وي؛ نو گډ توپير يې داسې په لاس راوړو:

$$a_n = a + (n-1) \cdot d \quad \dots \text{ I}$$

$$a_m = a + (m-1) \cdot d \quad \dots \text{ II}$$

له I معادلې څخه II معادله تفریقوو:

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= a + (n-1) \cdot d - \{a + (m-1) \cdot d\} \\ &= a + (n-1) \cdot d - a - (m-1) \cdot d \\ &= a + nd - d - a - md + d \\ &= nd - md = (n-m)d \end{aligned}$$

$$a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 126 مخ دريمې پوښتنې حل.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي وسط په لاس راوړئ.

حل د حسابي وسط له عمومي فورمول څخه په کار اخېستنې سره لرو چې:

$$a_n \text{ وسطي حد} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

$$A = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 9 \cdot \sqrt{2}$$

څلورم څپرکی: ترادفونه

هارمونيکي ترادف

د درسي کتاب (124) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د هارمونيکي ترادف او هارمونيکي حسابي ترادف په مفهومونو پوه شي. • هارمونيکي ترادفونه او د هغه عکس تشخیص کړای شي. • د يوه حسابي ترادف لپاره هارمونيکي ترادف په پيدا کولو سره خوښي ښکاره کوي.
2- د زده کړې لارې:	انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب ...
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد ...
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرزوي: • څوک د 5 عدد معکوس عدد پرتخته لیکي؟ • څوک ویلای شي چې $\frac{1}{25}$ د کوم عدد معکوس دی؟ • که چیرې a هر حقيقي عدد وي، څوک ویلای شي د هغه معکوس څه ډول لیکلای شو؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو مرسته وکړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی یو حسابي ترادف پرتخته ولیکي او یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغواړي چې ددې ترادف د هر حد معکوس په پرله پسې ډول چې ترادف جوړ کړي، ولیکي. که چیرې زده کوونکي یې ولیکي ښه به وي له هغه پرته تاسو یې په بشپړ ډول ورته ولیکئ او د هغه له مخې د هارمونيکي ترادف تعریف وکړئ. همدارنگه ورته ووايست که چیرې a_n یو حسابي ترادف وي او د هغه معکوس $\frac{1}{a_n}$ هم یو ترادف وي، نو نوموړی ترادف یو هارمونيکي ترادف بلل کېږي. همدارنگه درې داوطلب زده کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړي چې یو یې لومړی مثال بل یې دویم مثال او دریم یې، دریم مثال پرتختې حل کړي، نور زده کوونکي دې د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې کار وکړي او خپل حلونه دې له تختې سره پرتله کړي، د ستونزې په صورت کې مرسته وکړئ. زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست د هارمونيکي حسابي وسط فورمول د درې پرله پسې حدونو؛ لکه a_{n-1}, a_n, a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \dots$ وي پیداکړي، زده کوونکي په خپلو ډلو کې بحث ورباندې کوي او فعالیت سرته رسوي.	

د فعالیت په پای کې د دریو ډلو استازي خپل کار نورو ته توضیح او معلومات ورکوي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، په پای کې ښوونکي د مخکینیو معلوماتو له مخې عمومي فورمول؛ یعنې $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$ ورته توضیح او تشریح کوي او نوموړي افاده په لاس راوړي اړوند مثال دې پر تخته حل کوي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکي د لوست د لاسه تحکیم او پوهې لپاره د هارمونيکي ترادف او هارمونيکي حسابي وسط په اړه لاندې پوښتنې زده کوونکو ته ورکړي چې په خپلو کتابچو کې حل یې کړي:

- د ... 4, 7, 10, 13, 16, حسابي ترادف، هارمونيکي ترادف وليکئ.
- د 4 او 10 عددونو هارمونيکي حسابي وسط پیدا کړئ د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

د کار څارنه وکړئ په پای کې دې داوطلب زده کوونکي نوموړي پوښتنې پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکي ډاډمن شي ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې زده کوونکي وازموي:

1. څوک هارمونيکي ترادف تعریفوي؟
2. که چیرې په یوه هارمونيکي ترادف کې $a_1 = \frac{1}{2}$ او $d = -2$ وي، هارمونيکي ترادف یې پیدا کړئ.
3. ایا هر حسابي ترادف هارمونيکي ترادف لري؟

کوښښ وکړئ چې څو اوبونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ او د زده کړې په هکله ځان ډاډمن کړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکي ښايي چې زده کوونکي ددې پوښتنې په برخه کې ستونزې ولري، ایا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف، یو هارمونيکي ترادف کیدای شي $n -$ ام حد یې وليکئ.

طبیعي طاق عددونه: $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n+1$

په پورته ترادف کې $d = 2, a = 1$ دی؛ نو معکوس یې عبارت دی له: $\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$ په دې صورت کې پورتنی ترادف یو هارمونيکي ترادف دی $n -$ ام حد یې له $\frac{1}{2n+1}$ څخه عبارت دی چې $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

قیمتونه اخیستلای شي او پورتنی ردیف په لاس راتلای شي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 126 مخ د پنځمې پوښتنې حل.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف دی؟

a) $2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \dots$

b) $3, 6, 9, 12, \dots$

حل که چېرې د دواړو ترادفونو د هر دوو پرله پسې حدونو گډ توپیر ثابت عدد وي؛ نو نوموړي ترادفونه حسابي ترادف کیدای شي.

د a جزء حل

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{9}{4} - \frac{2}{1} = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} \\ d &= \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{10-9}{4} = \frac{1}{4} \\ d &= \frac{11}{4} - \frac{5}{2} = \frac{11-10}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\}$$

د a جزء ترادف حسابي ترادف دی او گډ توپیر یې $\frac{1}{4}$ دی.

د b جزء حل

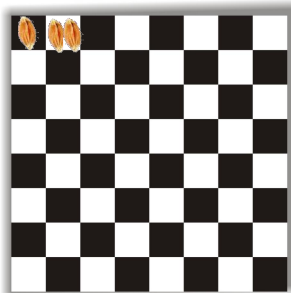
$$d = 6 - 3 = 3$$

$$d = 9 - 6 = 3$$

$$d = 12 - 9 = 3$$

د b جزء ترادف هم حسابي ترادف دی او گډ توپیر یې

عبارت له 3 څخه دی.



څلورم څپرکی: ترادفونه

هندسي ترادف (Geometric sequences)

د درسي کتاب (127) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - د هندسي ترادف په مفهوم پوه شي. - د هندسي ترادف په اړه پوښتنې حل او له حسابي ترادف سره يې توپير وکړای شي. - د پورته پوهې او مهارت په پيدا کولو سره په ځان باور پيدا کوي.	- پوهنيزه - مهارتي - ذهني
2- د زده کړې لارې: ډلېيز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...	
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضيح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب وړودي شکل ته راوگرزوي او د شطرنج تخته او دهغه خانې (کورونه) وروپېژني. بيا داسې ورته ووايست او وپوښتي: - که چيرې د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم په دويمه خانه کې دوه دانې غنم په همدې ترتيب په هره وروستۍ خانه کې د مخکينۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي ووايست چې: 1. په دريمه خانه کې څو دانې غنم کېږي؟ 2. په شپږمه خانه کې څو دانې غنم کېږي؟ 3. په اتمه خانه کې څو دانې غنم کېږي؟ 4. په 64 خانه کې څو دانې غنم کېږي؟ ښايي چې زده‌کوونکي د درې لومړيو پوښتنو ځوابونه ووايي؛ خو د 64 خانې د غنمو شمېر پيدا کول ستونزمن کار دی.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د کتاب 127 مخ فعاليت په خپلو ډلو کې له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي، د فعاليت په پای کې د دريو ډلو استازي خپل فعاليت نورو ته توضيح او تشرېح کوي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. په پای کې تاسو موضوع داسې تشرېح کړئ: که چيرې a_1 د هندسي ترادف لومړی حد او q يو ثابت عدد وي په عمومي ډول يو هندسي ترادف داسې ليکل کېږي: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, \dots, a_1q^{n-1}$	

چې دلته a_1 لومړۍ حد او q گډنسبت دی، یو هندسي ترادف د گډنسبت او لومړي حد په درلودلو سره پېژندل کېږي او داسې تعریف کېږي:

هغه ترادف چې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت یو ثابت عدد (q) وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي. ورته وایاست د حسابي ترادف په شان، په هندسي ترادف کې هم متزاید او متناقص ترادف شته چې د (q) د لاندې په خصوصیت سره پېژندل کېږي:

- که چېرې $q > 1$ وي، ترادف متزاید دی، د یوه مثال په واسطه یې توضیح کړی.
- که چېرې $q < 1$ وي، ترادف متناقص دی، په یوه مثال کې وښایاست.
- که چېرې $q = 1$ وي، ثابت ترادف په لاس راځي.

بیا یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغوړی چې د کتاب د 128 مخ لومړی مثال پر تخته حل کړي، نور زده‌کونکي دې د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي او د تختې له حل سره دې پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم او پوهې لپاره د کتاب د 128 مخ دا فعالیت ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي.

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1 = 2$ او $q = 3$ دي a_2, a_3 او a_4 حدونه پیدا کړي.

حل:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 q = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_3 = a_1 q^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$a_4 = a_1 q^3 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

په پای کې دې یو داوطلب زده‌کونکی پورتنی پوښتنه پر تخته حل کړي او نور زده‌کونکي دې خپل تېروتنې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي د کتاب د 128 مخ دویم مثال زده‌کونکو ته ورکړي چې په خپلو کتابچو کې حل او د q ثابت عدد له مخې متزاید ترادف او متناقص ترادف وښيي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د ریډفونو بل ډول له هندسي ریډفونو څخه عبارت دی د $a_1, a_2, \dots, a_n$ یو ریډف د هندسي ریډف (*Geometric sequences*) یا هندسي تصاعد (*Geometric progression*) په نامه یادېږي چې هر حد یې د مخکیني حد له ضربولو څخه په یو مشخص او ثابت عدد کې حاصل شي او n -ام حد یې عبارت دی له aq^{n-1} څخه. تاسو پوهېږئ چې په عمومي ډول یو هندسي ریډف د لاندې شکل لرونکی دی:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, \dots, aq^{n-1}$$

q مشترک نسبت بلل کېږي.

همدارنگه که چېرې څوک وپوښتي که a, b او c یو هندسي ریډف جوړ کړي، د هغو ترمنځ به څه ډول رابطه شتوالی

ولري. (q د هغو مشترک نسبت دی)

$$b = aq \quad c = bq = (aq) \cdot q = aq^2$$

$$b^2 = a^2 \cdot q^2 \Rightarrow b^2 = a \cdot a \cdot q^2 \Rightarrow b^2 = a \cdot c, \quad aq^2 = c \Rightarrow b^2 = ac$$

یعنې b د a او c وسطي حد دی.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 132 مخ د لومړۍ او دویمې پوښتنې حل.

1. د هندسي ترادف 5 حدونه داسې ولیکئ چې لومړۍ حد یې 5 او اخیري حد یې $\frac{5}{16}$ وي.

حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ n = 5 \\ a_n = \frac{5}{16} \\ q = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{5}{16} = 5 \cdot q^{5-1} \\ \frac{5}{16} = 5 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{5}{16 \cdot 5} = \frac{5}{80} \\ \sqrt[4]{q^4} = \sqrt[4]{\frac{5}{80}} \Rightarrow q \approx \frac{1.5}{3} \approx \frac{1}{2} \end{array}$$

$$5, 5\left(\frac{1}{2}\right), 5\left(\frac{1}{2}\right)^2, 5\left(\frac{1}{2}\right)^3, 5\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}$$

ترادف عبارت دی له:

2. له لاندې ترادفونو څخه کوم یو یې هندسي ترادف دی؟

$$a) \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$$

$$b) -4, -2, 0, 2, 4, \dots$$

حل a) که چیرې د دواړو ترادفونو د هر دوو پرله پسې حدونو گډ نسبت ثابت عدد وي؛ نو نوښورې ترادفونه هندسي ترادفونه کېدای شي.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right) = -1$$

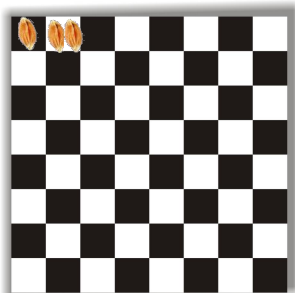
$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) = -1 \Rightarrow q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right) = -1$$

د a جزء یو هندسي ترادف دی.

حل b)

$$q = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{0}{-2} = 0, \quad q = \frac{4}{2} = 2$$

له گډ نسبت څخه موږ لرو چې د b جزء ترادف، هندسي ترادف نه دی.



څلورم څپرکی: ترادفونه

په هندسي ترادف کې د n - ام حد پيدا کول او د هندسي ترادف وسطي حد

د درسي کتاب (130) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په هندسي ترادف کې د n - ام حد او وسطي حد په مفهومونو پوه شي. • په هندسي ترادف کې د n - ام حد او وسطي حد تشخیص او پوښتنې حل کړای شي. • د پورتنیو مفهومونو په پوهېدو سره خوښ او په ځان باور پيدا کوي.
2- د زده کړې لارې:	ډلېيز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد ...
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام لاندې پوښتنو ته راواړوي: • په يوه هندسي ترادف کې a څه شی ښيي؟ • په يوه هندسي ترادف کې q څه شی ښيي؟ • په يوه هندسي ترادف کې a_n څه شی ښيي؟ کونښن وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه واورئ له هغه پرته تاسو هريو وروپېژنئ.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ او د هندسي ترادف لاندې حدونه پر تختې وليکئ: $a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, \dots$ ورته ووايست په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته د پورتنی هندسي ترادف n - ام حد پيدا کړئ، همدارنگه د دوو پرله پسې حدونو له وېشلو څخه د (q) گډ نسبت په لاس راوړئ، بيا د دوو ډلو استازي راځي او خپل سرته رسولی فعاليت نور وروته تشریح کوي که چيرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي مرسته او لارښوونه وکړئ. په پای کې تاسو د عمومي نظریه اچولو سره n - ام حد يعنې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ د پيدا کولو طريقه توضیح او معلومات ورکړئ، ترڅو زده کوونکي د هغه په مفهوم لاس ته راشي. بيا دوه داوطلب زده کوونکي په وار سره راوغواړئ چې يو يې لومړی مثال او بل يې دويم مثال پر تخته حل او تشریح کړي نور زده کوونکي د کتاب له لېدلو پرته په خپلو کتابچو کې حل او خپل حلونه دې له تختې سره پرتله کړي. په همدې ډول زده کوونکو ته ووايست که چيرې M د يو تناسب طرفین a او b وسطین وي، په څه ډول کولای شو د M قيمت د a او b حقيقي مثبتو عددونو په واسطه پيدا کړو په خپلو ډلو کې دې کار وکړي، چې د M قيمت د a او b له جنسه پيدا کړي. زده کوونکي په خپلو ډلو کې کار کوي او بيا د درېو ډلو استازي خپل فعاليت نورو ته تشریح کوي د ستونزو په صورت کې دې مرسته او لارښوونه وکړي.	

په پای کې تاسو د تناسب په جوړلو سره د $M = \sqrt{a \cdot b}$ رابطه تشریح او معلومات ورکړئ همدارنگه ورته وویاست که چیرې د هندسي ترادف درې پرله پسې حدونه؛ لکه: a_n, a_{n+1} او a_{n-1} ولرو په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \dots \text{I}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \dots \text{II}$$

همدارنگه:

د I او II له پرتلې لیکو:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = (a_{n+1})(a_{n-1}) \Rightarrow a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$$

پورتنی دواړه رابطې د یو هندسي ترادف د وسطي حد د پیدا کولو طریقه ده. په پای کې یو داوطلب زده‌کونکی راوغواړي چې د کتاب د 131 مخ دریم مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کونکي دې هم دا مثال د کتاب له لېدلو پرته حل، او حلونه دې له تختې سره پرتله کړي، تېروتنې دې وپوښتي او اصلاح دې کړي.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم لپاره د کتاب 131 مخ څلورم مثال پر تخته ولیکي، زده‌کونکو ته وویاست چې د کتاب له لېدو پرته یې په انفرادي توګه په خپلو کتابچو کې حل کړي، بیا یو داوطلب زده‌کونکی راوغواړي چې پر تخته یې حل کړي که چیرې تېروتنه کوي، مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی ډاډمن شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ د کتاب 131 مخ وروستی فعالیت دې له مثال سره ورکړي چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، د کار څارنه وکړي، که چیرې کوم زده‌کونکی پوښتنه کوي، ښوونکی دې مرسته وکړي. په پای کې دې دوه زده‌کونکي په وارسره راوغوښتل شي چې پر تخته یې حل کړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د درسي کتاب د 131 مخ فعالیت په لاندې توګه سرته ورسوي:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, \dots$$

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a} = q^{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}} = q$$

په همدې ډول که چیرې درې پرله پسې حدونه a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو؛ نو q په لاندې ډول هم په لاس راځي:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

په دې ځای a_{n-1} د a_n مخکینۍ حد او همدارنگه a_n د a_{n+1} مخکینۍ حد دی.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 132 مخ د دریمې، څلورمې او پنځمې پوښتنې حل.

3- د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \dots$ هندسي ترادف دولسم حد پیدا کړئ.

حل

$$a = 5$$

$$n = 12$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{5}{2048}$$

4- د $\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

حل

$$M = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5- د 27، $\frac{1}{3}$ ، ؟، ؟، ؟، ؟ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{3} \\ n = 5 \\ a_5 = 27 \\ q = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 q^4 \\ 27 = \frac{1}{3} \cdot q^4 \\ 81 = q^4 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{q^4} \Rightarrow q = 3 \end{array}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

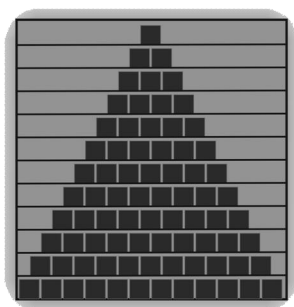
$$a_2 = a_1 \cdot q = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

$$a_4 = a_1 q^3 = \frac{1}{3} (3^3) = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{1}{3} \cdot 3^4 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27$$

$$\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots$$



څلورم څپرکی: ترادفونه

د ترادفونو قسمي مجموعه

د درسي کتاب (133) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د ترادفونو د قسمي مجموعې په مفهوم پوه شي. • د ترادفونو د قسمي مجموعې پوښتنې حل کړای شي. • زده کوونکي د پورته پوهې اخیستلو او مهارت په سرته رسولو سره خوښی ښکاره کوي او په ځان باور پیدا کوي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزې - مهارتي - ذهنيتي
ډله ییز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...	2- د زده کړې لارې:
د اړتیا وړ مواد ...	3- مرستندویه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي موضوع ته راوگرزوي او وپوښتي: • یوه زده کوونکي ته ووايست چې له پورته څخه کښته خواته د الماری د لسم کتار د قوطیو شمېر څو دي؟ • زده کوونکي هغه شمېرې، د قوطیو له شمېرلو وروسته ځواب وايي. • په همدې ډول زده کوونکو ته ووايست تاسو هر یو په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ. زده کوونکي شمېرې، هر یو په وار سره خپل ځواب وايي، وگورئ چې ځوابونه یې سم دي او که نه؟ په پای کې سم ځواب پر تخته ولیکئ او بیا د لوست بهیر پیل کړئ.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي او ورته ووايست چې د کتاب د 133 مخ فعالیت له خبرو او بحث وروسته په خپلو ډلو کې سرته ورسوي، بیا د هرې ډلې استازی راځي د خپلې ډلې کار نورو ته توضیح کوي، ښايي چې د لومړي او دویمې پوښتنو ځوابونه د هغوی لپاره اسانه وي، خو د n - ام حد د جمعې حاصل پیدا کول به ورته ستونزمن کار وي، تاسو ورته ووايست چې حقیقتاً د یو ترادف د زیاتو یادې نهایت د حدونو د جمعې حاصل پیدا کول ستونزمن کار دی؛ خو په عمومي ډول د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ترادف د n لومړیو حدونو د جمعې حاصل داسې لیکو: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$	

چې په پورته افاده کې $\sum$ سېگما د یوې مجموعې په توګه د محاسبې د اسانتیا او لنډولو لپاره په کار وړل شوې ده او i د هغه د انډکس په نامه یادېږي چې i له یو څخه تر n پورې قیمتونه اخیستلای شي، یوازې i د انډکس په توګه نه استعمالېږي بلکې نور توري هم په کار وړي، خو i, n, k ډېر د پام وړ او معمول دي؛ لکه: $\sum_{j=1}^n 2j$ او $\sum_{i=1}^n 2i, \sum_{k=1}^n 2k$ هر یو یې له 1 څخه تر n پورې قیمت اخلي او جمع کېږي، لکه:

$$\sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

همدارنګه د لومړۍ مثال $\sum_{i=1}^n \frac{1}{10}$ په غزیدلي شکل د جمعې حاصل پیدا او حل کړی. چې د موضوع پر مفهوم ښه پوه شي، د مثال له حل وروسته د دویم مثال دواړه اجزاوې پر تخته ولیکئ او دوه داوطلب زده‌کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې یو یې د a جزء او بل یې د b جزء پر تخته حل کړي. نور زده‌کوونکي دې همدا مثال د کتاب له لېدلو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ په پای کې زده‌کوونکي خپل حل د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې سموي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لایښه تحکیم او پوهېدو لپاره د کتاب 134 مخ دویم او څلورم مثالونه زده‌کوونکو ته ورکړئ چې د کتاب له لېدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي، بیا دوه داوطلب زده‌کوونکي تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل او توضیح یې کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ډاډمن شي چې ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړې دی او که نه؟ نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

- په عمومي ډول د ترادف n لومړیو حدونو د جمعې د حاصل په ډول لیکلای شو: $\sum_{i=1}^n ai$

- په $\sum_{i=1}^n ai$ کې (i) د څه په نامه یادېږي؟

- په پورته افاده کې i کوم قیمتونه اخیستلای شي؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د پوښتنو په صورت کې زده‌کوونکو ته ویلای شي، کولای شو د n متحول په تعویض سره د L له جنس چې وروستی حد دی، د جفتو عددونو د ترادفونو قسمي مجموعه په لاس راوړو، د جفت عددونو لپاره $a=2$ او $d=2$ دي، اوس د L وروستی حد فارمول په پام کې نیولو سره د n قیمت په لاس راوړو:

$$L = a + (n-1) \cdot d \Rightarrow 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2$$

$$L = 2n \Rightarrow n = \frac{L}{2}$$

اوس $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ په عمومي فورمول کې د n پر ځای $\frac{L}{2}$ لیکو:

$$S = \frac{\frac{L}{2}}{2} \left[2a + \left(\frac{L}{2} - 1 \right) \cdot d \right] \Rightarrow \frac{\frac{L}{2}}{2} \left[2a + \left(\frac{L-2}{2} \right) 2 \right]$$

$$S = \frac{L}{4} (2a + l - 2) = \frac{2aL + L^2 - 2L}{4}$$

$$S = \frac{2L(a-1) + L^2}{4} = \frac{2l(2-1) + L^2}{4} = \frac{2l + l^2}{4} = \frac{l(l+2)}{4}$$

د دوو قوسونو په شکل داسې لیکلای شو:

$$S = \frac{(L+a)(l-a+2)}{4}$$

اوس غواړو چې د $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ طاق عددونو لپاره هم د L له جنس فورمول لاس ته راوړو، چې $a=1$ او $d=2$ کېږي، لرو چې:

$$L = a + (n-1)d$$

$$L = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1 \Rightarrow L + 1 = 2n \Rightarrow \boxed{n = \frac{L+1}{2}}$$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{1}{2} \cdot \frac{L+1}{2} \left[2a + \left(\frac{L+1}{2} - 1 \right) \cdot 2 \right]$$

$$S = \frac{L+1}{4} \left[2a + \frac{L+1-2}{2} \cdot 2 \right] = \frac{L+1}{4} (2a + L - 1) = \frac{(L+a)(2 \cdot a + l - 1)}{4} = \frac{(L+a)(2 \cdot 1 - L - 1)}{4}$$

$$S = \frac{(L+a)(l+1)}{4} = \frac{(L+a)(L+a-1+1)}{4} = \frac{(l+a)(l-1+2)}{4}$$

$$S = \frac{(l+a)(l-a+2)}{4}$$

په دریم حالت کې غواړو له وروستي حد څخه په کار اخیستنې د مسلسلو عددونو لپاره فورمول په لاس راوړو؛ یعنې د $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ په پام کې نیسو، مونږ لرو چې: $a=1$ او $d=1$ دی.

$$L = a + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 1 = 1 + n - 1$$

$$L = n$$

اوس په $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ په فارمول کې د n پر ځای L ږدو:

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{l}{2}[2a + (L-1) \cdot 1]$$

$$S = \frac{l}{2}(2a + L - 1) = \frac{l}{2}(2 \cdot 1 + L - 1) = \frac{L}{2}(l+1)$$

$$S = \frac{L(L+1)}{2} \quad \text{یا} \quad S = \frac{(L+1)(L-1+1)}{2}$$

$$S = \frac{(L+1)(L-a+1)}{2}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 136 مخ د پوښتنو حل.

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$$a) \sum_{i=1}^6 \sqrt{i} \quad b) 3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1} \quad c) \sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k)$$

حل

$$a) \sum_{i=1}^6 \sqrt{i} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6} = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$$= 3 + 1.4 + 1.73 + 2.23 + 2.44 = 10.81$$

$$b) 3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1} = 3 \left(\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{6+1} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{420 + 280 + 210 + 168 + 140 + 120}{840} \right) = 3 \left(\frac{1338}{840} \right) = \frac{4041}{840} = 4.77$$

$$c) \sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k) = (4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1) + (4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3) = (4 - 3) + (16 - 6) + (36 - 9)$$

$$= 1 + 10 + 27 = 38$$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$$

$$b) 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$$

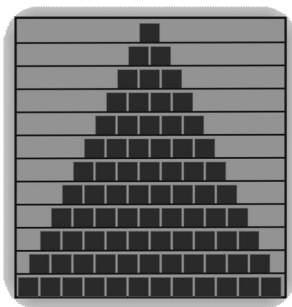
$$c) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

حل

$$a) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20} = \sum_{k=2}^{20} \frac{k-1}{k}$$

$$b) 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$c) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$



څلورم څپرکی: ترادفونه

د ترادفونو قسمي مجموعه

د درسي کتاب (133) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهاري - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: - د يوه ترادف د قسمتي حدونو د جمعې حاصل په مفهوم پوه شي. - د يوه ترادف د قسمتي حدونو د جمعې حاصل پوښتنې حل کړای شي. - د ترادفونو قسمي مجموعې او ټولو حدونو مجموعې توپير وکړای شي. - د پورته دواړو مجموع له توپير پيدا کولو سره په ځان باور پيدا کوي.	
2- د زده کړې لارې: انفرادي، تشریحي، پوښتنه او ځواب ...	
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام بیا یو ځلې وړودي موضوع ته راوگرځوي او وپوښتي: - له یوه زده کوونکي څخه پوښتنه وکړئ د اتم کتار د قوطیو شمېر څو دي؟ - ایا کولای شئ د قوطیو د ټولو کتارونو له مخې دهغه ترادف ولیکئ؟ ښایي چې زده کوونکي د تېر لوست په پوهېدو ځوابونه ووايي او که ستونزه ولري، تاسو مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو پام موضوع ته راوگرځوي او وواييست، تراوسه مو یوازې د یوه ترادف n حدونو د جمعې حاصل ترلاسه کړ، که وغواړو د $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، ایا د حدونو د جمعې حاصل د افادې په ډول ورته لیکلای شو؟ که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي، له هغه پرته یې تاسو یې داسې ولیکئ: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ په دې صورت کې i ټول طبیعي عددونه اخیستلای شي چې $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ د بې نهایت سلسلې یا (Series) په نامه یادېږي. کولای شو په ریاضي کې د عددونو د بې نهایت شمېر جمع کول د ریاضي د ځینو قاعدو په کارولو سره د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه پیدا کړو؛ لکه: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$	

چې د نوموړي سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، پیدا کړو که هغه په S_n سره ونښو داسې لیکو:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

بیا یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغوړئ چې د کتاب 135 مخ مثال پر تختې حل کړي، د لوست په پای کې د سلسلو درې واړه خاصیتونه چې د کتاب 136 مخ کې دي، درې زده‌کونکي دې په وار سره تشریح کړي، د ستونزو په صورت مرسته او لارښوونه وکړئ.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاسه تحکیم او پوهېدو لپاره په لاندې ډول پوښتنې زده‌کونکوی ته ورکړې چې په خپلو کتابچو کې کار ورباندې وکړي.

د $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ سلسلې S_5 او S_{10} محاسبه کړي.

زده‌کونکي په خپلو کتابچو کې کار کوي، بیا دې یو داوطلب زده‌کونکی نوموړی پوښتنه پر تخته حل کړي، که چیرې کوم زده‌کونکي تېروتنه کړي وي اصلاح دې کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ډاډمن شي ایا زده‌کونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ نو د لاندې پوښتنو په کولو سره دې وازموي:

• $\sum_{i=1}^n a_i$ ، i د څه په نامه او کوم قیمتونه اخیستلای شي؟

• $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ، k د څه په نامه او کوم قیمتونه اخیستلای شي؟

کونښن وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی که چیرې په یوه ترادف کې وروستی حد وپېژنو، د جفتو او طاقو عددونو مجموعه د وروستی حد له جنسه هم په لاس راوړلای شو، L وروستی حد، d گډ توپیر دی، غواړو چې د ترادف د مجموعې فورمول د L له جنس پیدا کړو، اوس د n قیمت پیدا کوو:

$$L = a + (n-1) \cdot d$$

$$L - a = nd - d \Rightarrow L - a + d = nd \Rightarrow n = \frac{L - a + d}{d}$$

$$n = \frac{L - 2 + 2}{2} \Rightarrow n = \frac{L}{2}$$

څرنگه چې په جفتو عددونو کې $a = 2$ او $d = 2$ کېږي؛ نو لرو:

اوس د $S = n(n+1)$ په فورمول کې د n په ځای $\frac{1}{2}L$ بدو: $S = \frac{L^2 - 2L}{4}$ $\Rightarrow S = \frac{1}{2}L(\frac{1}{2}L + 1) = \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{2}L$

پوهېږو چې $d = 2$ ده: $S = \frac{L^2 + 2L}{2 \cdot 2} \Rightarrow S = \frac{l^2 + 2l}{2 \cdot d}$

همدارنگه په طاقو عددونو د $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کې $a = 1$ او $d = 2$ ده موږ لرو چې:

$$L = a + (n-1) \cdot d \Rightarrow L = 1 + 2n - 2 \quad \text{يا} \quad L = 2n - 1 \Rightarrow L + 1 = 2n \Rightarrow \boxed{n = \frac{L+1}{2}}$$

اوس د $S = n^2$ په فورمول کې د n پر ځای $\frac{L+1}{2}$ لیکو: $S = (\frac{L+1}{2})^2$ يا $S = (\frac{L+a}{2})^2$

پوهېږو چې $d = 2$ ده؛ نو: $S = (\frac{L+a}{d})^d$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 136 مخ د دریمې پوښتنې حل.

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$$a) \sum_{i=4}^n i(i+2)$$

$$b) \sum_{i=1}^n (3i-2)$$

$$c) \sum_{i=1}^n (2+5i)$$

حل

$$\begin{aligned} a) \sum_{i=4}^n i(i+2) &= 4(4+2) + 5(5+2) + 6(6+2) + \dots + n(n+2) = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \dots + n(n+2) \\ &= 24 + 35 + 48 + \dots + n(n+2) \end{aligned}$$

$$b) \sum_{i=1}^n (3i-2) = (3 \cdot 1 - 2) + (3 \cdot 2 - 2) + \dots + (3n - 2) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$$

$$c) \sum_{i=1}^n (2+5i) = (2+5 \cdot 1) + (2+5 \cdot 2) + (2+5 \cdot 3) + \dots + (2+5n) = 7 + 12 + 17 + \dots + (2+5n)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \\ d = \\ a_n = \end{array} \right\} ?$$

$$1+2+3+4+\dots+n=$$

$$\frac{n}{2} \cdot [2a + (n-1) \cdot d]$$

څلورم څپرکی: ترادفونه

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه

د درسي کتاب (137) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهني د زده کونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د حسابي ترادف د حدونو د مجموعې يا حسابي سلسلې په مفهوم پوه شي. • د حسابي سلسلې اړوند پوښتنې حل کړای شي. • د حسابي سلسلې د مفهوم په پوهېدو او د هغو د پوښتنو په حلولو سره خوښي ښکاره کوي.	2- د زده کړې لارې: دلېيز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد...	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي او پوښتي: • په کتاب کې د $a = ?$, $d = ?$, $a_n = ?$ هر يو څه شی افاده کوي؟ • د $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ افاده کومه مجموعه ښيي؟ • که چيرې $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ يو ترادف وي، ايا $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ د پورته ترادف قسمي مجموع کيدای شي؟ کونښن وکړی چې ځوابونه له زده کونکو څخه په لاس راوړی له هغه پرته تاسو يې تشریح کړی.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): زده کونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب (137) مخ د حدونو د جمعې لپاره عمومي فورمول په خپلو ډلو کې له بحث او خبرو وروسته ثبوت کړي او بيا دې د يوې ډلې داوطلب استازی هغه پر تخته ثبوت کړي، که چيرې نوموړی زده کونکی تېروتنه کوي د بلې ډلې په واسطه دې اصلاح شي. له دلېيز فعاليت وروسته تاسو د فارمول له مخې د حسابي سلسلې تعريف وکړی، چې زده کونکي د حسابي سلسلې په مفهوم ښه پوه شي. بيا دوه داوطلب زده کونکي په وار سره راوغواړی چې يو يې لومړی مثال او بل يې دويم مثال پر تخته حل کړي او نور زده کونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، پاملرنه وکړی چې زده کونکي د کتاب له حل څخه گټه وانه خلي، په پای کې دې زده کونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی.	

په همدې ډول د کتاب د 139 مخ لومړۍ فعالیت زده‌کوونکو ته ورکړې چې په خپلو کتابچو کې کار ورباندې وکړي چې د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې د حاصل؛ یعنې د $S = \frac{n}{2}(n+1)$ فارمول په لاس راوړي، که زده‌کوونکي ستونزې ولري تاسو یې داسې ثبوت کړئ، په طبیعي پرله پسې عددونو کې $a = 1$ او $d = 1$ په پام کې ونیسئ د $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ په فورمول کې محاسبه سرته ورسوئ.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره د کتاب 139 مخ کې د طبیعي جفت پرله پسې عددونو د جمعې په اړوند مثال او همدارنگه دریم مثال زده‌کوونکو ته ورکړې چې په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي، بیا دې یو داوطلب زده‌کوونکی هغه پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړې دی او که نه؟ نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په واسطه وازمويي:

- څوک کولای شي د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د جمعې د حاصل فورمول پر تخته ولیکي؟
- په لاندې افادو کې کومه یوه حسابي سلسله او کومه یوه یې حسابي ترادف ده:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د حسابي ردیف د n لومړیو حدونو د قسمي مجموعې لپاره لاندې دوه فورمولونه پیدا شول:

$$S_n = \frac{n(a + a_n)}{2} \dots (I)$$

$$S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} \dots (II)$$

له I فورمول څخه هغه وخت کار اخېستل کېږي چې لومړۍ حد، n -ام حد او د حدونو شمېر یې معلوم وي.

اوله (II) فورمول څخه هغه وخت کار اخېستل کېږي چې لومړۍ حد، گډتوپیر او د حدونو شمېر معلوم وي؛ لکه لاندې مثالونه:

(1) د $2, 5, 8, \dots$ په حسابي ردیف کې د 8 حدونو مجموعه پیدا کړئ:

په نوموړي ردیف کې $n = 8$ ، $d = 5 - 2 = 3$ ، $a = 2$ نو د (2) فورمول په کار اخېستنې سره لیکو:

$$S_8 = \frac{8[(2 \cdot 2 + (8-1) \cdot 3)]}{2} = \frac{8[4 + (7) \cdot 3]}{2} = \frac{8 \cdot (4 + 21)}{2} = \frac{8 \cdot 25}{2}$$

$$S_8 = \frac{200}{2} = 100$$

(2) د $21, 17, 13, 9, 5$ حسابي ردیف مجموع پیدا کړئ.

په لومړي ردیف کې $a = 21, a_n = 5, n = 5$ ؛ نو د (1) فورمول په کار اخېستنې سره لیکو:

$$S_5 = \frac{5(21+5)}{2} = \frac{5(26)}{2} = \frac{130}{2} \Rightarrow S_5 = 65$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 140 مخ د پوښتنو حل.

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n - ام حدونه پیدا او همدارنگه د نوموړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$\left. \begin{array}{l} i) \quad 2, 0, -2, -4, \dots \\ ii) \quad 1, 5, 9, 13, \dots \\ iii) \quad -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ n = 10 \\ d = -2 \\ a_{10} = ? \end{array}$$

(i) حل

$$a_{10} = a_1 + (n-1)d = 2 + (10-1)(-2) = 2 + 9(-2) = 2 - 18 = -16$$

$$S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2 \cdot 2 + (10-1)(-2)]$$

$$S_{10} = 5[4 + 9(-2)] = 5(4 - 18) = 5(-14) = -70$$

(ii) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ d = 4 \\ n = 10 \\ a_{10} = ? \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{10} = 1 + (10-1)4 = 1 + 9 \cdot 4 = (1 + 36) = 37 \\ a_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3 \\ S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2 \cdot 1 + (10-1)4] = 5[2 + 9 \cdot (4)] = 5(2 + 36) \\ S_{10} = 5 \cdot 38 = 190 \end{array}$$

(iii) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = -2 \\ d = 1 \\ n = 10 \\ a_{10} = ? \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{10} = a + (n-1)d = -2 + (10-1) \cdot 1 = -2 + 9 \cdot 1 = -2 + 9 = 7 \\ a_n = a + (n-1)d = -2 + (n-1) \cdot 1 = -2 + n - 1 = n - 3 \\ S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2(-2) + (10-1) \cdot 1] = 5[-4 + 9] = 5 \cdot 5 = 25 \end{array}$$

2. که یو ترادف د $2, 5, 8, 11, \dots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$$a) \quad S_8 = ?$$

$$b) \quad S_{10} = ?$$

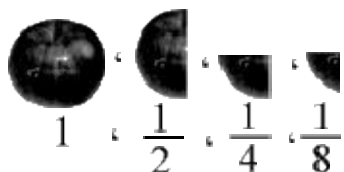
(a) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 3 \\ n = 8 \\ S_8 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_8 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{8}{2}[2 \cdot 2 + (8-1) \cdot 3] = 4(4 + 7 \cdot 3) = 4(4 + 21) \\ S_8 = 4 \cdot 25 = 100 \end{array}$$

(b) حل

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 3 \\ n = 10 \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_{10} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 3] = 5(4 + 9 \cdot 3) = 5(4 + 27) \\ S_{10} = 5 \cdot 31 = 155 \end{array}$$

څلورم څپرکی: ترادفونه



د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

د درسي کتاب (141) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د هندسي ترادف د جمعې حاصل یا هندسي سلسلې په مفهوم پوه شي. • د هندسي سلسلې اړوند پوښتنې حل کړای شي. • د هندسي سلسلې په پوهېدو او د هغو د پوښتنو په حلولو سره خوښی ښکاره او په ځان باور پیدا کړي.
2- د زده کړې لارې:	ډلېز، انفرادي کار، تشریحي، پوښتنه او ځواب ...
3- مرستندويه مواد:	د اړتیا وړ مواد ...
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرزوي او وپوښتي: • څوک ویلای شي دوه نیمایي ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) څو کېږي؟ • څوک ویلای شي $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ او $\frac{1}{4}$ څو کېږي؟ • څوک ویلای شي $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ او $\frac{1}{16}$ څو کېږي؟ • ایا ویلای شئ چې په وروستی افاده کې هر یو حد له بل حد څخه څه ډول لاس ته راځي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته وایاست په هره پوښتنه کې ټول حدونه سره جمع کوو، خو په وروستی افاده کې هر حد په $\frac{1}{2}$ کې ضرب او وروستی حد لاسته راغلی دی.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته وایاست چې د کتاب 141 مخ فعالیت په خپلو کتابچو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي او په پای کې د هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل یا د هندسي سلسلې فورمول په لاس راوړي. بیا د دوو ډلو استازي راځي او خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کوي که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي، هغه د بلې ډلې په واسطه د دوستۍ په فضا کې اصلاح کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او بیا تاسو همدا فعالیت په بشپړ توګه ورته تشریح او توضیح کړئ د ټولو مراحلو په پام کې نیولو سره د $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ عمومي فارمول په داسې حال کې چې $q \neq 1$ وي، په لاس راوړئ او د زده کوونکو پوښتنو ته ځوابونه وایاست.

بيا دوه داوطلب زدهكړونكي په وار سره راوغواړئ چې يو يې لومړی مثال او بل يې دويم مثال پر تخته حل كړي او نور زدهكړونكي دې په عين وخت كې د كتاب له لېدو پرته په خپلو كتابچو كې حل كړي او بيا دې خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح كړي، د اړتيا په صورت كې مرسته او لارښوونه وكړئ.

6- د زده كړې تحكيم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونكو د لوست د لاسه تحكيم او زده كړې لپاره زدهكړونكو ته په لاندې ډول پوښتنه وركړې چې په خپلو كتابچو كې يې حل كړي:

- كه په يوې هندسي سلسلې كې $a_1 = 3$ او $q = 2$ وي، په دې صورت كې S_6 پيدا كړئ.
- ښاغلی ښوونكي د كار څارنه كوي او په پای كې يو داوطلب زدهكړونكي دې پوښتنه پر تخته حل كړي.

7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونكي د لوست له زده كړې څخه ځان ډاډمن كړي؛ نو زدهكړونكي دې د لاندې پوښتنو په واسطه وازمويي:

1- په هندسي سلسله د $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ كې ووايست:

• a_1 څه شي ښيي؟

• q څه شي ښيي؟

• S_n څه شي ښيي؟

2- د $2, 6, 18, 54, \dots$ په ترادف كې د 10 حدونو د جمعې حاصل پيدا كړئ.

كونښن وكړئ چې زدهكړونكي هر يو يې په خپلو كتابچو كې حل كړي.

8- د ښوونكي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونكي د $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ فورمول د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ښيي، د نوموړي فورمول

تطبيقول په پوښتنو كې په لاندې ډول كېدای شي:

(1) د $3, 6, 12, \dots$ په هندسي تصاعد كې د لس لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا كړئ.

په دې تصاعد كې $a = 3$ ، $q = \frac{6}{3} = 2$ او $n = 10$ دي.

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{3(1024 - 1)}{1} = 3 \cdot 1023 = 3069$$

(2) كه چيرې په يو هندسي تصاعد كې لومړی حد 2، گډنسبت يې (-2) وي، د څو حدونو د جمعې حاصل يې 22 كېږي؟

$$a = 2, \quad q = -2, \quad S_n = 22, \quad n = ?$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2[(-2)^n - 1]}{-2 - 1} = 22$$

مساوات دواړه خواوې په $\frac{1}{2}$ كې ضربوو:

$$\Rightarrow \left\{ \frac{2[(-2)^n - 1]}{-3} \right\} \frac{1}{2} = 22 \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(-2)^n - 1}{-3} = 11 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -33$$

$$\Rightarrow (-2)^n = -33 + 1 \Rightarrow (-2)^n = -32 \Rightarrow (-2)^n = (-2)^5 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د درسي کتاب د 142 مخ د پوښتنو حل.

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

حل

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{1}{3} \\ n = 10 \\ S_{10} = ? \end{array} \right\} \begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-q^n)}{1-q} \\ S_{10} &= \frac{2(1-\frac{1}{3})^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2\left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right]}{\frac{3-1}{3}} = \frac{2\left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right]}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 3\left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right]}{2} = 3 \cdot \left[1-(\frac{1}{3})^{10}\right] \\ S_{10} &= 3 - 3 \cdot 3^{-10} = 3 - 3^{-9} = 3 - \frac{1}{3^9} = 3 - \frac{1}{19683} = \frac{3 \cdot 19683 - 1}{19683} \\ S_{10} &= \frac{59049}{19683} = 3 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

2. د $3, 6, 12, \dots, 384$ په هندسي ترادف کې د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.

حل

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 3 \\ q = 2 \\ a_n = 384 \\ n = ? \\ S_n = ? \end{array} \right\} \begin{aligned} a_n &= a \cdot q^{n-1} \Rightarrow 384 = 3 \cdot 2^{n-1} \div 3 \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow 2^n \cdot 2^{-1} = 128 \\ &\Rightarrow \frac{2^n}{2} = 128 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow \boxed{n = 8} \\ S_n &= \frac{a(1-q^n)}{1-q} \\ S_8 &= \frac{3(1-2^8)}{1-2} = \frac{3(1-256)}{-1} = \frac{3(-255)}{-1} \Rightarrow \boxed{S_8 = 765} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

3. د $4, 12, 36, \dots$ په ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n - ام حد قیمت پیدا کړئ.

حل

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} a = 4 \\ q = 3 \\ S_n = 484 \\ n = ? \\ a_n = ? \end{array} \right\} \begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{4(1-3^n)}{1-3} = 484 \quad \text{یا} \quad \frac{4(3^n-1)}{3-1} = 484 \\ &= \frac{4 \cdot (3^n-1)}{2} \cdot 2 = 484 \div 2 \Rightarrow 4 \cdot (3^n-1) = 968 \Rightarrow 4 \cdot 3^n - 4 = 968 \\ 4 \cdot 3^n &= 968 + 4 \Rightarrow 4 \cdot 3^n = 972 \div 4 \\ 3^n &= 243 \Rightarrow 3^n = 3^5 \Rightarrow \boxed{n = 5} \\ a_n &= a \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 3^{5-1} = 4 \cdot 3^4 = 4 \cdot 81 = 324 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

څلورم څپرکی: ترادفونه

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q}, |q| < 1$$

لايتناهي هندسي سلسلې

د درسي کتاب (143) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د هندسي سلسلې د متباعد او متقارب سلسلو په مفهوم پوه شي. • متباعد او متقارب سلسلې تشخيص او يو له بله يې توپير وکړای شي. • د متباعد او متقاربو سلسلو په پوهېدو سره خوښي ښکاره او په ځان باور پيدا کوي.
2- د زده کړې لارې:	ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب ...
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد ...
4- د ورودي برخې توضيح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب ورودي برخې ته راوگرزوي: • که يو ترادف په ترتيب حد په حد کوچنی شي څه ډول ترادف بلل کېږي؟ • که يو ترادف په ترتيب حد په حد لوی شي څه ډول ترادف بلل کېږي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه واورئ له هغه پرته تاسو ځوابونه ووايست (يعنې لومړی يې متقارب او دويم يې متباعد دی)

5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې):

ښاغلی ښوونکی يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ او داسې پوښتنه وکړئ که $a = 3, q = \frac{1}{2}$ وي، هندسي ترادف يې پيدا کړی او د هندسي سلسلې عمومي فورمول يعنې د $a(\frac{q^n - 1}{q - 1})$ په تطبيقولو سره د پنځو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

که چيرې زده‌کوونکي ستونزې ولري، تاسو مرسته وکړئ او داسې يې حل کړئ:

$$S_5 = \frac{3\{(\frac{1}{2})^5 - 1\}}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \cdot \frac{(\frac{1}{32} - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = 3 \cdot \frac{(\frac{1 - 32}{32})}{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{(-\frac{31}{32})}{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot (\frac{31}{32} \cdot \frac{-2}{-1}) = 3 \cdot (\frac{31}{16}) = \frac{93}{16}$$

په همدې ډول يو بل داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ ورته ووايست که چيرې $a = 3$ او $q = 2$ وي، هندسي ترادف يې پيدا او د هندسي سلسلې د عمومي فورمول په تطبيقولو سره د پنځو لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ که

$$S_5 = \frac{3 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{3(32 - 1)}{1} = 3 \cdot 31 = 93$$

بيا هم ستونزه ولري، تاسو يې داسې حل کړئ: $S_5 = 93$

بيا له زده‌کوونکو څخه پوښتنه وکړئ په لومړی او دويم ځواب کې څه توپير ويني. کوم يو يې کوچنی او کوم يو يې زيات دی او په هره يوه ډله کې گډ نسبت څومره دی، ښايي ټول زده‌کوونکي ځوابونه ووايي بيا هم تاسو د لارښه پوهېدو لپاره له پورته مثالونو څخه په گټې اخېستنې سره موضوع داسې تشرېح کړئ:

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| > 1$ وي او د حدونو شمېرې معلوم نه وي، د متباعدې (Divergent series) په نامه یادېږي. او که چیرې $|q| < 1$ وي هغه د متقاربې (convergent series) په نامه یادېږي او د دواړو د جمعې حاصل د $S = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$ په واسطه پیدا کېږي. د لوست په پای کې دوه داوطلب زده‌کونکي په وار سره راوغواړي چې یو یې د 144 مخ لومړی مثال او بل یې دویم مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کونکي دې د کتاب له لېدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د کار څارنه وکړي د پوښتنو او تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي په پای کې دې زده‌کونکي هر یو خپل حل د تخته له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره ښاغلی ښوونکی دې د کتاب دریم او څلورم مثالونه د زده‌کونکو په فعالې برخې اخیستنې سره پر تخته حل کړي په داسې حال کې چې د مثالونو ټولې مرحلې گام په گام په پام کې ونیسي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی ځان ډاډمن کړي چې زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي.

• که چیرې د $\left(\frac{1}{2}\right)$ عدد د 3, 2 او 5 په توانونو رفع شي، لاس ته راغلي عددونه په ترتیب زیاتېږي او که کوچني کېږي؟

• که چیرې د 2 عدد په ترتیب د 3, 2 او 5 په توانونو رفع شي، لاس ته راغلي عددونه په ترتیب زیاتېږي او که کوچني کېږي؟

• که $|q| < 1$ وي او د حدونو شمېر معلوم نه وي کومه سلسله جوړوي؟

• که $|q| > 1$ وي او د حدونو شمېر معلوم نه وي کومه سلسله جوړوي؟

کوبښ وکړي چې څو اوبونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د هندسي ترادف تر عنوان لاندې د 127 مخ وړودي برخې کې د شطرنج د تخته په 64 کور کې د غنمو شمېر او همدارنگه د ټولو غنمو شمېر په لاندې ډول معلومولای شو:

حل: $q = 2, a = 1$ او $n = 64$ دی؛ نو:

$$a_{64} = 1 \cdot 2^{64-1} = 2^{63} = 9.22337 \cdot 10^{18} \text{ دانې غنم}$$

اوس بیا مطالعه کوو چې د شطرنج په ټولو خانو کې مجموعاً څو دانې غنم دي؟

حل: څرنگه چې $q = 2, a = 1$ او $n = 64$ دي، نو د عمومي فورمول له مخې لیکو:

$$S_{64} = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 1.84467 \cdot 10^{19} - 1 \approx 1.84467 \cdot 10^{19} \text{ دانې غنم}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$$i) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

,

$$ii) 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

حل i) سلسله متقاربه ده:

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ q=\frac{1}{3} \\ S_n=? \end{array} \right\} \begin{array}{l} |q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1 \\ S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{3-1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \end{array}$$

حل ii) سلسله متقاربه ده:

$$\left. \begin{array}{l} a=5 \\ q=\frac{1}{5} \\ S_n=? \end{array} \right\} \begin{array}{l} |q|=\left|\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}<1 \\ S_n=\frac{a}{1-q}=\frac{5}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{\frac{5-1}{5}}=\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{4}=6.25 \end{array}$$

2. لاندې اعشاري پيرويديک (متوالي) کسرونه په عام کسر وړوي.

a) $0.2\bar{4}$

b) $0.\bar{5}$

حل a)

$$0.2\bar{4} = 0.2444 \dots = 0.2 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \dots = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{100} \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right]$$

$$S_n = ? \quad , \quad a = 1 \quad , \quad q = \frac{1}{10} \quad , \quad \text{د قوس په دننه کې يوه بې نهايت هندسي سلسله ده؛ يعنې:}$$

$$\text{نو سلسله متقاربه ده: } |q| = \left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$$

$$S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{9}$$

$$0.2\bar{4} = \frac{1}{5} + \frac{4}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{5} + \frac{4}{90} = \frac{18+4}{90} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45} \Rightarrow \boxed{0.2\bar{4} = \frac{11}{45}}$$

حل b)

$$0.\bar{5} = 0.5555 \dots$$

$$0.5 = 0.5 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + \dots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

$$= \frac{5}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ q=\frac{1}{10} \\ S_n=? \end{array} \right\} \begin{array}{l} |q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1 \end{array}$$

نو سلسله متقاربه ده.

د قوس په دننه کې يوه بې نهايت هندسي سلسله ده، چې:

$$S_n = \frac{5}{10} \cdot \frac{a}{1-q} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{5}{9} = 0.\bar{5}}$$

د څلورم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

- د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ ترادف n - ام حد کوم دی؟
 a) $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ b) $\frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ c) $\frac{n}{n-1}$ d) $\frac{n+1}{n}$
- که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف n - ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟
 a) 3 b) 4 c) 5 d) 6
- د $9, -5, -1, 3, \dots$ حسابي ترادف دولسم حد عبارت دی، له:
 a) 35 b) 38 c) -35 d) -38
- د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \dots$ حسابي ترادف گډ توپير عبارت دی، له:
 a) 0.3 b) 0.1 c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$
- د $96, 48, 24, 12, 6, \dots$ هندسي ترادف گډ نسبت عبارت له:
 a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$
- د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:
 a) $\frac{3}{512}$ b) $\frac{5}{510}$ c) $-\frac{5}{512}$ d) $\frac{5}{512}$
- د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې د حاصل فورمول عبارت دی، له:
 a) $S_n = a \frac{1+q^n}{1-q}$ b) $S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$ c) $S = a \frac{1+q^n}{1+q}$ d) هيڅ يو
- په بې نهايت هندسي متقاربو سلسلو کې گډ نسبت عبارت دی، له:
 a) $q = 0$ b) $|q| > 1$ c) $|q| < 1$ d) هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ.

- څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟

حل: لومړی دوه رقمي طبيعي عددونه لیکو:

10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22 , 23
 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37
 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 47 , 48 , 49 , 50 , 51
 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 64 , 65
 66 , 67 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79
 80 , 81 , 82 , 83 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 , 93
 94 , 95 , 96 , 97 , 98 , 99

دوه ويشت دوه رقمي عددونه لرو چې د 4 مضرب دي.

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي و سطونه وليکئ. 21, $\square$, $\square$, $\square$, 31

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 21 \\ a_1 + 4d = 31 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4d = 31 - 21 = 10 \\ d = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5 \end{array}$$

21, 23.5, 26, 28.5, 31

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{21 + 26}{2} = \frac{47}{2} = 23.5$$

$$a_3 = \frac{21 + 31}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

a_3 وسطي حد دی، نو:

$$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = \frac{26 + 31}{2} = \frac{57}{2} = 28.5$$

3. که د یوه حسابي ترادف د لومړۍ او وروستۍ جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړیو جملو مجموعه یې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

حل: پوهېږو چې د n لومړیو جملو مجموعه له $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ فارمول څخه لاسته راځي، نو:

$$a_1 + a_n = 24$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = 3720 \Rightarrow \frac{n}{2}[24] = 3720$$

$$12n = 3720 \Rightarrow n = \frac{3720}{12} = \frac{1240}{4} = 310 \Rightarrow \boxed{n = 310}$$

4. دلاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

3, 5, 7, 9, 11, ...

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ d = 2 \\ n = 100 \\ S_{100} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{100}{2}[2 \cdot 3 + (100-1)2] \\ S_{100} = 50[6 + 99 \cdot 2] = 50[6 + 198] = 50[204] \\ \boxed{S_{100} = 10200} \end{array}$$

5. که د یوه هندسي ترادف دویمه جمله 6 او اوومه جمله یې 192 وي، گډ نسبت یې وټاکئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} aq = 6 \\ aq^6 = 192 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (aq)q^5 = 192 \\ 6q^5 = 192 / \div 6 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{array}$$

6. دیوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره، دهغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف گډ نسبت حساب کړئ.

حل:

$$\left. \begin{aligned} S_8 &= a \frac{1-q^8}{1-q} \\ S_4 &= a \frac{1-q^4}{1-q} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \frac{1-q^8}{1-q} &= 17a \frac{1-q^4}{1-q} \cdot (1-q) \\ 1-q^8 &= 17-17q^4 \Rightarrow 1-q^8-17+17q^4=0 \Rightarrow -q^8+17q^4-16=0 \cdot (-1) \\ q^8-17q^4+16 &= 0 \end{aligned}$$

که چیرې $q^4 = y$ وضع کړو، نو:

$$y^2 - 17y + 16 = 0$$

$$\Delta = 289 - 64 = 225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 15$$

$$y = \frac{17 \pm 15}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$q^4 = 16 \Rightarrow q^4 = 2^4 \Rightarrow \boxed{q = 2}$$

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$$

حل:

$$\begin{aligned} 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \\ &= \frac{1}{10} \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

8. دیوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد یې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{aligned} a &= 9 \\ aq^4 &= \frac{1}{9} \\ S_n &= ? \end{aligned} \right\} \begin{aligned} aq^4 &= \frac{1}{9} \Rightarrow aq^4 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81q^4 = 1 \\ q^4 &= \frac{1}{81} \Rightarrow q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$S_n = 9 \frac{1-q^n}{1-q} = 9 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}} = 9 \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = 9 \frac{\frac{243-1}{243}}{\frac{2}{3}} = 9 \frac{242}{243} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9 \cdot 242}{162} = \frac{1089}{81} = 13.4$$

9. د 3 او 96 عددونو ترمنځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول وليکئ.

$$3, \square, \square, \square, \square, 96$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \\ a = 3 \\ aq^5 = 96 \\ n = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3q^5 = 96 \quad / \div 3 \\ q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{array}$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$$

$$a_4 = \sqrt{a_3 \cdot a_5} = \sqrt{12 \cdot 48} = \sqrt{576} = 24$$

$$a_5 = \sqrt{a_4 \cdot a_6} = \sqrt{24 \cdot 96} = \sqrt{2304} = 48$$

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$ هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{1}{3} \\ n = 8 \\ S_8 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_8 = 2 \frac{1 - (\frac{1}{3})^8}{1 - (\frac{1}{3})} \\ S_8 = 2 \frac{1 - \frac{1}{6561}}{\frac{2}{3}} = 2 \frac{\frac{6560}{6561}}{\frac{2}{3}} = 2 \frac{6560}{6561} \cdot \frac{3}{2} = \frac{19680}{6561} = 2.99954 \Rightarrow \boxed{S_8 \approx 3} \end{array}$$

11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

حل:

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}, \frac{1}{22}, \frac{1}{25}, \frac{1}{28}, \frac{1}{31}, \frac{1}{34}, \frac{1}{37}$$

لاندي پيرويډيک (متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$$a) 2.\overline{8}$$

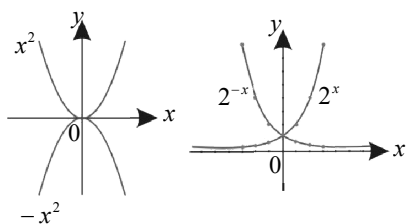
$$b) 3.\overline{57}$$

حل (a):

$$\begin{aligned}
2.\overline{8} &= 2.8888 \dots = 2 + 0.8 + 0.08 + 0.008 + 0.0008 + \dots \\
&= 2 + \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10000} + \dots \\
&= 2 + \frac{8}{10} \cdot \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right] = 2 + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= 2 + \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{18+8}{9} = \frac{26}{9}
\end{aligned}$$

حل (b):

$$\begin{aligned}
3.5\overline{7} &= 3.57575757 \dots \\
&= 3 + 0.57 + 0.0057 + 0.000057 + 0.00000057 + \dots \\
&= 3 + \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{1000000} + \frac{57}{100000000} + \dots \\
&= 3 + \frac{57}{100} \cdot \left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{100000000} + \dots \right] \\
&= 3 + \frac{57}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = 3 + \frac{57}{100} \cdot \frac{100}{99} = 3 + \frac{57}{99} = \frac{297+57}{99} = \frac{354}{99} = \frac{118}{33} \Rightarrow \boxed{3.5\overline{7} = \frac{118}{33}}
\end{aligned}$$



پنځم څپرکی: لوگاریتم

اکسپوننشیل تابعگانې (Exponential functions)

د درسي کتاب (153) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعتونه) لومړۍ درسي ساعت

1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د اکسپوننشیل تابعگانو په مفهوم پوه شي. • د اکسپوننشیل تابعگانو گرافونه رسم او پوښتنې حل کړای شي. • د اکسپوننشیل تابعگانو په پوهېدو او د هغو گرافونو په رسمولو خوښي ښکاره او په ځان باور پیدا کوي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د وړودي شکل چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی: له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوی او وپوښتی: • تاسو له تېر ټولگي څخه پوهېږئ چې د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ گرافونه نظر د y محور ته یو د بل متناظر دي. • ایا ویلای شئ د کتاب د وړودي برخې له شکلونو څخه کوم یو شکل په دې تابعگانو پورې اړه لري؟ په همدې ډول په وړودي شکل کې یو بل شکل هم لیدل کېږي، ایا هغه هم یو د بل متناظر دي؟ که زده کوونکي ستونزې ولري، تاسو ورته وواياست. وروسته به ثابت شي چې د $f(x) = 2^x$ او $f(x) = 2^{-x}$ تابعگانو گرافونه هم یو د بل متناظر دي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی د فعالیت په پای کې د تابع عمومي شکل یعنې $f(x) = a^x$ تعریف د کتاب له مخې زده کوونکو ته بیان او ورته وواياست چې پورتنی تابعگانې د اکسپوننشیل تابع د a په قاعده بولي. زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د کتاب 153 مخ فعالیت ورکړی چې د $f(x) = 2^x$ تابع د $x \in \mathbb{Z}$ مختلفو قیمتونو لپاره گراف رسم او د y له محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړي. بیا په همدې ډول دې د $f(x) = 2^{-x}$ تابع گراف رسم کړي او د دواړو تابعگانو گرافونه او قیمتونه دې یو له بل سره پرتله کړي، چې د قیمتونو له مخې متزایده او متناقصه تابع وښيي. په پای کې د دوو ډلو له استازو څخه وغواړئ چې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح او تشریح کړي، که چیرې	

کومې ډلې تېروتنه کړې وي د بلې ډلې په واسطه يې اصلاح کړئ.

يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړی چې پورتنی فعالیت د $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوي، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی څرنگه چې د اکسپوننشل تابع د زده‌کوونکو لپاره نوي موضوع او څه نا څه ستونزمنه هم ده، د لوست د لاینه تحکیم او زده‌کړې لپاره تاسو یو ځل بیا د زده‌کوونکو په فعالې برخې اخیستنې سره (د پوښتنې او ځواب په توګه) موضوع تکرار کړی، چې زده‌کوونکي د اکسپوننشل تابع په هکله ښه پوه شي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په کولو سره وازموي:

1. د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ گرافونه نظر کوم محور ته یو د بل متناظر دي؟

2. د $f(x) = x^2$ په تابع کې $x \in \mathbb{Z}$ ټولو قیمتونو لپاره تل مثبت دي او که منفي؟

3. د $f(x) = a^x$ په تابع کې $a = 1$ کېدای شي او که $a \neq 1$ وي؟

کوبښن وکړئ چې ځوابونه په وار سره له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې اکسپوننشل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتو کې رسم کړئ.

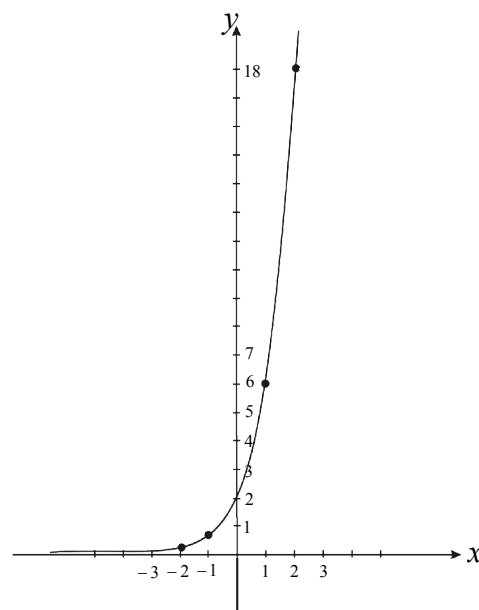
a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

د (a) حل: په هره تابع کې x ته څو تام مثبت او منفي قیمتونه ورکوو او د تابع قیمت په لاس راوړو:

x	$f(x)$
0	2
1	6
-1	$\frac{2}{3}$
2	18
-2	$\frac{2}{9}$

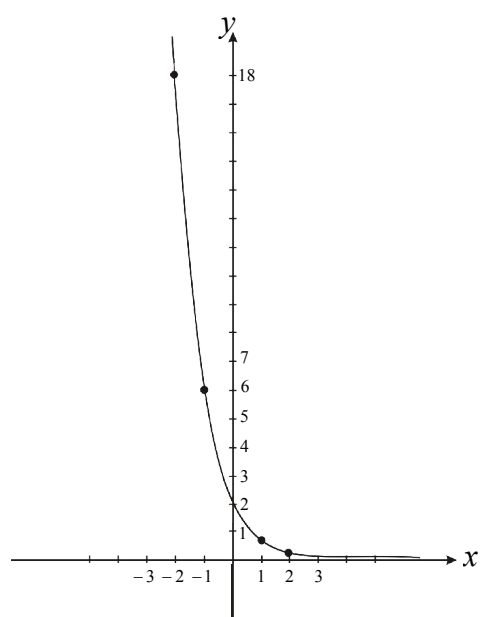
$$f(x) = 2 \cdot 3^x$$

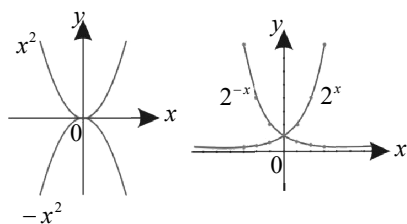


د (b) حل:

x	$f(x)$
0	2
1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{9}$
-1	6
-2	18

$$f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$$





پنځم څپرکی: لوگاریتم

اکسپوننشیل تابعگانی (Exponential functions)

د درسي کتاب (154) مخ

د لوست وخت: (دوه درسي ساعتونه) دویم درسي ساعت

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي • د اکسپوننشیل په تابع کې متزايد او متناقصه تابع وپېژني. • متزايد او متناقصې تابعگانې تشخیص او توپیر یې وکړای شي. • ددې پوهې او مهارت له سرته رسولو څخه خوښي ښکاره کوي.	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې:
2- د زده کړې لارې: انفرادي، ډله ییز، پوښتنه او ځواب	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد (چارټ)	
4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب عنوان او ورودی برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • د $f(x) = 2^x$ تابع د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟ • د $f(x) = 2^{-x}$ تابع د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟ • ایا دا دواړه تابعگانې نظر کوم محور ته یو د بل متناظر دي؟ ښایي چې زده کوونکي ځوابونه ووايي، له هغه پرته تاسو له تېر لوست څخه په گټې اخیستنې سره ځوابونه ورته ووايست.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لوست د پوښتنې او ځواب په توگه داسې پیل کړی: • څوک ویلای شي د $f(x) = a^x$ په تابع کې که $a > 1$ وي، تابع متزايد ده او که متناقصه؟ • څوک ویلای شي د $f(x) = a^x$ په تابع کې که $a < 1$ وي، تابع متزايد ده او که متناقصه؟ که چیرې زده کوونکي ځوابونه ووايي ښه به وي او که نه تاسو داسې ورته تشریح کړئ: که چیرې د اکسپوننشیل په تابع کې $a > 1$ وي، تابع متزايد او که $a < 1$ وي، تابع متناقصه او که $a = 1$ وي؛ نو تابع ثابت ده. زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشئ د کتاب د 154 مخ جدولونه چې یو یې د $f(x) = 2^x$ او بل یې د $f(x) = 2^{-x}$ تابع پورې اړه لري، په کمیات وضعیه کې د هر ټکي د کمیاتو په ټاکلو سره د دواړو تابعگانو گرافونه رسم او په هغو کې دې متزايد او متناقصه منحنی لومړی د قیمتونو له مخې او بیا په گرافونو کې وښيي، ددې فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغوړئ او خپل سرته رسولی فعالیت دې د غوښتنو سره سم نورو ډلو ته تشریح کړي، که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي د یوې بلې ډلې په واسطه یې اصلاح کړئ.	

بيا يو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ چې د کتاب 154 مخ مثال جدول جوړ او گراف يې د جدول له مخې په دقيقه توگه رسم کړي او نور زده‌کونکي دې د کتاب له ليدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. که کوم زده‌کونکی پوښتنه کوي، مرسته ورسره وکړي، په پای کې د اکسپوننشيال تابع خاصیتونه يو په يو ورته ووياست چې زده‌کونکي ورباندې پوه شي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم لپاره د $f(x) = 2^x$ ، $f(x) = \frac{1}{2^x}$ تابعگانې زده‌کونکو ته ورکړي چې په هغوی کې متزایدې او متناقضې ساحې وښيي او هم د y له محور سره د تقاطع ټکی پیدا کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، نو زده‌کونکي دې د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وازموي:

1. د اکسپوننشيال هره تابع د $a > 1$ قیمتونو لپاره متزایده ده؟
2. که د هرې اکسپوننشيال تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه وي، د قیمتونو ناحیه یې څه ډول عددونه کېدای شي؟
3. ایا هره اکسپوننشيال تابع، معکوس تابع لري؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د کتاب 155 مخ فعالیت په لاندې ډول ثبوت کېږي، که زده‌کونکي ونشي کولای تاسو یې ورته ثبوت کړئ:

$$1) f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad , \quad 2) f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$3) f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

که $(x, y) \in R$ وي؛ نو:

$$1) f(x+y) = a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$2) f(x-y) = a^{(x-y)} = a^x \cdot a^{-y} = a^x (a^y)^{-1} = a^x \cdot \frac{1}{a^y} = f(x) \cdot \frac{1}{f(y)} = \frac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$3) f(a \cdot x) = a^{ax} = (a^x)^a = (f(x))^a \Rightarrow f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې اکسپوننشيال تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتو کې رسم کړئ.

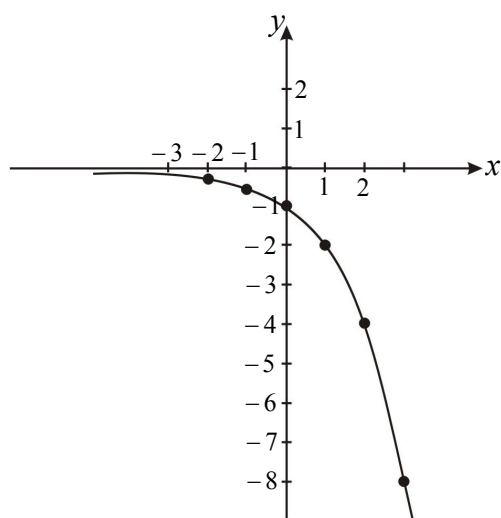
$$c) f(x) = -2^x$$

$$d) f(x) = -2^{-x}$$

د (c) حل: په هره تابع کې x ته څو تام مثبت او منفي قیمتونه ورکولو او د تابع قیمت په لاس راوړو:

x	$f(x)$
0	-1
1	-2
2	-4
3	-8
-1	$-\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{4}$

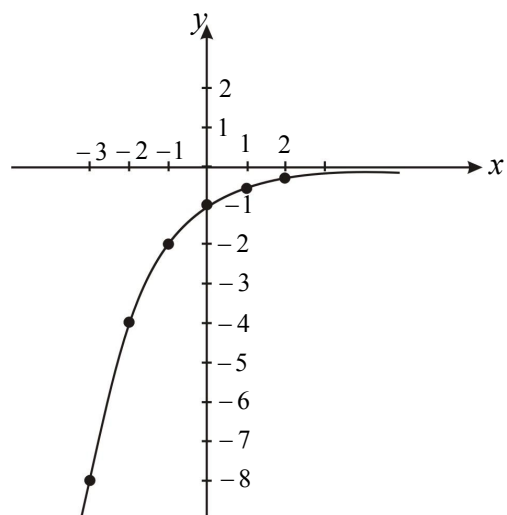
$$f(x) = -2^x$$



د (d) حل:

x	$f(x)$
0	-1
1	$-\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{4}$
-1	-2
-2	-4
-3	-8

$$f(x) = -2^{-x}$$



پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

لوگاریتم

د درسي کتاب (157) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د لوگاریتم په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي په طاقت لرونکو عددونو کې لوگاریتمي قیمتونه تشخیص او وټاکي. • زده‌کونکي د عددونو لوگاریتمي قیمتونه پیدا کړای شي. • زده‌کونکي د پورته مهارت په سرته رسولو سره خوښي ښکاره او په ځان به باور پیدا کړي.	- پوهنیزې - مهارتي - ذهنيتي
2- د زده کړې لارې: ډله‌بیز، انفرادي، پوښتنه او ځواب	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد (چارت)	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • د $y = x^3$ په افاده کې د $x = 2, 3, 4$ په قیمتونو سره y کوم قیمتونه غوره کوي؟ • ایا د $y = a^x$ تابع په کوم بل ډول هم لیکلای شو؟ که چیرې زده‌کونکي ځوابونه ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو ورته وایاست او بیان یې کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کونکي په مناسبو ډلو و وېشي د کتاب د 157 مخ فعالیت ورکړي چې په خپلو ډلو کې یې له بحث او مشورې وروسته جدول بشپړ کړي او پوښتنو ته سم ځوابونه پیدا کړي. بیا د درې ډلو استازي راوغواړي چې د خپلې ډلې سرته رسولي فعالیت او ځوابونه نورو ته توضیح کړي. که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړي وي د بلې ډلې په واسطه یې اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. په پای کې تاسو د لوگاریتم عمومي حالت او تعریف د $\log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$ افادې له مخې زده‌کونکو ته تشریح کړي، ترڅو هغوی د لوگاریتم په مفهوم او ضرورت ښه پوه شي. له هغه وروسته اړوند مثالونه یعنې $\log_2 8 = 3$ او $\log_{10} 1000 = 3$ پر تخته حل او تشریح کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی: د لوست د لارښه پوهېدو لپاره د حل شوي مثال په ډول پوښتنې پر تخته ولیکي، زده‌کونکو ته وایاست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، تاسو د کار څارنه او کنټرول وکړئ.	

په پای کې یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړی چې پر تخته یې حل کړي. د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. نور زده‌کوونکي دې خپل ځوابونه د تختې له حل سره پرتله او د تېروتنې په صورت کې دې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، نو زده‌کوونکي دې د لاندې پوښتنو په واسطه سره وازموي:

$$1) \log_3 9 = ?$$

$$2) \log_2 16 = ?$$

$$3) \log_3 27 = ?$$

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې لوگاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واروي:

$$a) \log_{10} N = x$$

,

$$b) \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$$

$$c) \log_9 81 = 2$$

,

$$d) \log_5 5 = 1$$

حل: څرنگه چې لوگاریتم د طاقت یو بېل ډول ښوونه ده، نو اړوند افادې یې د طاقت په شکل په لاس راوړو:

$$a) \log_{10} N = x \Rightarrow N = 10^x$$

$$b) \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2 \Rightarrow 36 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$$

$$c) \log_9 81 = 2 \Rightarrow 81 = 9^2$$

$$d) \log_5 5 = 1 \Rightarrow 5 = 5^1$$

2. د لوگاریتم په کارونې سره د لاندې افادو (طاقت لرونکو عددونو) معادل شکل ولیکئ.

حل:

$$a) 4^3 = 256 \Rightarrow \log_4 256 = 3$$

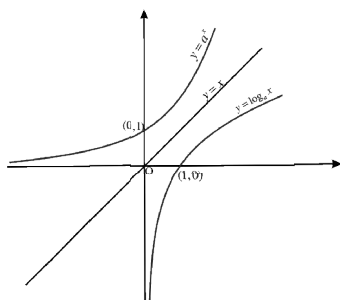
$$b) 2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$$

$$c) 10^4 = 10000 \Rightarrow \log_{10} 10000 = 4$$

$$d) 10^{-1} = 10^y \Rightarrow \log_{10} 10^{-1} = y$$

$$e) y = 2^x \Rightarrow \log_2 y = x$$

$$f) y = 3^x \Rightarrow \log_3 y = x$$



پنځم څپرکی: لوگاریتم

لوگاریتمي تابع گانې

د درسي کتاب (159) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

• زده‌کونکي د لوگاریتمي تابع گانو په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د لوگاریتمي تابع گانو پوښتنې حل او گرافونه به یې رسم کړای شي. • زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې له لوگاریتمي تابع گانو څخه کار واخلي او خوښي به ښکاره کړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنيزې - مهارتي - ذهني
دلهیز، انفرادي، پوښتنه او ځواب	2- د زده کړې لارې:
د اړتیا وړ مواد (چارت)	3- مرستندويه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب عنوان او ورودی برخې ته د لاندې پوښتنو په طرح کولو سره راوگرځوي: • څوک ویلای شي د 8 عدد، معکوس عدد، کوم عدد دی؟ • څوک ویلای شي د $\frac{2}{3}$ عدد، معکوس عدد کوم عدد دی؟ • څوک ویلای شي کوم ډول تابعگاني معکوسې تابعگاني لري؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزې په صورت کې تاسو ورته لنډ معلومات ورکړئ.	4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لومړی د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع چې د لوگاریتمي تابع په نامه یادېږي، ددې تعریف او شرایطو په برخه کې زده‌کونکو ته بشپړ معلومات ورکړي، وروسته د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعگاني چې د یو بل معکوسې تابعگاني بلل کېږي وروپېژني او گرافونه یې رسم کړي، وروښایست چې داگرافونه د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي، بشپړ توضیحات ورته ورکړي. وروسته زده‌کونکو ته دنده ورکړي چې د درسي کتاب 160 مخ لومړی مثال د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل او گراف یې رسم کړي. د کار څارنه وکړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، بیا یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړي چې پر تخته یې حل کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، نور زده‌کونکي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي. زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ورته ووايست چې د کتاب د همدې مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د بحث او مشورې په کولو سره سرته ورسوي. د فعالیت په پای کې د دوو یا دریو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کوي. که	

چیرې کومې ډلې تېروتنه کړې وي، د یوې بلې ډلې په واسطه یې اصلاح کړې (ددې فعالیت بشپړ حل تاسو ته په اضافي معلوماتو کې درکړل شوی دی).

د لوست په پای کې دې ښاغلی ښوونکی د لوگاریتمي تابعگانو خاصیتونه، هر یو جلا جلا توضیح او تشریح کړي. ترڅو زده-کونکي د لوگاریتمي تابع په مفهوم او خاصیتونو ښه پوه شي او هغه مثال چې د 2 په قاعده، لوگاریتمي قیمتونه یې غوښتل شوي حل او ځوابونه یې په لاس راوړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره دویم مثال پر تخته ولیکي، زده‌کونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. په پای کې دې یو داوطلب زده‌کونکی نوموړی مثال پر تخته حل او نور زده-کونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډه شي، د لوست دریم مثال پر تخته ولیکي، زده‌کونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. د کار څارنه وکړي، په پای کې یو زده‌کونکی راوغواړي چې پر تخته یې حل کړي د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د کتاب 160 مخ فعالیت چې د 2^x , $(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابعگانې دي، گرافونه او معکوس تابعگانې په لاندې ډول دي:

$y = 2^x$ تابع په پام کې نیسو:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

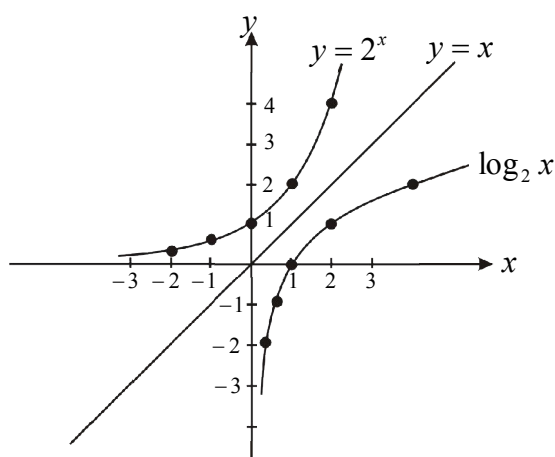
$$\left. \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \right\} (1,2) , \quad \left. \begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix} \right\} (2,4)$$

د $y = 2^x$ تابع معکوسه تابع $f(x) = \log_2 x$ ده.

x	1	2
$f(x)$	0	1

$$\left. \begin{matrix} x=1 \\ f(x) = \log_2^x = 0 \end{matrix} \right\} (1,0)$$

$$\left. \begin{matrix} x=2 \\ f(x) = 1 \end{matrix} \right\} (2,1)$$



اوس د $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابع په پام کې نیسو:

x	0	1	2
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right\} (0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

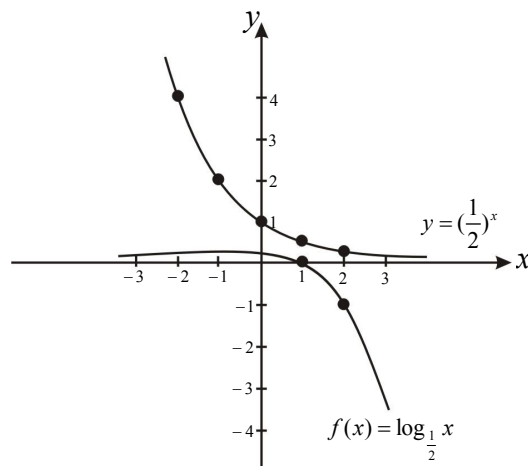
$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \left(2, \frac{1}{4}\right)$$

د $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابع معکوسه تابع عبارت له $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ څخه ده.

x	1	2
$f(x)$	0	-1

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x = 0 \end{array} \right\} (1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x = -1 \end{array} \right\} (2, -1)$$



9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{32})$, $f(32)$ کې پیدا کړئ.

حل:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$

$$f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{32}\right) = \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5 \log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$$

$$f(32) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$$

2. د $f(x) = \log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

حل:

$$f(x) = \log_3 x$$

$$f(1) = \log_3 1 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{81}\right) = \log_3 \left(\frac{1}{81}\right) = \log_3 3^{-4} = -4 \cdot \log_3 3 = -4 \cdot 1 = -4$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\left. \begin{array}{l} \log_e N \\ \log_{10} 10^3 \end{array} \right\} = ?$$

معمولي لوگاریتم او طبیعي لوگاریتم

د درسي کتاب (163) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د معمولي او طبیعي لوگاریتمونو په مفهومونو پوه شي. • معمولي او طبیعي لوگاریتمونه یو له بله تفکیک، د هر یوه پوښتنې حل او گرافونه یې رسم کړای شي. • د اړتیا په وخت کې له هر یو لوگاریتم څخه کار واخلي او خپلې ستونزې حل کوي.
2- د زده کړې لارې:	ډله‌ییز، انفرادي، پوښتنه او ځواب
3- مرستندویه مواد:	د اړتیا وړ مواد
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • په کومو قاعدو سره لوگاریتمونه پېژني؟ • ایا د لوگاریتمونو قاعدې یوازې 2 او 3 دي، که نور عددونه هم د لوگاریتم قاعده کېدای شي؟ • ایا تاسو د معمولي لوگاریتم او طبیعي لوگاریتم سره بلډیت لرئ. کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته تاسو معلومات ورکړئ او یوه انگیزه پیدا کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لومړی د لوگاریتم تعریف او د هغوی ډولونه (معمولي لوگاریتم، طبیعي لوگاریتم) ورته توضیح کړی، بیا معمولي لوگاریتم چې قاعده یې 10 ده، ورته تعریف او لازم توضیحات ورکړی د همدې په اړوند مثال کې 10^0 او 10^2 لوگاریتمونه ورته پیدا کړی، د نورو عددونو لوگاریتمونه دې زده‌کوونکي هر یو په خپلو کتابچو کې په لاس راوړي او گراف دې په خپلو کتابچو کې رسم کړي. د کار څارنه وکړی، د ستونزې په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړی. په پای کې څو داوطلب زده‌کوونکي دې د نوموړو عددونو لوگاریتمونه پر تخته پیدا کړي، ستاسو په مرسته دې گراف پر تخته رسم کړي. په همدې ډول طبیعي لوگاریتم چې قاعده یې e ده ورته تعریف او د e قیمت چې $e = 2.71828182\dots$ ده، ورته په گوته کړی (پیدا کول یې د همدې ټولگي کار نه دی). زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د $y = e^x$ او $y = e^{-x}$ تابع گرافونه دې د $x = -2, -1, 0, 1, 2$ قیمتونو لپاره رسم کړي، د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغواړئ چې د خپل سرته رسولې فعالیت په برخه کې نورو ته معلومات ورکړي د اړتیا په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی. وروسته ښاغلی ښوونکی دې د کتاب د 165 مخ د همدې اړوند مثال پر تخته حل او گراف دې رسم کړي، ترڅو زده‌کوونکي د دواړو موضوعگانو په مفهوم ښه پوه شي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاندې نه تحکیم لپاره زده کوونکو ته د $10^4, 10^5, \ln e^{-3}$ او $\ln e^4$ پوښتنې ورکړې چې د نوموړو عددونو لوگاریتمونه په خپلو کتابچو کې پیدا کړي، بیا یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغواړي چې هغه پر تخته حل او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازمويي:

- هغه لوگاریتم چې قاعده یې 10 ده په څه نوم یادېږي؟
 - هغه لوگاریتم چې قاعده یې e ده په څه نوم یادېږي؟
 - ایا د 1 عدد هم د لوگاریتم قاعده کېدای شي؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه په شفاهي توګه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د کتاب د 162 مخ فعالیت په لاندې توګه حلېږي:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $\sqrt{2}$ ، $x = 28$ لپاره په لاس راوړئ.

حل:

$$f(\sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(28) &= \log_2 28 = \log_2 4 \cdot 7 = \log_2 4 + \log_2 7 = \log_2 2^2 + \log_2 7 \\ &= 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 7 = 2 \cdot 1 + \log_2 7 = 2 + \log_2 7 \end{aligned}$$

ښاغلی ښوونکی د 166 مخ فعالیت په لاندې توګه سرته ورسوي:

$$a) \ y = \ln \frac{1}{e^7} = \log_e \frac{1}{e^7} = \log_e e^{-7} = -7 \log_e e = -7 \cdot 1 = -7$$

$$b) \ \log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4 \cdot \log 10 = -4 \cdot 1 = -4$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

لاندې لوگاریتمونه حساب کړئ.

$$a) \log_e e^8$$

$$b) \ln \frac{1}{e^{-3}}$$

$$c) \log 0.01$$

$$d) \log \frac{1}{10^{-2}}$$

حل:

$$a) \ \log_e e^8 = 8 \cdot \log_e e = 8 \cdot 1 = 8$$

$$b) \ \ln \frac{1}{e^{-3}} = \ln e^3 = 3 \ln e = 3$$

$$c) \ \log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3$$

$$d) \ = -2 \log \frac{1}{10^{-2}} = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

د لوگاریتم قوانین

د درسي کتاب (167) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي به د لوگاریتم د قوانینو په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د لوگاریتم د قوانینو په تطبیق سره پوښتنې حل کړای شي. • زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې لوگاریتمي قوانین وکاروي او په ځان باور پیدا کوي.	- پوهنیزې - مهارتي - ذهنيتي
2- د زده کړې لارې: ډله‌ییز، انفرادي، پوښتنه او ځواب	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد (چارت)	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب عنوان او وړودي برخې ته د لاندې پوښتنو په کولو سره راوگرځوي: • په ضرب کې د مساوي قاعدو لپاره د توانونو قانون څه ډول دی؟ • ایا د $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ له افادې سره بلډیت لري؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې تاسو داسې معلومات ورکړئ چې د یوې انگیزې د پیدا کولو سبب وگرځي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی: زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د کتاب 167 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د بحث او مذاکرې په کولو سره سرته ورسوي، د فعالیت له پای ته رسولو وروسته د دریو ډلو استازي راوغواړئ چې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته پر تخته توضیح او تشریح کړي، د ستونزو او تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. بیا دوو زده‌کونکو ته هدایت ورکړئ چې په وار سره لومړی او دویم قوانین ولولي او مفهوم یې په ورکړل شوو مثالونو کې پر تخته توضیح کړي، که اړتیا وي لارښوونه ورته وکړئ، وروسته تاسو دریم قانون (چې د دوو یا څو عددونو د حاصل ضرب لوگاریتم دی) د مفهوم له توضیح کولو وروسته د زده‌کونکو په فعال ګډون سره مرحله په مرحله ثبوت کړي، ورپسې د کتاب لومړی مثال پر تخته حل او توضیح کړئ، چې زده‌کونکي د نوموړي قانون په مفهوم پوه شي، په همدې ډول د کتاب د 168 مخ فعالیت ورکړئ چې په خپلو کتابچو کې بحث او مذاکره ورباندې وکړي او فعالیت د عددي مثالونو په واسطه سرته ورسوي، که چیرې ستونزې ولري، له اضافي معلوماتو څخه په کار اخیستنې سره یې تاسو ورته توضیح کړئ.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لابنه تحکیم لپاره دویم مثال پر تخته ولیکئ او زده کوونکو ته و وایاست چې هر یو یې په خپله کتابچه کې حل کړي، د کار څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ په پای کې یو داوطلب زده کوونکی دا پوښتنه پر تخته حل او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازمويي:

$$\log_{10}(100 \cdot 5) = ? \quad \log_{116} 1 = ? \quad \log_2 8$$

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د 168 مخ فعالیت په لاندې توگه سرته ورسوي:

حل:

$$1) \log(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log(x \cdot y) \neq \log x \cdot \log y$$

د پورته مساوات سموالی د عددي مثال په واسطه ښیو:

$$1) \log(10 + 100) \neq \log 10 + \log 100$$

$$\log 110 \neq 1 + 2 \Rightarrow 2.414 \neq 3$$

$$2) \log(10 \cdot 100) \neq \log 10 \cdot \log 100$$

$$\log(1000) \neq 1 \cdot 2$$

$$3 \neq 2$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او د جمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$a) \log_4(5x^2) = \log_4 5 + \log_4 x^2 = \log_4 5 + \log_4 x + \log_4 x = \log_4 5 + 2\log_4 x$$

$$b) \log_{10}(10x^2y) = \log_{10} 10 + \log_{10} x^2 + \log_{10} y = 1 + \log_{10} x + \log_{10} x + \log_{10} y$$

$$c) \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10}(5 \cdot 20) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$

$$d) \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = \log_{12}(36 \cdot 4) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = \log_{12} 12 + \log_{12} 12 = 1 + 1 = 2$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

د لوگاریتم قوانین

د درسي کتاب (168) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د لوگاریتم د څلورم او پنځم قانون په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د پورته قوانینو اړوند پوښتنې حل کړای شي. • زده‌کونکي پورتنی قوانین د مسایلو په حل کې وکاروي او خپلې ستونزې حل کړي.	- پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
2- د زده کړې لارې:	تشریحي، انفرادي، پوښتنه او ځواب...
3- مرستندویه مواد:	د اړتیا وړ مواد
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د یوې انگیزې پېداکولو لپاره د زده‌کونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرځوي: • په تقسیم کې د مساوي قاعدو لپاره د توانونو قوانین څه ډول دي؟ • ایا له $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ او $\log x^n = n \log x$ افادو سره بلدیت لری. کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې تاسو معلومات ورکړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): بناغلی ښوونکی په 168 مخ کې د لوگاریتم څلورم قانون (چې د دوو عددونو د لوگاریتم تقسیم دی) د یوه زده‌کونکي په واسطه ولولئ، کوښښ وکړئ چې زده‌کونکي د هغه مفهوم په فارمولي ډول پر تخته وليکي، له هغه پرته تاسو مفهوم ورته توضیح او فارمول یې پر تخته وليکئ او مرحله په مرحله د زده‌کونکو په فعال گډون سره یې پر تخته ثبوت کړئ. بیا دوه زده‌کونکي په وار سره راوغواړئ چې لومړی او دویم مثالونه د فارمول په تطبیق کولو سره پر تخته حل کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. په همدې ډول د لوگاریتم پنځم قانون (چې د یوه توان لرونکي عدد لوگاریتم دی) د یوه بل زده‌کونکي په واسطه ولولئ او مفهوم دې بیان کړي. که چیرې زده‌کونکي ستونزه ولري، تاسو ورته بیان او مفهوم په فارمولي ډول پر تخته وليکئ او د $\log x^n = n \cdot \log x$ فارمول ثبوت د زده‌کونکو په فعال گډون سره مرحله په مرحله توضیح او تشریح کړئ او پایله په لاس راوړئ، له همدې قانون څخه په کار اخیستنې سره د $\sqrt[n]{x}$ لوگاریتم یعنې $\frac{1}{n} \log x$ په لنډ ډول وليکئ او په پای کې لومړی مثال ورته حل او توضیح کړئ، چې زده‌کونکي د لوست په مفهوم پوه او هغه وکاروي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم لپاره د 169 مخ وروستی دویم مثال پر تخته ولیکئ او زده‌کونکو ته وایاست چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي وروسته یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغوړئ چې پر تخته باندې یې حل کړي. نور زده‌کونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کونکي د لاندې پوښتنو په کولو سره وازمويي:

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = ? \quad \log(A)^n = ? \quad \log\left(\frac{100}{10}\right) = ?$$

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی: د کتاب 169 مخ وروستی فعالیت په لاندې توگه حلېږي:

حل:

$$a) \log_3(0.12) = \log_3\left(\frac{12}{100}\right) = \log_3\left(\frac{3}{25}\right) = \log_3 3 - \log_3 25 = 1 - \log_3 25$$

$$b) \log_5 \sqrt{8} = \log_5 (8)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 8$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځوابونه په لاس راوړئ.

حل:

$$a) \log_7 \frac{63}{49} = \log_7 63 - \log_7 49 = \log_7 (7 \cdot 9) - \log_7 7^2 \\ = \log_7 7 + \log_7 9 - 2 \cdot \log_7 7 = 1 + \log_7 9 - 2 = \log_7 9 - 1$$

$$b) \log \frac{125}{80} = \log 125 - \log 80 = \log 125 - \log (10 \cdot 8) \\ = \log 125 - \log 10 - \log 8 = \log 125 - 1 - \log 8$$

$$c) \log_a (x^2 a) - \log_a x^2 = \log_a \frac{x^2 \cdot a}{x^2} = \log_a a = 1$$

$$d) \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = \log_{10} \frac{1000}{100} = \log_{10} 10 = 1$$

3. لاندې لوگاریتمونه حساب کړئ.

$$a) \log_{10} (0.0001) = ? \quad b) \log_2 (8)^{\frac{1}{3}} = ?$$

حل:

$$a) \log_{10} (0.0001) = \log_{10} \frac{1}{10000} = \log_{10} \frac{1}{10^4} = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4 \cdot 1 = -4$$

$$b) \log_2 (8)^{\frac{1}{3}} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{3}{3}} = \log_2 2 = 1$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

د لوگاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

د درسي کتاب (171) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د یوه عدد لوگاریتم په یوه مشخصه قاعده وپېژني. • زده‌کونکي د شپږم او اووم قانون په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي یو لوگاریتم له یوې قاعدې څخه بلې قاعدې ته واړوي. • زده‌کونکي ددې قاعدو په اړولو سره خوښي ښکاره او په ځان باور پیدا کړي.	2- د زده کړې لارې: تشریحي، انفرادي، پوښتنه او ځواب...
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد (چارت)	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • څوک ویلای شي چې 4^2 او 2^4 یو له بله سره څه توپیر لري؟ او حاصلونه یې پیدا کړي. • څوک کولای شي د $\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$ افاده توضیح کړي. • ایا په لوگاریتم کې د قاعدو د اړولو امکان شته؟ کونښن وکړي چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي، که چیرې ستونزې ولري تاسو ځوابونه ورته ووايست.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی: شپږم قانون چې د لوگاریتم د یوې قاعدې اړول بلې قاعدې ته دي، په درسي کتاب کې له تعریف څخه مفهوم اخیستل یوه اندازه ستونزمن دی، نو زده‌کونکي داسې وپوهوي: که چیرې $\log_a m$ ولرو غواړو د قاعدې په بدلولو سره یعنې $\log_b m$ پیدا کړو. ثبوت یې مرحله په مرحله د زده‌کونکو په فعال ګډون سره پر تخته توضیح او تشریح کړي، وروسته دوه زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړي چې لومړی او دویم مثالونه پر تخته حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته اولارښوونه وکړي. په همدې ډول د لوگاریتم اووم قانون چې د یوه معکوس لوگاریتم پیدا کول دی ورته تعریف او فارمولي شکل یې پر تخته ولیکي. ددې ثبوت هم د زده‌کونکو په فعال ګډون او برخې اخیستنې سره سرته ورسوي. کونښن وکړي چې د ثبوت په وخت کې د پوښتنې او ځواب په توګه د زده‌کونکو پام لوست ته راواړوي. په پای کې د موضوع اړوند مثال د یوه داوطلب زده‌کونکي په واسطه پر تخته حل کړي، چې زده‌کونکي په مطلب پوه شي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست لابنه تحکیم لپاره ددې لوست وروستنی فعالیت یعنې د 172 مخ فعالیت پوښتنې پر تخته ولیکئ او زده کوونکو ته ووايست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، د ستونزو په صورت کې یې تاسو پر تخته حل او توضیح کړئ او زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه د

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

له فارمول تطبیق سره وازمويي:

$$a) \log_{32} 2 = ? \quad b) \log_{27} \sqrt{3} = ?$$

حل:

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{\log_2 2^5} = \frac{1}{5 \cdot \log_2 2} = \frac{1}{5 \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{27} \sqrt{3} = \log_{27} (3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{27} 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{2 \cdot \log_3 3^3} = \frac{1}{2 \cdot 3 \log_3 3} = \frac{1}{6 \cdot 1} = \frac{1}{6}$$

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی هغه فعالیت چې د لوست د تحکیم لپاره درکړل شوی دی داسې حلېږي:

حل:

$$a) \log_{64} 2 = \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{\log_2 2^6} = \frac{1}{6 \cdot \log_2 2} \Rightarrow \log_{64} 2 = \frac{1}{6 \cdot 1} = \frac{1}{6}$$

$$b) \log_4 \sqrt{(25)^6} = \log_4 (25^6)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_4 (25)^6 = \frac{6}{2} \cdot \log_4 25 = 3 \cdot \log_4 25 = 3 \cdot \log_4 5^2 = 3 \cdot 2 \log_4 5 = 6 \log_4 5 = \frac{6}{\log_5 4}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

حل:

$$d) \log_{121} 14641 = \log_{(11)^2} (11)^4 = \frac{4}{2} \log_{11} 11 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$e) \ln x = 2.3026 \cdot \log x = \ln 672000 = 2.3026 \cdot \log 672000 = 2.3026 \cdot \log 6.72 \cdot 10^5 \\ = 2.3026(\log 6.72 + \log(10^5)) = 2.3026(\log 6.72 + 5) = 2.3026 \log 6.72 + 11.513$$

$$f) \ln 0.00927 = 2.3026 \cdot \log 0.00927 = 2.3026 \cdot \log(9.27 \cdot 10^{-3}) = 2.3026 \cdot \log 9.27 + 2.3026 \cdot \log 10^{-3} \\ = 2.3026 \cdot \log 9.27 + 2.3026(-3) \log 10 = 2.3026 \log 9.27 - 6.9078$$

$$g) \ln 0.235 = 2.3026 \log 0.235 = 2.3026 \log(2.35 \cdot 10^{-1}) \\ = 2.3026(\log 2.35 - 1) = 2.306 \cdot \log 2.35 - 2.3026$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

د لوگاریتم قوانین

د درسي کتاب (172) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د لوگاریتم د اتم قانون په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د اتم قانون مطابق پوښتنې حل کړای شي. • زده‌کونکي د اړتیا په وخت نوموړی قانون وکاروي. - پوهنیزې - مهارتي - ذهنيتي	
2- د زده کړې لارې:	انفرادي ، ډلېيز، پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	د اړتیا وړ مواد
4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې وروسته د زده‌کونکو پام لاندې پوښتنو ته راوگرځوي: • څوک ویلای شي، د یوه توان لرونکي عدد لوگاریتم مساوي له څه شي سره دی؟ • څوک د $\sqrt{10}$ لوگاریتمي قیمت پیدا کولای شي؟ • ایا د $\log_{a^n} x$ (قاعدۀ توان لرونکی وي) افادې سره بلډیت لری. کونښن وکړی چې د یوې انگیزې پیدا کولو لپاره ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړی، د ستونزو په صورت کې د هرې پوښتنې ځواب ورته وویاست او هم یادونه وکړی چې د $\log_{a^n} x$ افادې قیمت پیدا کېدای شي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	ښاغلی ښوونکی اتم قانون چې په یوه لوگاریتمي افاده کې قاعدۀ یې توان لرونکی وي کولای شو، لوگاریتمي قیمت یې پیدا کړو چې عبارت دی د قاعدې د توان معکوس ضرب د هغه عدد په لوگاریتمي قیمت کې یعنې: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$ ددې مفهوم له توضیح کولو وروسته ثبوت یې مرحله په مرحله د زده‌کونکو په فعال ګډون سره توضیح او تشریح کړی. ترڅو مطلوب په لاس راشي. وروسته هغه پایلې چې د پورتنی قانون له ثبوت څخه په لاس راځي هریو تشریح او معلومات ورکړی. بیا دوه زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړی چې د لوست اړوند لومړی او دویم مثالونه پر تخته حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی. زده‌کونکي په مناسبو ډلو وېشي چې د کتاب 173 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له بحث او مذاکرې وروسته سرته ورسوي د فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغواړی چې د خپل سرته رسولې فعالیت په برخه کې نورو

ته معلومات ورکړي، دستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

ښاغلی ښوونکی په همدې توگه د معمولي او طبيعي لوگاريتمونو ترمنځ اړيکه د لوگاريتمونو د يوې قاعدې اړول بلې قاعدې ته په گټه اخېستني سره داسې ثبوت کړي چې زده‌کوونکي فعال گډون ولري او بيا يې لومړی مثال پر تخته حل کړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره د لوست دویم مثال پر تخته ولیکي او زده‌کوونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته یې خپلو کتابچو کې حل کړي، بیا یو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې پر تخته یې توضیح او حل کړي. نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي د ورکړ شوو مثالونو په ډول پوښتنې دې پر تخته ولیکي او زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، د کار څارنه وکړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي ترڅو پایله لاسته راشي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

$$a) \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = \log_{3^{-1}} 3^{-4} = \frac{-4}{-1} \log_3 3 = \frac{4}{1} \cdot 1 = 4$$

$$b) \log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$c) \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_{10} 10 = 1$$

$$\log_{10} 100 = 2$$

کرکترستیک او مانتیس

د درسي کتاب (175) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د کرکترستیک او مانتیس په مفهومونو پوه شي. • زده‌کونکي د یوه عدد په لوگاریتمي قیمت کې کرکترستیک او مانتیس تشخیص کړای شي. • زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې کرکترستیک او مانتیس هر یو وکاروي.	- پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
2- د زده کړې لارې: ډله‌ییز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • څوک ویلای شي چې $\log_{10} 100 = ?$, $\log_{10} 1000 = ?$ او $\log_{10} 10000 = ?$ • ووايست چې د پورته عددونو د ارقامو د شمېر او صحیح لوگاریتمي قیمتونو ترمنځ کومه اړیکه یا توپیر لیدل کېږي؟ کونښن وکړي چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي، د ستونزو په صورت کې د صحیح لوگاریتمي او د عددي ارقامو د شمېر توپیر په لنډ ډول ورته ووايست.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لومړی د موضوع تعریف د یوه زده‌کونکي په واسطه داسې ولولئ چې ټول زده‌کونکي یې واورې. له هغه وروسته تاسو په دې برخه کې لنډ معلومات ورکړئ ورته ووايست: په لوگاریتمي قیمتونو کې دوه برخې لیدل کېږي، یو یې صحیح عدد چې کرکترستیک نومېږي، بله یې مانتیس ده چې اعشاري برخه ده. په حقیقت کې د یوه عدد لوگاریتمي قیمت د هغه کرکترستیک او مانتیس له مجموع څخه عبارت دی. زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې هره ډله دې د کتاب د 175 مخ جدول بشپړ کړي او تش ځایونه دې د مناسبو عددونو په واسطه ډک کړي. د ډله‌ییز فعالیت له سرته رسولو وروسته د دوو ډلو استازي راوغوړي چې د خپل ډلې سرته رسولي کار نور و ته توضیح او تشریح کړي د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. وروسته هغه پوښتنې چې په دې اړه د کتاب په 176 مخ کې راغلي، د پوښتنې او ځواب په توګه له زده‌کونکو څخه وپوښتي او صحیح ځوابونه په لاس راوړي او پایله یې توضیح کړي، په پای کې د عدد لیکنې علمي طریقه (scientific notation) ورته	

ولیکې او ورته وویاست هر عدد، د 10 پرتوان یعنې د $N = a \cdot 10^n$ په شکل لیکلای شو، په داسې حال کې چې $1 \leq a < 10$ او n یو تام عدد دی، پوره معلومات ورکړی او په دې اړه لومړی مثال چې درې اجزای لري، په ترتیب حل او زده‌کونکي ورباندې پوه کړی.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاینه تحکیم او زده‌کړې لپاره دویم مثال پر تخته ولیکې او زده‌کونکو ته وویاست چې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، په پای کې یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغوړی چې پر تخته یې حل کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی او نور زده‌کونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي د کتاب د 177 مخ دریم مثال پر تخته ولیکې او زده‌کونکو ته وویاست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، همدارنګه د 0.995, 56.784, 89.435 او 0.0789 عددونو کرکترستیک په شفاهي توګه وپوښتی او زده‌کونکي وازموي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې لوګاریتمونو کرکترستیک په شفاهي ډول وویاست؟

a) $\log 0.9560$	b) $\log 956.0$
c) $\log 2345$	e) $\log 9560$
d) $\log 3.875$	f) $\log 0.0009560$

حل:

(a): له یوه څخه کوچنی عدد کرکترستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري علامې ښي خوا د صفرونو له شمېر څخه د یوه په اندازه زیات دی، څرنگه چې د اعشاري ښي لوري ته صفرونه نشته، نو کرکترستیک یې منفي یو دی.

(b): که چیرې د یوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نو د هغه عددونو لوګاریتم کرکترستیک مساوي دی د صحیح برخې د ارقامو شمېر منفي یو دی، نو کرکترستیک یې 2 دی.

(c): څرنگه چې د صحیح ارقامو شمېر 4 دي، نو کرکترستیک یې 3 دی.

(d): بیا هم د صحیح ارقامو شمېر 1 او که یو ورڅخه کم شي، نو کرکترستیک یې صفر دی.

(e): کرکترستیک 3 دی.

(f): د اعشاري علامې ښي لوري صفرونه 3 دي، که یو ورسره جمع شي 4 کېږي، څرنگه چې عدد له یوه څخه کوچنی دی، نو کرکترستیک یې 4- دی.

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

د لوگاریتم جدول

د درسي کتاب (179) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي په لوگاریتمي جدول کې د مانتيسا پيدا کولو په طريقه پوه شي. • زده‌کونکي لوگاریتمي جدول وکارولای شي او د عددونو مانتيسا قيمت به پيدا کړای شي. • زده‌کونکي د اړتيا په وخت کې په لوگاریتمي محاسبو کې له جدول څخه گټه واخېستلای شي. - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	
2- د زده کړې لارې:	تشریحي، ډله‌ييز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...
3- مرستندويه مواد:	د اړتيا وړ مواد
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوی او وپوښتی: • د يوه عدد په لوگاریتمي قيمت کې کرکترستيک برخه څه ډول پيدا کولای شو؟ • ایا د مانتيس برخې ټاکلو لپاره هم کومه طريقه شته؟ • د $0.501, 5.01, 50.1$ او 501 عددونو هر يوه کرکترستيک وټاکئ و وایاست د کرکترستيکونو توپیر په څه شي کې دي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې د تېر لوست په مرسته لنډ معلومات ورکړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې):	بناغلی ښوونکی د مانتيس د پيدا کولو طريقې پوهېدو لپاره لومړی د لوگاریتمي عدد دوه برخې یعنې صحیح او اعشاري برخې ورته تشریح کړی، ورته و وایاست صحیح برخه یا مشخصه د ارقامو د شمېر له مخې په یوه طريقه سره چې مخ کې لوستل شوې ده او مانتيسا یوازې او یوازې د جدول له مخې په یوه خاصه طريقه سره پيدا کېږي، له جدول څخه پرته بله کومه طريقه نه لري چې د یوه عدد، د مانتيسا برخه پيدا شي. جدولونه مخکې جوړ شوي چې د مختلفو ارقامو درلودونکي دي، یعنې ځینې 7 رقمي، ځینې 5 رقمي، ځینې 4 او یا 3 رقمي اعشاري خانې لري. چې د مانتيسا پيدا کولو لپاره کار ورڅخه اخېستل کېږي، په جدول کې ستون او سطر په نښه شوي دي چې د ستون او سطر له مخې مانتيسا داسې ټاکل کېږي، په کوم عدد کې چې د هغو تقاطع مطابقت کوي، مانتيسا بلل کېږي، چې دا موضوع په درسي کتاب کې هم په څرگنده توگه تشریح شوې ده. له څرگندونو وروسته اړوند مثال یې ورته حل کړی د جدول له مخې د 76 سطر او 5 ستون د تقاطع عدد چې له مانتيسا څخه عبارت ده په گوته کړی.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د تحکیم لپاره د کتاب د 180 مخ دویم او دریم مثالونه پر تخته ولیکي او زده‌کوونکو ته ووايست چې له کتاب څخه د نه استفادې په صورت کې یې په خپلو کتابچو کې حل کړي. بیا دې دوه زده‌کوونکي په وار سره مثالونه پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو د زده‌کوونکو د ازموینو لپاره د کتاب څلورم مثال عددونه پر تخته ولیکي چې لوگاریتمي قیمتونه یې به خپلو کتابچو کې پیدا کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. دلاندې لوگاریتمونو کرکترستیک په شفاهي ډول ووايست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

a) $\log 222$	b) $\log 0.921$
c) $\log 928$	d) $\log 527$
e) $\log 0.024$	f) $\log 2400$
h) $\log 0.00024$	j) $\log 24$

حل:

(a): کرکترستیک یې 2 او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کوو، یعنې:

$$\log 222 = \log(2.22 \cdot 10^2) = \log 2.22 + 2$$

اوس د 2.22 عدد مانتیس د جدول په 22 سطر او 2 ستون کې لټوو چې د هغو تقاطع له 3464 عدد سره مطابقت کوي، په پای کې لوگاریتم داسې محاسبه کوو:

$$\log 222 = \log 2.22 + 2 = 0.3436 + 2 = 2.3436$$

(b): د b جز کرکترستیک 1- دی.

$$\log 0.921 = \log(9.21 \cdot 10^{-1}) = \log 9.21$$

د 9.21 عدد مانتیس په جدول کې د لومړي ستون او 92-ام سطر د تقاطع عدد دی چې عبارت دی له 9643 څخه یعنې:

$$\log 0.921 = \log 9.21 - 1 = 0.9643 - 1 = \bar{1}.9643$$

(c): د c جزء کرکترستیک 2 دی.

$$\log 928 = \log(9.28 \cdot 10^2) = \log 9.28 + 2$$

د 9.28 مانتیس د لوگاریتم جدول د اتم ستون او 92-ام سطر د تقاطع عدد دی، یعنې: $\log 9.28 = 0.9814$

$$\log 928 = \log 9.28 + 2 = 0.9675 + 2 = 2.9675$$

(d): د d جزء کرکترستیک 2 دی.

$$\log 527 = \log(5.27 \cdot 10^2) = \log 5.27 + 2$$

د 5.27 عدد مانتیس په جدول کې د 7-ام ستون او 52-ام سطر په تقاطع کې گورو، معلومېږي چې:

$$\log 527 = \log(5.27 + 2) = 0.7218 + 2 = 2.7218$$

(e) د e جزء کرکترستیک -2 دی.

$$\log 0.024 = \log 2.4 \cdot 10^{-2} = \log 2.4 - 2$$

خرنگه چې $\log 2.4 = 0.3802$ دی، نو:

$$\log 0.024 = \log 2.4 - 2 = 0.3802 - 2 = \bar{2}.3802$$

(f) د f جزء کرکترستیک 3 دی.

$$\log 2400 = \log(2.4 \cdot 10^3) = \log 2.4 + 3$$

خرنگه چې $\log 2.4 = 0.3802$ دی، نو:

$$\log 2400 = \log 2.4 + 3 = 0.3802 + 3 = 3.3802$$

(h) د h جزء کرکترستیک -4 دی.

$$\log 0.00024 = \log(2.4 \cdot 10^{-4}) = \log 2.4 - 4$$

د e او f جزونو څخه پوهېږو چې $\log 2.4 = 0.3802$ دی، نو:

$$\log 0.00024 = \log 2.4 - 4 = 0.3802 - 4 = \bar{4}.3802$$

(j) د j جزء کرکترستیک 1 دی.

$$\log 24 = \log(2.4 \cdot 10) = \log 2.4 + 1 = 0.3802 + 1 = 1.3802$$

2. د لاندې لوگاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

a) $\log(2.73)^3$

b) $\log \sqrt[5]{0.0762}$

حل:

a) $\log(2.73)^3 = 3 \log(2.73) = 3(0.4362) = 1.3086$

$$\begin{aligned} b) \log \sqrt[5]{0.0762} &= \log(0.0762)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log(0.0762) = \frac{1}{5} \log(7.62 \cdot 10^{-2}) = \frac{1}{5} [\log 7.62 - 2] \\ &= \frac{1}{5} [0.8820 - 2] = \frac{1}{5} [-1.118] = -0.2236 \pm 1 = \bar{1}.7764 \end{aligned}$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log 481 = 2.6821$$

$$\log N = 1.6580$$

$$N = ?$$

انتي لوگاریتم

د درسي کتاب (183) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د انتي لوگاریتم په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي وکړای شي د ورکړل شوو لوگاریتمونو له مخې اړوند عددونه پیدا کړي. • زده‌کونکي د اړتیا په وخت کې له نوموړي عمليې څخه کار واخلې او په ځان باور پیدا کړي. - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	
2- د زده کړې لارې: ډله‌بیز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد	
4- د ورودی برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د لاندې پوښتنو په کولو سره د کتاب ورودی برخې ته راوگرځوي: • څوک ویلای شي که لوگاریتمي قیمت ولرو د اړوند عدد پیدا کول ممکن دی؟ (هو) • د لوگاریتمي کوم قیمت له مخې ویلای شو چې عدد څو رقمي دی؟ (د کرکترستیک له مخې) کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې تاسو لنډ معلومات ورکړئ بیا د لوست فعالیت پیل کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی: لومړی د انتي لوگاریتم تعریف ورته وویاست او بیا د داسې مثال په ورکولو سره تشریح کړي که چیرې $\log_{10} 20 = 1.30103$ وي، نو 1.30103 د 20 د عدد لوگاریتم بلل کېږي او د 20 عدد، د 1.30103 انتي لوگاریتم بلل کېږي. وروسته زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې هره ډله د کتاب 183 مخ فعالیت د بحث او مشورې وروسته سرته ورسوي، د کار څارنه وکړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي په پای کې د دوو ډلو استازي تختې ته راوغواړي چې په وار سره خپل سرته رسولي فعالیت نورو ته توضیح کړي او تېروتنې اصلاح شي. ورپسې اړوند مثال پر تخته حل کړي او په جدول کې د عدد د پیدا کولو طریقه د پوښتنې او ځواب په توګه وروښیاست چې زده‌کونکي د انتي لوگاریتم په پیدا کولو کې مهارت پیدا کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره دویم او دریم مثالونه پر تخته باندې ولیکئ، زده‌کوونکو ته ووايست چې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د زیات ستونزو په صورت کې تاسو یې بیا پر تخته حل او تشریح کړئ چې زده‌کوونکي تېروتنې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو د زده‌کوونکو د ازموینو لپاره د کتاب څلورم مثال عددونه پر تخته ولیکي یو داوطلب زده‌کوونکی راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي او لوست وازمويي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې هر یوه انتي لوگاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \text{anti log } 4.9479$$

$$b) \text{anti log}(-5.0521)$$

حل (a):

$$\text{anti log } 4.9479 = N \Rightarrow \log N = 4.9479$$

د نوموړي لوگاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9479 د لوگاریتم په جدول کې پیدا کوو، په جدول کې گورو چې د کوم سطر او ستون تقاطع دی، دغه د سطر او ستون د تقاطع عدد داسې لیکو چې د ستون عدد اړوند عدد ښي لوري ته قرار ولري چې عبارت دی له 8.87 عدد څخه، یعنې: $\log 8.87 = 0.9497$

څرنگه چې کرکترستیک 4 دی، نو د صحیح رقمونو شمېر 5 دی، په پایله کې $N = 88700$ دی:

$$\text{anti log } 4.9497 = 88700$$

حل (b):

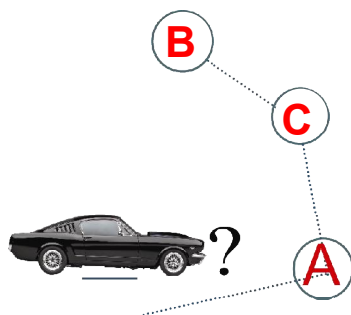
$$\text{anti log}(-5, 0521) = N \Rightarrow \log N = -5, 0521, N = ?$$

څرنگه چې مانتیسا باید منفي نه وي، ددې لپاره لیکو: $(-5 - 1 + 1 - 5.052) = -6 + 9479$

اوس د نوموړي لوگاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9497 د لوگاریتم په جدول کې پیدا کوو چې عبارت دی له 8.87 عدد څخه، نو په پایله کې:

$$N = (8,87 \cdot 10^{-6}) = 0.00000887 \Rightarrow N = 0.00000887$$

$$\Rightarrow \text{anti log}(-5, 0521) = 0.00000887$$



پنځم څپرکی: لوگاریتم

خطي انټرپولېشن

د درسي کتاب (185) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې: • زده‌کونکي د خطي انټرپولېشن په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د هغو عددونو لوگاریتم چې په جدول کې نشته د انټرپولېشن په طريقه پيدا کړي. • زده‌کونکي د اړتيا په وخت کې د خطي انټرپولېشن طريقه په مناسب ډول وکاروي.	- پوهنيزه - مهارتي - ذهني
2- د زده کړې لارې: ډله‌يز، انفرادي، پوښتنه او ځواب...	
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد (چارت)	
4- د ورودې برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب ورودې برخې ته راوگرځوي، بيا د A، B او C ټکي پر تخته رسم او له زده‌کونکو څخه وپوښتي: که د C ټکی د A او B ټکو منځنۍ (وسطي) ټکي وي: • د A او C ټکو ترمنځ فاصله په همدې ثابت سرعت سره په څومره وخت کې وهي؟ • د C او B ټکو ترمنځ فاصله په همدې ثابت سرعت سره په څومره وخت کې وهي؟ ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي له هغه پرته تاسو ووايست چې د A او B ښارونو ترمنځ د وخت په نيمايي کولو سره د A او C، همدارنگه د C او B ښارونو ترمنځ وختونه ټاکل کېدای شي.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی: زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د کتاب د 185 مخ فعاليت ورکړي چې له بحث او مذاکرې وروسته يې سرته ورسوي او ځوابونه يې پيدا کړي. بيا د دوو يا دريو ډلو استازي تختې ته راوغواړي چې خپل سرته رسولی فعاليت نورو ته تشرېح او توضيح کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. وروسته تاسو دا پايله که چيرې د يو نامعلوم قيمت پيدا کولو لپاره چې د دوو معلومو عددونو ترمنځ پروت وي، د معلومو عددونو په مرسته د نامعلوم عدد قيمت پيدا کړو، په لنډ ډول توضيح کړي او خطي انټرپولېشن ورته تعريف، زده‌کونکي د هغه په مفهوم پوه کړي. په پای کې د هغه په اړوند لومړی مثال چې په هغه کې خطي انټرپولېشن توضيح شوې ده، پر تخته مرحله په مرحله يعنې د عددونو او مانتيسونو توپيرونو پيدا کول او تناسب جوړول د زده‌کونکو په فعال گډون سره سرته ورسوي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لارښه تحکیم او پوهېدو لپاره د کتاب دویم مثال پر تخته ولیکئ ورته وویاست چې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. وروسته یو داوطلب زده کوونکی تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کړې په هکله ډاډمن شي چې ایا زده کوونکو لوست زده کړی او که نه؟ د کتاب دریم مثال پر تخته ولیکئ او یو زده کوونکی راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي همدارنگه څو پوښتنې په شفاهي توګه وپوښتئ او زده کوونکي وازمويي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

په لاندې اړیکو کې د X او Z قیمتونه پیدا کړئ.

$$a) z = \log 0.001582 \quad b) x = \log 6.289$$

حل (a):

$$\log 0.001582 = \log(1.582 \cdot 10^{-3}) = \log 1.582 - 3$$

څرنگه چې د 1.582 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، نو له خطي انټرپولېشن څخه کار اخلو یعنې د 1.580 او 1.590 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

نو څرنگه چې: $1,580 < 1,582 < 1,590$ دی.

$$\left. \begin{aligned} \log 1.580 &= 0.1987 \\ \log 1.590 &= 0.2014 \end{aligned} \right\}$$

$$\log 1.580 < \log 1.582 < \log 1.590$$

$$0.1987 < \log 1.582 < 0.2014$$

له بلې خوا له جدول څخه پوهېږو چې:

$$\text{که } \log 1.582 = x \text{ سره وښیو، نو } 0.1987 < x < 0.2014$$

د عددونو او لوګاریتمونو د توپیر په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\begin{array}{cc} \text{لوګاریتمونه} & \text{عدونه} \\ \left[\begin{array}{cc} 1.590 & 0.2014 \\ 0.002 \left[\begin{array}{cc} 1.582 & x \\ 1.580 & 0.1987 \end{array} \right] d & 0.0027 \end{array} \right] 0.01 & \end{array}$$

$$\frac{d}{0.0027} = \frac{0.002}{0.01} \Rightarrow d = \frac{0.0027 \cdot 0.002}{0.01} = 0.00054$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.1987 + d = 0.1987 + 0.00054 = 0.1992 \Rightarrow \log 1.582 = 0.1992$$

$$= \log 0.001582 = \log 1.582 - 3 = 0.1992 - 3 = -2.8008 \pm 1$$

$$\Rightarrow z = \log 0.001582 = -3 + 0.1992 = \bar{3}.1992$$

حل (b):

$$x = \log 6.289$$

د 6.289 عدد لوگاریتم په جدول کې نشته، خو د 6.280 او 6.290 عددونو لوگاریتمونه په جدول کې شته، یعنې:

$$\log 6.280 = 0.7980$$

$$\log 6.290 = 0.7987$$

پوهېږو چې:

$$6.280 < 6.289 < 6.290$$

$$\log 6.280 < \log 6.289 < \log 6.290$$

$$0.7980 < \log 6.289 < 0.7987$$

که $\log 6.289 = x$ وضع کړو، نو $0.7980 < x < 0.7987$

عددونه	لوگاریتمونه
6.290	0.7987
$0.01 \left[\begin{array}{c} 6.289 \\ 0.009 \left[\begin{array}{c} 6.289 \\ 6.280 \end{array} \right] d \end{array} \right] 0.0007$	x
6.280	0.7980

$$\frac{d}{0.0007} = \frac{0.009}{0.01} \Rightarrow d = \frac{0.0007 \cdot 0.009}{0.01} = 0.00063$$

$$0.7980 + d = 0.7980 + 0.00063 = 0.7986 \Rightarrow x = \log 6.289 = 0.7986$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

$$5^x = 5^{2^{\frac{1}{x-2}}}$$

د لوگاریتمی او اکسپوننشیل معادلو حل (اکسپوننشیل معادلې)

د درسي کتاب (189) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د اکسپوننشیل معادلو په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي اکسپوننشیل معادلې حل کړای شي. • زده‌کونکي د اکسپوننشیل معادلو د حل طریقه په ریاضیکي مسایلو کې وکاروي او په ځان باور پیدا کړي.	- پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
2- د زده کړې لارې:	انفرادي، تشریحي، پوښتنه او ځواب...
3- مرستندویه مواد:	د اړتیا وړ مواد
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي، داسې چې د وړودي برخې معادلې پر تخته ولیکي: • څوک ویلای شي د $2x + 4 = 20$ په معادله کې مجهول څه شی ده؟ • د $5^x = 5^{2^{\frac{1}{x-2}}}$ په معادله کې مجهول څه شی ده؟ کونښن وکړی چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړی، د ستونزو په صورت کې په لنډ ډول ورته ووايست په دواړو معادلو کې x مجهول دی، خو په لومړي معادله کې x د یو حد ضربی عامل په ډول او په دویمه معادله کې x د مساوات دواړه خواوو ته د توان په شکل دی او په دواړو معادلو کې د x لپاره هغه قیمتونه پیدا کوو چې د معادلو تعادل برقرار شي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	ښاغلی ښوونکی د $5^x = 5^{2^{\frac{1}{x-2}}}$ اکسپوننشیل معادله پر تخته ولیکي او زده‌کونکو ته ووايست چې په دې اړه فکر وکړی بیا له زده‌کونکو څخه وپوښتی: د x په کومو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې یو له بل سره مساوي کېږي؟ څرنگه کولای شو په دې ډول معادلو کې د x مجهول لپاره قیمت پیدا کړو؟ ښايي چې ځینې زده‌کونکي ځوابونه ووايي، خو بیا هم د اکسپوننشیل معادلو تعریف ورته وکړی او داسې ورته ووايست: د اکسپوننشیل معادلو د حل لپاره د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کوو او بیا د توان د قوانینو له مخې چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم خامخا یو له بل سره مساوي کېږي، توانونه یو له بله سره مساوي ونیسی او حل یې کړی. بیا د تعریف او راکړل شوې معلومات په اړه د کتاب لومړی مثال پر تخته ولیکي او د زده‌کونکو په فعال ګډون سره مرحله

په مرحله پر تخته حل کړئ، ترڅو زده‌کونکي د قاعدو په مساوي کولو پوه شي، او قاعدې مساوي کړای شي، په پایله کې د مجهول توان لپاره قیمت پیدا کړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لارښه تحکیم او پوهېدو لپاره د $8^{3x-1} = 2^4$ اکسپوننشیل معادله پر تخته ولیکئ او زده‌کونکو ته ووايست چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، وروسته یو داوطلب زده‌کونکي تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کونکي د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادلې په واسطه وازموي چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

په لاندې اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \quad (11)^{3x-1} = 11$$

$$b) \quad 7^{2x-1} = 3^{x+3}$$

حل (a):

$$(11)^{3x-1} = 11 \Rightarrow 11^{3x} \cdot 11^{-1} = \frac{11^{3x}}{11} = 11 \Rightarrow 11^{3x} = 121 \Rightarrow 11^{3x} = 11^2$$

قاعدې مساوي دی، نو توانونه هم مساوي کېږي:

$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

حل (b):

$$7^{2x-1} = 3^{3x+3} \Rightarrow 7^{2x} \cdot 7^{-1} = 3^{3x} \cdot 3^3 \Rightarrow \frac{7^{2x}}{7} = 27 \cdot 3^x \Rightarrow 7^{2x} = 7 \cdot 27 \cdot 3^x \Rightarrow 7^{2x} = 189 \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow \log 7^{2x} = \log(189 \cdot 3^x) \Rightarrow 2x \cdot \log 7 = \log 189 + \log 3^x$$

$$\Rightarrow 2x(0.8451) = 2.2765 + x \cdot \log 3$$

$$\Rightarrow 1.6902x = 2.2765 + x(0.4771) = 1.6902x - 0.4771x = 2.2765$$

$$\Rightarrow 1.2131x = 2.2765 \Rightarrow x = \frac{2.2765}{1.2131} \Rightarrow x = 1.8765$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

لوگاریتمي معادلې

د درسي کتاب (190) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

• زده‌کونکي په لوگاریتمي معادلو کې د متحول یا مجهول په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي لوگاریتمي معادلې حل کړای شي او طریقه یې وکاروي. • زده‌کونکي لوگاریتمي معادلې د اړتیا په وخت کې په ریاضیکي مسایلو کې وکاروي او خپلې ستونزې په خوښۍ سره حل کړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
دله‌یز، انفرادي، تشریحي، پوښتنه او ځواب ...	2- د زده کړې لارې:
د اړتیا وړ مواد	3- مرستندویه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کونکو پام د وړودي برخې لاندې پوښتنو ته راوگرځوي: • د $8^{3x-1} = 2^4$ معادله د کومې معادلې په نامه یادېږي؟ • د $\log_2(x^2 - 1) = 3$ معادله د کومې معادلې په نامه یادېږي؟ • د $\log_2(x^2 - 1) = 3$ معادلې معادل شکل لیکلای شی؟ ښاغلی ښوونکی کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړي د ستونزو په صورت کې تاسو لومړی ته د اکسپوننشنیل معادله دویمې ته لوگاریتمي معادله و وایي او د دویمې معادلې، معادل شکل چې له $x^{2-1} = 3^2$ څخه عبارت دی او د لوست د پیل لپاره ښه انگیزه کېدای شي، ولیکي.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لومړی لوگاریتمي افادې یا هغه لوگاریتمي معادلې چې مجهول لرونکی وي، زده‌کونکي ته تعریف او د لوگاریتمي معادلو ډولونه وروښایست، بیا د زده‌کونکو په فعال ګډون سره لومړی د څو لوگاریتمي معادلو، معادل شکلونه پیدا کړي او وروسته د هغه د حل طریقه د لوگاریتمي قوانینو له مخې ساده او بیا چې د اکسپوننشنیل په معادله بدلېږي، طریقه یې کار وکړي. د اکسپوننشنیل معادلو د حل طریقي په کار اخېستنې سره د مجهول قیمت په لاس راوړي. د پوښتنې او ځواب په ډول توضیح او تشریح کړي او ورپسې د لوست لومړی مثال پر تخته د زده‌کونکو په فعال ګډون سره مرحله په مرحله حل کړي او د x قیمتونه په لاس راوړي. وروسته دوه داوطلب زده‌کونکي تختې ته راوغواړي چې دویم او درېم مثالونه په وار سره پر تخته حل کړي، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې لارښوونه وکړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښونکی د لوست د لاینه تحکیم او پوهېدو لپاره د کتاب څلورم مثال پر تخته ولیکي، څرنگه چې پوښتنه یوه اندازه ستونزمنه ده، لومړی یو څه معلومات ورکړي، وروسته یو زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې پر تخته یې حل کړي او نور زده‌کوونکي دې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کوونکي دې د $\log(x^2 + 36) - 2\log(-x) = 1$ معادلې په واسطه وارزوي چې په خپلو کتابچو کې حل او د x قیمت په لاس راوړي.

حل:

$$\log \frac{x^2 + 36}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \frac{x^2 + 36}{x^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 36 = 10x^2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 10x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 36, \quad x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$$

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

په لاندې لوگاریتمي معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

c) $\log \sqrt{x} + 3 = 4$

d) $\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$

حل (c):

$$\log \sqrt{x} + 3 = 4 \Rightarrow \log \sqrt{x} = 4 - 3 \Rightarrow \log \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = 10^1 \Rightarrow \sqrt{x} = 10 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 10^2 \Rightarrow x = 100$$

حل (d):

$$\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$$

$$\frac{x-1}{x-2} = 5^2 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = 25$$

$$x-1 = 25(x-2) \Rightarrow x-1 = 25x-50$$

$$x-25x = -50+1 \Rightarrow -24x = -49$$

$$24x = 49 \Rightarrow x = \frac{49}{24}$$

$$\left. \begin{array}{l} 28.8 \\ 78.8 \\ 3.17 \cdot 88.2 \end{array} \right\} = ?$$

پنځم څپرکی: لوگاریتم

د ریاضیکي عملیو په سرته رسولو کې له لوگاریتم څخه کار اخیستنه

د درسي کتاب (193) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي د زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د ریاضیکي عملیو په سرته رسولو کې له لوگاریتم څخه د کار اخیستنې په طریقه پوه شي. • د هرې عملیې اړوند لوگاریتمي قانون تشخیص، تطبیق او پوښتنې حل کړای شي. • ددې عملیو په سرته رسولو او د لوگاریتمي قوانینو تطبیق په کارولو خوښي ښکاره کوي.	
2- د زده کړې لارې: انفرادي، ډله ییز، تشریحي، پوښتنه او ځواب...	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوگرځوي او وپوښتي: • ایا په ضرب او تقسیم کې د اعشاري عددونو عملیې د لوگاریتم په کارولو سره سرته رسولای شو؟ • ایا د لوگاریتم په واسطه د توان او جذر عملیې په اسانۍ سره سرته رسولای شو؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کونکو څخه په لاس راوړئ، پرته له هغه تاسو ځوابونه ورکړئ، ورته وواياست. هو کولای شو د لوگاریتم په مرسته پورتنۍ عملیې په اسانۍ سره سرته ورسوو.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی لومړی یو زده کونکی تختې ته راوغواړي چې په لوگاریتم کې د ضرب قانون پر تخته ولیکي، وروسته ورته وواياست چې د کتاب لومړۍ مثال یعنې د ضرب د حاصل لوگاریتم په مرسته له جدول څخه په کار اخیستنې حل کړي. زده کونکی پر تخته کار کوي. په پای کې لیدل کېږي چې د لاس ته راغلې مانتیس عدد په جدول کې نشته، ورته وواياست چې د انټرپولېشن په مرسته د لوی او کوچني مانتسونو عددونو په پام کې نیولو سره اړونده عدد په لاس راوړئ. زده کونکي له تېر لوست څخه په کار اخیستنې سره عملیې سرته رسوي او مطلوب په لاس راوړي، وروسته په دې هکله تاسو د مرحلو په پام کې نیولو سره لنډ معلومات ورکړئ. په همدې ډول یو بل زده کونکی راوغواړي چې په لوگاریتم کې د یو خارج قسمت پیدا کولو قانون پر تخته ولیکي، لکه په ضرب کې د قانون ټولې مرحلې دې د کتاب په اړوند مثال باندې سرته ورسوي. وروسته تاسو د ټولو مرحلو په پام کې نیولو سره لنډ معلومات ورکړئ چې زده کونکي د تقسیم په عملیه کې له لوگاریتم څخه په کار اخیستنې سره پوه شي.	

همدارنگه دریم داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ ورته ووايست چې د لوگاریتم د توان لرونکي عددونو قانون پر تخته وليکي او د همدې قانون په اړوند مثال پر تخته حل کړي. د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ. زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د کتاب د 194 او 195 مخونو فعالیتونه چې ضرب او تقسیم دي ورکړئ چې له بحث او مذاکرې وروسته هره ډله فعالیتونه سرته ورسوي، وروسته د دوو ډلو استازي تختې ته راوغواړئ چې یو یې د ضرب په برخه کې او بل یې د تقسیم په برخه کې خپل د ډلې کار نورو ته توضیح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لارښوونې تحکیم لپاره د کتاب 195 مخ فعالیت چې یو توان لرونکی عدد دی پر تخته وليکئ او زده‌کونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، وروسته یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي او نور زده‌کونکي دې خپلې تېروتنې اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ښاغلی ښوونکی د زده‌کړې په هکله ډاډمن شي، نو زده‌کونکي دې د لاندې شفاهي پوښتنو په واسطه وازموي:

- آیا کولای شو د ضرب د عملیې د ساده کولو لپاره له لوگاریتم څخه کار واخلو؟
- آیا د تقسیم د عملیې د اسانه کولو لپاره له لوگاریتم څخه کار اخیستلای شو؟
- آیا د لوگاریتم په واسطه د توان لرونکي عددونو محاسبه سرته رسولای شو؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي.

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې د ضرب حاصل د لوگاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

حل:

$$\log 0.097 \cdot 7.78 = \log 0.097 + \log 7.78 = \log(9.7 \cdot 10^{-2}) + \log 7.78$$

$$= \log 9.7 + \log 7.78 - 2 = 0.9868 + 0.8910 - 2$$

$$1.8778 - 2 = \pm 1 - 0.1222 = -1 + 0.8778 = \bar{1}.8778$$

$$\text{anti log}(-0.1222) = \text{anti log}(-1.8778)$$

$$\text{anti log}(-1) = 10^{-1}$$

$$\text{anti log}(-0.1222) = 7.55 \cdot 10^{-1} = 0.755 = \bar{1}.8778$$

$$\text{anti log}(-0.1222) = 0.755 \Rightarrow 0.097 \cdot 7.78 = 0.755$$

2. لاندې د تقسيم حاصل د لوگاريتم په واسطه حساب كړئ.

$$a) \frac{8}{737} = ? \quad b) \frac{32.2}{25.1} = ?$$

حل (a):

$$\begin{aligned} \log \frac{32.2}{25.1} &= \log 32.2 - \log 25.1 = \log 3.22 \cdot 10 - \log 2.51 \cdot 10 \\ &= \log 3.22 + \log 10 - \log 2.51 - \log 10 = \log 3.22 + 1 - \log 2.51 - 1 \\ &= 0.5079 - 0.3997 = 0.1082 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 0.1082 = 1.28 \Rightarrow \frac{32.2}{25.1} = 1.28$$

حل (b):

$$\begin{aligned} \log \frac{32.2}{25.1} &= \log 32.2 - \log 25.1 = \log 3.22 \cdot 10 - \log 2.51 \cdot 10 + 1 - 1 \\ &= \log 3.22 + 1 - \log 2.51 - 1 = 0.5079 - 0.3997 = 0.1082 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 0.1082 = 1.28 \Rightarrow \frac{32.2}{25.1} = 1.28$$

3. لاندې توان لرونکي عدد د لوگاريتم په واسطه محاسبه كړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(964)^2} = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \log (964)^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} \log 964 = \frac{2}{3} \log (9.64 \cdot 10^2) = \frac{2}{3} \log 9.64 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot 0.9841 + \frac{4}{3} \\ &= 0.6560 + 1.3333 = 1.9893 = 0.9893 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{anti log } 1.9893 = 9.76 \cdot 10 = 97.6 \Rightarrow (964)^{\frac{2}{3}} = 97.6$$

د پنځم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (شپږ درسي ساعتونه)

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړئ. کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$ مساوي له څو سره دی؟

- a) 4 **b) -4** c) 3 d) -3

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

- a) $\frac{1}{4}$ **b) 81** c) $\sqrt{81}$ d) -4

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قیمت په لاس راوړئ.

- a) 0 b) 4 **c) 6** d) 9

4. د x قیمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

- a) 2 b) 3 c) 4 **d) 13.5**

5. $\log_2 16 = ?$

- a) 4** b) 3 c) 5 d) -4

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

- a) 3 **b) -3** c) 4 d) 5

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له :

- a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ **c) 1** d) -1

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

- a) $x = -3$ b) $x = 9$ c) $x = -9$ **d) $x = 3$**

9. د $\log 234.21$ مشخصه یا کرکترستیک عبارت دی له:

- a) 0 b) 1 **c) 2** d) 3

10. د یوه عدد د لوگارېتم معکوس عبارت دی له:

- a) $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ b) $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ **c) $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$** d) هیڅ یو

1. په لاندې معادلو کې د x قیمت پيدا کړئ

a) $3^x = 3^{3x+2}$

b) $3^{2x} = 9^{4x-1}$

c) $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$

d) $16^{x+1} = 64^{x-2}$

e) $15^{2x-1} = 7^{x+1}$

f) $\log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x$

g) $\log(4x-3) = 2 - \log 20$

h) $\log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

حل (a):

$$3^x = 3^{3x+2} \Rightarrow 3x+2 = x \Rightarrow 3x-x+2=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$$

حل (b):

$$3^{2x} = 9^{4x-1} \Rightarrow 3^{2x} = (3^2)^{4x-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{2(4x-1)} \Rightarrow 2(4x-1) = 2x$$

$$8x-2 = 2x \Rightarrow 8x-2x = 2 \Rightarrow 6x = 2$$

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

حل (c):

$$\log_3(x+2) = 2 \log_3 9$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

که چیرې په لوگاریتم کې قاعدې سره برابر وي، نو خپله اعداد هم سره برابر وي، نو:

$$x+2 = 9^2 = 81$$

$$x = 81 - 2 = 79 \Rightarrow x = 79$$

حل (d):

$$16^{x+1} = 64^{x-2}$$

$$((4)^2)^{x+1} = ((4)^3)^{x-2} \Rightarrow 4^{2(x+1)} = 4^{3(x-2)} \Rightarrow 2x+2 = 3x-6 \Rightarrow 8 = x \Rightarrow x = 8$$

حل (e):

$$(15)^{2x-1} = 7^{x+1} \Rightarrow \log(15)^{2x-1} = \log 7^{x+1} \Rightarrow (2x-1)\log 15 = (x+1)\log 7$$

$$\Rightarrow (2x-1)(1.1761) = (x+1)(0.8451) \Rightarrow 2.3522x - 1.1761 = 0.8451x + 0.8451$$

$$\Rightarrow 2.3522x - 0.8451x = 1.1761 + 0.8451 \Rightarrow 1.5071x = 2.0212 \Rightarrow x = \frac{2.0212}{1.5071}$$

حل (f):

$$\log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x$$

$$\log \sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \log x = 1 \Rightarrow \log \sqrt{x+1} + \log x^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\log(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}) = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x} = 10^1$$

$$(x+1) \cdot x = 100 \Rightarrow x^2 + x - 100 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-100) = 1 + 400 = 401$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{401}}{2}$$

,

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{401}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 20.02}{2} = \frac{19.02}{2} = 9.51$$

,

$$x_2 = \frac{-1 - 20.02}{2} = \frac{-21.02}{2} = -10.51$$

حل (g):

$$\log(4x-3) = 2 - \log 20 \Rightarrow \log(4x-3) + \log 20 = 2$$

$$\log[(4x-3) \cdot 20] = 2 \Rightarrow 20(4x-3) = 10^2$$

$$80x - 60 = 100 \Rightarrow 80x = 160 \Rightarrow x = 2$$

حل (h):

$$\log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2 \Rightarrow \log_5 \frac{x-1}{x-2} = \log_5 2$$

څرنگه چې قاعدې سره مساوي دي، نو خپله لوگاریتمي عددونه هم سره مساوي دي:

$$\frac{x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow x-1 = 2x-4$$

$$x-1-2x+4=0 \Rightarrow -x+3=0 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3$$

2- لاندې لوگاریتمي افادې د لوگاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$$a) \log_8 3\sqrt{4} = ?$$

$$b) \log_3 \frac{1}{243} = ?$$

$$c) \log_{10} \sqrt[4]{100} = ?$$

$$d) \log\left(\frac{8}{\sqrt{128}}\right) = ?$$

$$e) \log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$$

حل (a):

$$\log_8 \sqrt[3]{4} = \log_{2^3} 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

حل (b):

$$\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 1 - \log_3 243 = 0 - \log_3 3^5 = -\log_3 3^5 = -5 \log_3 3 = -5 \cdot 1 = -5$$

حل (c):

$$\log_{10} \sqrt[4]{100} = \log_{10} (100)^{\frac{1}{4}} = \log_{10} 10^{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

حل (d):

$$\begin{aligned} \log \frac{8}{\sqrt{128}} &= \log 8 - \log \sqrt{128} = \log 8 - \log (128)^{\frac{1}{2}} = \log 8 - \frac{1}{2} \log 128 = \log 8 - \frac{1}{2} \cdot \log 1.28 \cdot 10^2 \\ &= \log 8 - \frac{1}{2} \log 1.28 + 2 = 0.9031 - 0.5(0.1072) + 2 \\ &= 0.9031 - 0.0536 + 2 = 0.8495 + 2 = 2.8495 \end{aligned}$$

حل (e):

$$\begin{aligned} \log \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} &= \log \sqrt[3]{10} - \log 0.1 = \frac{1}{3} \log 10 - \log 10^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 1 - (-1) \log 10 \\ &= \frac{1}{3} + 1 = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. لاندې لوگاریتمونه محاسبه کړئ. (دا پوښتنې تکراري دي)

$$a) \log_8 \sqrt[3]{4} = ? \quad b) \log_3 \frac{1}{243} = ?$$

$$c) \log_{10} \sqrt[4]{100} = ? \quad d) \log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ? \quad e) \log \frac{8}{\sqrt{128}} = ?$$

4. لاندې انټي لوگاریتمونه پیدا کړئ.

$$a) 1.7300 \quad b) 0.8954 \quad c) 4.5682 \quad d) \bar{2}.1987$$

حل (a): په جدول کې د 1.7300 لوگاریتم اړوند عدد پیدا کوو:

$$\text{anti log } 1.7300 = \text{anti log } (0.7300 + 1) = 5.37 \cdot 10 = 53.7$$

$$\text{anti log } 1.7300 = 53.7 \Rightarrow \log 53.7 = 1.7300$$

حل (b):

$$\text{anti log } (0.8954)$$

$$\text{anti log } 0.8954 = 7.86$$

حل (c):

$$\text{anti log } 4.5682 = \text{anti log } (0.5682 + 4) = 3.7000 \cdot 10^4 = 37000$$

حل (d):

$$\text{anti log } \bar{2}.1987 = \text{anti log } (0.1987 - 2) = (1.58 \cdot 10^{-2}) = 0.0158$$

$$\text{anti log } \bar{2}.1987 = 0.0158$$

5. دلاندې هر عدد لوگاریتم حساب کړئ.

$$a) 89500 \quad b) 91 \quad c) 3065.3 \quad d) \log 0.002$$

حل (a):

$$\begin{aligned} \log 89500 &= \log (8.59 \cdot 10^4) = \log 8.59 + 4 \\ &= 0.9518 + 4 = 4.9518 \end{aligned}$$

حل (b):

$$\begin{aligned} \log 91 &= \log (9.1 \cdot 10) = \log 9.1 + 1 = 0.9590 + 1 \\ &= 1.9590 \end{aligned}$$

حل (c):

$$\begin{aligned} \log 65.3 &= \log 6.53 \cdot 10 = \log 6.53 + 1 \\ &= 0.8149 + 1 = 1.8149 \end{aligned}$$

حل (d):

$$\begin{aligned} \log 0.002 &= \log (2.00 \cdot 10^{-3}) = \log 2.00 - 3 \\ &= 0.3010 - 3 = \bar{3}.3010 \end{aligned}$$

6. د لوگاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

a) $2.01 \cdot 52.9$

b) $(0.0062)(-34.8)$

حل (a):

$$\begin{aligned}\log 2.01 \cdot 52.9 &= \log 2.01 + \log 52.9 = \log 2.01 + \log(5.29 \cdot 10) \\ &= \log 2.01 + \log 5.29 + 1 \\ &= 0.3032 + 0.7235 + 1 = 2.0267\end{aligned}$$

$$\text{anti log } 2.0267 = \text{anti log}(0.0267 + 2) = 1.06 \cdot 100 = 106 \Rightarrow 2.01 \cdot 52.9 = 106$$

حل (b): څرنگه چې د b په جز کې د ضرب حاصل یو منفي عدد کېږي، منفي عددونه لوگاریتمي قیمت نه لري او په جدول کې هم نشته له دې امله د لوگاریتمي له طریقې د هغه حل نا ممکن دی.

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

حل (a):

$$\begin{aligned}\log \frac{0.888}{256} &= \log 0.888 - \log 256 = \log 0.888 - \log(2.56 \cdot 10^2) = \log 0.888 - [\log(2.56 \cdot 10^2)] \\ &= \log(8.88 \cdot 10^{-1}) - \log 2.56 - 2 = \log 8.88 - 1 - \log 2.56 - 2 \\ &= \log 8.88 - \log 2.56 - 3 = 0.9484 - 0.4082 - 3 \\ &= 0.5402 - 3 = \bar{3}.5402\end{aligned}$$

$$\text{anti log}(-2.4598) = \text{anti log}(0.5402 - 3) = 3.47 \cdot 10^{-3} = 0.00347$$

$$\Rightarrow 0.888 \div 256 = 0.00347$$

حل (b):

$$\begin{aligned}\log \frac{17.3}{7.47} &= \log 17.3 - \log 7.47 = \log(1.73 \cdot 10) - \log 7.47 = \log 1.73 - \log 7.47 + 1 \\ &= 0.2380 - 0.8733 + 1 = 0.3647.\end{aligned}$$

$$\text{anti log } 0.3647 = 2.32 \Rightarrow 17.3 \div 7.47 = 2.32$$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

a) $(7.42)^3$

b) $(-84.7)^2$

c) $\sqrt{418}$

d) $\sqrt{0.21}$

حل (a):

$$\log(7.42)^3 = 3 \log 7.42 = 3(0.8704) = 2.6112$$

$$\text{anti log}(2.6112) = \text{anti log}(0.6112 + 2) = 4.09 \cdot 100 = 409$$

$$\Rightarrow (7.42)^3 = 409$$

حل (b):

$$\begin{aligned}\log(-84.7)^2 &= 2\log(-84.7) = 2\log(-8.47 \cdot 10) = 2\log(-8.47) + 2\log 10 \\ &= 2\log(-8.47) + 2\end{aligned}$$

پوهېږو چې عدد په توان د جفت مساوي له يوه مثبت عدد سره دی، د منفي علامې په پام کې نه نيولو سره لوگاريتمي عمليې سرته رسوو چې د 8.47 مانتيس عبارت دی له 0.9279 څخه، نو:

$$2(0.9279) + 2 = 1.8558 + 2 = 3.8558$$

مانتيس يعنې 0.8558 په جدول کې نه ليدل کېږي، نو د انټرپولېشن عمليې ته اړتيا ده او دا وروستی موضوع ده چې راځي.

حل (c):

$$\begin{aligned}\log \sqrt{418} &= \log(418)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 418 = 0.5 \log(4.18 \cdot 10^2) = 0.5 \log 4.18 + 0.5 \cdot 2 \\ &= 0.5(0.6212) + 1 = 0.3106 + 1 = 1.3106 \\ \text{anti log } 1.3106 &= \text{anti log}(0.3106 + 1) = 2.05 \cdot 10 = 20.5 \\ \Rightarrow \sqrt{418} &= 20.5\end{aligned}$$

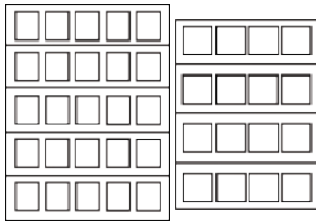
حل (d):

$$\begin{aligned}\log \sqrt{0.21} &= \log(0.21)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 0.21 = 0.5 \log(2.1 \cdot 10^{-1}) = 0.5 \log 2.1 + 0.5(-1) \\ &= 0.5(0.3222 - 1) = 0.5(-0.6778) = -0.33890\end{aligned}$$

څرنگه چې مانتيسا بايد مثبت وي، نو د -0.33890 سره د مثبت او منفي يو عدد جمع کوو:

$$-0.33890 + 1 - 1 = 0.6611 - 1 = \bar{1}.6611$$

$$\text{anti log}(\bar{1}.6611) \approx 0.459 \Rightarrow \sqrt{0.21} \approx 0.459$$



شپږم څپرکی: مټریکسونه

مټریکسونه (Matrices)

د درسي کتاب (205) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د مټریکسونو په مفهوم پوه شي. • د M نقطې متناظر نظر د x یا y محور ته پیدا کړای شي، همدارنګه ضرایب په جدول کې وښودلای شي. • د مټریکسونو په کارولو سره د ریاضي له علم سره مینه پیدا کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندویه مواد: د وړودي شکل چارټ، د 206 مخ د مټریکسونو چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته هغه چارټ چې مخکې له مخکې مو جوړ کړی دی، د ټولګي مخې ته وځړوي او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی. طبیعي ده چې زده کوونکي پوښتنې ته ځواب وایي، ځکه ډېره ساده پوښتنه ده.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلي ښوونکی، زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 205 مخ فعالیت په خپلو کتابچو کې سرته ورسوي. • د فعالیت په بهیر کې د ډلو له کار او فعالیت څخه کتنه وکړي او د اړتیا په صورت کې مرسته ورسره وکړي. • د ډله ییز کار په پای کې یو زده کوونکی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت نورو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې تاسو د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کوونکو فعالیت اصلاح کړي. • ښاغلی ښوونکی د مټریکس تعریف زده کوونکو ته ووايي او د کتاب د 206 مخ د A, B او C مټریکسونو سطرونه او ستونونه په داسې حال کې چې چارټونه یې د ټولګي په مخکې ځوړند دي، زده کوونکو ته وروپېژني. • له زده کوونکو څخه وپوښتی چې د مټریکس مرتبه څه شی ده، که چیرې کوم زده کوونکی ځواب ورکړ ښه ده، که چیرې ځواب یې ورنه کړ د مټریکس مرتبه هم زده کوونکو ته وروپېژني. • د کتاب د 207 مخ د فعالیت اړوند A, B, C او D مټریکسونه یو زده کوونکي ته ورکړي چې پر تخته د هغو مرتبه وټاکي، په عین وخت کې نورو زده کوونکو ته ووايست چې د نوموړو مټریکسونو مرتبه په خپلو کتابچو کې وټاکي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې بل زده کوونکی دې د نوموړو مټریکسونو مرتبه پر تخته وټاکي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 207 مخ مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه په ټولگي کې حل کړی.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډمن شي، نو زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره وازوي:

1. متريکس څه ته وايي؟ یو زده کوونکی دې تعریف کړي.

2. یو زده کوونکی دې د $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ متريکس مرتبه وليکي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د A متريکس د $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یا $A = (a_{ij})_{m \times n}$ په واسطه ښودل کېږي او که مرتبه یې معلومه وي د $[a_{ij}]$ یا (a_{ij}) په شکل لیکو، څرگنده ده چې د $m \times n$ مرتبې متريکس د $m \cdot n$ په شمېر عناصر لري.

مثال: یو متريکس چې 12 عنصره ولري، څو ممکنه ترتیبونه به ولري؟

حل: څرنگه چې د $m \times n$ مرتبې متريکس د $m \cdot n$ په شمېر عناصر لري، نو یو متريکس چې 12 عنصره ولري دهغه ټولې مرتبې جوړې داسې په لاس راوړو چې د ضرب حاصل یې 12 شي.

$(1,12), (12,1), (2,6), (6,2), (3,4), (4,3)$

$1 \times 12, 12 \times 1, 2 \times 6, 6 \times 2, 3 \times 4, 4 \times 3$

نو د دغه متريکس ممکنه مرتبې

دي، چې په ترتیب سره د کینې خوا فکتورونه د سطرونو شمېر او ښي خوا فکتورونه د ستونونو شمېر ښيي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د لاندې متريکسونو مرتبې وليکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

حل: پوهېږو چې د یو متريکس مرتبه د $m \times n$ په شکل ښودل کېږي، داسې چې m د سطرونو او n د ستونونو شمېر رانښيي، نو:

$$A_{m \times n} = A_{3 \times 3}, \quad B_{m \times n} = B_{2 \times 3}$$

2. لاندې متريکسونه د مستطيلي جدول په شکل وليکئ.

$$a) (a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3} \quad b) (a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

حل a): د $(a_{ij})_{3 \times 3}$ مټریکس عمومي حالت لیکو او پوهېږو چې i د عنصر ځای په سطر کې او j د عنصر ځای په ستون کې نيسي:

$$(a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (2i + 3j)_{3 \times 3}$$

$$a_{11}, i=1, j=1 \Rightarrow 2i+3j=2+3=5$$

$$a_{12}, i=1, j=2 \Rightarrow 2i+3j=2+6=8$$

$$a_{13}, i=1, j=3 \Rightarrow 2i+3j=2+9=11$$

$$a_{21}, i=2, j=1 \Rightarrow 2i+3j=4+3=7$$

$$a_{22}, i=2, j=2 \Rightarrow 2i+3j=4+6=10$$

$$a_{23}, i=2, j=3 \Rightarrow 2i+3j=4+9=13$$

$$a_{31}, i=3, j=1 \Rightarrow 2i+3j=6+3=9$$

$$a_{32}, i=3, j=2 \Rightarrow 2i+3j=6+6=12$$

$$a_{33}, i=3, j=3 \Rightarrow 2i+3j=6+9=15$$

$$(a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

حل b):

$$(a_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

$$a_{11}, i=1, j=1 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{12}, i=1, j=2 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{1}{2}$$

$$a_{13}, i=1, j=3 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{1}{3}$$

$$a_{21}, i=2, j=1 \Rightarrow \frac{i}{j} = 2$$

$$a_{22}, i=2, j=2 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_{23}, i=2, j=3 \Rightarrow \frac{i}{j} = \frac{2}{3}$$

$$(a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (4 \ 5 \ 6) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

د متریکس ډولونه

د درسي کتاب (209) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې	زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې: • د متریکس ډولونه وپېژني. • متریکسونه له یو بل سره تشخیص کړای شي. • په ژوند کې د متریکسونو په ارزښت پوه شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندويه مواد:	د وړودي شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې چې زده کوونکي د هغې په اړه فکر وکړي. د پوښتنې لومړي جز ته زده کوونکي ځواب ویلای شي، خو د دویم جز ځواب د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته روښانه کېږي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	• ښاغلی ښوونکی په ترتیب سره د متریکسونو عنوانونه پر تخته ولیکي او په نوبت سره له زده کوونکو څخه وغواړي چې د هر متریکس بېلگه پر تخته ولیکي، که چېرې ستونزې ولري لارښوونه ورته وکړي. • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 211 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. د ډله ییز کار په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز کار پر تخته نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، که چېرې د نوموړي توضیحاتو د زده کوونکو قناعت حاصل نه کړ، بل داوطلب زده کوونکی دې دغه فعالیت توضیح کړي.
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 212 مخ له پوښتنو څخه د a او b جزونه د پوښتنې او ځواب په طریقه په زده کوونکو باندې حل کړي.
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د خپل ډاډ لپاره له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وپوښتې: 1. یو زده کوونکی دې د متریکسونو ډولونه پر تخته ولیکي. 2. یو زده کوونکی تختې ته راوغواړي چې د یو متریکس اصلي قطر او فرعي قطر راوښيي. 3. یو زده کوونکی دې د کتاب 212 مخ د پوښتنو c جز حل کړي، یعنې نوم او مرتبه دې مشخصه کړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د دوه قطري متريکسونو د جمعې حاصل بيا هم يو قطري متريکس دی.

ثبوت: څرنگه چې د قطري متريکس ټول عناصر له اصلي قطر پرته ټول صفرونه دي، نو فرضوو چې $A = (a_{ii})$ او $B = (b_{ii})$ قطري متريکسونه دي، په دې حالت کې په اسانۍ سره ليدل کېږي چې:

$$C = A + B = (a_{ii} + b_{ii}) = ((a + b)_{ii}) = (c_{ii}) \Rightarrow C = (c_{ii})$$

مثال: که چيرې $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ قطري متريکسونه وي، نو:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 4+3 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

وليدل شو $A + B$ يو قطري متريکس دی.

9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1. لاندې متريکسونه په پام کې ونيسئ، مرتبې او اړوند نومونه يې وټاکئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h) H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

حل a): د a جز متريکس مرتبه $m \times n = 3 \times 3$ او مربعي متريکس دی.

حل b): د b جز متريکس مرتبه $O_{m \times n} = O_{3 \times 3}$ او صفري متريکس دی.

حل c): د c جز متريکس مرتبه $m \times n = 3 \times 3$ او واحد متريکس دی.

حل d): د d جز متريکس مرتبه $m \times n = 3 \times 3$ او سکالري متريکس دی.

حل e): د e جز متريکس مرتبه $m \times n = 1 \times 4$ او سطري متريکس دی.

حل f): د f جز متريکس مرتبه $m \times n = 1 \times 2$ او سطري متريکس دی.

حل g): د g جز متريکس مرتبه $m \times n = 4 \times 1$ او ستوني متريکس دی.

حل h): د h جز متريکس مرتبه $m \times n = 2 \times 2$ او له مربعي متريکس څخه عبارت دی.

$$\left. \begin{array}{l} A + A = \\ A - A = \\ A + B = \\ A - B = \\ B + B = \\ B - B = \end{array} \right\} ?$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

د متریکسونو جمع او تفریق

د درسي کتاب (213) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د متریکسونو د جمعې او تفریق په طریقه پوه شي. • د متریکسونو د جمعې او تفریق عملیه سرته ورسوي. • په بریالیتوب سره د ریاضي د عملیو په سرته رسولو سره خوښي وکړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندویه مواد:	د وړودي افادو چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وړودي افادو چارټ د ټولګي په مخکې وځړوی او د وړودي پوښتنې په اړه له زده کوونکو څخه وپوښتی، زده کوونکي دې له فکر کولو څخه وروسته ځواب ووايي، که چیرې سم ځواب ورنه شي کړای د متریکسونو د جمعې لومړی مثال د وړودي پوښتنې حل دی.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی (د متریکسونو جمع) عنوان پر تخته ولیکي او له لنډو توضیحاتو څخه وروسته د مثال حل د پوښتنې او ځواب په طریقه حل کړی. • زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب 213 مخ فعالیت د یو بل په مشوره په خپلو ډلو کې سرته ورسوي، په پای کې د یوې ډلې استازي ته دنده ورکړی چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، که چیرې زده کوونکو تېروتنه وکړه لارښوونه ورته وکړی. • د متریکسونو د جمعې او تفریق د خاصیتونو عنوان پر تخته ولیکي، د پوښتنې او ځواب په طریقه د لوست بهیر ته ادامه ورکړی. • په داسې حال کې چې زده کوونکو کتابونه تړلي وي، د کتاب 214 مخ لومړی مثال دې د یو کسيز فعالیت په توګه سرته ورسوي، د فعالیت په پای کې یو زده کوونکی دې خپل فعالیت پر تخته نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې تاسو مرسته وکړی.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 214 مخ د فعالیت دویم مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه د زده کوونکو په فعال ګډون سره په ټولګي کې کار وکړی.	

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړئ چې د $A_{2 \times 2}$ متریکس پر تخته ولیکي.
2. له یوه زده‌کوونکي څخه وغواړئ چې د $B_{2 \times 3}$ متریکس پر تخته ولیکي.
3. یو زده‌کوونکی راوغواړئ چې د کتاب 214 مخ د پوښتنو د a جز اړوند A او B متریکسونه سره جمع کړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د کتاب د 214 مخ د فعالیت حل:

فعالیت: د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A - B \neq B - A$

حل: که چېرې $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، نو:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 2-7 & 4-9 \\ 5-8 & 8-10 & 7-4 \\ 6-3 & 3-5 & 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 7-2 & 9-4 \\ 8-5 & 10-8 & 4-7 \\ 3-6 & 5-3 & 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - B \neq B - A$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

لاندې متریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل: دوه متریکسونه هغه وخت سره جمع او تفریق کېدلای شي چې یو شان مرتبه ولري.

$$a) A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 & 3+0 \\ 4+0 & -1+(-1) & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2+1 & 3-0 \\ 4-0 & -1+1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+2 \\ -1+1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a): څرنگه چې لیدل کېږي د c جز اړونده A او B متریکسونه هم مرتبه نه دي، نو د نوموړو متریکسونو د جمعې او

تفریق حاصل په لاس نه شو راوړای، یعنې جمع او تفریق کېدای نه شي.

$$K \cdot A = K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

په متریکس کې د سکالر ضرب

د درسي کتاب (215) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • په یوه متریکس کې د سکالر د ضرب په مفهوم پوه شي. • په یوه متریکس کې سکالر ضرب کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره د ریاضي له علم سره مینه پیدا کړي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندويه مواد:	د وروډي شکل چارټ، په 216 مخ کې د b, a او c افادو چارټ
4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي برخې چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتی، طبیعي ده چې زده کوونکو ته انگیزه پیدا کېږي او د پوښتنې په اړه فکر کوي، که چېرې زده کوونکي ځواب ونه شي ویلای د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي پوښتنې ځواب په لاس راځي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 215 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. • د ډلو د فعالیت له بهیر څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او له ضعیفو ډلو سره مرسته وکړي. • د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، که چېرې ستونزې ولري لارښوونه ورته وکړي. • ښاغلی ښوونکی هغه تعریف چې د فعالیت پایله ده، زده کوونکو ته ووايست. • د کتاب د 215 مخ مثال د پوښتنو او ځواب په طریقه په زده کوونکو حل کړي. • د کتاب د 216 مخ په متریکس کې د سکالر د ضرب خاصیتونه) عنوان پر تخته ولیکي او د اړونده افادو چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او د هغه په اړه اړین توضیحات ورکړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره درې زده کوونکي په وار سره راوغواړي، چې یو زده کوونکی $\alpha(\beta \cdot A)$، دویم زده کوونکی $(\alpha\beta)A$ او دریم زده کوونکی $\beta(\alpha \cdot A)$ پیدا کړي او په پای کې پایلې یې سره پرتله کړي، معلوم به شي، چې: $\alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta)A = \beta(\alpha A)$ کېږي. ښاغلی ښوونکی زده کوونکو ته ووايست چې له کتاب څخه کار وانهخلي.	

7- د لوست د پایلي ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده‌کوونکی دې په یو متریکس کې د یو سکالر د ضرب قاعده بیان کړي.

2. یو زده‌کوونکی دې لاندې مساواتونه بشپړ کړي:

$$\alpha(A+B) = ?$$

$$(\alpha + \beta)A = ?$$

$$\alpha(\beta A) = ?$$

8- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که چیرې $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ او $\beta = 1$ راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر د

ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

حل:

a) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$$2 \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 2 \left[\begin{pmatrix} 2-1 & 0+0 \\ 1+1 & -1+0 \end{pmatrix} \right] = 2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A + \alpha B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0+0 \\ 2+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$$(\alpha + \beta)A = (2+1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta A = 1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A + \beta A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 & 0+0 \\ 2+1 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c) \alpha(\beta A) = (\alpha \beta)A = \beta(\alpha A)$$

$$\alpha(\beta A) = 2 \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha \beta)A = (2 \cdot 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A) = 1 \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ که } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ او } K=3 \text{ وي، } KA \text{ او } \frac{1}{K}A \text{ پيدا کړئ.}$$

حل:

$$KA = 3 \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{K}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 5 & \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

شپږم څپرکی: مټریکسونه

د دوو مټریکسونو ضرب

د درسي کتاب (217) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د دوو مټریکسونو د ضرب په طریقه پوه شي. • دوه ورکړ شوي مټریکسونه سره ضرب کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت او د فعالیتونو له سرته رسولو څخه خوښي وکړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د وړودي شکل چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وړودي برخې چارټ د ټولګي په مخکې څوړند کړی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، چې د هغې په اړه فکر وکړي او ځواب ووايي، که ځواب ونه شي ویلای، د توضیحاتو او د مثال له حلولو څخه وروسته به د وړودي پوښتنې په ځواب پوه شي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی د دوو مټریکسونو د ضرب په اړه له لنډو توضیحاتو څخه وروسته د کتاب د 218 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه داسې چې خپل توضیحات مو په کې تطبیق کړی وي، حل کړی. • د کتاب د 218 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولګي کې حل کړی. • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، زده کوونکي دې کتابونه وتړي، ترڅو د یو بل په مشوره د کتاب د 218 مخ دریم مثال حل کړي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړی چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. • د کتاب د 219 مخ فعالیت یوه زده کوونکي ته ورکړی چې پر تخته کار وکړي په عین وخت کې دغه فعالیت نورو زده کوونکو ته هم ورکړی چې په خپلو کتابچو کې یې په انفرادي ډول حل کړي. په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکی دې د نورو زده کوونکو پام ځان ته واړوي او خپل فعالیت دې هغو ته توضیح کړي. د اړتیا په صورت کې تاسو لارښوونه وکړئ.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 219 مخ څلورم مثال د پوښتنې او ځوابونو په طریقه د زده کوونکو په فعال ګډون سره حل کړی او دا چې په عمومي ډول د دوو مټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي، زده کوونکو ته بیان کړی چې دا د وړودي پوښتنې ځواب دی.	

ښوونکي دې د مټريکسونو د ضرب خاصیتونه د افادو په پام کې نیولو سره یعنې:

$$A(B+C) = AB + AC, \quad K(AB) = (KA)B = A(KB)$$

$$(A+B)C = AC + BC, \quad IA = AI = A$$

زده‌کونکو ته توضیح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکي د زده‌کونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کونکي په لاندې پوښتنو وازوي:

1. یو زده‌کونکي دې ووايي چې د دوو مټريکسونو د ضربولو لپاره کوم شرط ضروري دی؟

2. یو زده‌کونکي دې د مټريکسونو د ضرب خاصیتونه ووايي.

3. که چیرې د A, B او C درې مټريکسونه ولرو، یو زده‌کونکي دې راکړل شوو مټريکسونو توزیعي خاصیت ولیکي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

(i): که چیرې n یو طبیعي عدد او A یو مربعي مټريکس وي، په دې حالت کې که $A^{n+1} = A$ وي وایي چې د A مټريکس پریودي (Periodic) دی او پریود یې n دی. د $n=1$ لپاره $A^2 = A$ کېږي. په دې حالت کې A مټريکس ته Idempotent مټريکس وایي.

(ii): که چیرې A یو مربعي مټريکس وي او $n \in \mathbb{N}$ وي، نو که $A^n = 0$ شي په دې حالت کې A مټريکس ته Nilpotent مټريکس وایي، داسې چې انډکس یې n دی. یا په بل عبارت د A مټريکس ته Nilpotent د n انډکس سره وایي.

مثال (i): وښایاست چې $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ مټريکس Idempotent دی.

حل:

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^2 = A \end{aligned}$$

څرنگه چې $A^2 = A$ په لاس راغی، نو د A مټريکس Idempotent دی.

مثال (ii): وښایاست چې $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ مټريکس Nilpotent او انډکس یې 3 دی.

حل:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9 \\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18 \\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27 \\ -1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

څرنگه چې $A^3 = 0$ شو، نو د A متريکس د 3 له انډکس سره Nilpotent دی.

9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې متريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

حل (a): هغه وخت دوه متريکسونه یو له بل سره ضربولای شو چې د لومړي متريکس د ستونونو شمېر د دویم متريکس د

سطرونو له شمېر سره برابر (مساوي) وي او دریم متريکس چې له ضرب څخه په لاس راځي.

د سطرونو شمېر یې د لومړي متريکس د سطرونو او د ستونونو شمېر یې د دویم متريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 \\ 10+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

د (b) جز حل:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+12 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

د (c) جز حل:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (-6 - 2 + 1) = (-7)$$

د (d) جز حل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6 \\ -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس

د درسي کتاب (217) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهاري - ذهنيتي زده کوونکي به دلوست په پای کې وتوانېږي چې: - د یوه متریکس د ترانسپوز متریکس په مفهوم پوه شي. - متناظر متریکسونه وپېژني. - د ترانسپوز متریکس له خاصیتونو سره بلدتیا پیدا کړي. - د یوه متریکس ترانسپوز او همدارنګه متناظر متریکس ولیکلی شي. - د پورتنیو مفهومونو د پوهېدو له امله به خوښ شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د وروډي پوښتنې چارټ، (د متناظر متریکس پېژندل) عنوان اړونده چارټ	
4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وروډي پوښتنې چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوي او وروډي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتي، د زده کوونکو پام پوښتنې ته راواړوي چې د هغې په اړه فکر وکړي که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته به د پوښتنې ځواب په لاس راوړي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): - ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو وېشي چې د کتاب 221 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. - د فعالیت له بهیر څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي، په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې لارښوونه وکړي. - ښاغلی ښوونکی دلوست عنوان (متناظر متریکس پېژندل) پر تخته ولیکي او اړونده چارټ یې د ټولګي په مخکې وڅړوي، په وار سره دوه، دوه زده کوونکي راوغواړي چې لومړی د متریکس اصلي او فرعي قطرونه او وروسته په متناظر و متریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته خپلو ټولګیوالو ته وروپېژني. - ښاغلی ښوونکی د ترانسپوز متریکس د خواصو عنوان پر تخته ولیکي او د خاصیتونو په اړه زده کوونکو ته توضیحات ورکړي. - د کتاب د 222 مخ فعالیت یوه زده کوونکي ته ورکړي چې پر تخته کار وکړي په عین وخت کې دغه فعالیت نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په خپلو کتابچو کې پرې کار وکړي، په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکي دې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لا ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 222 مخ مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولگي کې حل کړی.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. د یو متریکس ترانسپوز څه ته وايي؟
2. یو زده کوونکی دې پر تخته یو متناظر متریکس په رقمونو ولیکي؟
3. د ترانسپوز متریکس هر یو خاصیت دې یو زده کوونکی پر تخته ولیکي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د A او B متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

حل:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس د څلورم خاصیت سموالی وښایاست.

حل:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha A)^T = \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A^T = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (3A)^T = 3A^T$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

ډیترمینانټ

د درسي کتاب (223) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې: - پوهنیزه - مهاري - ذهنيتي • زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: - د ډیترمینانټ په مفهوم پوه شي. - د ډیترمینانټ اړونده پوښتنې حل کړای شي. - د پوښتنو له حلولو څخه خوښ شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د وړودي پوښتنې چارټ، د 3×3 متریکسونو د ډیترمینانټ د محاسبې اړونده چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې): ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د پوښتنې چارټ د ټولګې په مخکې څوړند کړی او له زده کوونکو څخه وپوښتی: څوک کولای شي چې یو مربعي متریکس داسې وټاکي چې $ad - cb = 0$ شي؟ زده کوونکي پرېږدی چې د وړودي پوښتنې د حل په اړه فکر وکړي، که چیرې زده کوونکي په دې وړتوانېږي، نو ښاغلی ښوونکی دې د اصلي قطر او فرعي قطر عددونه داسې وټاکي، چې د دواړو قطرونو د ضرب حاصل یې عین عدد شي، لکه: $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 35 - 35 = 0$	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): - ښاغلی ښوونکی د هغه تعریف له مخې چې د A له متریکس څخه د یوه ډیترمینانټ نسبت ورکړل شوی دی، توضیح کړی، وروسته د کتاب هغه عنوان چې د (2×2) مرتبې متریکسونو د ډیترمینانټ محاسبه ده، پر تخته ولیکي او اړونده مثال یې د پوښتنې او ځوابونو په طریقه حل کړی. - د کتاب د 223 مخ فعالیت په ډله ییزه توګه په زده کوونکو باندې کار وکړی. - د کتاب عنوان د (3×3) متریکسونو ډیترمینانټ محاسبه پر تخته ولیکي او له اړونده چارټ څخه په کار اخیستنې سره د حل ټول پړاوونه یې ګام په ګام سرته ورسوي او زده کوونکو ته د حل په بهیر کې برخه ورکړی. - د کتاب 225 مخ مثال په ټولګې کې د پوښتنو او ځوابونو په طریقه حل کړی. - زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د 225 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. - د کتاب د 226 مخ دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولګې کې حل کړی.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 226 مخ فعالیت په انفرادي ډول په ټولګي کې کار وکړی (انفرادي ډول، هغه ډول دی چې ښاغلی ښوونکی ورسره بلدتیا لري).

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده کوونکی دې د 3×3 متریکس ډیترمینانت پر تخته ولیکي؟
2. یو زده کوونکی دې د ساروس په طریقه د ډیترمینانت محاسبه توضیح کړي؟

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د لاندې ډیترمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

حل:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 4 - 0 = 4$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - (-2) \cdot 3 = 35 + 6 = 41$$

$$c) \begin{vmatrix} \textcircled{-1} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = -1(6 - 15) = -1(-9) = 9 \quad \dots \quad I$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \textcircled{1} & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1(2 \cdot 6 - 1 \cdot 3) = -(12 - 3) = -9 \quad \dots \quad II$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & \textcircled{0} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0(2 \cdot 5 - 1 \cdot 1) = 0(10 - 1) = 0 \cdot 9 = 0 \quad \dots \quad III$$

$$I + II + III = 9 - 9 + 0 = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} \textcircled{0} & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0(5 - 3) = 0 \cdot 2 = 0 \quad \dots \quad I$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \textcircled{4} & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-25 - 6) \cdot 4 = -(-31)4 = 124 \quad \dots \quad II$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & \textcircled{2} \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-5 - 2) \cdot 2 = (-7) \cdot 2 = -14 \quad \dots \quad III$$

$$I + II + III = 0 + 124 - 14 = 110$$

2. دلاندي دېترمېنانتونو مقدار د ساروس په طريقه په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

حل:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (42 + 0 - 6) - (-48 + 0 - 35) = 36 + 83 = 119$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3 + 14 - 30) - (-3 + 14 - 30) = -19 + 19 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

د ډیټرمینانت خاصیتونه

د درسي کتاب (227) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د ډیټرمینانت په خاصیتونو پوه شي. • د ډیټرمینانت له خاصیتونو څخه د پوښتنو په حل کې کار واخلي. • په اړونده موضوع کې د پوهې او مهارت په لرلو سره خوښ شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندویه مواد:	د وړو دي پوښتنې چارټ
4- د وړو دي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وړو دي برخې چارټ د ټولګي په مخکې ځوړند کړی او وړو دي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې چې د هغې په اړه فکر وکړي. که چیرې زده کوونکي ځواب ونشي ویلای. د کتاب د 228 مخ د لومړي مثال له حلولو وروسته به د وړو دي پوښتنې په ځواب پوه شي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي چې د کتاب 227 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. • د فعالیت په بهیر کې د زده کوونکو له ډله ییز کار څخه څارنه وکړي، فعالې ډلې تشویق او ضعیفو ډلو ته لارښوونه وکړي، په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې دې ښاغلی ښوونکی مرسته ورسره وکړي. • ښاغلی ښوونکی د فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د ډیټرمینانت خاصیتونه زده کوونکو ته توضیح کړي او د کتاب د 227 مخ لومړي خاصیت په انفرادي ډول په زده کوونکو باندې سرته ورسوي، ترڅو د نوموړي خاصیت سموالی په عملي ډول ویني. • ښاغلی ښوونکی لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولګي کې حل کړي چې د دې مثال له حل څخه د وړو دي پوښتنې حل څرګندېږي. • د کتاب د 228 مخ دویم مثال د ډیټرمینانت ګډ ضربي عامل پیدا کړي او له زده کوونکو څخه وپوښتې چې ایا ددې ډیټرمینانت د کوم بل سطریا ستون ګډ ضربي عامل پیدا کولای شو او که نه؟ زده کوونکي دې استدلال وکړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لاینه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب 228 مخ د پوښتنې د a جز ډیترمینانت د زده کوونکو په فعال گډون سره په ټولگي کې حل کړی.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده کوونکی دې د ډیترمینانت لومړی او دویم خاصیتونه و وایي.

2. یو زده کوونکی دې د $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 15 & 3 \\ 3 & 25 & 7 \end{vmatrix}$ ډیترمینانت گډ ضربی عامل پیدا کړي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د ډیترمینانت د خواصو په مرسته د لاندې ډیترمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

حل (a): د a جز د ډیترمینانت د لومړي ستون ټول عناصر صفرونه دي، نو نوموړی ډیترمینانت له صفر سره مساوي دی.

حل (b): څرنگه چې د b جز د ډیترمینانت د دریم سطر ټول عناصر صفرونه دي، نو ډیترمینانت له صفر سره مساوي دی.

حل (c):

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 4 - 0 \cdot 5) = 12$$

یا په بله طریقه:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (12 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 12 - 0 = 12$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربې معکوس

د درسي کتاب (229) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د 2×2 مرتبې متریکسونو د ضربې معکوس په مفهوم پوه شي. • د نوموړو متریکسونو ضربې معکوس پيدا کړای شي. • د 2×2 مرتبې متریکسونو د ضربې معکوس له پيدا کولو څخه خوښ شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندويه مواد:	د وړودي برخې د شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د وړودي برخې د شکل چارټ د ټولگي په مخکې وڅړوی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتنی ترڅو فکر وکړي او ځواب ووايي له هغه پرته د فعالیت له سرته رسولو څخه به وروسته د وړودي پوښتنې په ځواب پوه شي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب 229 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. - د فعالیت په پایله کې د یوې ډلې له استازي وغواړی چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې لارښوونه ورته وکړی. • ښاغلی ښوونکی د فعالیت پایله چې د وړودي پوښتنې ځواب دی او تعریف هم له هغه څخه په لاس راځي، زده کوونکو ته ووايست. وروسته د کتاب د 229 مخ لومړی مثال د پوښتنې او ځواب په طریقه زده کوونکو ته حل کړی. • د (الحاقي متریکس) (Adjoint matrix) عنوان پر تخته ولیکي او د لوست بهیر د زده کوونکو په فعال ګډون سره یې پر مخ بوزی.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی لوست ته د لابنه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 230 مخ لومړی مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه حل کړي.
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د زده کوونکو له زده کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي: 1. یو زده کوونکی دې د معکوس منوونکي متریکس شرطونه ووايي.

2. یو زده‌کونکی دې ووايي چې د دوو مربعي متریکسونو یعنې د A او B د ضربولو په صورت کې کوم ډول متریکس لاس ته راځي؟
3. یو زده‌کونکی دې ووايي چې د یوه متریکس د الحاقی متریکس پیدا کولو لپاره څه باید وکړو؟

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. له لاندې متریکسونو څخه کوم یو متریکس معکوس لري؟

$$a) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

حل (a): هغه وخت یو متریکس معکوس متریکس لري چې:

- متریکس مربعي وي.
- ډیترمینانت یې خلاف د صفر وي.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = -10 - (-10) = -10 + 10 = 0$$

د a جز د متریکس اړونده ډیترمینانت صفر دی، نو معکوس نه لري.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 75 - 76 = -1 \neq 0 \quad \text{حل (b):}$$

څرنگه چې ډیترمینانت د صفر خلاف دی، نو د b جز متریکس معکوس متریکس لري او په لاندې ډول یې په لاس راوړ:

$$\begin{aligned} \text{Adj}B &= \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ B^{-1} &= \frac{1}{|B|} \text{adj}B = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ B^{-1} &= \begin{pmatrix} -15 & 19 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. د لاندې متریکسونو معکوس متریکس په لاس راوړئ او ویې ازموئ:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حل (1):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} + \frac{6}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل (2):

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

$$\text{adj}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}B = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل (3):

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

$$\text{adj}C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \text{adj}C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره د خطي معادلو د سېسټم حل

د درسي کتاب (231) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې: • له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره د خطي معادلو د سېسټم د حل په طریقه پوه شي. • له معکوس متریکس څخه د کار اخیستنې په صورت کې د خطي معادلو سېسټم حل کړي. • د پورته پوهې او مهارت په لرلو سره په ځان ډاډمن شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندویه مواد: د وړودي برخې د شکل چارټ	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکي د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د وړودي برخې چارټ د ټولګي په مخکې ځوړند کړی او له زده کوونکو څخه وړودي پوښتنه وپوښتې، چې زده کوونکي د وړودي پوښتنې په اړه فکر وکړي. امکان لري چې زده کوونکي ځواب ونه شي ویلای، خو د دوی فکر موضوع ته راټولېږي، د فعالیت له سرته رسولو او د لومړي مثال له حلولو وروسته د وړودي پوښتنې ځواب په لاس راځي او د زده کوونکو په ذهن کې ځای نیسي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکي، زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب د 231 مخ فعالیت دیو بل په مشوره سرته ورسوي. • د زده کوونکو له ډله ییز کار او فعالیت څخه څارنه وکړي او د زده کوونکو هغه ډلې چې ستونزې لري لارښوونه ورته وکړي. د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړي، چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. • د کتاب د 232 مخ لومړی مثال د موضوع د څرګندوالي لپاره د پوښتنې او ځوابونو په طریقه په ټولګي کې حل کړي. • د کتاب د 232 مخ دویم مثال یوه زده کوونکي ته ورکړي چې پر تخته یې حل کړي. په عین وخت کې دغه مثال نورو زده کوونکو ته هم ورکړي چې په خپلو کتابچو کې حل کړي. (البته د زده کوونکو کتابونه به تړلي وي.) په پای کې تخته ته ولاړ زده کوونکي دې خپل فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې، ښاغلی ښوونکي یو داوطلب زده کوونکي ته لارښوونه وکړي چې مثال په صحیح ډول حل کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې) ښاغلی ښوونکي لوست ته د لارښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 233 مخ دریم مثال د پوښتنو او ځوابونو په ډول په ټولګي کې حل کړي.	

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده‌کوونکی دې ووايي چې د معادلو سیستم له څو معادلو څخه جوړ شوی وي؟
2. یو زده‌کوونکی دې د معادلو یو سیستم پر تخته ولیکي.
3. یو زده‌کوونکی دې د دویمې پوښتنې اړونده معادلو سیستم د ضریبونو متریکس، د معادلو د ښي خوا د ثابتو عددونو ستوني متریکس او همدارنګه د مجهولو عددونو ستوني متریکس پر تخته ولیکي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

له معکوس متریکس څخه په ګټه اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

حل (a):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

هغه وخت یو سیستم حل لري، چې د متحولینو د ضریبونو د متریکس ډیټرمینانت د صفر خلاف وي.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

څرنګه چې $|A| \neq 0$ دی، نو سیستم حل لري.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, \quad y = -1$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

حل (b):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \neq 0$$

لیدل کډېري چې $|A| \neq 0$ دی، نو سیستم حل لري.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-15 \\ 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p = -1, \quad q = -2$$

$$c) \begin{cases} a+b=11 \\ 4a-b=9 \end{cases}$$

حل (c):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

څرنگه چې $|A| \neq 0$ دی، نو سیستم حل لري.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} + \frac{9}{5} \\ \frac{44}{5} - \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{5} \\ \frac{35}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 4, \quad b = 7 \quad \text{ځکه} \quad (a, b) = (4, 7)$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

د خطي معادلو سیستم د کرامر په طریقه (crammers rule)

د درسي کتاب (235) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه پوه شي. • د معادلو سیستم د کرامر په طریقه حل کړي. • د کرامر په طریقه د معادلو د سیستم له حلولو خوښ شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندویه مواد:	د وړودي پوښتنې شکل چارټ او د درې مجهوله معادلو د سیستم چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته وړودي چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، چې زده کوونکي د پوښتنې په اړه فکر وکړي که چیرې زده کوونکي ځواب ونه شي ویلای، د لوست د بهیر له توضیحاتو څخه وروسته به د وړودي پوښتنې په ځواب پوه شي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • د معادلو د سیستم چارټ د ټولګي په مخکې وڅړوی او له زده کوونکو څخه وغواړی چې د ضربونو متریکس یعنې A پر تخته ولیکي. که چیرې زده کوونکي ونشي کولای، ښاغلی ښوونکی دې د لوست بهیر د پوښتنو او ځوابونو په طریقه څرګند کړي. • ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي او د کتاب د 236 مخ فعالیت په ډله ییزه توګه په زده کوونکو سرته ورسوي د فعالیت په پای کې د یوې ډلې استازی راوغواړی چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي، د ستونزو د لرلو په صورت کې لارښوونه ورته وکړي. • د A_x, A_y او A_z ډیترمینانتونو د محاسبې لپاره د لومړي مثال پر ځای لومړی دویم مثال د پوښتنو او ځوابونو په طریقه کار وکړي، ځکه چې لومړی مثال د 236 مخ A_x, A_y او A_z ډیترمینانتونو د محاسبو په اړه له ویناوو سره مطابقت نه لري. • د کتاب د 236 مخ د لومړي مثال $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولګي کې حل کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی لوست ته د لارښه تحکیم ورکولو لپاره یوه زده‌کوونکي ته دنده ورکړې چې د معادلو سیستم $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$ د کرامر په طریقه پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دغه د معادلو سیستم دې نور زده‌کوونکي په کتابچو کې حل کړي، په پای کې تخته ته ولاړ زده‌کوونکي دې خپل فعالیت نورو زده‌کوونکو ته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت یوه داوطلب زده‌کوونکي ته ووايست چې تېروتنې یې اصلاح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د زده‌کوونکو له زده‌کړې څخه د خپل ډاډ لپاره زده‌کوونکي په لاندې پوښتنو سره و ارزوي:

1. یو زده‌کوونکی دې د درې مجهوله معادلې عمومي شکل (په حرفونو) پر تخته ولیکي.
2. یو زده‌کوونکی دې د y, x او z ضریبونه چې په عمومي معادله کې لیکل شوي دي، پر تخته ولیکي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

حل (a):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2-2+1) - (-2-1-2) = 1-(-5) = 1+5 = 6 \neq 0$$

څرنگه چې $|A| = 6 \neq 0$ نو سیستم د حل وړ دی.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1+2) - (-1-1-4) = 3 - (-6) = 3+6 = 9$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4-2+1) - (4-1-2) = -5-1 = -6$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4+1) - (-2+2+1) = 4-1 = 3$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-6}{6} = -1 \\ z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

حل (b):

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + 2y - z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = (4 - 2 - a^3) - (-4a - a + 2a) = 2 - a^3 + 3a$$

پورته سیستم هغه وخت د حل وړ دی چې $2 + 3a - a^3 \neq 0$ وي.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

شپږم څپرکی: متریکسونه

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه

د درسي کتاب (239) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د گوس (Gouse) په طریقه د معادلو د سیستم په حل پوه شي. • د گوس (Gouse) په طریقه د معادلو سیستم حل کړای شي. • د معادلو د سیستم د حلولو څخه خوښ شي.
2- د زده کړې لارې:	پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...
3- مرستندويه مواد:	د وړودي برخې د معادلو سیستم چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته وړودي پوښتنه له زده کوونکو څخه وپوښتې، ترڅو زده کوونکي موضوع ته ځیر شي، ځکه کله چې د مثال له حل څخه وروسته د وړودي پوښتنې ځواب ووايست، موضوع به د زده کوونکو په ذهن کې وي.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	
• ښاغلی ښوونکی د کتاب د 239 مخ مثال په ټولگي کې حل کړی. • زده کوونکي په مناسبو ډلو و وېشي، ترڅو د کتاب د 239 مخ فعالیت د یو بل په مشوره سرته ورسوي. په پای کې د یوې ډلې استازی راوغوړی چې خپل ډله ییز فعالیت نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. د تېروتنې په صورت کې (که چیرې وخت شتون ولري، د بلې ډلې استازی ته دنده ورکړی) لارښوونه ورته وکړی او تېروتنې یې اصلاح کړی. • د کتاب د 240 مخ دویم مثال د زده کوونکو په گډون سره په ټولگي کې حل کړی. • ښاغلی ښوونکی یوه زده کوونکي ته ووايست چې د کتاب د 240 مخ فعالیت پر تخته سرته ورسوي. په پای کې هغه زده کوونکی چې تختې ته ولاړ دی، خپل فعالیت دې نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. که چیرې د فعالیت په بهیر کې تېروتنه ولیدل شي، لارښوونه ورته وکړی.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)	
ښاغلی ښوونکی لوست ته د ښه تحکیم ورکولو لپاره د کتاب د 241 مخ دریم مثال د زده کوونکو په فعال گډون سره د پوښتنو او ځوابونو په طریقه په ټولگي کې حل کړی.	
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5 دقیقې)	
ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډه شي له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي:	
1. یو زده کوونکی دې د معادلو په یو سیستم کې د مجهولو عددونو ضربونه او ثابت عددونه وښيي. 2. یو زده کوونکی دې په لنډ ډول د معادلو د سیستم حل د (Gouse) په طریقه توضیح کړي.	
8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات	
$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$	

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_3 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$2x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

$$-x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -x_2 + 1 = 2 \Rightarrow -x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

دلاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

حل (a):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ -3 & -9 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -10 & -20 \end{array}\right)$$

$$-10y = -20 \Rightarrow y = 2$$

$$3x - y = -5$$

$$3x - 2 = -5 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (x, y) = (-1, 2)$$

حل (b):

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & -10 & -2 \\ 3 & 9 & -21 & 0 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -21 & 0 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -11 & 2 \\ 1 & 5 & -12 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_2+R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc} -2 & -4 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$-z = -1 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$6y - 12z = 6 \Rightarrow 6y - 12 \cdot 1 = 6 \Rightarrow 6y = 6 + 12 \Rightarrow 6y = 18 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$-2x - 4y + 10z = 2 \Rightarrow -2x - 4 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 2 \Rightarrow -2x - 12 + 10 = 2$$

$$-2x - 2 = 2 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$(x, y, z) = (-2, 3, 1)$$

حل (c): دغه سیستم تقریباً حل دی، ځکه چې:

$$-3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y = 3$$

$$x + 4 = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

د شپږم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اووه درسي ساعتونه)

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کرۍ تاو کړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

- a) $\frac{1}{3}$ b) 9 c) $\frac{1}{9}$ d) 3

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منوونکی متريکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

- a) $m=1, \frac{1}{2}$ b) $m \neq 1$ c) $m=0$ d) $m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه متريکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه کې $Ax = A^{-1}$ صدق وکړي.

- a) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ متريکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منوونکي خط پیدا کړئ.

(a) د y محور (b) د x محور (c) $y+2x=0$ (d) $y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت صفر دی؟

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

- a) $x=1, 2$ b) $x=3, 1$ c) $x=\frac{1}{2}, 3$ d) $x=3, 2$

6. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

- a) 29 b) 39 c) 19 d) 9

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

- a) $3A-2B$ b) $-4A+3B$

حل (a):

$$3A-2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 9-2 \\ 0-4 & 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

حل (b):

$$\begin{aligned} -4A+3B &= -4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-15 & -12+3 \\ 0+6 & -16+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -19 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. که چیرې $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ او ووايست چې

$AB = BA$ دی او که نه؟

حل:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+4 & 0+0-2 \\ -2+0+6 & 0+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+0 & 4+0 \\ -1-3 & 0+0 & -2+9 \\ 2+1 & 0+0 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نو ویلای شو چې $AB \neq BA$ دی.

3. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د متریکسونو ضرب د درېو متریکسونو لپاره وښایست.

حل:

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 & 16+4 \\ 0-2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8 & 8+8 \\ 0-2 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 & 8-4 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+0 & 20-8 \\ 4+0 & -8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 & 8-4 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+0 & 12-4 \\ 4+0 & -8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 4 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)C = AC + BC$$

اوس د مټریکسونو ضرب د دریو مټریکسونو لپاره نیو:

$$\begin{aligned}
 ABC &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8 & 8+8 \\ 0-2 & 0+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & -8-16 \\ 4+0 & -8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -24 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4. لاندې د ټرمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

حل:

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-2) = -2 \dots I$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \textcircled{2} & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1-4) = -2(-3) = 6 \dots II$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \textcircled{1} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-0) = -1 \dots III$$

$$I + II + III = -2 + 6 - 1 = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق (ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

حل:

$$\text{adj}M = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 15 = -3 \neq 0$$

څرنگه چې $|M| \neq 0$ دی، نو M مټریکس معکوس منوونکی دی.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{adj}M$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6. دلاندي خطي معادلو سيستمونه د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

حل (a):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2) = -12 \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2) = -12$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 2(10) = 20 \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 2(10) = 20$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-12}{-4} = 3 \\ y &= \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{20}{-4} = -5 \\ z &= \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (3, -5, 1)$$

حل (b):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26 \Rightarrow |A_{x_1}| = 26$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0 \Rightarrow |A_{x_2}| = -3$$

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}, \quad x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{-3}{8} \Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{13}{4}, -\frac{3}{8}\right)$$

ميزان:

$$x_1 - 2x_2 = 4$$

$$\frac{13}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{13}{4} + \frac{3}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$2 \cdot \frac{13}{4} + 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

7. دلاندي خطي معادلو سيستمونه دگوس په طريقه حل كړئ.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases}$$

حل (a):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & -5 & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 3 & 2 & -5 & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} + 2 & \frac{-9}{2} - 5 & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 5 & -4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} - 4 & \frac{-15}{2} - 2 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} - \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} - \frac{-19}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{-19}{2} & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{13}{2}y - \frac{19}{2}z = 0 \Rightarrow -\frac{19}{2}z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$2x - 3y + 3z = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

حل (b):

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 0 \cdot x + 2y = -29 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -29 \end{pmatrix}$$

$$2y = -29 \Rightarrow y = -\frac{29}{2}$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow 2x + 3 \cdot \frac{-29}{2} = 8 \Rightarrow 2x - \frac{87}{2} = 8 \Rightarrow 2x = 8 + \frac{87}{2} \Rightarrow 2x = \frac{16 + 87}{2} = \frac{103}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{103}{4} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{103}{4}, -\frac{29}{2}\right)$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس متريکس په طریقہ حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

حل (a):

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{5} \\ \frac{10}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1, \quad y = 2$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

حل (b):

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

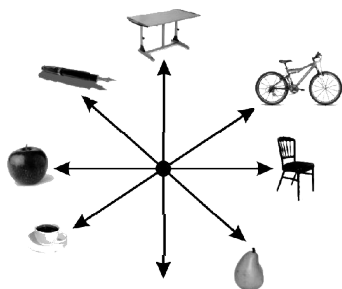
$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ -\frac{3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1, \quad y = -1$$

$$\Rightarrow (x, y) = (1, -1)$$



اووم څپرکی: وکتورونه

د وضعیه کمیاتو په قایم سېسټیم کې وکتورونه

د درسي کتاب (249) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	• زده‌کونکي د وکتور په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي وکولای شي د وکتور په اړه مثال حل کړای شي. • زده‌کونکي له وکتور څخه په ورځني ژوند کې کار واخلي او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.
2- د زده کړې لارې:	ډله‌ييز کار، پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	د وړودي شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او روغبړ وروسته د زده‌کونکو پام د وړودي شکل چارټ ته چې له مخکې څخه مو تیار کړی دی راواړوی او وپوښتي: • په وړودي شکل کې څه شی وینئ؟ • په ځینو دیوالونو باندې به مو دغه → نښه لیدلې وي، څه معنا لري؟ • ستاسو په فکر یا نظر وکتور له قطعه خط سره څه توپیر لري؟ کوبښښ وکړئ چې څو اېونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې لنډ معلومات ورکړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقيقې)	ښاغلی ښوونکی، زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ورته ووايېست چې د کتاب 249 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي. بیا د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولي فعالیت نورو ته توضیح کوي، که چیرې کومې ډلې تېروتنه کړې وي، هغه د بلې ډلې په واسطه په دوستانه فضا کې پر تخته اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او خپل لوست داسې پیل کړي: جهت لرونکی قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه تعجیل، فاصله، قوه او داسې نور او هر غشی د یوه وکتور ممثل دی. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیټونو د قایم سېسټیم په مبداء کې وي، د شعاع وکتور (<i>Position vector</i>) په نوم یادېږي، هغه وکتور چې طول یعنې اوږدوالی یې صفر وي، له صفر وکتور (<i>Zero vector</i>) څخه عبارت دی.
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقيقې)	د لوست د لاینه تحکیم لپاره د درسي کتاب 250 مخ مثال زده‌کونکو ته په یو کسيز ډول ورکړي، هر زده‌کونکی دې په

بېل بېل ډول د کتاب له لیدلو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړې بیا تاسو څو تنه زده‌کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړئ چې پر تخته یې حل کړي، نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره مقایسه کړي، تاسو څارنه وکړئ، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې لوست یو ځل بیا ورته توضیح کړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه و ارزوي:

1. څوک وکتور تعریف کولای شي؟
2. د وکتور تیر د څه شی په معنا دی؟
3. که د یوه وکتور اوږدوالی صفر وي، کوم وکتور ته ویلای شو؟
4. که چیرې د یوه وکتور مبداء د قایمو مختصاتو په مبداء کې واقع وي، دغه ډول وکتور ته څه وايي؟ کوبښن وکړي چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د وکتور بحث له ډېرو مهمو بحثونو څخه شمېرل کېږي، زیاتې کارونې یې په فزیک کې دي، ځکه هغه کمیتونه چې هم مقدار لري او هم جهت لري وکتوري کمیتونه دي، لکه د نیوټن قانون کې چې قوه مساوي ده د کتلې او تعجیل له حاصل ضرب څخه یا په سمبولیک ډول $\vec{F} = m \vec{a}$ یعنې هم قوه او هم تعجیل وکتوري کمیتونه دي، همدارنګه کار چې فارمول یې $\vec{W} = \vec{F} \cdot d \cdot \cos \theta$ دی یو وکتوري کمیت دی. مقناطیسي ساحه هم یوه وکتوري فضا تشکیلوي. د وکتور اوږدوالی د هغه وکتور له طول څخه عبارت دی. دوه وکتورونه هغه وخت سره مساوي بلل کېږي، چې عین جهت ولري او اوږدوالی یې سره برابر وي که چیرې د وکتور جهت بدلون ومومي منفي کېږي؛ لکه په لاندې ډول:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} \quad O \xrightarrow{\vec{a}} B$$

$$\overrightarrow{BO} = -\vec{a} \quad O \xleftarrow{-\vec{a}} B$$

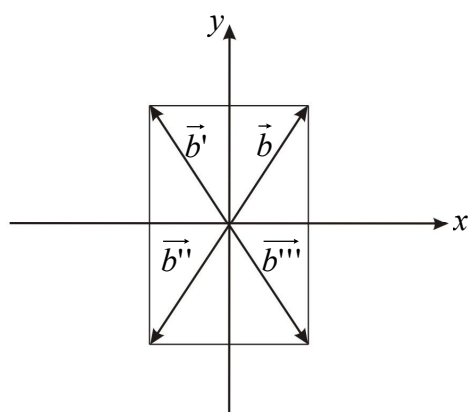
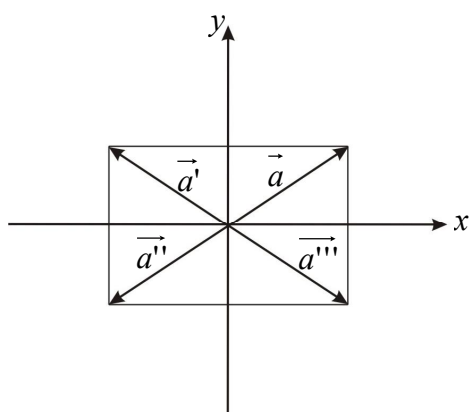
وکتور په دوه ډوله ښوول کېږي:

1. د وکتور ستوني ښوونه.
2. د وکتور سطرې ښوونه.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
 - a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
 - b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
 - c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

حل (a): د لومړۍ مثال وکتورونه عبارت دي له $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



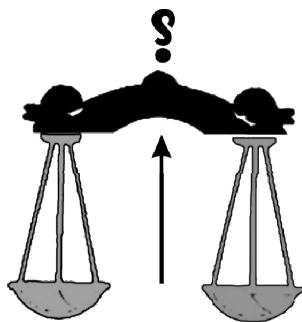
د $\vec{a}$ درې ممثل وکتورونه عبارت دي له $\vec{a}'$ ، $\vec{a}''$ او $\vec{a}'''$ او د $\vec{b}$ درې ممثل وکتورونه عبارت دي له $\vec{b}'$ ، $\vec{b}''$ او $\vec{b}'''$ وکتورونو څخه.

حل (b): د b جزء پوښتنه د کتاب په 250 مخ کې حل شوی (کوم وکتورونه چې رسم شوي دي د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم شوي دي).

حل (c): پوهېږو چې $\vec{a} = -\vec{a}$ یو ډبل خلاف وکتورونه دي؛ نو:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad -\vec{a} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad -\vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



اووم خبرکی: وکتورنه

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

د درسي کتاب (251) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني	• زده کونکي د دوو ټکو ترمنځ د واټن او منځنی ټکي په مفهوم پوه شي. • زده کونکي د اړوندې موضوع پوښتنې حل کړای شي. • زده کونکي د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره وکولای شي ورځنۍ مسایل حل او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ییز، یو کسيز کار، پوښتنه او ځواب
3- مرستندويه مواد:	د وړودي شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه لنډه یادونه وکړې او د زده کونکو پام د وړودي شکل چارټ ته چې له مخکې مو تیار کړی راواړوئ او وپوښتئ: • ایا کولای شئ د دوو معلومو ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟ • هغه فارمول چې د دوو ټکو ترمنځ واټن پرې معلومېږي څه شی دی؟ • د خط کش پرمخ هغه ټکي وټاکئ چې د شهادت د گوتې په واسطه یې تعادل وساتل شي؟ کونښن وکړئ چې ځوابونه له زده کونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: ښاغلی ښوونکی، زده کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، ورته ووايست چې د کتاب 251 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي، بیا دې د یو یا دوو ډلو استازی خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چیرې کومه ډله تېروتنه کوي، هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او خپل د لوست بهیر داسې پیل کړي: د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: د دوو ټکو ترمنځ واټن د $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ فارمول په واسطه لاس ته راځي چې دلته x_1 لومړی مرکبه او y_1 دویمه مرکبه او همدارنګه x_2 لومړی مرکبه او y_2 دویمه مرکبه ښيي. او د دوو ټکو یعنې (x_1, y_1) او (x_2, y_2) منځنی ټکی فورمول $X_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$ دی چې X_m د همدې خط یا وکتور منځنی ټکی دی $X_m = (x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم لپاره د درسي کتاب 252 مخ لومړی مثال زده کوونکو ته په گروپي ډول ورکړی، هر زده کوونکی دې په بېل بېل ډول په خپل گروپ کې د کتاب له لیدو پرته فکر ورباندې وکړي. بیا تاسو په وار سره دیو یا دوو ډلو استازی د تختې مخې ته راوغواړئ چې نوموړی مثال پر تخته حل کړي که د کومې ډلې استازي تېروتنه کوي، تېروتنه یې دیو بل گروپ په واسطه حل کړي.

تاسو د کار څارنه وکړئ، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې لوست ورته یو ځل بیا توضیح او تشریح کړئ.

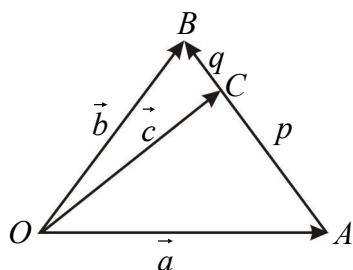
7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وارزوي:

1. ایا له دوو (x_1, y_1) او (x_2, y_2) ټکو څخه همېشه یوه کرښه تېرېږي؟
 2. د نوموړي کرښې ریاضیکي معادله کوم شکل لري؟
 3. دهغه ټکي فارمول و وایاست چې نیمایي خط یې ښي لوري او نیمایي خط یې کیڼ لوري ته پراته دي.
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي، مونږ لاندې قضیه په پام کې نیسو:



قضیه: که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ د A او B ټکو شعاع وکتورونه وي، C ټکی د AB خط داخليد $\frac{p}{q}$ په نسبت ویشي، نو د $\vec{c}$ شعاع

$$\vec{c} = \frac{qa + pb}{q + p}$$

وکتور د C په ټکي کې عبارت دی له: $p = q$ سره شي، C ټکی د AB خط منځنی ټکی دی.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot AC = p \cdot BC$$

ثبوت: که C د AB کرښه داخليد $\frac{p}{q}$ په نسبت ویشي؛ نو:

د OAC له مثلث څخه پوهېږو چې:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OC} = \vec{a} + \vec{p} = \vec{a} + \frac{\vec{p}}{AB} \cdot \vec{AB} = \vec{a} + \frac{\vec{p}}{p+q} \cdot \vec{AB}$$

له شکل څخه پوهېږو چې $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\vec{OC} = \vec{a} + \frac{\vec{p}}{p+q} (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{p\vec{b} - a\vec{p}}{p+q}$$

$$\vec{OC} = \frac{a\vec{p} + a\vec{q} + p\vec{b} - a\vec{p}}{p+q} = \frac{a\vec{q} + p\vec{b}}{p+q}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د لاندې درکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او همدارنګه منځني ټکي یې پیدا کړئ:

$$i) \quad B(2, 7) \quad , \quad A(3, 4)$$

$$ii) \quad N(5, 1) \quad , \quad M(1, 5)$$

$$iii) \quad Q(8, 8) \quad , \quad P(1, 8)$$

حل:

$$i) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 + 2}{2} \\ \frac{4 + 7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

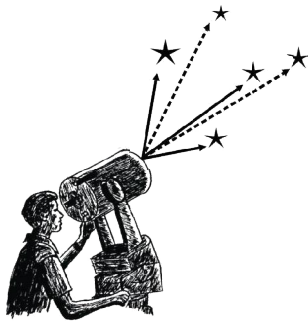
$$ii) \quad |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + 5}{2} \\ \frac{5 + 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(8 - 1)^2 + (8 - 8)^2} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{49 + 0} = 7$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8 + 1}{2} \\ \frac{8 + 8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{16}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 8 \end{pmatrix}$$



اووم خپرکی: وکتورونه

وکتورونه په سطح او فضاء کې

د درسي کتاب (253-254) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

• زده‌کونکي په سطح او فضا کې د وکتورونو په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي وکړای شي په دې اړه پوښتنې حل کړي. • زده‌کونکي د سطحې او فضا د وکتورونو ترمنځ توپیر وکړای شي او ورڅخه په ورځني ژوند کې کار واخلي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
پوښتنه او ځواب ډلیمیز او یوکسیزکار	2- د زده کړې لارې:
د اړتیا وړ مواد (د وړودي شکل چارټ)	3- مرستندویه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنډه یادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وړودي شکل چارټ ته چې مخکې مو تیار کړی راوړی او وپوښتی: • په سطح او فضا کې وکتورونه یو له بل سره څه توپیر لري؟ • ایا د یوه وکتور ستوني او سطري ښوونه د وکتور په طول کومه اغیزه لري؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی، زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته ووايست چې د کتاب 253 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوئ، بیا دې د یوې یا دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چیرې کومه ډله تېروتنه کوي هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، د ستونزې په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ وروسته د i) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده) ii) $a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ (د سکالري ضرب قاعده) قاعدې په بشپړه توګه تشریح او توضیح کړئ. د هغو ټولو مرتبو جوړو سیټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د $1R^2$ (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي. د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $\vec{i} = \vec{j} = 1$ دی	

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \vec{i} + y \vec{j} \text{ او هر اختياري وكتور لپاره او } \vec{i} \text{ او } \vec{j} \text{ واحد وكتورونه دي چې د } x \text{ او } y \text{ محورونو په امتداد پراته دي.}$$

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهې لپاره د درسي کتاب 254 مخ لومړۍ مثال ii او iii جزونه زده کوونکو ته په یو کسيز ډول ورکړې چې د کتاب له لیدو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړي، بیا وروسته خو زده کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړي چې نوموړي مثالونه پر تخته حل کړي، نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، که کوم زده کوونکي تېروتنه کړي وي، تېروتنه دې له تختې څخه اصلاح کړي، تاسو د کار څارنه وکړئ او د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وارزوي:

1. له وكتور څخه په سطحه کې څه ډول استفاده کېږي؟
 2. د وكتور ستوني ښوونه او سطري ښوونه یو له بل سره څه توپیر لري؟
 3. له واحد وكتور څخه په کوم ځای کې کار اخیستل کېږي؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه لاس ته راوړئ له هغه پرته تاسو ورسره ورسره وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي؛ نو د واحد وكتور په اړه لنډ معلومات په لاندې ډول دی:

واحد وكتور له هغه وكتور څخه عبارت دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزايد لپاره ترې کار اخلي، ټولې مقناطیسي او برقي ساحې وکتوري ساحې دي، چې له واحد وكتور څخه گټه اخلي. د یوه وكتور واحد وكتور عبارت دی د

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ يا } \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a \text{ واحد وكتور عبارت دی له:}$$

یعنې د $\vec{a}$ یو وكتور مساوي دی د هغه وكتور له طول، ضرب د نوموړي په واحد وكتور کې په سطح کې د x او y محورونو واحد وكتورونه $\vec{i}$ او $\vec{j}$ دی چې $\vec{i} = (1, 0)$ او $\vec{j} = (0, 1)$.

مثال: د $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ راکړل شوی واحد وكتور یې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{4+16}} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{20}} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\vec{i}}{2\sqrt{5}} + \frac{4\vec{j}}{2\sqrt{5}}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} \text{ د } \vec{a} \text{ د وكتور واحد وكتور}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ وي، $\vec{u} + 2\vec{v}$ ، $\vec{u} - 2\vec{v}$ او $2\vec{u} + 4\vec{v}$ پیدا کړئ.

حل:

$$2\vec{u} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

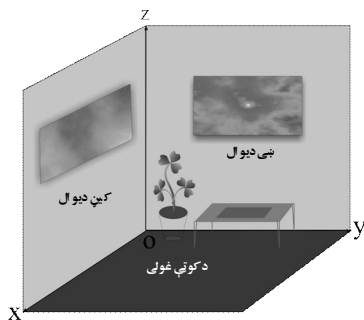
$$2\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$4\vec{v} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u} + 4\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 \\ -2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$



اووم څپرکی: وکتورنه

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

د درسي کتاب (255-258) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

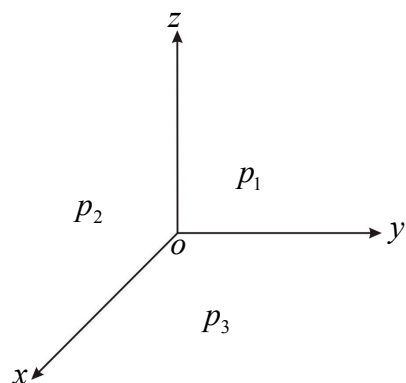
• زده‌کونکي په درې بعدي فضا کې د ټکي د مختصاتو په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي وکړای شي يو ټکی په درې بعدي فضا کې وټاکي. • زده‌کونکي د پورتنۍ پوهې او مهارت په درلودلو سره وکړای شي په ورځنۍ ژوند کې ورڅخه کار واخلي او ترې خوبيښې ښکاره کړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي
پوښتنه او ځواب ډله‌بیز او يوکسيز کار	2- د زده کړې لارې:
د اړتيا وړ مواد (د وروډي شکل چارټ)	3- مرستندويه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه لنډه يادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وروډي شکل چارټ ته چې له مخکې مو تيار کړی راواړوئ او وپوښتئ: • تاسو په شکل کې څه وينئ؟ • کينډیوال، ښي ديوال او د ټولگي غولې يو له بل سره څه اړيکه لري؟ • په شکل کې څو مستويگانې وينئ؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ، له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.	4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې)

5- د لوست بهير او فعاليت (28) دقيقې:

ښاغلی ښوونکی د خپل لوست بهير داسې پيل کړی:

هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو د درې بعدي فضا په نامه يادېږي، درې بعدي (IR^3) فضا د ټولو هغو مرتبو درې

گونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په دې ډول تعريفېږي: $IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$



درې بعدي فضا د درې محورونو x, y, z په واسطه تعريفېږي، دغه

محورونه د O په ټکي کې يو پر بل عمود دي او له دغو محورونو څخه درې

د P_1, P_2 او P_3 مستويگانې لاس ته راځي. د درې بعدي فضا قايم مختصات

داسې نوموي چې که يو تن ودرېږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور

دی د z محور او هغه محور چې د ليدونکي د ليد په لوري دی د y محور

او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لوري پروت دی، د x محور دی.

د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکي (O) د مختصاتو مبدا ده، په پای کې

د يوه ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې ورته توضيح کړی.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لارښه تحکیم او پوهې لپاره د درسي کتاب 255 مخ هغه معلومات چې د یوه ټکي د ټاکلو لپاره ورکړ شوي دي (په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل) مرحله په مرحله یې د زده کوونکو په گډون پر تخته باندې په عملي توګه تطبیق کړی، وروسته ورته په درې بعدي فضا کې د $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ ټکي د زده کوونکو په مرسته وټاکي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو زده کوونکي د لاندې پوښتنو په پوښتلو سره وارزوي:

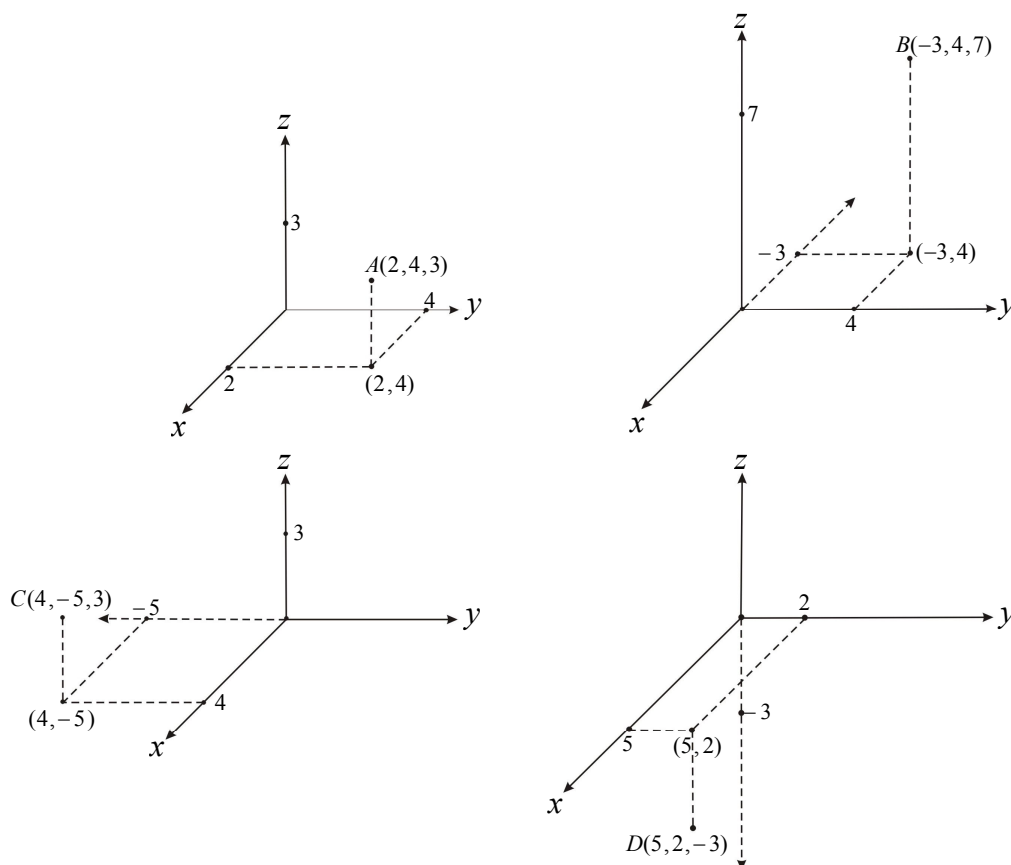
1. ایا کولای شئ د (x, y) ټکي د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکي؟
 2. دوه بعدي فضا له درې بعدي فضا سره څه توپیر لري؟
 3. ایا کولای شئ چې د $(6, 3, 7)$ ټکي په درې بعدي فضا کې وښایاست؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه تر لاسه کړئ، د ځواب د نه ویلو په صورت کې ورسره مرسته او د لوست له مهمو ټکو څخه لنډه یادونه وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي؛ نو لاندې څو مثالونه په پام کې ونیسئ:

مثال: د $A(2, 4, 3)$ ، $B(-3, 4, 7)$ ، $C(4, -5, 3)$ او $D(5, 2, -3)$ ټکي په درې بعدي فضا کې وښایاست.

حل: پوهېږو چې د هر محور منفي جهت د هغه محور له امتداد یافته څخه حاصلېږي.



9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. لومړۍ پوښتنه تکرار راغلی دی.

2. که $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ وي د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکترونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

حل: له واحد وکتور څخه د مختصې د جهت د تزايد لپاره استفاده کېږي او واحد وکتور عبارت دی له نسبت د وکتور پر

نورم د وکتور یا په سمبولیک ډول د $\vec{a}$ وکتور واحد وکتور عبارت دی له: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

3. که د $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$ درکړل شوي وکتورونه په پام کې ونیسئ او

لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

a) $2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$ b) $|\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| = ?$

يادونه: ددې پوښتنې a او b جزونه په کتاب کې نه دي چاپ شوي.

حل:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} &= 2(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - 6(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) + 4(6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}) \\ &= 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} - 24\vec{i} - 36\vec{j} - 12\vec{k} + 24\vec{i} - 36\vec{j} - 12\vec{k} \\ &= (4 - 24 + 24)\vec{i} + (6 - 36 - 36)\vec{j} + (2 - 12 - 12)\vec{k} \\ &= 4\vec{i} - 66\vec{j} - 22\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| &= \left| (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - \frac{1}{3}(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}) - 2(6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}) \right| \\ &= \left| (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) - \frac{4}{3}\vec{i} - 2\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} - 12\vec{i} + 18\vec{j} + 6\vec{k} \right| \\ &= \left| (2 - \frac{4}{3} - 12)\vec{i} + (3 - 2 + 18)\vec{j} + (1 - \frac{2}{3} + 6)\vec{k} \right| = \left| -\frac{34}{3}\vec{i} + 19\vec{j} + \frac{19}{3}\vec{k} \right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{34}{3}\right)^2 + (19)^2 + \left(\frac{19}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1156}{9} + 361 + \frac{361}{9}} = \sqrt{361 + \frac{1517}{9}} = \sqrt{\frac{3249 + 1517}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{4766}{9}} = \frac{69.036}{3} \end{aligned}$$

4. $\vec{u}$ او $\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو ترمنځ واټن پيدا کړئ.

حل:

$$|\vec{uv}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\vec{uv}| = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \boxed{|\vec{uv}| = \sqrt{14}}$$

$$|\vec{vw}| = \sqrt{(6-4)^2 + (-9-6)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{2^2 + 15^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 225 + 25} = \sqrt{254}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{vw}| = \sqrt{254}}$$

$$|\vec{wu}| = \sqrt{(2-6)^2 + (3+9)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 144 + 16} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{wu}| = 4\sqrt{11}}$$

5. هغه وکتور واحدونه پيدا کړئ چې د $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

حل:

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

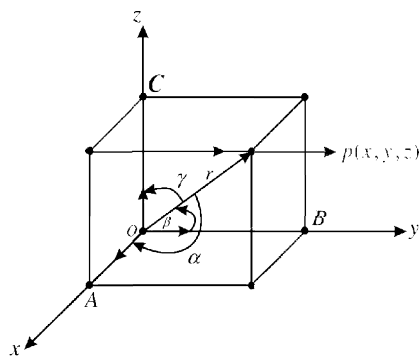
$$\Rightarrow \vec{e}_u = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{16 + 36 + 4}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{56}} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k} \Rightarrow \vec{e}_v = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_w = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{6^2 + (-9)^2 + (-3)^2}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{36 + 81 + 9}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{126}} = \frac{6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}}{3\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k} \Rightarrow \vec{e}_w = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$



اووم څپرکی: وکتورنه

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه

د درسي کتاب (259) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

• زده‌کونکي به د یوه وکتور د جهت زاویو او کوساینونو په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي به د یوه وکتور د جهت زاویو او کوساینونو اړوند پوښتنې حل کړای شي. • د پورتني پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان باور پیدا کړي او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
پوښتنه او ځواب ډله‌ییز او یوکسیزکار	2- د زده کړې لارې:
د اړتیا وړ مواد (د وړودي شکل چارټ)	3- مرستندویه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه لنډه یادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وړودي شکل چارټ ته چې مخکې مو تیار کړی دی راواړوئ او وپوښتئ: • په چارټ کې څه شی وینئ؟ • د شعاع وکتور په واسطه په فضا کې څو زاویې جوړېږي؟ کوبښن وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کونکي په مناسبو ډلو ووېشئ، ورته ووايست چې د کتاب 259 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوئ، بیا دې د یو یا دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که چیرې کومه ډله تېروتنه کوي، هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او د لوست بهیر داسې پیل کړي: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورو سره په ترتیب α, β, γ زاویې جوړې کړي، په دې صورت کې لیکلای شو: $\vec{OP} = \vec{r}, \quad \vec{OA} = \vec{r}_x, \quad \vec{OB} = \vec{r}_y, \quad \vec{OC} = \vec{r}_z$ کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول وليکو: $\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$ $\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta$ $\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma$	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهې لپاره زده‌کوونکي په مناسبو ډلو وېشئ چې هره ډله په درې بعدی فضا کې یوه نقطه وښيي، همدارنگه د نوموړي نقطې شعاع وکتور رسم کړي، بیا دې د نوموړي وکتور د جهت زاوېې او کوساینونه پیدا کړي، تاسو څارنه وکړئ یعنې له ډلو څخه لیدنه وکړئ، د ستونزو او تېروتنو په صورت کې ورسره مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ نو زده‌کوونکي د لاندې پوښتنو په واسطه وازوئ:

1. د کوم ډول وکتور د جهت زاوېې او کوساینونه پیدا کولای شو؟
 2. د α زاویه له کوم محور سره جوړېږي؟
 3. د β زاویه د څه شې په واسطه لاس ته راځي؟
 4. د γ زاویه له شعاع وکتور سره څه ډول اړیکه لري؟
- کوبښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه تر لاسه کړئ د ځواب د نه ویلو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي، لاندې تعریف په پام کې نیسو:

شعاع وکتور: هغه وکتور چې مبداء یې د درې بعدی فضا د وضعیه کمیاتو په مبداء کې واقع وي، α هغه زاویه ده چې شعاع وکتور یې د x له محور سره جوړ وي.

β : هغه زاویه ده چې شعاع وکتور یې د y له محور سره جوړ وي.

γ : هغه زاویه ده چې شعاع وکتور یې د z له محور سره جوړ وي.

همدارنگه $\vec{i}$, $\vec{j}$ او $\vec{k}$ په درې بعدی فضا کې واحد وکتورونه دي. $\vec{i}$ د x د محور واحد وکتور $\vec{j}$ د y د محور واحد وکتور او $\vec{k}$ د z د محور واحد وکتور دی، قیمتونه یې په لاندې ډول دی:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

a) $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = ?$

b) $\vec{v} - 3\vec{w} = ?$

c) $\left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = ?$

حل:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} &= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\
 &= \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \\
 &\Rightarrow \boxed{\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \vec{v} - 3\vec{w} &= 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 3(5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 15\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} \\
 &= -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v} - 3\vec{w} = -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad |3\vec{v} + \vec{w}| &= |3(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}| = |9\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}| \\
 &= |14\vec{i} - 7\vec{j} + 9\vec{k}| = \sqrt{14^2 + (-7)^2 + 9^2} = \sqrt{196 + 49 + 81} = \sqrt{326} \\
 &\Rightarrow \boxed{|3\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{326}}
 \end{aligned}$$

2. د α اندازہ داسې پيدا کړئ چې د $\alpha\vec{i} + (\alpha+1)\vec{j} + 2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

حل:

$$\begin{aligned}
 |\alpha\vec{i} + (\alpha+1)\vec{j} + 2\vec{k}| &= 3 \\
 \sqrt{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + 2^2} &= 3 \\
 \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 4} = 3 &\Rightarrow (\sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha + 5})^2 = 3^2 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 9 \\
 &\Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha+2) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=1 \\ \alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

اووم څپرکی: وکتورنه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د درسي کتاب (261) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې • زده‌کونکي د دوو وکتورونو د سکالري ضرب په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د دوو وکتورونو سکالري ضرب په يوه عددي پوښتنه کې تطبيق کړای شي. • زده‌کونکي د پورتني پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان باورمن او ډاډ پيدا کړي.	2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب ډله‌يز او يوکسيز کار
3- مرستندويه مواد: د اړتيا وړ مواد، د وړودي شکل چارټ	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنډه يادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وړودي شکل چارټ ته چې له مخکې مو تيار کړی دی راوړی او وپوښتی: • ايا کولای شئ د دوو حقيقي عددونو ضرب حاصل په لاس راوړئ. • تاسو د دوو يا څو حقيقي عددونو د ضرب لپاره دغو دوو (x, y) علامو څخه کار اخېستی دی ايا د دوو وکتورونو د ضرب لپاره هم کولای شئ، له نوموړو علامو څخه کار واخلئ. • کونښن وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه ترلاسه کړئ له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کونکي په مناسبو ډلو و وېشي ورته ووايast چې د کتاب 261 مخ فعاليت په خپلو ډلو کې له خبرو او بحث وروسته سرته ورسوي بيا دې د يو يا دوو ډلو استازي خپل سرته رسولی فعاليت نورو ته توضيح کړي که چيرې کومه ډله تېروتنه کوي، هغه د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي او د لوست بهير داسې پيل کړي: که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي يا فضا کې په پام کې نيسو د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب په (0) سره ښيي، که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه وي او وغواړو د سکالري ضرب حاصل يې په لاس راوړو نو: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos \theta$ په داسې حال کې چې $\vec{u}$ د $\vec{u}$ وکتور اوږدوالی او $\vec{v}$ د $\vec{v}$ وکتور اوږدوالی او θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو ترمنځ زاويه ده. په داسې حال کې چې $(0 \leq \theta \leq \pi)$ سره وي. که وغواړو د دوو وکتورونو ترمنځ زاويه په لاس راوړو له دغه فورمول $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$ څخه کار اخلو.	

په پای کې د درسي کتاب 262 مخ لومړۍ مثال د سکالري ضرب د تعريف په پام کې نيولو سره ورته مرحله په مرحله حل له خواصو سره يې تشرېح او توضيح کړی.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لارښه تحکیم او پوهې لپاره زده کوونکو ته په يو کسيزه توگه دنده ورکړې چې د کتاب له ليدلو پرته د درسي کتاب 263 مخ درېم مثال حل کړي، تاسو د ټولگي څارنه وکړئ او د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي ايا زده کړه شوې ده او که نه؟ نو له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي:

1. د دوو حقيقي عددونو د ضرب حاصل کوم عدد دی؟
 2. ايا د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل وکتوري کميت دی او که سکالري کميت؟
 3. په حقيقي عددونو کې تبادلي خاصيت يعنې $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ يا $a \cdot b = b \cdot a$ دی، ايا د دوو وکتورونو په سکالري ضرب کې تبادلي خاصيت $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ هم صدق کوي؟
- کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه تر لاسه کړئ، د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو معلومات په دې اړه زيات شوي وي، همدارنگه ځينې پوښتنې په تمرين کې راغلي دي چې حل يې د لاندې معلوماتو په واسطه کېږي.

د يوه وکتور تصوير (ارتسام) په ټاکلي جهت: که د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو ترمنځ زاويه په θ سره ونښو، نو د $\vec{a}$ د وکتور تصوير (ارتسام) $(projection)$ د $\vec{b}$ وکتور په جهت عبارت دی، له:

$$P_{\vec{b}}^{\vec{a}} = |\vec{a}| \cos \theta \vec{e}_b$$

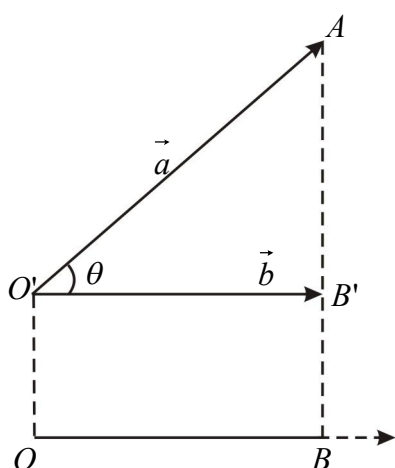
پوهېږو چې:

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$P_{\vec{b}}^{\vec{a}} = |\vec{a}| \cos \theta \cdot \vec{e}_b = |\vec{a}| \cdot \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}| |\vec{b}|} \cdot \vec{b}$$

$$P_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| |\vec{b}|} \vec{b} \quad \text{د } \vec{a} \text{ د وکتور مرتسم (تصوير) د } \vec{b} \text{ په جهت.}$$



9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. وښایاست چې د $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ د وکتور مرتسمونه د $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ واحد وکتورونو په امتداد په ترتیب سره له a, b, c سره مساوي دي.

حل: د $\vec{a}$ وکتور مرتسم د $\vec{b}$ د وکتور په امتداد په لاندې ډول دی:

$$P_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|} \cdot \vec{b}$$

نو لرو چې:

$$P_{\vec{i}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{v}}{\vec{i} \cdot \vec{i}} \cdot \vec{i} = \frac{\vec{i} (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{1} \cdot \vec{i} = (a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{i} \cdot \vec{j} + c\vec{i} \cdot \vec{k})\vec{i} = (a + b \cdot 0 + c \cdot 0) \cdot \vec{i} = a\vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{i}}^{\vec{v}} = a\vec{i}}$$

$$P_{\vec{j}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{v}}{\vec{j} \cdot \vec{j}} \cdot \vec{j} = \frac{\vec{j} (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{1} \cdot \vec{j} = (a\vec{i} \cdot \vec{j} + b\vec{j} \cdot \vec{j} + c\vec{k} \cdot \vec{j})\vec{j} = (a \cdot 0 + b + c \cdot 0)\vec{j} = b\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{j}}^{\vec{v}} = b\vec{j}}$$

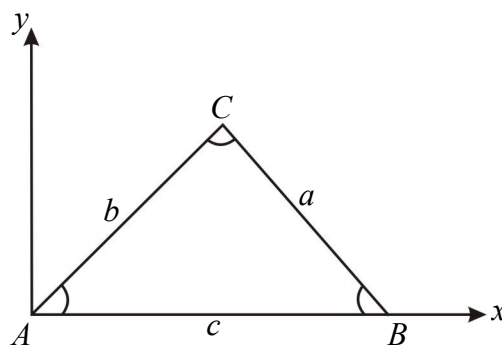
$$P_{\vec{k}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\vec{k} \cdot \vec{k}} \cdot \vec{k} = \frac{\vec{k} (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{1} \cdot \vec{k} = (a\vec{i} \cdot \vec{k} + b\vec{j} \cdot \vec{k} + c\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{k} = (a \cdot 0 + b \cdot 0 + c)\vec{k} = c\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\vec{k}}^{\vec{v}} = c\vec{k}}$$

2. وښایاست چې په هر $\triangle ABC$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

$$i) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad ii) a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

حل:



i)

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

څرنگه چې $x = b \cos A$ او $y = b \sin A$ دی؛ نو:

$$a = \sqrt{(b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2} \Rightarrow a = \sqrt{b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

ii)

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$

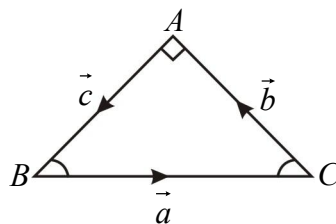
$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{a}| + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(180^\circ - C) + |\vec{a}| |\vec{c}| \cos(180^\circ - B) = 0$$

$$a \cdot a - ab \cos C - ac \cos B = 0$$

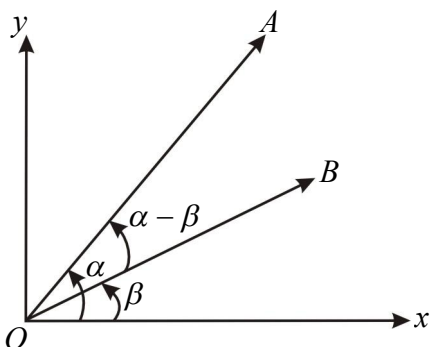
$$a^2 - ab \cos C - ac \cos B = 0 \div a$$

$$a - b \cos C - c \cos B = 0 \Rightarrow a = b \cos C + c \cos B$$



3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

حل:



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

که چیرې $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ او $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ دوه واحد وکتورونه د xy

په مستوي کې وي، دغه دوه واحد وکتورونه د xy په

مستوي کې د α او β زاوېې جوړوي، همدارنگه پوهېږو

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j = x i + y j \quad \text{چې}$$

د $\vec{a}$ د وکتور مرکبه د x پر محور عبارت دی له $a_1 = x = \cos \alpha$ ، همدارنگه د $\vec{a}$ د وکتور مرکبه د y پر محور عبارت

دی له $a_2 = y = \sin \alpha$ او د $\vec{b}$ وکتورونو نورم یا طول عبارت دی له $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ دی؛ نو لیکلای شو:

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j = x i + y j = \cos \alpha i + \sin \alpha j \quad \dots \text{ I}$$

$$\vec{b} = b_1 i + b_2 j = x i + y j = \cos \beta i + \sin \beta j \quad \dots \text{ II}$$

د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو ترمنځ زاویه عبارت ده له: $(\alpha - \beta)$ او د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو سکالري ضرب په لاس راوړو:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) \quad \dots \text{ III}$$

که د I او II اړیکې له یو بل سره ضرب کړو، په لاس راځي:

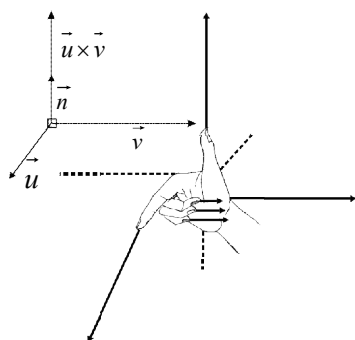
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\cos \alpha i + \sin \alpha j) \cdot (\cos \beta i + \sin \beta j)$$

$$= \cos \alpha i \cos \beta i + \cos \alpha i \sin \beta j + \sin \alpha j \cos \beta i + \sin \alpha j \sin \beta j$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots \text{ IV}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

له III او IV اړیکو څخه لیکلای شو، چې



اووم څپرکی: وکتورنه

د وکتوري ضرب حاصل

د درسي کتاب (265) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

• زده‌کونکي د وکتوري ضرب په مفهوم پوه شي. • زده‌کونکي د دوو وکتورونو وکتوري ضرب په لاس راوړای شي. • زده‌کونکي د پورتنی پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان ډاډمن او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
پوښتنه او ځواب ډلیمیز او یوکسیزکار	2- د زده کړې لارې:
د وړودي شکل چارټ	3- مرستندویه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنډه یادونه وکړې او د زده‌کونکو پام د وړودي شکل چارټ ته چې مخکې مو تیار کړی دی راوړی او وپوښتی: • په چارټ کې څه وینئ؟ • په چارټ کې څو وکتورونه وینئ او یو له بل سره څه اړیکه لري؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی د لوست بهیر داسې پیل کړی: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه چې د صفر خلاف وي په پام کې نیسو د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u} \times \vec{v}$ سره ښیي او په لاندې ډول تعریفېږي: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \vec{v} \sin \theta \vec{n}$ په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو په واسطه د جوړې شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، یا په بل عبارت د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې ددوی په مبدا باندې عمود دی. یو مهم توپیر د سکالري او وکتوري ضرب دا دی چې د دوو وکتورونو سکالري ضرب یو سکالري دی او د دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل یو وکتور دی. د دوو وکتورونو خطي ترکیب: د یوه سیټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سیټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي. که $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ د یوه سیټ وکتورونه او $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په	

داسې حال کې چې $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ وي، د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که چیرې په یوه خطي ترکیب کې $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ وي، وکتورونه خطي خپلواکي لري او که یو د $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ د صفر خلاف وي، وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

په پای کې د درسي کتاب 265 مخ لومړۍ مثال د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په لاس راوړئ او په دویم پړاو کې د نوموړو وکتورونو خطي ترکیب، خطي خپلواکي او خطي غیر خپلواکي ورته په لاس راوړئ.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لاینه تحکیم او پوهې په موخه د درسي کتاب 266 مخ دویم مثال زده کوونکو ته په یو کسيزه توگه ورکړی چې د کتاب له لیدلو پرته یې حل کړي، په پای کې یو داوطلب زده کوونکی د تختې مخې ته راوغوړئ چې نوموړی مثال پر تخته باندې حل کړي، نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، د ټولگي څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ د لاندې پوښتنو په کولو سره زده کوونکي ارزوي:

1. د دوو وکتورونو وکتوري او سکالري ضرب یو له بل سره څه توپیر لري؟

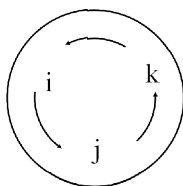
2. که چیرې $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ سره وي، ایا وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

3. که یو د $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ خلاف د صفر وي، ایا وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

4. ایا د دوو وکتورونو وکتوري ضرب حاصل وکتوري کمیت دی او که سکالري؟

کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه تر لاسه کړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته او لوست ورته یو ځل بیا توضیح او تشریح کړئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:



ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي، یو ځل بیا د واحد وکتورونو د تشکیل لپاره هغه ډایروي جوړښت چې په درسي کتاب کې هم راغلی لیکو:

او د دوو وکتورونو وکتوري ضرب تعریف چې وایي د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د نوموړو وکتورونو په مبداء باندې عمود دی؛ یعنې:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \vec{n}$$

د درسي کتاب 270 مخ کې $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ ، $\vec{j} \times \vec{j} = 0$ او $\vec{k} \times \vec{k} = 0$ دی.

$$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = |\vec{j}| |\vec{j}| \sin \theta = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = |\vec{k}| |\vec{k}| \sin \theta = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

اووم څپرکی: وکتورنه

د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل

د درسي کتاب (267) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودلو په مفهوم پوه شي. • په دوه بُعدی، درې بُعدی او بالاخره په n بُعدی فضا کې طبیعي واحد وکتورونه وپېژني. • یو وکتور د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په شکل وښودلای شي. • د پورته پوهې او مهارت له حاصلولو څخه خوښ شي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ییز او یوکسیز کار
3- مرستندویه مواد:	د وړودي شکل چارټ
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست چې د وکتورونو خطي ترکیب دی، زده کوونکو ته په لنډ ډول تکرار کړی، وروسته له زده کوونکو څخه وپوښتی: • ایا د (x_1, x_2, x_3) وکتور د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په شکل ښودلای شو؟ ښاغلی ښوونکی که چیرې زده کوونکي ځواب ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسې یې حل کړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): • ښاغلی ښوونکی په دوه بُعدی، درې بُعدی او بالاخره په عمومي حالت یعنی n بُعدی فضا کې د ورکړ شوو وکتورونو ښودل د واحد وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل زده کوونکو ته توضیح او تشریح کړی. • ښاغلی ښوونکی هغه عنوان چې د (وکتورونو خطي خپلواکي) ده، پر تخته باندې ولیکي او زده کوونکو ته ووايي چې د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي لري، که چیرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي صفر وي، نو په دې صورت کې $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ سره شي. وروسته د (غیر خپلواک) عنوان پر تخته ولیکي، زده کوونکو ته یې تعریف او توضیح کړی، ورپسې هغه یادونه چې په کې د یوه سټ د وکتورونو د خطي خپلواکي په لاس راوړلو پړاوونه دي، د 268 مخ مثال په حلولو سره په ټولګي کې توضیح او تشریح کړی، تر څو زده کوونکي د وکتورونو د خطي خپلواکي په مفهوم ښه پوه شي. • ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي چې د کتاب د 269 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د یو بل په مشوره سرته ورسوي. وروسته د یوې ډلې استازي راوغواړي چې خپل ډله ییز کار نورو زده کوونکو ته توضیح کړي. بیا تاسې د فعالیت پایله ورته توضیح او ددې مخ لومړی مثال پر تخته مرحله په مرحله حل کړئ.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د کتاب 270 مخ دویم مثال زده کوونکو ته ورکړی چې په انفرادي توګه یې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. وروسته یو داوطلب زده کوونکی دې نوموړی مثال پر تخته حل او د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډه شي ایا زده کړه شوې ده او که نه؟ د لاندې پوښتنو په کولو سره زده کوونکي و ارزوي:

1. یو زده کوونکی دې په درې بعدي فضا کې طبیعي واحد وکتور پر تخته ولیکي؟
2. یو زده کوونکی دې د $\vec{a} = (2, 3)$ وکتور د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په شکل ولیکي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

د درسي کتاب د 267 مخ د فعالیت حل:

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = 0$$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = 0$$

$$(\alpha_1 + 0 + 0, 0 + \alpha_2 + 0, 0 + 0 + \alpha_3) = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

څرنگه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دی، نو S خطي خپلواکي لري.

اووم څپرکی: وکتورنه

د مخلوط ضرب حاصل یا درې گونی ضرب (Triple product)

د درسي کتاب (270) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي	زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې: • د مخلوط ضرب حاصل په مفهوم پوه شي. • په مخلوط ضرب پورې اړونده پوښتنې حل کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په لاس ته راوړلو سره خوښي ښکاره کوي.
2- د زده کړې لارې:	ډله ییز او یوکسیز کار
3- مرستندویه مواد:	د وروډي شکل چارټ
4- د وروډي برخې توضیح (5 دقیقې)	ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته تېر لوست په لنډ ډول تکرار کړی او ددې لپاره چې د زده کوونکو پام موضوع ته راواړوي، په لاندې ډول وپوښتي: • د $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ د ضرب حاصل وکتور دی او که سکالر؟ • ایا $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ له $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$ سره مساوي دي؟ که چیرې زده کوونکي ځوابونه ووايي ښه به وي، له هغه پرته تاسو په لنډ ډول معلومات ورکړئ.
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې):	
• ښاغلی ښوونکی د لوست عنوان (د مخلوط د ضرب حاصل) پر تخته باندې ولیکي او زده کوونکو ته د دوو یا څو وکتورونو د ضربولو ټول حالتونه توضیح او تشریح کړي، بیا زده کوونکو ته ووايي چې د $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ اړیکه د متوازي السطوح له حجم څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې د $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د متوازي السطوح ضلعې وي. • ښاغلی ښوونکی د درسي کتاب 271 مخ د تطبیقاتي مسئلې عنوان پر تخته ولیکي او د 1, 2 او 3 مسئلې د پوښتنو او ځوابونو په طریقه د زده کوونکو په فعال گډون سره حل کړي.	
6- د زده کړې تحکیم: (7 دقیقې)	
ښاغلی ښوونکی د لوست د لاندې ښه تحکیم لپاره د کتاب 273 مخ څلورم مثال چې د یوې متوازي السطوح مساحت شکل یې پر تخته رسم کړی او یو داوطلب زده کوونکي ته ووايې چې پر تخته یې حل کړي، نور زده کوونکي دې یې د کتاب له لیدو پرته په خپلو کتابچو کې حل کړي. د تېروتنې په صورت کې مرسته وکړي. په پای کې دې زده کوونکي خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي او تېروتنې دې اصلاح کړي.	

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډه شي ایا زده‌کړه شوې ده او که نه؟ د لاندې پوښتنو په کولو سره زده‌کوونکي و ارزوي:

1. د $(\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$ د ضرب حاصل وکتور دي او که سکالر؟

2. یو زده‌کوونکی دې $\sin(\alpha + \beta)$ ته د تختې پر مخ انکشاف ورکړي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. که $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$, $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$ وي، وښایاست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي

لري؟

حل:

$$\begin{aligned}\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3 &= \alpha(t^2 + t + 2) + \beta(2t^2 + t) + \gamma(3t^2 + 2t + 2) = 0 \\ &= \alpha t^2 + \alpha t + 2\alpha + 2\beta t^2 + \beta t + 3\gamma t^2 + 2\gamma t + 2\gamma = 0 \\ &= (\alpha + 2\beta + 3\gamma)t^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)t + 2\alpha + 2\gamma = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha + 2\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\gamma}$$

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow -\gamma + \beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = -\gamma}$$

نو د $\alpha = \beta = -\gamma$ د ټولو قیمتونو لپاره پورتنۍ خطي ترکیب صدق کوي او د α, β او γ لپاره داسې قیمتونه هم شتون لري چې صفر نه وي؛ نو په نتیجه کې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

2. وښایاست چې $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$ او $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟

حل:

$$\begin{aligned}\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} &= \alpha(2i + 3j + 4k) + \beta(4i + 6j + 8k) \\ &= 2\alpha i + 3\alpha j + 4\alpha k + 4\beta i + 6\beta j + 8\beta k = 0 \\ &= (2\alpha + 4\beta)i + (3\alpha + 6\beta)j + (4\alpha + 8\beta)k = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + 6\beta = 0 \\ 4\alpha + 8\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2\beta$$

نو په نتیجه کې د $\alpha = -2\beta$ په ټولو قیمتونو کې پورتنۍ خطي ترکیب صدق کوي او د α او β لپاره د صفر خلاف قیمتونه هم موجود دي، نو د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

3. ثبوت کړئ چې $\vec{a}_1 = 2i$, $\vec{a}_2 = 5j$ او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.

حل:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$$

$$\alpha_1 2i + \alpha_2 5j + \alpha_3 9k = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0, \quad 5\alpha_2 = 0, \quad 9\alpha_3 = 0$$

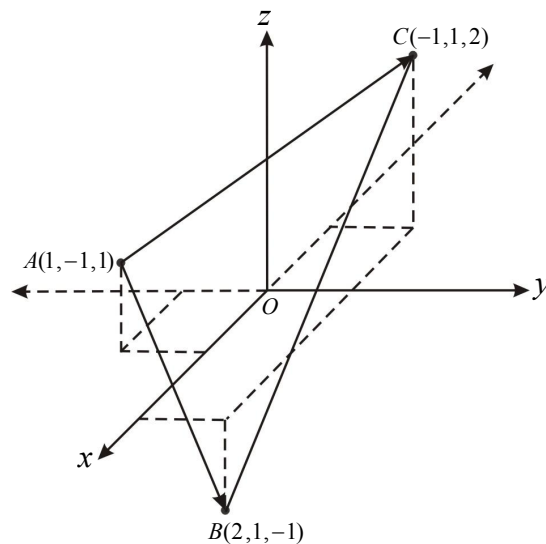
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

په پایله کې ویلی شو چې پورتنی وکتورونه خطي خپلواکي لري.

4. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(1,-1,1)$, $B(2,1,-1)$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل

شوی وي، همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود دی، مطلوب دی.

حل:



$$\vec{AB} = (2-1, 1-(-1), -1-1) = (1, 2, -2) = i + 2j - 2k$$

$$\vec{AC} = (-1-1, 1-(-1), 2-1) = (-2, 2, 1) = -2i + 2j + k$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(i + 2j - 2k) \times (-2i + 2j + k)| = \frac{1}{2} |2k - j + 4k + 2i + 4j + 4i|$$

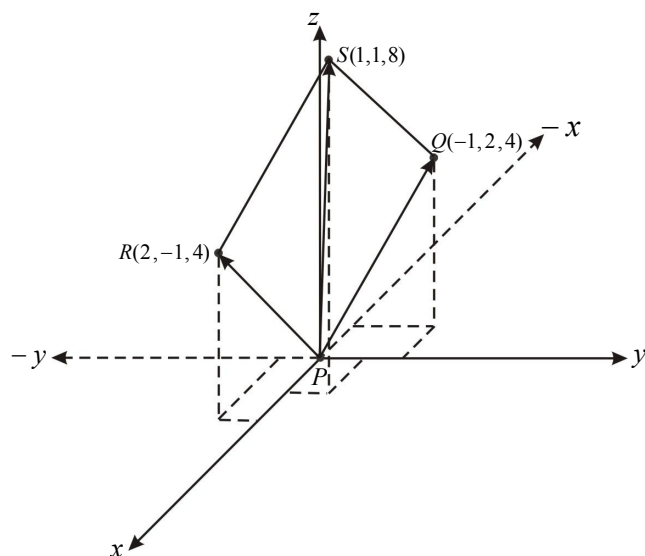
$$= \frac{1}{2} |6i + 3j + 6k| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 36}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{81} \Rightarrow \boxed{A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4.5 \text{ unit}^2}$$

هغه واحد وکتور چې د ABC پر مستوي عمود دی، دغه بحث د درسي کتاب او خصوصاً د دغه فصل له سوبې لور دی.

5. د هغې متوازي الاضلاع مساحت پيدا كړئ چې د $P(0,0,0)$, $Q(-1,2,4)$, $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وكتورونو په واسطه ځانگړی شوي وي.

حل:



$$\overrightarrow{PQ} = (-1-0, 2-0, 4-0) = (-1, 2, 4) = -i + 2j + 4k$$

$$\overrightarrow{PR} = (2-0, -1-0, 4-0) = (2, -1, 4) = 2i - j + 4k$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(8+4) - j(-4-8) + k(1-4) = 12i + 12j - 3k$$

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{12^2 + 12^2 + (-3)^2} = \sqrt{144 + 144 + 9} = \sqrt{297} = 3\sqrt{33}$$

$$\text{د متوازي الاضلاع مساحت} = 3\sqrt{33}$$

6. که $\vec{u} = 2i - j + k$ ، $\vec{v} = 4i + 2j - k$ سره وي، د لاندې وكتورونو د ضرب حاصل پيدا كړئ؟

i) $\vec{u} \times \vec{u}$ ii) $\vec{u} \times \vec{v}$ iii) $\vec{v} \times \vec{u}$

حل:

$$i) \vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1+1)i - (2-2)j + (-2+2)k = 0$$

$$ii) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-2)i - (-2-4)j + (4+4)k = -i + 6j + 8k$$

$$iii) \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1)i - (4+2)j + (-4-4)k = i - 6j - 8k = -(-i + 6j + 8k)$$

$$= -\vec{u} \times \vec{v}$$

د اووم څپرکي د عمومي پوښتنو حل (اته درسي ساعتونه)

1: که $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ او $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ وي:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$: b) $\vec{b} \cdot \vec{a}$: مطلوب دی

حل:

$$\begin{aligned} a) \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})(4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) = 3 \cdot 4 + (-1)(3) + (5)(-2) \\ &= 12 - 3 - 10 = 12 - 13 = -1 \end{aligned}$$

$$b) \vec{b} \cdot \vec{a} = (4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})(3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 12 - 3 - 10 = -1$$

2: که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{OP}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi + yj$ وکتور په څیر ولیکئ.

حل:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$$

3: که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب دی.

حل:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} - \vec{j} = 0$$

4: که چېرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

i) $\vec{AB} = ?$

ii) $2\vec{AB} - \vec{CB} = ?$

iii) $2\vec{CB} - 2\vec{CA} = ?$

حل:

$$i) \overrightarrow{AB} = (-1-2, 1-5) = (-3, -4) = -3\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$ii) \overrightarrow{CB} = (-1-2, 1+6) = -3\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = 2(-3\vec{i} - 4\vec{j}) - (-3\vec{i} + 7\vec{j}) = -6\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{i} - 7\vec{j} = -3\vec{i} - 15\vec{j}$$

$$iii) \overrightarrow{CA} = (2-2, 5+6) = (0, 11) = +11\vec{j} \Rightarrow 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = 2(-3\vec{i} + 7\vec{j}) - 2(11\vec{j}) \\ = -6\vec{i} + 14\vec{j} - 22\vec{j} = -6\vec{i} - 8\vec{j} \Rightarrow 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = -6\vec{i} - 8\vec{j}$$

5: که چہرې $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ، $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$$i) \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \quad ii) \vec{v} - 3\vec{w} \quad iii) |3\vec{v} + \vec{w}| = ?$$

حل:

$$i) \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + 2(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ = (1+6+5)\vec{i} + (2-4-1)\vec{j} + (-1+4+3)\vec{k} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = 12\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}$$

$$ii) \vec{v} - 3\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 3(5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 15\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} \\ = -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} - 3\vec{w} = -12\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}}$$

$$iii) |3\vec{v} + \vec{w}| = |3(3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}| = |9\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} + 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}| \\ = |14\vec{i} - 7\vec{j} + 9\vec{k}| = \sqrt{14^2 + (-7)^2 + 9^2} = \sqrt{196 + 49 + 81} = \sqrt{326}$$

$$\boxed{|3\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{326}}$$

(iv): د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکرل شوو وکتورونو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_v = \frac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\vec{k}$$

$$\vec{e}_w = \frac{5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{25 + 1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{35}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{35}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{35}}\vec{k}$$

(6) د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، $\vec{b} \cdot \vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a} \times \vec{b}$ او $\vec{b} \times \vec{a}$ پيدا او دوه په دوه يې پرتله کړئ، که چيرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توگه وي:

$$i) \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} a = i + j \\ b = i - j \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

$$iv) \begin{cases} \vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

حل:

$$i) \vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 2(\vec{i} \cdot \vec{i}) - \vec{j} \cdot \vec{j} - \vec{k} \cdot \vec{k} = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i} \times \vec{i} - 2\vec{i} \times \vec{j} + 2\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{j} + \vec{j} \times \vec{k} - \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} - \vec{k} \times \vec{k} \\ &= 2 \cdot 0 - 2\vec{k} - 2\vec{j} - \vec{k} - 0 + \vec{i} - \vec{j} - \vec{i} - 0 = -3\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 2\vec{i} \times \vec{i} + \vec{i} \times \vec{j} - \vec{i} \times \vec{k} - \vec{j} \times 2\vec{i} - \vec{j} \times \vec{j} + \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times 2\vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} - \vec{k} \times \vec{k} \\ &= 0 + \vec{k} + \vec{j} + 2\vec{k} - 0 + \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} - 0 = 3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$ii) \vec{a} \cdot \vec{b} = (i + j)(i - j) = i \cdot i - j \cdot j = 1 - 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (i - j)(i + j) = i \cdot i - j \cdot j = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (i + j) \times (i - j) = i \times i - i \times j + j \times i - j \times j = 0 - \vec{k} - \vec{k} + 0 = -2\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (i - j) \times (i + j) = i \times i + i \times j - j \times i - j \times j = 0 + \vec{k} + \vec{k} = 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$iii) \vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})(\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} \cdot \vec{i} + 3\vec{i} \cdot \vec{j} - 2\vec{j} \cdot \vec{i} - 2\vec{j} \cdot \vec{j} + \vec{k} \cdot \vec{i} + \vec{k} \cdot \vec{j} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{a} &= (\vec{i} + \vec{j})(3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} \cdot 3\vec{i} - \vec{i} \cdot 2\vec{j} + \vec{i} \cdot \vec{k} + \vec{j} \cdot 3\vec{i} - \vec{j} \cdot 2\vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{k} = 3 - 0 + 0 + 3 \cdot 0 - 2 + 0 \\ &= 3 - 2 = 1 \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} = 1 \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} \times \vec{i} + 3\vec{i} \times \vec{j} - 2\vec{j} \times \vec{i} - 2\vec{j} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} \\ &= 3 \cdot 0 + 3\vec{k} + 2\vec{k} - 2 \cdot 0 + \vec{j} - \vec{i} = -\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (\vec{i} + \vec{j}) \times (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i} \times \vec{i} - 2\vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} + 3\vec{j} \times \vec{i} - 2\vec{j} \times \vec{j} + \vec{j} \times \vec{k}$$

$$= 0 - 2\vec{k} - \vec{j} - 3\vec{k} - 2 \cdot 0 + \vec{j} = \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = -(-\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}) \quad \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$vi) \vec{a} \cdot \vec{b} = (-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= -4 \cdot 2i \cdot i - 4i \cdot j - 4i \cdot k + 2j \cdot i + j \cdot j + j \cdot k - 2 \cdot 2k \cdot i - 2k \cdot j - 2k \cdot k$$

$$= -8 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 + 0 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -8 + 1 - 2 = -9 \Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = -9}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})(-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = -2 \cdot 4 + 1 - 2 \cdot 1 = -8 + 1 - 2 = -9 \Rightarrow \boxed{\vec{b} \cdot \vec{a} = -9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= -4i \times 2i - 4i \times j - 4i \times k + j \times 2i + j \times j + j \times k - 2k \times 2i - 2k \times j - 2k \times k$$

$$= 0 - 4k - 4(-j) - 2k + 0 + i - 4j - 2(-i) + 0 = -4k + 4j - 2k + i - 4j + 2i = 3i - 6k$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (-4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= 2i \times (-4i) + 2i \times j + 2i \times (-2k) + j \times (-4i) + j \times j + j \times (-2k) + k \times j + k \times (-2k)$$

$$= 0 + 2k + 4j + 4k + 0 - 2i - 4j - i + 0 = -3i + 6k = -(3i - 6k)$$

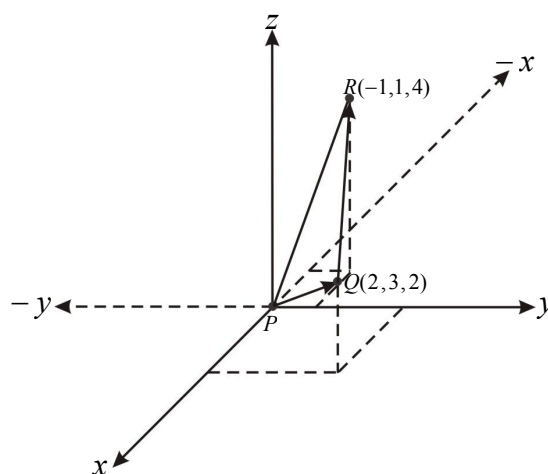
$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}}$$

7: د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$$i): P(0,0,0), Q(2,3,2), R(-1,1,4)$$

$$ii): P(1,-1,-1), Q(2,0,-1), R(0,2,1)$$

حل (i):



$$\vec{PQ} = (2-0, 3-0, 2-0) = (2, 3, 2) = 2i + 3j + 2k$$

$$\vec{QR} = (-1-2, 1-3, 4-2) = (-3, -2, 2) = -3i - 2j + 2k$$

$$\begin{aligned} A(PQR) &= \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{QR}| = \frac{1}{2} |(2i + 3j + 2k) \times (-3i - 2j + 2k)| \\ &= \frac{1}{2} |-4k - 4j + 9k + 6i - 6j + 4i| = \frac{1}{2} |10i - 10j + 5k| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 100 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{225} \end{aligned}$$

$$A(PQR) = \frac{15}{2} = 7.5$$

حل (ii):

$$\overrightarrow{PQ} = (2-1, 0-(-1), -1-(-1)) = (1, 1, 0) = i + j$$

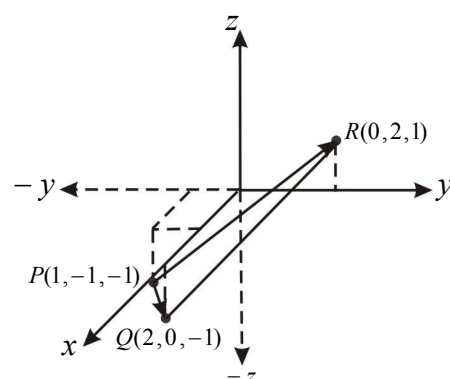
$$\overrightarrow{PQ} = i + j$$

$$\overrightarrow{PR} = (0-1, 2-(-1), 1-(-1)) = (-1, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{PR} = -i + 3j + 2k$$

$$\begin{aligned} A(PQR) &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right| = \frac{1}{2} \left| (i + j) \times (-i + 3j + 2k) \right| \\ &= \frac{1}{2} |3k - 2j + k + 2i| = \frac{1}{2} |2i - 2j + 4k| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{24} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$A(PQR) = \sqrt{6}$$



8: د هغې متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

i) $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(2,-1,1)$, $D(3,1,4)$

ii) $A(1,2,-1)$, $B(4,2,-3)$, $C(6,-5,2)$, $D(9,-5,0)$

iii) $A(1,-1,1)$, $B(-1,2,2)$, $C(-3,4,-5)$, $D(-3,5,-4)$

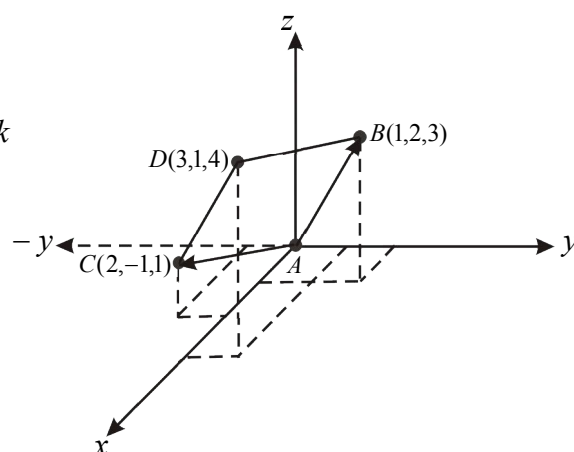
حل (i):

$$\overrightarrow{AB} = (1-0, 2-0, 3-0) = (1, 2, 3) = i + 2j + 3k$$

$$\overrightarrow{AB} = i + 2j + 3k$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-0, -1-0, 1-0) = (2, -1, 1) = 2i - j + k$$

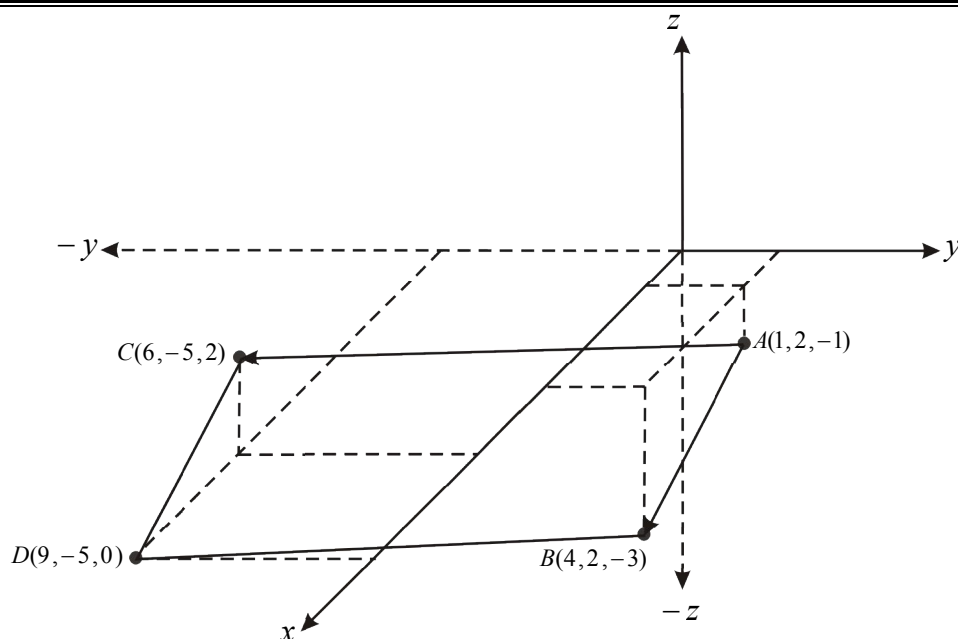
$$\overrightarrow{AC} = 2i - j + k$$



$$\begin{aligned} \text{د متوازي الاضلاع مساحت } A &= \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \left| (i + 2j + 3k) \times (2i - j + k) \right| \\ &= \left| -k - j - 4k + 2i + 6j + 3i \right| = \left| 5i + 5j - 5k \right| \\ &= \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25 + 25} \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{75} \text{ د متوازي الاضلاع مساحت}$$

حل (ii):



$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 2-2, -3-(-1)) = (3, 0, -2) = 3i - 2k$$

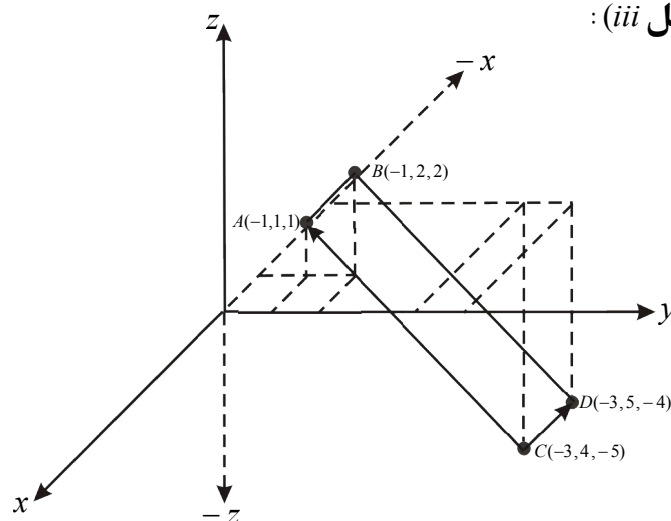
$$\overrightarrow{AC} = (6-1, -5-2, 2-(-1)) = (5, -7, 3) = 5i - 7j + 3k$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| &= |(3i - 2k) \times (5i - 7j + 3k)| = |15i \times i - 21i \times j + 9i \times k - 10k \times i + 14k \times j - 6k \times k| \\ &= |0 - 21k - 9j - 10j - 14i - 0| = |-14i - 19j - 21k| \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-14)^2 + (-19)^2 + (-21)^2} = \sqrt{196 + 361 + 441} = \sqrt{998} = 31.591$$

مساحت د متوازي الاضلاع = 31.591

حل (iii):



$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= (-3 - (-1), 4 - 1, -5 - (-4)) \\ &= (-2, 3, -1) = -2i + 3j - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= (-1 - (-3), 1 - 4, 1 - (-5)) \\ &= (2, -3, 6) = 2i - 3j + 6k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CD}| &= |(2i - 3j + 6k) \times (-2i + 3j - k)| \\ &= |-2k + 2(-j) + 3 \times 0 - 3j - 6(-i) + 6 \times 0| \\ &= 6i - 5j - 2k = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 25 + 4} = \sqrt{65} = 8.062 \end{aligned}$$

مساحت د متوازي الاضلاع = 8.062 unit²

9: کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$$i) \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$$

$$ii) \quad \vec{u} = i + 2j - k, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$$

پوهېږو چې دوو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو د سکالري ضرب حاصل عبارت دی له:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

اوس که چیرې $\cos \theta = \pm 1$ وي، د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه یو له بل سره موازي او که چیرې $\cos \theta = 0$ شي، نوموړي وکتورونه یو پر بل عمود دي.

حل ⁽ⁱ⁾: ټول وکتورونه دوه پر دوه تر څېړنې لاندې نیسو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(5i - j + k)(j - 5k)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{-1 - 5}{\sqrt{25 + 1 + 1} \sqrt{1 + 25}} \\ &= \frac{-6}{\sqrt{27} \cdot 26} = \frac{-6}{26.49} = -0.226 \Rightarrow \cos \theta = -0.226 \end{aligned}$$

نو د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(5i - j + k)(-15i + 3j - 3k)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-15)^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{-75 - 3 - 3}{\sqrt{27} \sqrt{243}} = \frac{-81}{\sqrt{27} \cdot 243} \\ &= \frac{-81}{\sqrt{6561}} = \frac{-81}{81} = -1 \Rightarrow \cos \theta = -1 \end{aligned}$$

څرنگه چې $\cos \theta = -1$ دی، نو د $\vec{u}$ او $\vec{w}$ سره موازي خو جېټونه مخالف دي.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(j - 5k)(-15i + 3j - 3k)}{\sqrt{1 + (-5)^2} \sqrt{(-15)^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{3 + 15}{\sqrt{26} \sqrt{243}} = \frac{18}{\sqrt{26} \cdot 243} \\ &= \frac{18}{\sqrt{6381}} = \frac{18}{97.485} = 0.2265 \Rightarrow \cos \theta = 0.2265 \end{aligned}$$

څرنگه چې $\cos \theta = 0.2265$ دي، نو د $\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

حل (ii):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\cos \theta = \frac{(i+2j-k)(i+j+k)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} \sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1+2-1}{\sqrt{1+4+1} \sqrt{1+1+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{4.242} = 0.4715 \Rightarrow \cos \theta = 0.4715$$

څرنگه چې $\cos \theta = 0.4715$ دي، نو د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$$

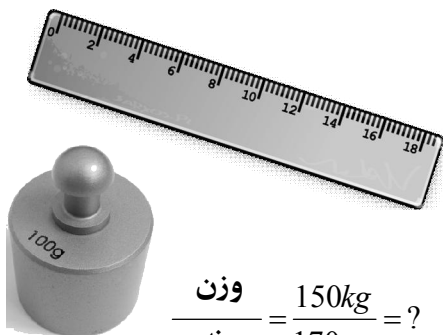
$$\cos \theta = \frac{(i+2j-k)(-\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j)}{\sqrt{6} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \pi}{\sqrt{6} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{6} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3} \pi} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi \sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

نو د $\vec{u}$ او $\vec{w}$ وکتورونه نه سره موازي او نه یو پر بل عمود دي.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\cos \theta = \frac{(i+j+k)(-\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} = \frac{0}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}}} \Rightarrow \cos \theta = 0$$

څرنگه چې $\cos \theta = 0$ په لاس راغی، نو $\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه یو پر بل عمود دي.



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150\text{kg}}{170\text{cm}} = ?$$

اتم څپرکی: احصائیه

د بدلونونو ضریب (Coefficient Variations)

د درسي کتاب (281-282) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د بدلون (تغیراتو) د ضریب په مفهوم پوه شي. • د یوې ټولنې د بدلون ضریب پیدا کړای شي. • د بدلون د ضریب په مفهوم پوه او له محاسبې څخه یې په ورځنۍ ژوند کې ګټه واخلي او د خوښۍ احساس وکړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یوکسیزکار ...	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او وپوښتي: • څوک کولای شي چې و وایي که چیرې د یوې ټولنې اندازه په متر او د بلې ټولنې اندازه په کیلو ګرام اندازه شوي وي ایا دا دوه ټولنې سره د پرتلې (مقایسې) وړ دي. • څوک کولای شي و وایي چې دوه ټولنې څه وخت یو د بل سره د پرتلې (مقایسې) وړ دي. همدارنگه د کتاب د وړودي شکل په اړه معلومات وغواړي او کوښښ وکړي چې ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او معلومات ورکړي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: ښاغلی ښوونکی یو داوطلب زده کوونکی ته دنده ورکړي چې په ټولګي کې لس تنه زده کوونکي ناڅاپه وټاکي، په همدې ډول یو بل زده کوونکی راوغواړي چې په ترتیب سره د دغو لس تنو زده کوونکو د ونې او وزن پوښتنه وکړي او پر تخته یې ولیکي؛ بیا نورو زده کوونکو ته و وایست چې هر تن دې د ونې او وزن اوسط او معیاري انحراف په خپلو کتابچو کې په لاس راوړي او له زده کوونکو وپوښتي؛ څوک کولای شي د تخته پر مخ د لیکلې ډېټا اوسط او معیاري انحراف په لاس راوړي؟ که چیرې داوطلب زده کوونکی پیدا شي اجازه ورکړي چې په لاس یې راوړي او د نه شتون په صورت کې تاسو پخپله د نوموړي ډېټا اوسط او معیاري انحراف په لاس راوړي وروسته دې زده کوونکي خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي. په پای کې تاسو ورته د بدلون ضریب تعریف؛ یعنې د بدلون یا تغیراتو ضریب چې په C.V ښودل کېږي او له هغه نسبت	

څخه عبارت دی چې د معیاري انحراف او اوسط له تقسیم څخه په لاس راځي او مطلق یو بې واحد عدد دی چې د دوو نامتجانسو ټولنو د پرتلې لپاره کارول کېږي او په سمبولیک ډول یې $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$ پر تخته ولیکئ چې له لاس ته راغلي ډېټا اوسط او معیاري انحراف څخه پیدا شوی دی، نسبت یې په لاس راوړئ.

زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشئ او د درسي کتاب (281) مخ فعالیت ورکړئ چې له بحث او خبرو وروسته د بدلون ضرب و لیکي او هره ډله دې په وار سره ځواب ووايي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

6- د زده‌کړې تحکیم: (7) دقیقې

د لوست د لا پوخوالي لپاره د درسي کتاب (282) مخ لومړی مثال د داوطلب زده‌کوونکي په واسطه حل کړئ او نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې د درسي کتاب له لیدو پرته حل کړي.

په پای کې دې زده‌کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

پاملرنه وکړئ چې زده‌کوونکي اوسط او معیاري انحراف سم په لاس راوړای شي او که نه؟

د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شئ، ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځواب له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

1. د یوې ټولنې د بدلون ضرب څه مفهوم لري؟
2. که چیرې د یوې ټولنې د بدلون ضرب زیات وي دا په څه معنا ده؟
3. که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضرب مساوي له څو سره کېږي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی کوم فرمول چې د بدلون ضرب لپاره په درسي کتاب کې لیکل شوی دی او دوه مثالونه هم په همدې اړوند حل شوي دي، که چیرې ډېټا د فریکونسي د یو جدول په شکل راکړل شوی وي یا زده‌کوونکي پوښتنه وکړه چې د دغه جدول د بدلون ضرب څرنګه محاسبه کولای شو، د دې پوښتنې د ځواب لپاره بیا هم د بدلون د ضرب فرمول په پام کې نیسو چې $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$ دی، S معیاري انحراف او $\bar{x}$ اوسط ښیي.

د فریکونسي د جدول اوسط د $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$ فرمول په واسطه لاسته راځي، چې x_i د دستو (ګډیو) مرکز f_i یې اړونده

فریکونسي ښیي یا په بل عبارت $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$ او د فریکونسي د جدول معیاري انحراف د

$S = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$ فرمول په واسطه محاسبه کوو او

وروسته له محاسبې څخه د بدلون ضرب د $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$ فرمول په واسطه په لاس راوړو.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. دلاندې دېټا د بدلونونو یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

حل پوهېږو چې د بدلونونو یا تغیراتو د ضریب فرمول عبارت دی؛ له $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$ چې په ذکر شوي فرمول کې S معیاري انحراف او $\bar{x}$ اوسط ښیي.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} = 3.8$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3.8)^2 + (3-3.8)^2 + (4-3.8)^2 + (5-3.8)^2 + (6-3.8)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-2.8)^2 + (-0.8)^2 + (0.2)^2 + (1.2)^2 + (2.2)^2}{5} = \frac{7.84 + 0.64 + 0.04 + 1.44 + 4.84}{5} = \frac{14.8}{5}$$

$$S^2 = 2.96 \Rightarrow S = \sqrt{2.96}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.96}}{3.8} = \frac{1.72}{3.8} = 0.452$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = \frac{\sqrt{2.96}}{3.8} \cdot 100 = 0.452 \cdot 100 = 45.2\%$$

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دي؟

حل:

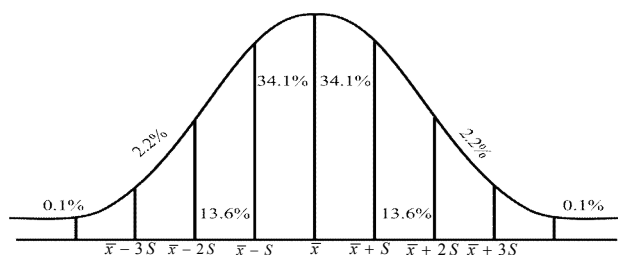
$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 4 \\ S = 6 \\ C \cdot V = ? \end{array} \right\}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

$$C \cdot V = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1.5$$

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کونکو د سن د بدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغیر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

4. **حل** څرنگه چې د ټولګي د زده‌کونکو شمېر تغیر نه کوي او سن یې لوړېږي، په دې معنا چې اوسط یې زیاتېږي؛ نو د بدلون یا تغیراتو ضریب کمېږي.



اتم څپرکی: احصائیه

په نورمال منحنی کې تېتوالی (پراگنده‌گي)

د درسي کتاب (283-284) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د نورمال منحنی، پراگندگي (تېتوالی) په مفهوم پوه شي. • د نورماله منحنی او غیر نورمالې منحنی توپیر وکړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ځان باور پیدا کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډلیمیز او یو کسيزکار ...	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده‌کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او په نورمال منحنی کې د ډېټا د توزیع سلنه په بېلو بېلو انټروالونو کې وښیاست او داسې پوښتنه وکړي، که چیرې د ټولې ډېټا توزیع د یوې نورمال منحنی په شکل وي؛ څومره ډېټا په $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ انټروال کې او څو سلنه ډېټا په $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ انټروال کې پرته ده. کوبنس وکړي چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړي، له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړي.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي په کتاب کې د A او B شرکت د حقوقو د تادیې گراف په بېل بېل ډول پر تخته رسم کړي او له زده‌کوونکو وغواړي چې هره ډله دې د گراف له مخې د شرکتونو د تادیې په اړه بحث وکړي او ووايي چې کوم شرکت د حقوقو په ورکړه کې زیاته پراگندگي لري، وروسته د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته تشریح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي. د موضوع د مهم والی له امله تاسو هم په بشپړه توګه د نورمالې توزیع په هکله ګام په ګام توضیحات ورکړي، داسې چې که چیرې مونږ د یوې ټولنې راتول شوې ډېټا د یوې منحنی په شکل سره وښیو، دغه منحنی به کوم شکل غوره کړي او د منحنی نورمال حالت مونږ ته د ډېټا په هکله کوم معلومات راکولای شي. بیا دوه داوطلب زده‌کوونکي په وار سره تختې ته راوغواړي چې هریو په ترتیب سره د درسي کتاب د مثال د لومړي او دویم جزونه پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې هم نوموړي مثال په خپلو کتابچو کې د کتاب له لیدو پرته حل کړي که چیرې د تختې په حل کې څه ستونزه وي د یو بل داوطلب زده‌کوونکي په مرسته یې اصلاح کړي، تاسو مرسته وکړي او په پای کې دې زده‌کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې دې اصلاح کړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاپوځوالي لپاره د درسي کتاب د (283) مخ فعالیت په لاندې ډول زده‌کوونکو ته ورکړي، چې په خپلو کتابچو کې یې حل کړي:

1. په اوسط ډول دکوم شرکت د حقوقو تادیه ډېره ده؟
 2. کوم شرکت د حقوقو د تادیې په میزان کې خپلو کارکوونکو ته لږه پراگندګي لري؟
 3. د دواړو شرکتونو د حقوقو تادیات سره پرتله کړئ؟
- تاسو د کار څارنه وکړئ او په پای کې یو داوطلب زده‌کوونکی دې نوموړي پوښتنې پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه ورسره پرتله کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شئ، لیا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځواب له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- د نورمال توزیع منحني په $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ انټروال کې څو سلنه ډېټا پرتله ده؟
- د نورمال منحني په $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ انټروال کې څومره ډېټا پرتله ده؟
- د نورمال منحني په $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$ انټروال کې څو سلنه (فیصده) ډېټا پرتله ده؟
- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ ډېر انحراف او له $3S$ څخه زیات انحراف د څه شي په معنا ده؟
- هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه واټن ولري دکوم ډول ډېټا په نوم یادېږي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی پوهانو نارمل منحني د یو مودول په شکل منلي او د مشاهدو او د ناڅاپي پېښو د پایلو له مخې یې د خطاګانو قانون ته پراختیا ورکړې ده، په لومړۍ پړاو کې د خطاګانو قانون محض د عمومياتو د یوې مجموعې په شکل چې په اکثر مواردو او حادثاتو کې به یې صدق کاوه، منلی وه Abraham Demoiver (1667-1745م) تقریباً دوه سوه کاله د مخه کله چې د نارمل منحني معادله استخراج کړه، د خطاګانو قانون یې د ریاضي په شکل تعریف کړ.

د نارمل منحني معادله: د متحولینو ترمنځ د اړیکې خپرل په حقیقت کې د علمي فعالیتونو اساسي موضوع ده او هره تابع دا ډول اړیکې (رابطې) افاده کوي، پوهېږو چې یوه تابع معمولاً د $y = f(x)$ په شکل ښودل کېږي دا فرمول ښيي چې y د x تابع ده.

د نارمل منحني گراف د ریاضي یوه ستونزمنه تابع ده چې د منحنی ګانو یو صنف ورکوي او شمېر یې بې‌نهایت زیات دی چې د حسابي اوسط او معیاري انحراف په قیمتونو سره ټاکل کېږي، د نارمل منحني معادله دا ده:

$$y = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}$$

په دې تابع کې:

y : د منحنی جگوالی دی چې د x له یوه ټاکلي قیمت سره تطابق کوي.

x : یو عدد یا رقم (په ازموینه کې نمره) ده چې د y له یو ټاکلي قیمت سره مطابقت کوي.

$\bar{x}$: د x متحول حسابي اوسط دی.

S : د x متحول معیاري انحراف دی.

π : یو ثابت عدد دی چې عددی قیمت یې تقریباً $3.1416\dots$ دی.

e : یو ثابت عدد دی چې عددی قیمت یې تقریباً $2.7183\dots$ دی.

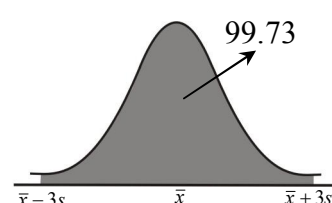
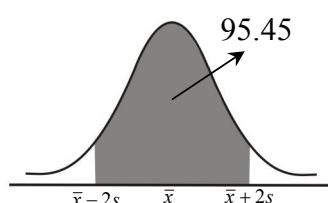
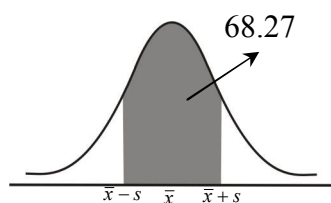
9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

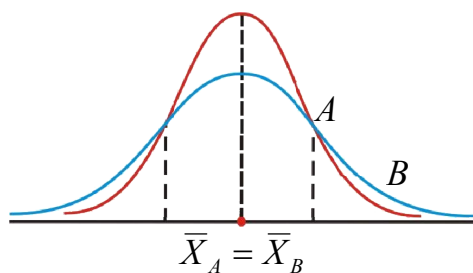
که چیرې 68.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ په فاصله کې پراته وي، ایا ویلای شئ، چې

95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انتروالونه له نورمالې منحني سره وښایاست؟

حل: ویلای شو چې 95.45% مشاهدات په $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ انتروال کې پراته دي او 99.73% مشاهدات په

$(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$ واټن(فاصله) کې پراته دي او گرافونه یې په لاندې ډول دي:





اتم څپرکی: احصائیه

د نورمال توزیع د ډول شاخصونه

د درسي کتاب (285) مخ

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

زده کوونکي به دلوست په پای کې و توانېږي چې: • د نورمالې توزیع په شاخصونو او د هغوی د موقعیت په مفهوم پوه شي. • د نورمالې توزیع توپیر له غیرنورمالې توزیع سره وکړای شي. • د اړتیا په وخت کې لاس ته راغلي فرمول او نورې اجزاوې یې پیدا کړای شي او ورسره د خوښی احساس وکړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي
پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	2- د زده کړې لارې:
د اړتیا وړ مواد...	3- مرستندويه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته یو ځل بیا د زده کوونکو پام د تېر لوست شکل ته راوگرځوی او وپوښتی: • د نورمالې توزیع منحنی کوم شکل لري او څه وخت متناظره بلل کېږي؟ • ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات متناظر د مثبت او منفي اشارو لرونکی وي؛ نو له کوم ډول منحنی څخه باید کار واخلو؟ • ایا ویلای شئ چې اوسط، وسط او موډ په نورماله توزیع کې چیرې موقعیت لري؟ ښایي چې زده کوونکي ځوابونه ووايي له هغه پرته تاسو ځوابونه ورته ووايست او دلوست بهیر پیل کړئ.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو وېشي ورته ووايست چې د درسي کتاب (285) مخ فعالیت پخپلو ډلو کې له بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي. د فعالیت د سرته رسولو په پای کې دې د هرې ډلې استازی خپل فعالیت نورو ته توضیح او تشریح کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړی په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړئ: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي چې په لاندې دوو ضریبونو سره ښودل کېږي: $\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ الف) دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي او α_3 هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزیع متناظره ده او که $\alpha_3 > 0$ وي، توزیع مثبت خمېدگي Positive skewness لري، یعنې د توزیع منحنی ښی لوري ته پرته ده او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ نو د توزیع منحنی کیښې خوا ته خمېدگي لري.	

ب) $SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$ دا فرمول د پیرسن د فرمول په نامه یادېږي، په متناظره توزیع کې د پیرسن د خمېدلو ضریب مساوي له صفر سره دی که $SK_{(p)} > 0$ وي، د توزیع منحنی ښي لوري ته پرته ده او که $SK_{(p)} < 0$ وي، د توزیع منحنی کښي لوري ته پرته ده.

یوه داوطلب زده‌کوونکي ته بلنه ورکړې چې د $\{6, 9, 5, 4, 3, 12, 19, 30\}$ ډېټا د خمېدلو میزان د α_3 په واسطه په لاس راوړي او نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، په پای کې دې زده‌کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي، د تېروتنې په صورت کې ورسره مرسته او لاروښوونه وکړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلي ښوونکی د لوست د لا پوځوالي لپاره له زده‌کوونکو څخه په وار سره وپوښتي:

1. هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي په څه نوم یادېږي؟
 2. هغه شاخص چې د توزیع حالت څرګندوي په څو ډوله دی؟
 3. که چیرې $\alpha_3 > 0$ وي، توزیع څه ډول توزیع ده؟
 4. که چیرې $\alpha_3 = 0$ وي، توزیع کوم حالت لري؟
 5. $SK_{(p)}$ د څه شي شاخص دی او په کوم نوم یادېږي؟
 6. که چیرې $SK_{(p)} < 0$ وي، د توزیع حالت څرګند کړي؟
 7. که چیرې $SK_{(p)} = 0$ وي اوسط، وسط او موډیو له بل سره څه ډول اړیکه لري؟
 8. که چیرې $SK_{(p)} > 0$ وي ایا اوسط او وسط یو له بل سره برابر دي؟
- د ځواب نه ویلو په صورت کې ښوونکی دې ورته تشریح او توضیح کړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شي، ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوښښ وکړي چې سم ځواب له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړي:

- یوه توزیع څه وخت نورماله توزیع ده؟
- د پیرسن فرمول څه رابښي؟ ویې لیکئ.
- که چیرې د α_3 په فرمول کې $x_i = \bar{x}$ سره شي د توزیع منحنی کوم حالت لري؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د خمېدلو کوم فرمول چې په درسي کتاب کې تشریح شوی دی د خامې ډېټا لپاره صدق کوي خو که چیرې د فریکونسي جدول درکړل شوی وي او د خمېدلو ضریب پیدا کول مطلوب وي د هغې لپاره د α_3 فرمول داسې ښه (شکل)

لري $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ چې دلته f_i د اړوندو صنفونو فریکونسي ښيي او پراختیایي شکل یې په لاندې ډول دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} [f_1(x_1 - \bar{x})^3 + f_2(x_2 - \bar{x})^3 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^3]}{S^3}$$

مهمه خبره دا ده چې د پیرسن ضریب د خمېدګي ښه شاخص دی؛ یعنې $SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$ فرمول کې له med څخه کار اخیستل شوي او په درسي کتاب کې med د خامې ډېټا لپاره کار شوی مګر د فریکونسي د جدول لپاره نه دی کار شوی دا به د راتلونکي لوست په اضافي معلوماتو کې توضیح شي چې څرنگه کولای شو د فریکونسي د جدول لپاره med په لاس راوړو او همدارنګه که چیرې توزیع نارمل وي؛ نو: $SK_{(P)} = 0$

$$SK_{(P)} = 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} = 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med = 0$$

$$3\bar{x} = 3med \Rightarrow \bar{x} = med$$

یعنې په نورمال توزیع کې اوسط له وسط سره برابر دی.

همدارنګه که چیرې توزیع ښي لوري ته خمېدګي ولري؛ یعنې $SK_{(P)} > 0$ دی نو په دې حالت کې اوسط له وسط څخه لوی دی:

$$SK_{(P)} > 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} > 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med > 0 \Rightarrow \bar{x} > med$$

او که چیرې توزیع کین لوري ته خمېدګي ولري په دې معنی چې $SK_{(P)} < 0$ دی؛ نو اوسط له وسط څخه کوچنی دی:

$$SK_{(P)} < 0 \Rightarrow \frac{3(\bar{x} - med)}{S} < 0 \Rightarrow 3\bar{x} - 3med < 0 \Rightarrow \bar{x} < med$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د یوه ټولګي د زده‌کونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پرسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

حل: په لومړۍ ځل د خمېدلو ضریب په لاس راوړو:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{4 \cdot 45 + 6 \cdot 55 + 10 \cdot 65 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 85 + 2 \cdot 95}{4 + 6 + 10 + 4 + 4 + 2} = \frac{1990}{30} = 66\frac{1}{3} = 66.3$$

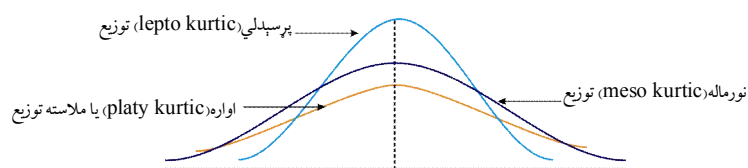
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{4(45 - 66.3)^2 + 6(55 - 66.3)^2 + 10(65 - 66.3)^2 + 4(75 - 66.3)^2 + 4(85 - 66.3)^2 + 2(95 - 66.3)^2}{30} \\ &= \frac{4 \cdot 453.7 + 6 \cdot 127.7 + 10 \cdot 1.7 + 4 \cdot 75.7 + 4 \cdot 349.7 + 2 \cdot 823.7}{30} \\ &= \frac{1814.8 + 766.2 + 17 + 302.8 + 1398.8 + 1647.4}{30} = \frac{5947}{30} = 198.23 \Rightarrow \boxed{S = 14.07} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3 &= 4(45 - 66.3)^3 + 6(55 - 66.3)^3 + 10(65 - 66.3)^3 + 4(75 - 66.3)^3 + 4(85 - 66.3)^3 + 2(95 - 66.3)^3 \\ &= 4 \cdot 9663.6 + 6 \cdot 1442.9 + 10 \cdot 2.2 + 4 \cdot 658.5 + 4 \cdot 6539.2 + 2 \cdot 23639.9 \\ &= 38654.4 + 8657.4 + 22 + 2634 + 26156.8 + 47279.8 = 123404.4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3 = \frac{123404.4}{30} = 4113.48$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3} = \frac{4113.48}{(14.07)^3} = \frac{4113.48}{2785.36} = 1.47$$

څرنگه چې $\alpha_3 > 0$ دی؛ نو منحني ټټي لوري ته خمېدگي (*positive skewness*) لري.



اتم څپرکی: احصائیه

د پرسوب (kurtosis) شاخص

د درسي کتاب (286) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د پرسوب د شاخص په مفهوم پوه شي. • د توزیع منحنی تشخیص کړای شي. • د پورته پوهې په درلودلو سره د موضوع په اړه ورځنۍ ستونزې حل او په ځان باور پیدا کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار ...	
3- مرستندويه مواد: د 286 مخ د شکل چارټ ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته یو ځل بیا د زده کوونکو پام د تېر لوست شکل ته راوگرځوی او وپوښتی: په تېرو لوست کې مو د توزیع د منحنی نورمال حالت د توزیع د منحنی خمدل ښي لورته او کيڼ لوري ته او اړوند شاخصونه مو مطالعه کړل، اوس یو بل شاخص چې د نورمال منحنی جگوالی او تېټ والی پرې څرگندېږي، تر څېړنې لاندې نیسو، له زده کوونکو وپوښتی: • څوک ویلای شي چې د منحنی لوړوالی او تېټ والی په کومو کمیتونو پورې اړه لري؟ ښایي چې زده کوونکي ځواب ونه وایي له هغه پرته تاسو ځواب ورته و وایاست او د لوست بهیر پیل کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28) دقیقې: ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته و وایاست که چیرې د توزیع منحنی د یوې ډېټا لپاره رسم شي جگوالی او تېټ والی یې په څه پورې اړه لري، په (داسې حال کې چې د منحنی خمدگي ښي او کيڼ لوري ته د پوښتنې وړ نه ده)، جگوالی یې په ډېټا کومه اغېزه لري او هغه درې شاخصونه چې عبارت دي له اوسط، وسط او موډ څخه ایا په دغه ډول منحنی کې سره برابر دي او که نه؟ زده کوونکي له کتاب څخه گټه نه اخلي، په خپلو ډلو کې دې بحث ورباندې وکړي او فعالیت دې سرته ورسوي، په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل کارونه نور وروته توضیح کړي، د تېروتنې په صورت کې مرسته وکړي که چیرې ټولو ډلو تېروتنې کړي وي؛ نو تاسو ورته توضیح او تشریح ورکړئ:	

د منحنی د جگوالی او تېټوالي لپاره یو بل شاخص چې په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4}{S^4} = \frac{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^4 + (x_2 - \bar{x})^4 + (x_3 - \bar{x})^4 + \dots + (x_n - \bar{x})^4]}{S^4}$$

ترې کار اخېستل کېږي او د منحنی جگوالی او تېټوالي پرې تشخیص کېږي؛ یعنې که $\alpha_4 = 3$ وي؛ د توزیع منحنی نارمل حالت لري او که چېرې $\alpha_4 < 3$ وي؛ منحنی د نارمل منحنی په پرتله تېټوالي لري او که $\alpha_4 > 3$ وي؛ منحنی د نارمل منحنی په پرتله جگوالی لري.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي او پیاوړتیا د درسي کتاب 286 مخ مثال زده‌کوونکو ته ورکړی چې د درسي کتاب له لیدلو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړی، د کار څارنه وکړی، په پای کې دې یو داوطلب زده‌کوونکی نوموړي مثال پر تخته حل کړي او نور زده‌کوونکي دې خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي، تاسو وگورئ که چېرې زده‌کوونکو د مثال له حل سره ستونزې درلودې، تاسو نوموړی مثال پر تخته حل کړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شئ، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- که چېرې $\alpha_4 = 3$ وي؛ د توزیع منحنی کوم شکل ځانته غوره کوي؟
- که چېرې $\alpha_4 > 3$ وي؛ د توزیع منحنی د نارمل منحنی په پرتله جگوالی لري او که تېټوالي لري؟
- که چېرې $\alpha_4 < 3$ وي؛ د توزیع منحنی د نارمل منحنی په پرتله جگوالی لري او که تېټوالي لري؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی په درسي کتاب کې د منحنی د جگوالي او تېټوالي لپاره یو مثال کار شوی او هغه هم د خامې ډېټا لپاره، که چېرې د کثرت جدول موجود وي، د منحنی د جگوالي او تېټوالي شاخص (α_4) د لاندې فرمول په واسطه چې f_i د اړوندو صنفونو فریکونسي ښيي په لاس راځي:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4} = \frac{\frac{1}{n} [f_1 (x_1 - \bar{x})^4 + f_2 (x_2 - \bar{x})^4 + f_3 (x_3 - \bar{x})^4 + \dots + f_n (x_n - \bar{x})^4]}{S^4}$$

او بله مهمه خبره دا ده چې په پوښتنو کې د فریکونسي جدول درکړل شوی او د پیرسن ضریب غوښتل شوی چې په نوموړي فرمول کې وسط (med) ته اړتیا ده او وسط د فریکونسي په جدول کې نه دی تطبیق شوی، نو که چېرې د فریکونسي جدول

درکړل شوی وي او وسط پیدا کول مطلوب وي له لاندې فرمول څخه په لاس راځي: $med = L + C \left(\frac{\frac{N}{2} - fc}{fm} \right)$

چې په پورتنی فرمول کې:

L : د وسط د صنف ټيکنټی سرحد دی.

C : د وسط د صنف وسعت دی.

N : د ټول جدول مجموعي فریکونسي ټيکنټی.

fc : د وسط صنف تجمعي فریکونسي ده.

fm : د وسط صنف فریکونسي ده.

نوټ: د وسط صنف له هغه لومړنۍ صنف څخه عبارت دی چې د هغه تجمعي فریکونسي له $\frac{N}{2}$ څخه زیاته وي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

په تېر لوست کې مو د خمدېگي اړوند پوښتنې حل کړي، هغه پوښتنې چې په جگوالي پورې اړه لري په لاندې ډول یې حلوو.

حل: اوس د پرسوب (kurtosis) ضریب په لاس راوړو:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

$$\sum f_i (x_i - \bar{x})^4 = 4(45 - 66.3)^4 + 6(55 - 66.3)^4 + 10(65 - 66.3)^4 + 4(75 - 66.3)^4 + 4(85 - 66.3)^4 + 2(95 - 66.3)^4$$

$$= 823338.46 + 97828.41 + 28.56 + 22915.90 + 489132.38 + 1356930.43 = 2790174.14$$

$$\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4 = \frac{2790174.14}{30} = 93005.80$$

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4} = \frac{93005.80}{(14.07)^4} = \frac{93005.80}{39190.10}$$

$$\alpha_4 = 2.37$$

څرنگه چې $\alpha_4 < 3$ دی؛ نو نظر نورمال منحنی ته د منحنی پرسوب کم دی؛ یعنې نظر نارمل منحنی ته ټیټوالی لري.

اوس د پیرسن د خمدېگي (خمدل) ضریب په لاس راوړو او پوهېږو چې دریم صنف د وسط صنف دی، ځکه تجمعي

فریکونسي یې له $\frac{N}{2}$ څخه زیاته ده.

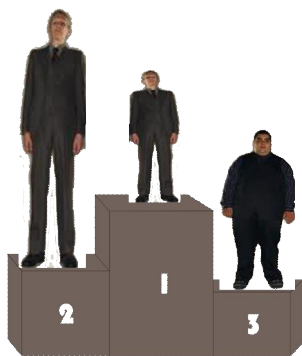
$$\left. \begin{array}{l} N = 30 \Rightarrow \frac{N}{2} = 15 \\ fc = 10 \\ fm = 10 \\ L = 60 \\ C = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S} \\ med = L + C \left(\frac{\frac{N}{2} - fc}{fm} \right) \end{array}$$

$$med = 60 + 10 \left(\frac{15 - 10}{10} \right) = 60 + 5 = 65$$

$$SK_{(P)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S} = \frac{3(66.3 - 65)}{14.07} = \frac{3(1.3)}{14.07} = \frac{3.9}{14.07}$$

$$SK_{(P)} = 0.277$$

څرنگه چې $SK_{(P)} = 0.277 > 0$ دی؛ نو د توزیع منحنی مثبت خمدېگي یا ټيټ لوري ته پرته ده.



اتم څپرکی: احصائیه

څو متحوله ټولنې

د درسي کتاب (287-288) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د څو متحوله ټولنې په مفهوم پوه شي. • یو متحوله، دوه متحوله، درې متحوله... ټولنې یو له بل څخه توپیر وکړای شي. • د دوه متحوله ټولنې د متحولینو ترمنځ د اړیکې له پیدا کولو څخه په خپل ورځني ژوند کې کار واخېستلای او ورڅخه خوښي ښکاري کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار....	
3- مرستندويه مواد: د ورودي شکل چارټ (د اړتیا مواد)....	
4- د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د درسي کتاب ورودي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل تنظیم کړی راوگرځوئ، بیا داسې وپوښتئ: • په څوړند شوي چارټ کې څه شی وینئ؟ • که چیرې د یوه تن وزن معلوم وي کولای شئ د ونې اندازه یې وټاکئ؟ • که چیرې د یوه تن د ونې اندازه معلومه وي، ایا کولای شئ وزن یې پیدا کړئ؟ • دغه ټولنه څو متحولین لري؟ او کوم دي؟ کوبنس وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهیر پیل کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو وېشي د درسي کتاب 287 مخ فعالیت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته یې سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ، په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته د یوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، تېروتنه یې د بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بیا یې تاسو داسې تشریح کړئ: څو متحوله ټولنې له هغو ټولنو څخه عبارت دي چې په هغو کې څو متحولین موجود وي هر هغه شی چې د اندازې وړ وي متحول بلل کېږي؛ خو په دغه لوست کې موږ دوه متحوله ټولنې تر څېړنې لاندې نیسو، لکه د ونې او وزن ترمنځ اړیکه چې دا یوه دوه متحوله ټولنه ده، غواړو چې د دغو دوو متحولینو (ونې او وزن) ترمنځ اړیکه پیدا کړو په دې معنا چې که یو یې معلوم وي بل یې په څه ډول پیدا کولای شو؟ ددې لپاره په لومړي گام کې دې د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات راټول شي او په دویم گام کې دې راټول شوي	

معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر قایم مختصات په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکوله نښلېدو څخه په لاس راځي موږ ته یو د گراف رانښيي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی دلوست د لا پوځوالي او پیاوړتیا لپاره د درسي کتاب 287 مخ مثال زده کوونکو ته ورکړی چې د درسي کتاب له لیدلو پرته یې په خپلو کتابچو کې حل کړی د کار څارنه وکړی، په پای کې دې یو داوطلب زده کوونکی نوموړي مثال پر تخته حل کړي او نور زده کوونکي دې خپل حلونه د تخته له حل سره پرتله کړي، تاسو وگورئ که چیرې زده کوونکو د مثال له حل سره ستونزې درلودې تاسو نوموړی مثال پر تخته حل کړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- که چیرې د خپل یوه ټولگي وال د ونې په اندازه وپوهېږئ کولای شئ د هغه د وزن اندازه په لاس راوړئ؟
- که وغواړو د یوه ټولگي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو؛ نو دغه څه ډول یوه ټولنه ده؟
- د احصایې له نظره متحول تعریف کړئ.
- د داسې یوې ټولنې نوم واخلئ چې یوازې او یوازې یو متحول ولري.
- په تېر حل شوي مثال کې لومړی او دویمه مختصه څه شی رانښيي؟
- ایا کولای شئ چې د یوې درې متحول ټولنې نوم واخلئ.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

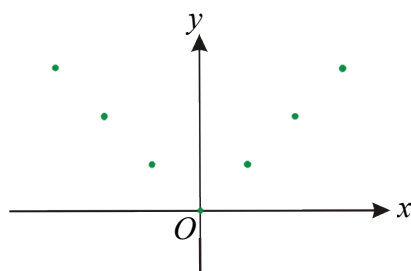
ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ستاسو په معلوماتو کې زیاتوالی راغلی وي؛ یعنې څرنگه کولای شو د دوو متحولینو ترمنځ اړیکه پیدا کړو؟

ددې لپاره چې یو متحول د بل متحول له مخې وړاند وینه وکړو؛ نو باید د دواړو متحولینو ترمنځ د اړیکو په هکله پوره معلومات ولرو؛ یعنې لومړی باید د یوې ټولنې د ټولو غړو په هکله چې د اندازې په هکله یې کومې پایلې موجودې وي، تر کتنې لاندې ونيول شي او وروسته ددې متحول له مخې د بل متحول لپاره وړاندوینه کیدای شي د وړاندوینې په پروسه کې چې یوه مهمه فرضیه موجوده ده او باید هغه موږ تر کتنې لاندې ونیسو، د دوو متحولینو ترمنځ خطي اړیکه ده، دا اړیکه د یوې مستقیمې کرښې په شکل ښودل کېږي او پوهېږو چې د مستقیمې کرښې معادله $y = a + bx$ شکل لري، په دې معادله کې a یو ثابت مقدار دی، که $x = 0$ شي؛ نو $y = a$ کېږي او هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکه افاده کوي د تخمین یا د سنجش د معادلې په نوم یادېږي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

د زراعتي محصولاتو د لوړوالي لپاره فکتورونه، لکه اوبه، د کود اندازه، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، ایا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سر اوکار لری؟

حل: په دې ټولنه کې لږ تر لږه پنځه ډوله متحولین موجود دي؛ ځکه چې په احصایه کې یې متحول داسې تعریف کړی دی: هر شی چې د اندازې وړ وي متحول دی؛ نو په نوموړي ټولنه کې پنځه متحولین چې عبارت دي له: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول.



اتم څپرکی: احصائیه

د پراگنده‌ګۍ ګراف

د درسي کتاب (289-290) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې: - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي و توانېږي: • د پراگنده‌ګۍ د ګراف په مفهوم پوه شي. • د يوې دوه متحوله ټولنې د پراگنده‌ګۍ ګراف د قايمو مختصاتو په سېسټم کې رسم کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په سرته رسولو سره په ځان باور پيدا کړي او د پراگنده‌ګۍ د ګراف له رسم څخه د خوښۍ احساس وکړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله‌ييز او يو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د وروډي شکل چارټ (د اړتيا مواد) ...	
4- د وروډي برخې توضیح (5 دقيقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست له مهمو ټکو څخه يادونه وکړې او د زده‌کوونکو پام د درسي کتاب وروډي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل چمتو کړی راوگرځوئ بيا داسې وپوښت: • ايا په ګراف کې ټول ټکي په يوه مستقيمې کرښه پراته دي؟ • ولې دغه ډول ګراف ته د پراگنده‌ګۍ ګراف وايي؟ • کولای شئ د ګراف ټول ټکي د مرتبو جوړو په شکل وښايست؟ • کولای شئ د دغه ګراف رياضيکي معادله په لاس راوړئ. کوبنس وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړې او خپل درسي بهير پيل کړی.	
5- د لوست بهير او فعاليت (28 دقيقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو و وېشئ د درسي کتاب 289 مخ فعاليت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته فعاليت سرته ورسوي د فعاليت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړې په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولي فعاليت نورو ته د يوه مثال په ورکولو سره توضيح کړي. که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کوبنس وکړئ چې تېروتنه يې د يوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، بيا تاسو د پراگنده‌ګۍ د ګراف په هکله داسې معلومات ورکړې د پراگنده‌ګۍ ګراف ته ځکه د پراگنده‌ګۍ ګراف وايي چې په دغه ګراف کې ټول ټکي تيت او پاشان دي د يوې مستقيمې کرښې په امتداد نه دي پراته. همدارنگه يو داوطلب زده‌کوونکی تختې ته راوغواړئ چې د 289 مخ مثال پر تختې حل کړي، نور زده‌کوونکي دې د کتاب	

له لیدو پرته همدغه مثال په خپلو کتابچو کې حل کړي او خپل حلونه دې د تختې له حل سره پرتله کړي، د ستونزو په صورت کې مرسته ورسره وکړي، په پای کې ټولو زده‌کونکو ته په یو کسيزه توگه دنده ورکړي چې د $\{(1,5), (3,2), (5,2), (4,5)\}$ ټکي د پراگنده‌گي په گراف کې رسم کړي، تاسو څارنه وکړئ او د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لاپوځوالي او پیاوړتیا لپاره یو داوطلب زده‌کونکی تختې ته راوغواړئ چې د درسي کتاب 290 مخ د الف او ه اجزاوې د پراگنده‌گي د گرافونو اړوندې مرتبې جوړې او په لاس راوړي، نور زده‌کونکي دې په خپلو کتابچو کې حل کړي، په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. تاسو څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه ورته وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی: ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه ترلاسه کړئ د ستونزو په صورت کې ورسره مرسته وکړئ:

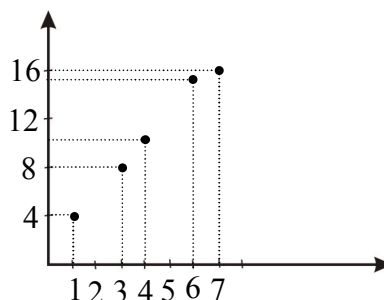
- د پراگنده‌گي گراف ته ولې د پراگنده‌گي گراف وايي؟
- که چیرې د پراگنده‌گي گراف درکړل شوی وي، تاسو یې اړوندې مرتبې جوړې او په لاس راوړلای شئ؟
- ایا د پراگنده‌گي په گراف کې ټول ټکي د یو خط په امتداد واقع دي؟
- ایا حتمي ده چې د پراگنده‌گي په گراف کې به ټول ټکي د یوه مستقیم خط په امتداد پراته نه وي؟
- د 290 مخ د (ج) جزء د پراگنده‌گي په گراف کې اړوندې مرتبې جوړې، کومې دي؟
- د ب جزء د پراگنده‌گي د گراف د ټولو ټکو له نښلېدو څخه کوم ډول شکل لاس ته راځي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د پراگنده‌گي د گراف په اړه اضافي معلوماتو ته اړتیا نشته؛ ځکه دا داسې یوه موضوع ده چې د پیوستون له ضریب سره کمک کوي؛ نو موږ په دغه ځای کې په یوه مثال باندې بسنه کوو.

که د یو شمېر زده‌کونکو د دوو ازموینو پایلې په پام کې ونیسو او د لومړي ازموینې پایلې په x او د دویمې ازموینې پایلې په y سره وښودل شو، د x او y ترمنځ اړیکه د قایمو مختصاتو په افقي او عمودي محور باندې ښودلای شو، داسې چې د نمر وړه جوړه په قایمو مختصاتو کې یوه نقطه ورکوي، د نمر وړ لاندې جدول د هغه له گراف سره په پام کې نیسو:

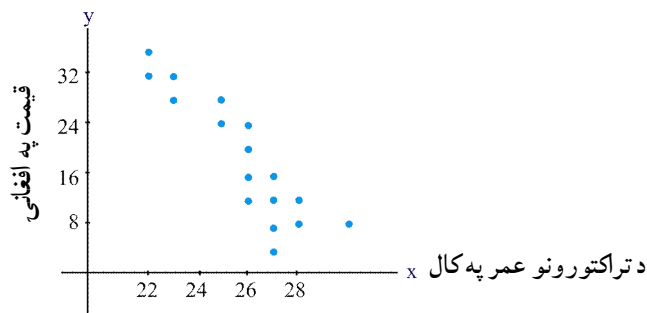
x	1	3	4	6	7
y	4	8	10	14	16



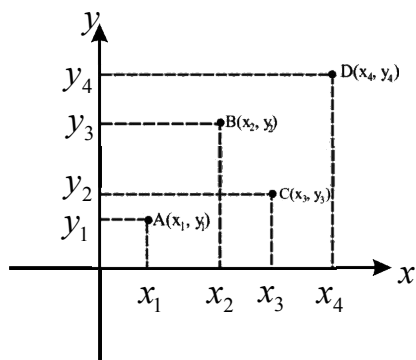
پایله د دغه بحث مهم ټکي دا دي چې د پراگنده‌گۍ په گراف کې هر ټکی یوه مرتبه جوړه او هره مرتبه جوړه یو ټکی د پراگنده‌گۍ په گراف کې را په گوته کوي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

لاندې گراف د یو شمیر تراکتورونو عمر رابښي، ایا ددې دوو متحولینو ترمنځ کومه اړیکه یا ارتباط ویني؟ توضیح یې کړئ.



حل څرنگه چې له پوښتنې څخه څرگندېږي په دغه ټولنه کې دوه متحولین موجود دي، یو یې د تراکتورونو عمر او بل یې د تراکتورونو قیمت دی، څرنگه چې په گراف کې معلومېږي ټول ټکي تقریباً په یوه خط پراته دي (ځینې یې د خط پاس او ځینې یې د خط ښکته لور ته واقع دي)؛ نو د دواړو متحولینو ترمنځ هغه وخت قوي اړیکه شتون لري چې ټکي خط ته نږدې یا په خط باندې پراته وي.



اتم څپرکی: احصائیه

پیوستون او د پیوستون ضریب

د درسي کتاب (291-294) مخونه

د لوست وخت: (یو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د پیوستون او د پیوستون د ضریب په مفهوم پوه شي. • د یوې ټولنې د متحولینو ترمنځ د لږ پیوستون او ډېر پیوستون توپیر وکړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره وکړای شي چې په ورځنیو چارو کې ترې ګټه واخلي او په ځان ډاډمن شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یوکسیزکار ...	
3- مرستندویه مواد: د وړودي شکل چارټ (د اړتیا مواد) ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) بناغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د موضوع د ښه پوهېدو لپاره د تېر لوست لنډه یادونه اړینه ده، د زده کوونکو پام د درسي کتاب وړودي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل چمتو کړی راوگرځوئ، بیا داسې وپوښتی: • ایا شونې ده چې د چارټ گراف ټول ټکي د یوې مستقیمې کرښې په واسطه سره ونښلول شي؟ ولې؟ • ایا داسې کومه کرښه شتون لري چې له دغو ټکو څخه تېره شي او ټول ټکي ورته نږدې واټن ولري؟ • ووايست چې د مناسبې کرښې معادله به کوم شکل ولري چې ټولو ټکو ته نږدې وي؟ کونښن وکړئ چې څو ابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهیر پیل کړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): بناغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د درسي کتاب 291 مخ فعالیت ورکړئ چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ، په پای کې د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولي فعالیت نورو ته د یوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي. که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کونښن وکړئ چې تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړئ، په پای کې تاسو موضوع داسې توضیح کړئ: که چیرې یوه دوه متحوله ټولنه ولری او وغواړئ چې ددغې ټولنې د متحولینو ترمنځ اړیکه پیدا کړي؛ نو باید د ټولنې د پراگنده ګی گراف رسم شي، په هره اندازه چې د پراگنده ګی د گراف ټکی د یوه مستقیم خط په امتداد واقع وي د متحولینو	

ترمنځ پيوستون زيات دى او په هره اندازه چې ټكي له مستقيمي كرښې څخه لرې پراته وي، د متحولينو ترمنځ د پيوستون اړيکه كمه ده؛ نو هغه شاخص چې د دوو متحولينو ترمنځ پيوستون ښيي د پيوستون له ضريب څخه عبارت دى او په r سره

$$\text{ښودل کېږي چې فرمول يې } r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x} \bar{y}}{S_x \cdot S_y} \text{ دى.}$$

د موضوع د مهم والي له امله ښاغلى ښوونكى دې د درسي كتاب 292 مخ مثال پر تخته حل كړي او د فرمول اجزاوې؛ لکه $\frac{1}{n} \sum xy, \bar{x}, \bar{y}, S_x, S_y$ د زده‌كوونكو په واسطه په لاس راوړي، زده‌كونكي دې په خپلو كتابچو كې نوټ كړي. د فرمول د اجزاوو د په لاس راوړلو په وخت كې كه كومې ستونزې پيدا شي، تاسو ورسره مرسته او لارښوونه وكړئ.

6- د زده كړې تحكيم: (7) دقيقې

ښاغلى ښوونكى د لوست د لا پوخوالي لپاره د درسي كتاب 293 مخ مثال د يو داوطلب زده‌كونكي په واسطه حل كړى او نور زده‌كونكي دې همدغه مثال په خپلو كتابچو كې د كتاب له لېدلو پرته حل كړي، په پاى كې زده‌كونكي دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله كړي. پاملرنه وكړئ چې زده‌كونكي د پيوستون د ضريب د فرمول اجزاوې په سمه توگه په لاس راوړلى شي او كه نه؟ د ستونزو په صورت كې تاسو مرسته او لارښوونه وكړئ.

7- د لوست د پايلې ارزونه: (5) دقيقې

ددې لپاره چې ډاډمن شى، ايا زده‌كوونكو لوست زده كړى دى او كه نه؟ د لوست په اړوند له زده‌كوونكو څخه لاندې پوښتنې وكړئ او كوښښ وكړئ چې سم ځوابونه له زده‌كوونكو څخه ترلاسه كړئ:

- پيوستون او د پيوستون ضريب څه مفهوم لري او كوم وخت پكارېږي؟
- كه چيرې د پراگنده‌گي د گراف ټول ټكي په يوه كرښه پراته وي د r قيمت څو دى؟
- كه r مثبت وي؛ نو د x د قيمتونو په ډېروالي y كمېږي او كه زياتېږي؟

8- د ښوونكي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلى ښوونكى د پيوستون (اړيکې ضريب) د متحولينو د اړيکو ترمنځ يو شاخص دى چې مختلف ډولونه لري؛ خو د هغوى اکثريت ځينې مشترک صفتونه لري، كه دوه متحول په خپل منځ كې مثبتې اړيکه ولري؛ نو د هغوى د پيوستون ضريب مثبت 1 دى او كه منفي اړيکه ولري؛ نو د پيوستن ضريب يې 1- دى او كه دوه متحول په خپل منځ كې هيڅ اړيکه ونلري؛ نو د پيوستون ضريب يې صفر دى، په دې ډول كه د پيوستون ضريب په r وښيو؛ نو $-1 \leq r \leq +1$ په لنډه توگه كه $r = +1$ وي؛ نو د دوو متحولينو ترمنځ اړيکه كاملاً مثبت او كه $r = -1$ وي، نو اړيکه كاملاً منفي او كه $r = 0$ وي؛ نو د دواړو متحولينو ترمنځ اړيکه شتون نلري.

په نورو حالتونو كې چې ټكي په بشپړه توگه په مستقيمه كرښه نه وي، كيداى شي چې اړيکه مثبت، كيداى شي اړيکه منفي او كيداى شي چې اړيکه د منحنې كرښې په شكل وي او يا دا چې هيڅ اړيکه شتون ونه لري.

هرڅومره چې ټکي مستقيمي کړنې ته نږدې کېږي د پيوستون درجه لوړېږي، د پيوستون ضريب ددې فرمول په واسطه چې د

$$r = \frac{\sum xy}{\sum x^2 \cdot \sum y^2}$$

چې دلته $x = X - \bar{X}$ او $y = Y - \bar{Y}$ بنسټي.

9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده، د ډېټا د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

حل :

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_y^2 = \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Rightarrow S_x = \sqrt{2}, \quad S_y = \sqrt{2}$$

$$\sum xy = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 4 + 6 + 6 + 4 + 0 = 20$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}$$

$$r = \frac{\frac{20}{5} - 3 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

موږ ويلې و وکه چېرې د پيوستون ضريب قيمت ± 1 شي، نو ټول ټکي پر خط باندې پراته دي او د y خطا شتون نه لري.

2- د خپلو ټولگيوالو د ونې او وزن تر منځ د پيوستون ضريب حساب کړئ؟

حل که چېرې د زده کوونکو ونې په x او وزن يې په y سره وښيو؛ نو د ټولگي د زده کوونکو لپاره لاندې جدول يو فرضي

ټولگي د لس تنو زده کوونکو لپاره په پام کې نيسو:

$x(cm)$	163	165	167	169	171	145	142	140	130	147
$y(kg)$	62	65	70	75	80	70	75	60	55	50

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{163+165+167+169+171+145+142+140+130+147}{10} = \frac{1539}{10} = 153.9$$

$$\bar{y} = \frac{62+65+70+75+80+70+75+60+55+50}{10} = \frac{662}{10} = 66.2$$

$$S_x^2 = \frac{(163-153.9)^2 + (165-153.9)^2 + (167-153.9)^2 + (169-153.9)^2 + (171-153.9)^2 + (145-153.9)^2 + (142-153.9)^2 + (140-153.9)^2 + (130-153.9)^2 + (147-153.9)^2}{10}$$

$$S_x^2 = \frac{82.81+123.21+171.61+228.01+292.41+79.21+141.61+193.21+571.21+47.61}{10}$$

$$S_x^2 = \frac{1930.9}{10} \Rightarrow \boxed{S_x = 13.89}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{(62-66.2)^2 + (65-66.2)^2 + (70-66.2)^2 + (75-66.2)^2 + (80-66.2)^2 + (70-66.2)^2 + (75-66.2)^2 + (60-66.2)^2 + (55-66.2)^2 + (50-66.2)^2}{10}$$

$$S_y^2 = \frac{17.64+1.44+14.44+77.44+190.44+14.44+77.44+38.44+125.44+262.44}{10}$$

$$S_y^2 = \frac{819.6}{10} = 81.96 \Rightarrow S_y = 9.05$$

$$\sum x \cdot y = 163 \cdot 62 + 165 \cdot 65 + 167 \cdot 70 + 169 \cdot 75 + 171 \cdot 80 + 145 \cdot 70 + 142 \cdot 75 + 140 \cdot 60 + 130 \cdot 55 + 147 \cdot 50$$

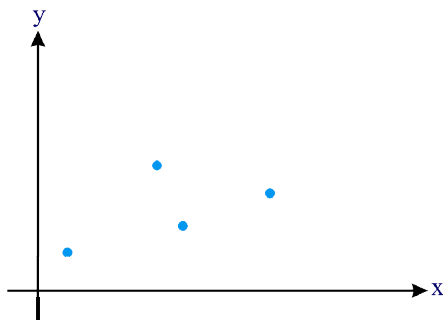
$$\sum x \cdot y = 10106 + 10725 + 11690 + 12675 + 13680 + 10150 + 10650 + 8400 + 7150 + 7350$$

$$\sum x \cdot y = 102576$$

$$\frac{\sum x \cdot y}{n} = \frac{102576}{10} = 10257.6$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{10257.6 - 10188.18}{13.89 \cdot 9.05} = \frac{69.42}{125.704} \Rightarrow r = 0.552$$

د 0.552 عدد رابښي د ټکو نيمايي يې د خط پورته خواته او نيمايي نوريې د خط ښکته خواته پراته دي، يعنې ويلي شو چې د x (ونې) او y (وزن) ترمنځ 55% اړيکه شتون لري.



اتم څپرکی: احصائیه

د خطي ميلان معادله (The linear regression equation)

د درسي کتاب (295-298) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

زده کوونکي به د لوست په پای کې و توانېږي چې: • د خطي ميلان معادلې په مفهوم پوه شي. • د یوې ډېټا (چې په هر ارتباط وي) د خطي ميلان معادله پيدا کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره وکړای شي له هغه څخه په ورځنيو چارو کې کار واخلي او ورڅخه خوښي ښکاره کړي.	1- د زده کړې موخې - پوهنیزه - مهارتي - ذهني
پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	2- د زده کړې لارې:
د وړودي شکل چارټ (د اړتیا مواد) ...	3- مرستندويه مواد:
ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته له زده کوونکو څخه د تېر لوست پوښتنه وکړې او پام یې د درسي کتاب وړودي شکل ته چې تاسو ورته د چارټ په شکل چمتو کړی راوگرځوئ، بیا داسې وپوښتئ: • په مخامخ چارټ کې څه شی وینئ؟ • ایا ټول ټکي د یوې مستقیمې کرښې په امتداد پراته دي؟ • کولای شئ و وایاست چې که چیرې د پراگندګی ګراف موجود وي، تاسو یې د په نښو شوو ټکو له نښلولو څخه د منحنی معادله لاس ته راوړئ؟ • ایا په مخامخ شکل کې داسې یوه کرښه رسمېدلای شي چې ټول ټکي ورته نږدې وي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ له هغه پرته تاسو ورته لارښوونه او مرسته وکړئ او خپل درسي بهیر پیل کړئ.	4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې)
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي ورته و وایاست چې د درسي کتاب د 295 مخ فعالیت په خپلو ډلو کې د بحث او خبرو وروسته سرته ورسوي، د فعالیت په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل فعالیت نورو ته توضیح او تشریح کړي د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړي، په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړئ: د خطي ميلان معادله څرنگه چې له نوم څخه یې هم څرګنده ده د هغه مناسب خط معادله ښيي چې د پراگندګی د ګراف ټول	

ټکي ورته نږدی پراته وي، د پراگندهگۍ په گراف کې ټول ټکي په یوه خط نه وي پراته، بلکې له هر ټکي څخه یوه کرښه تېرېدلای شي، نو ددې لپاره باید داسې یوه کرښه چې ټولو ټکو ته نږدی وي په لاس راوړو چې دغه کرښه د خطي میلان په نوم یادېږي د خطي میلان معادلې په لاس راوړلو لپاره باید a او b معلوم وي او همدارنګه پوهېږو چې د هر خطي گراف معادله $y = ax + b$ دی؛ نو باید a او b معلوم وي، نو $a = r \frac{S_y}{S_x}$ او $b = \bar{y} - a\bar{x}$ چې دلته r د پیوستون ضریب $\bar{y}$ د y متحول اوسط، $\bar{x}$ د x د متحول اوسط، S_y د y د متحول معیاري انحراف او S_x د x د متحول معیاري انحراف دی، د a او b لاس ته راوړلو څخه وروسته د $y = ax + b$ په معادله کې د a او b قیمتونه ږدو او په لاس راغلي معادله د خطي میلان له معادلې څخه عبارت ده.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره د درسي کتاب 298 مخ مثال د یو داوطلب زده کوونکي په واسطه حل کړی او نور زده کوونکي دې همدغه مثال په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي، په پای کې دې زده کوونکي خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي.

تاسو د کار څارنه وکړئ، د ستونزو په صورت کې یو ځل بیا لوست توضیح کړئ او مثال ورته حل کړئ.

پاملرنه وکړئ چې زده کوونکي په سمه توګه $\bar{x}, \bar{y}, r, S_x, S_y, a$ او b په لاس راوړلي شي او که نه؟ بیا هم د ستونزو په صورت کې ورته لارښوونه وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شی، چې ایا زده کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځوابونه له زده کوونکو څخه ترلاسه کړئ:

- د خطي میلان معادله څه شی رابښيي؟
- ایا د پراگندهگۍ په گراف کې ټول ټکي په یوه کرښه واقع کېدای شي؟
- ایا د پراگندهگۍ په گراف کې داسې کرښه رسمولای شي چې له ټولو ټکو تېره شي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی یو بل مفهوم چې د پیوستون په موضوع کې دیادونې وړ دی، د رجعت مفهوم دی چې دا د میلان په مفهوم هم یادوي په احصائیه کې د پیوستون او میلان (Regression) موضوعات یو له بل سره دومره نږدی اړیکه لري چې اکثراً یو د بل پر ځای په کار وړل کېږي.

د پیوستون اصطلاح د دوو متحولینو د ارتباط درجې ته اطلاق کېږي.

کله چې دوه متحوله یو له بل سره ارتباط ولري، نو د یو متحول له مخې د بل متحول وړاندوینه کېدای شي، خو د میلان

کلمه د یوې پېښې د متحولینو هغو صفاتو او مشخصاتو ته اطلاقېږي چې د دوو متحولینو ترمنځ ارتباط بشپړ نه وي.

د وړاندوینې په پروسه کې چې یوه مهمه فرضیه موجوده ده او باید هغه موږ یې ترکتني لاندې ونیسو، د دوو متحولینو ترمنځ خطي رابطه ده، دا رابطه د یوه مستقیم خط په شکل بنودل کېږي او پوهېږو چې د مستقیم خط معادله د $y = ax + b$ شکل لري، په دې معادله کې a یو ثابت مقدار دی که $x = 0$ شي، نو $y = b$ کېږي، که د پراگنده‌ګۍ (متفرق دیاگرام *scater diagram*) په ګراف کې ټولې نقطې په یوه مستقیم خط قرار ولري چې د متحولینو ترمنځ خطي ارتباط او پیوستون (*Linear Regression*) موجود دی کیدای شي ساده یا خو خطي بلل کېږي.

په دې خصوصیت سره نوموړی منحنی ته په احصائیه کې (*Least Squares Curves*) او یا (*Least Square Regression*) وايي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

که چیرې $y = 2x + 3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوی وي، د y اوسط څومره دي؟

حل د خطي میلان د معادلې په پام کې نیولو سره:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow a = 2, \quad b = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 2 \\ \bar{y} = ? \end{array} \right\} b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$b - \bar{y} = -a\bar{x}$$

$$-\bar{y} = -a\bar{x} - b / \cdot (-1)$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 7}$$

د اتم خپرکي د عمومي پوښتنو حل (شپږ درسي ساعتونه)

1- که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x} = 50$ او واریانس یې $S^2 = 64$ سره وي، د بدلون ضریب y چې له $y = 2x + 10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

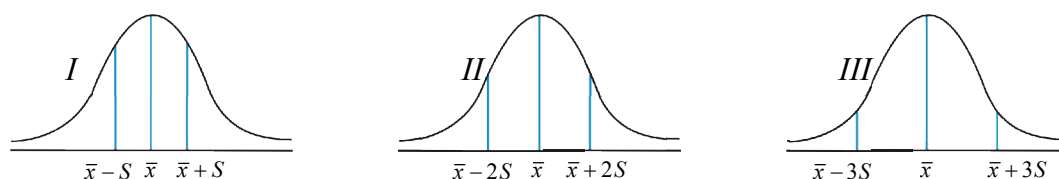
حل:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = 50 \\ S^2 = 64 \Rightarrow S = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{8}{50} \\ C \cdot V = 0.16 \\ C \cdot V = 16\% \end{array}$$

2- که چیرې د هر زده کوونکي په نمرې کې 20% نمرې ورزیاتې شي، نو د نمرې د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

حل: که چیرې د هر زده کوونکي په نمرې باندې 20% ورزیاتې شي، نو اوسط یې زیاتېږي څرنگه چې $\bar{x}$ د بدلون په ضریب کې $C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$ په مخکې کې قرار لري، نو د بدلون یا تغیراتو ضریب یې هم کمېږي.

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحنی گانو کې پرتې دي، ولیکئ؟



حل: په I ټولنه کې د پلټنې ټول موارد په $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ کې 68% دی په II ټولنه کې ټول د پلټنې موارد چې په $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ انټروال کې پراته دي، 96% دی. او په III منحنی گراف کې هغه ډېټا چې په $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$ انټروال کې پرتې ده 99% ده.

4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره ووايست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولگيوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شی د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جگوالي او د قاعدې د مساحت ترمنځ اړیکه؟

حل: هر شی (عنصر) چې د اندازې وړ وي متحول بلل کېږي.

الف: یو متحوله اړیکه ده او متحول یې د ټولگي د زده کوونکو د ونو اندازې دي.

ب: دوه متحوله اړیکه ده او متحولین یې عمومي مصرف او جنس دي.

ج: درې متحوله اړیکه ده او متحولین یې حجم، جگوالی او د قاعدې مساحت دي.

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخیستل شوي دي، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
 (5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
 (7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

حل: تر هر څه د مخه لومړی د وضعیه کمیاتو سپستم رسموو، د x پر محور مصرف شوی ساعتونه او د y پر محور د زده کونکو نمبرې نښو او ګراف یې په لاندې ډول رسموو:



له پورته ګراف څخه دا پایله په لاس راځي چې د مصرف شوو ساعتونو په زیاتوالي د زده کونکو نمبرې هم زیاتېږي.

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوي ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

حل:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+3}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$\bar{y} = \frac{1+5+4+2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$S_x^2 = \frac{(1-1.75)^2 + (1-1.75)^2 + (2-1.75)^2 + (3-1.75)^2}{4} = \frac{0.56+0.56+0.06+1.56}{4} = \frac{2.74}{4}$$

$$S_x = 0.82$$

$$S_y^2 = \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2}{4} = \frac{4+4+1+1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \Rightarrow S_y = 1.58$$

$$\sum x \cdot y = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 1 + 5 + 8 + 6 = 20$$

$$\frac{1}{n} \sum x \cdot y = \frac{20}{4} = 5$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{5 - 1.75 \cdot 3}{0.82 \cdot 1.58} = \frac{5 - 5.25}{1.29} = \frac{-0.25}{1.29} \Rightarrow \boxed{r = -0.19}$$

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نږدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

حل: هر څومره چې د پیوستون ضریب صفر ته نږدې وي، په دې معنی دی چې د متفرق ډیاگرام ټول ټکي له خط څخه زیاته فاصله لري، نو خطا ډېره ده.

8- که چیرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نږدې وي، نو د y خطا په اړوند څه وایئ؟

حل: که چیرې $r = \pm 1$ وي، نو ټول ټکي د $y = ax + b$ په خط باندې پراته دي او خطا هېڅ شتون نه لري.

9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي د A او B په دوو ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده‌کونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

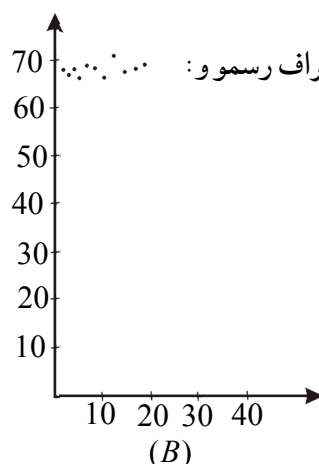
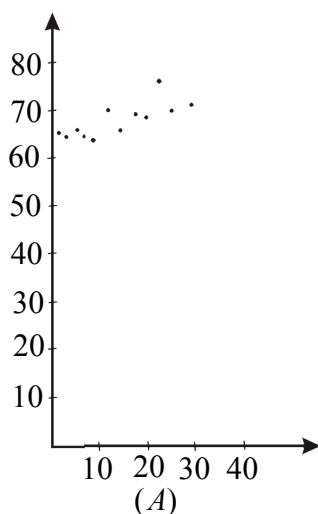
د پاسنیو عددونو په پام کې نیولو سره:

الف: د ډېټا د پراگندګي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

حل:



ب)

$$A_{\bar{x}} = \frac{65 + 63 + 67 + 64 + 62 + 70 + 66 + 68 + 67 + 78 + 69 + 71}{12} = \frac{810}{12} = 67.50$$

$$B_{\bar{y}} = \frac{68 + 66 + 68 + 65 + 69 + 66 + 68 + 65 + 71 + 67 + 68 + 70}{12} = \frac{811}{12} = 67.58$$

$$\begin{aligned} S_x^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(65 - 67.5)^2 + (63 - 67.5)^2 + (67 - 67.5)^2 + (64 - 67.5)^2 + (62 - 67.5)^2 + (70 - 67.5)^2}{12} \\ &\quad + \frac{(66 - 67.5)^2 + (68 - 67.5)^2 + (67 - 67.5)^2 + (78 - 67.5)^2 + (69 - 67.5)^2 + (71 - 67.5)^2}{12} \\ &= \frac{6.25 + 20.25 + 0.25 + 12.25 + 30.25 + 6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 110.25 + 2.25 + 12.25}{12} \\ &= \frac{203}{12} = 16.9 \Rightarrow S_x = 4.1 \end{aligned}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(68-67.58)^2 + (66-67.58)^2 + (68-67.58)^2 + (65-67.58)^2 + (69-67.58)^2 + (66-67.58)^2 + (68-67.58)^2 + (65-67.58)^2 + (71-67.58)^2 + (67-67.58)^2 + (68-67.58)^2 + (70-67.58)^2}{12}$$

$$= \frac{0.176 + 2.496 + 0.176 + 6.656 + 2.016 + 2.496 + 0.176 + 6.656 + 11.696 + 0.336 + 0.176 + 5.856}{12}$$

$$= \frac{38.91}{12} = 3.24 \Rightarrow \boxed{S_y = 1.8}$$

$$\sum A_x B_y = 65 \cdot 68 + 63 \cdot 66 + 67 \cdot 68 + 64 \cdot 65 + 62 \cdot 69 + 70 \cdot 66 + 66 \cdot 68 + 68 \cdot 65 + 67 \cdot 71 + 78 \cdot 67 + 69 \cdot 68 + 71 \cdot 70$$

$$= 4420 + 4158 + 4556 + 4160 + 4278 + 4620 + 4488 + 4420 + 4757 + 5226 + 4692 + 4970$$

$$\sum A_x B_y = 54745 \Rightarrow \frac{\sum A_x B_y}{n} = 4562.08$$

$$r = \frac{\frac{\sum A_x B_y}{n} - A_{\bar{x}} \cdot B_{\bar{y}}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4562.08 - 67.50 \cdot 67.58}{4.1 \cdot 1.8} = \frac{4562.08 - 4561.65}{7.38} = \frac{0.43}{7.38} = 0.058$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = 0.058 \frac{1.8}{4.1} = 0.0256$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1.8 - (0.0256)(4.1) = 1.8 - 0.105 = 1.69$$

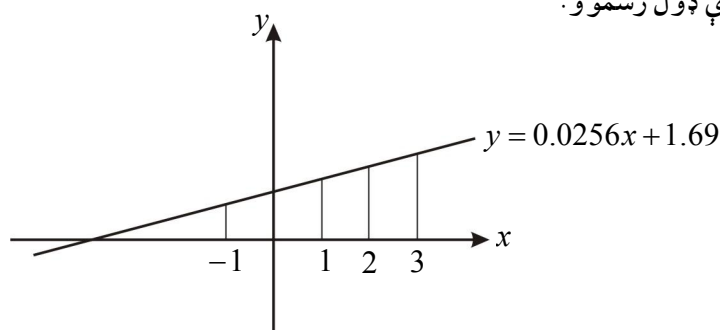
$$y = ax + b$$

$$\boxed{y = 0.0256x + 1.69} \text{ د رېگرېشن معادله}$$

ج: څرنگه چې د رېگرېشن معادله چې له $y = 0.0256x + 1.69$ څخه عبارت ده، په لاس راوړو اوس خط يې د قيمتونو له

مخې په لاندې ډول رسموو:

x	y
1	1.71
2	1.74
3	1.76
-1	1.6



10- که چیرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$ ، نو د y د رېگرېشن خط نسبت x ته کوم دی؟

1) $y = -\frac{1}{2}x + b$

2) $y = \frac{1}{2}x + b$

③ $y = x + b$

④ $y = -x + b$

حل: که چیرې x او y بشپړ پیوستون ولري، په دې معنا دی چې د تغیراتو ضریب $r = \pm 1$ دی، نو:

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = \pm \frac{S_y}{S_x}$$

څرنگه چې $S_x = S_y$ دی، نو:

$$a = \pm \frac{S_y}{S_x} = \pm 1$$

$$y = ax + b$$

$$y = \pm x + b \Rightarrow y = x + b, \quad y = -x + b$$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	زده کوونکي
12	10	16	6	10	6	16	18	12	8	18	د ریاضي نمرې (x)
10	14	10	6	10	10	14	18	8	10	16	د فزیک نمرې (y)

20	19	18	17	16	15	14	13	12	زده کوونکي
12	14	14	6	12	18	16	10	12	د ریاضي نمرې (x)
16	14	12	8	12	12	16	12	6	د فزیک نمرې (y)

– د ریگریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

– آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{246}{20} = 12.3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{20} y_i}{20} = \frac{234}{20} = 11.7$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(18-12.3)^2 + (8-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (18-12.3)^2 + (16-12.3)^2 + (6-12.3)^2 + (10-12.3)^2 + (6-12.3)^2 + (16-12.3)^2 + (10-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (10-12.3)^2 + (16-12.3)^2 + (18-12.3)^2 + (12-12.3)^2 + (6-12.3)^2 + (14-12.3)^2 + (14-12.3)^2 + (12-12.3)^2}{20}$$

$$= \frac{32.49 + 18.49 + 0.09 + 32.49 + 13.69 + 39.69 + 5.29 + 39.69 + 13.69 + 5.29 + 0.09 + 0.09 + 5.29 + 13.69 + 32.49 + 0.09 + 39.69 + 2.89 + 2.89 + 0.09}{20} = \frac{258.51}{20} = 12.92 \Rightarrow S_x = 3.59$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(16-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (8-11.7)^2 + (18-11.7)^2 + (14-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (10-11.7)^2 + (6-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (16-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (8-11.7)^2 + (12-11.7)^2 + (14-11.7)^2 + (16-11.7)^2}{20}$$

$$S_y^2 = \frac{18.49 + 2.89 + 13.69 + 39.69 + 5.29 + 2.89 + 2.89 + 32.49 + 2.89 + 5.29 + 2.89 + 32.49 + 0.09 + 18.49 + 0.09 + 0.09 + 13.69 + 0.09 + 5.29 + 18.49}{20}$$

$$S_y^2 = \frac{218.2}{20} = 10.91 \Rightarrow S_y = 3.3$$

$$\begin{aligned} \sum x \cdot y &= 18 \cdot 16 + 8 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 18 \cdot 18 + 16 \cdot 14 + 6 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 6 + 16 \cdot 10 + 10 \cdot 14 + 12 \cdot 10 + 12 \cdot 6 \\ &\quad + 10 \cdot 12 + 16 \cdot 16 + 18 \cdot 12 + 12 \cdot 12 + 6 \cdot 8 + 14 \cdot 12 + 14 \cdot 14 + 12 \cdot 16 \\ &= 288 + 80 + 96 + 324 + 224 + 60 + 100 + 36 + 160 + 140 + 120 + 72 + 120 + 256 + 216 + 144 + 48 + 168 + 196 + 192 \end{aligned}$$

$$\sum x \cdot y = 3040, \quad \frac{\sum x \cdot y}{n} = \frac{3040}{20} = 152$$

$$r = \frac{\frac{\sum x \cdot y}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{152 - 12.3 \cdot 11.7}{3.59 \cdot 3.3} = \frac{152 - 143.91}{11.847} = \frac{8.09}{11.847} = 0.68$$

د پیوستون له ضریب څخه لاندې پایله په لاس راځي.

- د x قیمت په ډېروالي د y قیمت هم ډېرېږي.
- یعنې x او y ترمنځ تقریباً 68% پیوستون شتون لري.

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = 0.68 \frac{3.3}{3.59} = \frac{2.244}{3.59} = 0.625$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 11.7 - 0.625(12.3) = 11.7 - 7.687 = 4.013$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = 0.625x + 4.013$$

هو، د دوو ازموینو ترمنځ ($y = 0.625x + 4.013$) اړیکه شتون لري.

12- پر چنگښو د خوراک د مالګې د 5 او 1 فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

0	5	10	20	30	40	50	د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت
90	110	118	122	126	132	136	د یون پلازما میزان (mm)

– په پاسنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

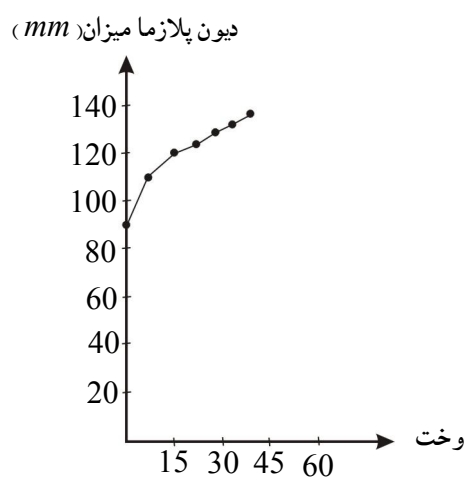
– په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

– د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایست؟

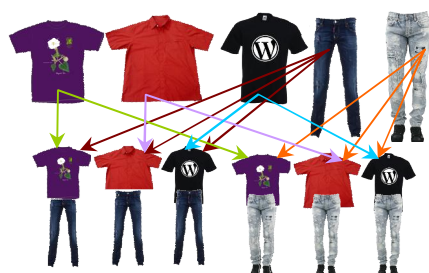
– یو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښيي؟

حل:

- په پورتنی جدول کې دوه ډوله متحولین دي لومړی یې وخت دویم متحول یې د یون پلازما میزان دی.
- په پورتنیو متحولینو کې وخت خپلواک متحول او یون پلازما ناخپلواک متحول دی.



له پورتنی ګراف څخه څرګندېږي چې د وخت په زیاتېدو سره د یون پلازما میزان هم زیاتېږي.



نهم څپرکی: احتمالات

پرموتېشن يا ترتيب (Permutation)

د درسي کتاب (305-308) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د پرموتېشن يا ترتيب په مفهوم پوه شي. • د پرموتېشن يا ترتيب په اړه پوښتنې حل کړي. • د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ځان باور پیدا کړي او په ورځنيو مسائلو کې ترې کار واخلي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او وپوښتي: • څوک ویلای شي په څو ډوله کولای شو درې کمپسونه او دوه پطلونونه سره جوړه جوړه واغوندو؟ • په څو ډوله کولای شئ درې قلمونه د قلمونو په بکسه کې سره خوا په خوا کېږدئ؟ • له $\{2, 5, 7\}$ عددونو څخه څو درې رقمي عددونه جوړېدای شي؟ په دې شرط چې عدد په کې تکراري نه وي. کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی دې زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د درسي کتاب 305 مخ فعالیت ورکړی چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي، په پای کې د هرې ډلې استازی دې سرته رسولی فعالیت نورو ته دیوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کوښښ وکړي، تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بیا تاسې د پرموتېشن يا ترتيب تعریف داسې ورته وکړي: په یوه کتار کې یو د بل څنګ ته د n متمایزو شیانو تنظیم داسې چې د هغوی د اېښودلو ترتیب په پام کې وي، د ترتیب په نامه یادېږي.	

که په ترتیب کې تکرار مجاز نه وي، نو مساوي په $P_n = n!$ او که چیرې تکرار مجاز وي، نو مساوي په $P_n = n^n$ دی. د لاندې پوهې لپاره زده‌کونکي دې د 306 مخ لومړۍ مثال په خپلو کتابچو کې حل کړي او ورپسې تاسو نوموړی مثال پر تخته باندې حل کړئ چې زده‌کونکي خپل حل د تختې له حل سره پرتله او تېروتنې اصلاح کړي.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره زده‌کونکي په وار سره تختې ته راوغواړئ چې د کتاب دویم، دریم او څلورم مثالونه پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوښښ وکړئ چې سم ځواب له زده‌کونکو څخه ترلاسه کړئ:

1. څوک پرموتېشن یا ترتیب تعریفولای شي؟
2. 5! مساوي له کوم عدد سره دی؟
3. له 2, 3, 4, 7, 8 عددونو څخه څو پنځه رقمي عددونه جوړېدای شي؟ (تکراري رقم نه وي).
4. په څو ډوله کولای شو چې د A, B او C هېوادونو بیرغونه په یوه کتار کې سره خوا په خوا کېږدو؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د یوه طبیعي عدد لپاره د $(n-1) \cdot n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ حاصل ضرب په لنډ ډول په $n!$ ، $(n-1)$ فکتوریل) ښودل کېږي او د تعریف له مخې $1! = 1$ او $0! = 1$ دی.

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

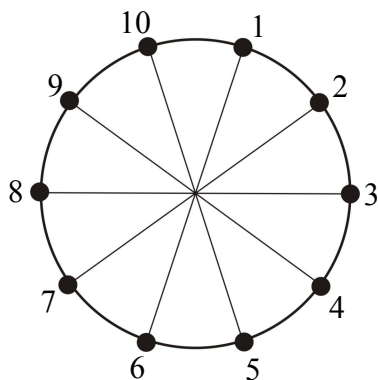
$$1) \frac{4! \cdot 6!}{8!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

$$2) \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(n+1)(n+2)!}{(n+3)(n+2)!} = \frac{n+1}{n+3}$$

$$3) \frac{6!}{7!-6!} = \frac{6!}{6!(7-1)} = \frac{6!}{6! \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$$4) \frac{2n!(n-2)!}{4(2n-2)!n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!(n-2)!}{4(2n-2)!n(n-1)(n-2)!} \\ = \frac{2n(2n-1)}{4n(n-1)} = \frac{2n-1}{2(n-1)}$$

د لوست په اړوند د لازياتو معلوماتو لپاره یو مثال په پام کې نیسو.

حل

هغه دوه تنه چې غواړي هر وخت سره خوا په خوا کيښي، دوی دواړو ته یو حالت په پام کې نیول کېږي، نو کله چې دوه چوکۍ د دوو تنو په واسطه اشغال شي، نو 8 چوکۍ پاتې کېږي په 8! ډوله دوی ورباندې کښېناستلی شي او دوی دواړه هم دوه حالتونه لري، یعنې د دوی دواړو د ځای بدلون هم دوه حالتونه دي چې په 2 کې ضربېږي یعنې په لاندې ډول:

$$2(8!) = 2(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2(40320) = 80640$$

یعنې دوی په 80640 ډوله کولای شي د گردې میز په شاوخوا کښيښي.

3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زیر توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. (د هم رنگه توپونو په کتار کې د هم رنگه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)

حل دا پوښتنه په مرکب ترتیب باندې حلېږي، په کتاب کې له دغه نوم څخه یادونه نه ده شوې، ولې فرمول یې په کتاب کې شته.

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{n!}{(k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!)}$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 + 2 + 4 = 9 \\ k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 4 \end{array} \right\}$$

$$P_9^{(3,2,4)} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 36 \cdot 35 = 1260$$



نهم څپرکی: احتمالات

ترکیب (Combination)

د درسي کتاب (309-310) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د ترکیب په مفهوم پوه شي. • د ترکیب په اړه پوښتنې حل او تشخیص کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ورځني ژوند کې ورڅخه کار واخلي او له امله یې خوښي ښکاره کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست په یادونې سره د زده کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او وپوښتي: • د 2 او 3 عددونو ترکیب له کوم عدد سره مساوي دی؟ • ایا ستاسو له نظره ترتیب او ترکیب یو له بل سره څه اړیکه لري؟ • د دوو تابعگانو ترکیب په څه ډول او شرط یې کوم دی؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د درسي کتاب 309 مخ فعالیت ورکړي، چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي، په پای کې د هرې ډلې استازی دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته د یوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنه کړي وي، کوښښ وکړي، تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي، بیا تاسو داسې د ترکیب تعریف ورته وکړئ: له n متمایزو شیانو څخه د r شیانو ټاکل ($r \leq n$) داسې چې په هغو کې د ټاکلو (انتخاب) ترتیب په پام کې نیول شوی نه وي، ترکیب نومېږي او ترکیب د $C_r^n = C_r^n = \binom{n}{r}$ په سمبول سره ښيي. او $\binom{n}{r}$ داسې لوستل کېږي (n په r) او د تعریف له مخې $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ سره دی، وروسته ښاغلی ښوونکی دې د کتاب 310 مخ لومړی مثال په تخته حل کړي او له زده کوونکو څخه دې د حل شوي مثال په اړه توضیحات وغواړي.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې نور زده‌کوونکي دې په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوبښنې وکړي چې سم ځوابونه له زده‌کوونکو څخه ترلاسه کړي:

1. د ترتیب او ترکیب ترمنځ څه توپیر دی؟

2. $C_3^5 = \binom{3}{5}$ له کوم عدد سره مساوي دی؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی غواړو وښیو چې $0! = 1$ دی، پوهېږو چې $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n = n!$ دی، نو لرو:

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

که دلته $n = 0$ شي، نو:

$$(0+1)! = (0+1)0!$$

$$1 = 1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1! = 1$$

اوس غواړو ثابت کړو چې $C_n^n = \binom{n}{n} = 1$ ، $C_0^n = \binom{n}{0} = 1$ او $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ دی.

حل: د ترکیب له تعریف څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$C_0^n = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

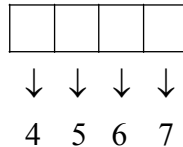
$$\begin{aligned} \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{n!(n-r+1) + rn!}{r!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!(n-r+1+r)}{r!(n+1-r)!} = \frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r} = C_r^{n+1}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- له اوو تورو لکه د F, E, D, C, B, A او G څو 4 توري کلمې، پرته له تکراري توري څخه جوړولای شو؟

حل پوهېږو چې ټول توري 7 دي، نو د څلورو تورو د کلمو د جوړولو لپاره موږ څلور تش ځایونه په پام کې نیسو چې د لومړي تش ځای لپاره د 7 تورو له ډلې څخه 7 امکان شتون لري، یعنې:



$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 42 \cdot 20 = 840$$

یعنې 840 ټولې څلور حرفي کلمې چې له پاسنیو تورو څخه په لاس راځي.

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 تیمونه گډون لري. تیمونه په څو ډوله کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

حل

لومړی مقام	دویم مقام	دریم مقام
↓	↓	↓
7	6	5

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 = 42 \cdot 5 = 210$$

یعنې تیمونه په 210 ډوله کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاسته راوړي.

3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسئول وي.

حل له پوښتنې څخه معلومېږي چې له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 مېرمنې داسې ټاکو چې لومړی نارینه رئیس او دویم نارینه مالي مسئول وي، د نارینه وو په ټاکلو کې د ټاکلو ترتیب په پام کې دی، نو د نارینه وو ټاکل په تبدیل حلېږي او د مېرمنو ټاکل 3 تنه او د ټاکلو ترتیب یې هم په پام کې نه دی، نو د مېرمنو ټاکل په ترکیب باندې حلېږي.

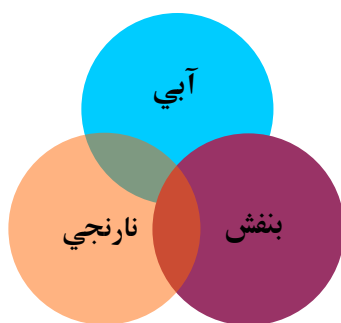
$$P_2^4 = V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$P_2^4 \cdot C_3^6 = 12 \cdot 20 = 240$$

په پایله کې ویلی شو چې موږ دوه نارینه او درې مېرمنې شرایطو ته په پاملرنې سره په 240 ډوله ټاکلی شو.

نوټ: ښاغلی ښوونکی، دریمه پوښتنه د تبدیل په عنوان پورې اړه لري، د تبدیل له لوست وروسته دې دا پوښتنه حل شي.



نهم څپرکی: احتمالات

ترکیب (Combination)

د درسي کتاب (311) مخ

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د ترکیب په مفهوم پوه شي. • د ترکیب په اړه پوښتنې حل او تشخیص کړای شي. • د پورته پوهې او مهارت په پیدا کولو سره په ورځني ژوند کې ورڅخه کار واخلي او له امله یې خوښي ښکاره کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یو کسيز کار...	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست په یادونې د زده-کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راوړي او وپوښتي: • په شکل کې څو رنګونه وینئ؟ • د ابي او نارنجي رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟ • ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟ • د 5 او 2 عددونو ترکیب کوم عددونه دي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کوونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د درسي کتاب 311 مخ فعالیت ورکړي چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي په پای کې تاسو موضوع داسې تشریح کړئ: ځینې وخت د بېلابېلو شیانو، اجزاوو، امکاناتو او شکلونو ترتیبول په مطلوب شکل هم د ترتیب او هم د ترکیب له لارې کیدای شي، مثلاً د بېلابېلو گلانو گډون د زینتې ساحې لپاره، د بېلابېلو گلانو غوره کول، د بېلابېلو هېوادونو د بیرغونو اېښودل داسې چې خپل لازم موقعیت ولري او داسې نور مثالونه، خو بیا هم ترکیب له ترتیب سره توپیر لري، موږ ترکیب داسې تعریفوو: د عددونو، شیانو یا اجزاوو داسې گروپ بندي ده چې په هغو کې سلسله مراتب او نوبت نه مراعات کېږي، یا په بل عبارت له n شیانو څخه r داسې چې $0 \leq r \leq n$ شیانو ټاکل چې د ټاکلو ترتیب په کې په پام کې نه وي نیول شوی	

$$\text{او فرمول يې } C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ دى.}$$

د لاسي پوهې لپاره تاسو ورته د کتاب 312 مخ لومړۍ مثال پر تخته حل کړئ.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 312 مخ دویم مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او همکاري وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ددې لپاره چې ډاډمن شۍ، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړئ او کوبنس وکړئ چې سم ځوابونه ترلاسه کړئ:

1. څوک ترکیب تعریفولای شي؟
2. ترکیب له ترتیب سره څه توپیر لري؟
3. د ترکیب $C_2^6 = \binom{6}{2}$ حاصل له کوم عدد سره مساوي کېږي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د ترکیب اهمیت په دې کې دی چې د څېړنو لپاره د نمونو (sample) غوره کولو لپاره ضروري ده، ترڅو د عددونو له یوې مجموعې څخه ټول عددونه په نمونه کې ځای ونیسي او برعکس د بېلابېلو افرادو یا شیانو څخه یو جمعیت یا نفوس (population) ترکیب شي، نو ځکه دا دوه اړخیز اهمیت لري. په احتمالاتو کې موږ هم د جمعیت (نفوس) او هم د نمونې لپاره ځانگړی تعریف لرو: نفوس د هغو شیانو، افرادو، پېښو یا امکاناتو څخه عبارت دی چې مجموعه یې گډ خصوصیات لري. اوس څو مثالونه چې د ترکیب د بحث اړوند دي په پام کې نیسو.

غواړو وښیو چې د هر $k \geq 1$ څخه $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ دی.

ثبوت:

$$\frac{k}{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] = \frac{k}{n} \left[\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \right] = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \dots *$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \dots **$$

$$*, ** \Rightarrow \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

همدارنگه غواړو ثبوت کړو چې $(k+1) \binom{n}{k+1} = (n-k) \binom{n}{k}$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
 (k+1) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= (k+1) \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\
 &= (n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} = (n-k) \binom{n}{k} \Rightarrow (k+1) \binom{n}{k+1} = (n-k) \binom{n}{k} \\
 \Rightarrow (k+1)! \binom{n}{k+1} &= (n-k) \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1- که چیرې په یوه ازموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځوابونه مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

حل څرنگه چې له لس پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب دی، له دې څخه معلومېږي چې د انتخاب ترتیب په نظر کې نه دی، له دې امله دا پوښتنه د ترکیب په طریقه حلېږي.

$$\begin{aligned}
 C_r^n &= \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
 C_7^{10} &= \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 C_7^{10} &= 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120
 \end{aligned}$$

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښه کولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

حل دا پوښتنه د ترکیب په طریقه حلېږي، ځکه چې په همدې کې د انتخاب ترتیب په هغو کې په پام کې نه دی نیول شوی څرنگه چې مثلث له دریو ټکو څخه تېرېږي، نو:

$$\begin{aligned}
 C_3^5 &= \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \\
 C_3^5 &= 5 \cdot 2 = 10
 \end{aligned}$$

یعنې په 10 ډوله کولای شو چې له ټکو څخه مثلثونه جوړ کړو.

3- که چیرې $P(n, 2) - C_2^n = 36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

حل

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\begin{aligned} P(n, 2) - C_2^n &= \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{2!n! - n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!(2! - 1!)}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 36 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} = 36 \div 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(n, 2) - C_2^n = n^2 - n = 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 72 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(1)(-72)$$

$$\Delta = 1 + 288 = 289$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 17$$

$$n_1 = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9, \quad n_2 = \frac{1-17}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

څرنگه چې n منفي قیمت نه شي اخېستلای، نو $n = 9$ دی.

میزان:

$$P(n, 2) - C_2^n = 36$$

$$P(9, 2) - C_2^9 = 36$$

$$P(9, 2) = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$$

$$C_2^9 = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2 \cdot 1 \cdot 7!} = 9 \cdot 4 = 36$$

$$P(9, 2) - C_2^9 = 72 - 36 = 36$$



نهم څپرکی: احتمالات

تبدیل (Variation)

د درسي کتاب (313-316) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهني د زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د تبدیل په مفهوم پوه شي. • د تبدیل اړوند مثالونه حل کړای شي. • د تبدیل د موضوع په اړه ورځنۍ ستونزې حل او په ځان باورمن شي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډله ییز او یوکسیزکار ...	
3- مرستندویه مواد: د اړتیا وړ مواد ...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د زده کونکو پام تېر لوست ته راوړوي او د کتاب د وړودي برخې په اړه داسې وپوښتي: • د چارټ په شکل کې څه شی وینئ واضح یې کړئ. • ستاسو په نظر تبدیل له ترکیب سره څه توپیر لري؟ • له $\{a, b, c, d, e\}$ تورو څخه څو درې حرفي کلمې جوړېدای شي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کونکو څخه په لاس راوړئ، د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کونکي په مناسبو ډلو ووېشي، د درسي کتاب د 313 مخ فعالیت ورکړي چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي په پای کې د یوې یا دوو ډلو استازي دې خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته دیوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې تېروتنې وي، کوښښ وکړي، تېروتنې یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي. بیا وروسته تاسې داسې د تبدیل تعریف وکړئ: له n متمایزو شیانو څخه د k شیانو ټاکل داسې چې $k \leq n$ وي او د ټاکلو ترتیب یې په پام کې وي، له تبدیل څخه عبارت دی او په $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ فارمول سره، ښودل کېږي، یا په بل عبارت د عددونو، شیانو او اجزاو داسې تنظیمول دي چې د نوبت سلسله په کې رعایت شي، د موضوع د لابنه پوهاوی لپاره د درسي کتاب د 313 مخ مثال په ټاکل کېدو او گام په گام د تبدیل فرمول ورباندې تطبیق کړئ او لازم توضیحات ورکړئ په پای کې یو داوطلب زده کونکی تختې ته راوغواړئ او ورته ووايست چې د پوهنتون له کلمې څخه څو درې حرفي کلمې پرته له تکراري توري څخه جوړېدای شي؟ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوځوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکي تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 314 مخ مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته قضیه حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده‌کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوبښنې وکړي چې له زده‌کوونکو څخه سم ځوابونه ترلاسه کړي:

1. د تبدیل او ترکیب ترمنځ څه توپیر وجود لري؟
2. $V(5, 2) = V_2^5$ له کوم عدد سره مساوي دی؟
3. په څو مختلفو ډولونو کولای شو 5 تنه محصلین له یوه 17 کسيز ټولگي څخه یوه پنځه څانگیزه کورس ته نوم لیکنه وکړو؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی تبدیل نه یوازې د پلټونو په تبدیل، نسل‌گیری، د بوټو د تنظیم، د یو شمېر عملیاتو، اوبه لگولو او نورو په هکله دگټې وړ دی، بلکې په ورزشي، سیاسي، کلتوري، گڼ شمېر مسائلو او نورو کې هم موږ ته د ښه تنظیمولو لپاره پوهه راکوي؛ مثلاً د هېواد د 34 ولایتونو ورزشي ټیمونه څو څو ځله یو له بل سره د مخامخ کېدو احتمال او چانس لري او څو لوبې باید ورته تنظیم شي، یا په هېواد کې د ټاکنو لپاره د وکیلانو، بهر ته د تلونکو هیاتونو د تبدیل په جوړولو، په نړیوالو غونډو کې د هېوادونو د بهرغونو اېښودلو شکل، د لویو غونډو لپاره د هر هېواد یا د هیات هر غړي ته یوه ورځ د ریاست مشري سپارل او نورو مسائلو کې هم ډېر کارول کېږي.

د موضوع د لارښه وضاحت لپاره لاندې مثال په پام کې نیسو.

فرضو چې د یو روغتون رئیس غواړي له 5 تنو ډاکټرانو څخه درې تنه ډاکټران داسې وټاکي چې تر ټولو ښه او لایق وي، نو د روغتون رئیس د 5 تنو څخه به لومړی ډاکټر د څلورتنو څخه به دویم ډاکټر او له درې تنو څخه دریم تن وټاکي، نو دلته 60 لارې (طریقي) شتون لري، ترڅو درې تنه ډاکټران له 5 تنو ډاکټرانو څخه وټاکل شي. دا 60 طریقي ددې فورمول په واسطه محاسبه کولای شو:

حل:

$$V_k^n = V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_3^5 = V(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

1. د فوټبال په یوه سیالی کې 12 ټیمونه گډون لري، په څو ډوله کولای شو گټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.

حل پورتنی پوښتنه په تبدیل پورې اړه لري، ځکه چې په هغه کې د انتخاب ترتیب په پام کې دی:

لومړی مقام	دویم مقام	دریم مقام

↓

↓

↓

10

11

12

$$N = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 12 \cdot 110 = 1320$$

له فورمول څخه هم همدغه ځواب لاسته راځي:

$$V_3^{12} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

2. دیوولسم ټولگي له 20 تنو زده‌کونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولگي د استازي او د استازي د مشرمرستیال په توگه ټاکلی شو.

حل

د استازي مشرمرستیال		استازي

↓

↓

19

20

$$N = 20 \cdot 19 = 380$$

یا د فورمول څخه هم په لاس راځي:

$$V_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

نهم څپرکی: احتمالات

د بېنوم قضیه

د درسي کتاب (317-318) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - د بېنوم د قضیې په مفهوم پوه شي. - د بېنوم د قضیې په مرسته د $(a \pm b)^n$ مطابقت ته پراختیا ورکړای شي. - د پورته پوهې او مهارت په درلودلو سره په ځان باور پیدا کړي او په ورځني ژوند کې ترې کار واخلي.	د زده کونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې:
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډلیمیزکار او یو کسيز...	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد...	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته د تېر لوست لنډه یادونه وکړې او د زده کونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوئ او وپوښتئ: - په مخامخ شکل کې عددونه په کوم ترتیب تنظیم شوي دي؟ - د څلورمې لیکې عددونه کوم دي؟ - د $(a + b)^3$ مطابقت ضریبونه په لاس راوړئ. کوبښښ وکړئ چې ځوابونه له زده کونکو څخه په لاس راوړئ، ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده کونکي په مناسبو ډلو ووېشئ د درسي کتاب 317 مخ فعالیت ورکړئ چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي، د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړئ، په پای کې دې د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنې کړي وي، کوبښښ وکړي تېروتنه یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي. بیا وروسته تاسو موضوع داسې تشریح کړئ: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیا بیا د تکرار وړ وي، د تجربې په n ځله تکرار کې د بېنوم د انکشاف $k - m$ حد کې لاندې احتمال لري: $\binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}$ پورتنی بېنوم په $B(n, p, k)$ سره ښودل کېږي چې د برنولي د احتمال په نامه یادېږي او داسې $B(n, p, k) = \binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}$ لیکل کېږي.	

دغه فورمول د هغې پېښې لپاره کارول کېږي چې له دوو حالتونو څخه خالي نه وي یا کامیابي یا ناکامي مثلاً د یوې سکې په غورځېدو کې که د خط راتگ مطلوب وي؛ نو دلته دوه حالتونه شتون لري یا به خط راشي یا به شېر. او همدارنگه د یوې پېښې د پېښېدو احتمال P او د نه پېښېدو احتمال یې $1 - p = q$ دی.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقیقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره یو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 318 مخ مثال پر تخته حل کړي، په عین وخت کې دې نور زده‌کوونکي په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړي.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقیقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ایا زده‌کوونکو لوست زده کړی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوښښ وکړي چې له زده‌کوونکو څخه سم ځوابونه ترلاسه کړي:

1. کولای شو د هرې ناڅاپي تجربې نمونه یي فضا په داسې یوې نمونه یي فضا واړوو چې دوه غړي ولري؟
2. که چیرې د یوې نمونه یي فضا د یوه غړي د پېښېدو احتمال P وي، د بلې پېښې احتمال به یې څو وي؟
3. که چیرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k -ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې یې احتمال پیدا کړي.

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی تراوسه مو د بینوم قضیې په هکله یو څه معلومات ترلاسه کړل، خو اوس غواړو پوه شو چې په احتمالاتو کې د بینوم له قضیې څخه د څه شي لپاره استفاده کېږي، دا موضوع په یوه مثال کې ښیو:

مثال: یوه دوه مخیزه سکه په پام کې ونیسئ، یوه مخ ته یې شېر نوم ورکړئ او بل مخ ته یې خط ووايي، که د H حرف له شېر څخه او T حرف له خط څخه نمایندګي وکړي د H او T د فریکونسي وېش چې د سکې د څلور ځلې غورځولو په واسطه منځ ته راځي، د بینوم د قضیې په کارولو سره یې محاسبه کوو.

$$(H + T)^4 = H^4 + 4H^3T + 6H^2T^2 + 4HT^3 + T^4$$

ددې مساوات ښی خوا د H او T د تورو توانونه د ترکیب له نوعیت څخه نمایندګي کوي، داسې چې ښی خوا د هر حد ضریبونه هغه فریکونسي ښیي، چې یو ترکیب مثلاً H^3 یا H^2 تکرارېږي، په دې ډول ویلای شو چې $(H, H, H)H^3$ په کې 4 ځلې تکرار شوی دی او د پایلو مجموع د سکې د غورځولو په عملیه کې مساوي په 16 ده؛ یعنې د ټولو حدونو د ضریبونو مجموعه 16 کېږي.

9- د تمرین او پوښتنو ځوابونه:

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (II)$$

حل I: د I مساوات له ښي لوري څخه کيڼ لوري په لاس راوړو او همدارنگه د نیوتن له بینوم څخه کار اخلو؛ یعنې:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$0 = (1+(-1))^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1) + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}(-1)^3 + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

حل II: پوهېږو چې $1+1=2$ کېږي؛ نو بیا هم د نیوتن له بینوم څخه کار اخلو او له ښي لوري کيڼ لوري په لاس

راوړو:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 1^2 + \binom{n}{3}1^{n-3} \cdot 1^3 + \dots + \binom{n}{n}1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$



نهم څپرکی: احتمالات

دوه جمله‌يي احتمال

د درسي کتاب (319-322) مخونه

د لوست وخت: (يو درسي ساعت)

1- د زده کړې موخې - پوهنيزه - مهارتي - ذهنيتي زده کوونکي به د لوست په پای کې وتوانېږي چې: • د دوه جمله‌يي احتمال په مفهوم پوه شي. • د دوه جمله‌يي احتمال په هکله اړوندې پوښتنې حل کړای شي. • له دوه جمله‌يي احتمال څخه په ورځني ژوند کې کار واخلي او ورڅخه خوبي ښکاره کړي.	
2- د زده کړې لارې: پوښتنه او ځواب، ډلېبیزکار او یو کسيز....	
3- مرستندويه مواد: د اړتیا وړ مواد....	
4- د وړودي برخې توضیح (5 دقیقې) ښاغلی ښوونکی له سلام او احوال پوښتنې څخه وروسته له تېر لوست څخه په یادونې سره د زده‌کوونکو پام د کتاب وړودي برخې ته راواړوي او وپوښتي: • په چارټ کې کوم شکلونه گوري؟ • که چیرې یوه سکه پورته واچول شي، کله چې سکه بېرته په ځمکه لوېږي، کوم مخ به یې پورته خواته راشي (شېر که خط)؟ • ایا د یوې سکې په اچولو سره به له شېر او خط راتلو څخه پرته کوم بل حالت راشي؟ کوښښ وکړئ چې ځوابونه له زده‌کوونکو څخه په لاس راوړئ د ستونزو په صورت کې مرسته او لارښوونه وکړئ.	
5- د لوست بهیر او فعالیت (28 دقیقې): ښاغلی ښوونکی زده‌کوونکي په مناسبو ډلو ووېشي د درسي کتاب 319 مخ فعالیت ورکړي چې له خبرو او بحث وروسته فعالیت سرته ورسوي د فعالیت د سرته رسولو په وخت کې څارنه او د ستونزو په صورت کې مرسته وکړي په پای کې دې د هرې ډلې استازی خپل سرته رسولی فعالیت نورو ته د یوه مثال په ورکولو سره توضیح کړي، که کومې ډلې تېروتنې کړي وي، کوښښ وکړي چې تېروتنې یې د یوې بلې ډلې په واسطه اصلاح کړي. بیا وروسته تاسو موضوع داسې تشریح کړئ: کولای شو د هرې ناڅاپي تجربې نمونه یي فضا په داسې یوې نمونه یي فضا واړوو چې دوه غړي لري. که چیرې دا ډول نمونه یي فضا د یوه غړي احتمال P وي، نو هرومرو د بل حالت احتمال $q = 1 - p$ او ناکامې دي. که چیرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k - ام ځلې وړل (بريالی کېدل) په n ځلې تکرار کې P او له n ځلې څخه پاتې حالتونه چې د بایللو او ماتې خوړلو احتمال یعنې $q = 1 - p$ دی. $k = \binom{n}{k} P^k (1 - p)^{n-k}$ - ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې $P(k, n, p)$ په پورته فورمول کې:	

P : د ناڅاپي پېښې د پېښېدو احتمال د نمونې په هر واحد کې

k : ناڅاپي مطلوبه پایله

n : د نمونې فضا شمېر

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ په مساوي دي په}$$

وروسته تاسو د درسي کتاب 320 مخ لومړی مثال له فورمول څخه په کار اخېستني سره د پوښتنې او ځواب په طريقه حل کړئ.

6- د زده کړې تحکیم: (7) دقيقې

ښاغلی ښوونکی د لوست د لا پوخوالي لپاره يو داوطلب (چې په خپله وغواړي) زده‌کوونکی تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب 320 مخ دويم مثال په تخته حل کړي، په عين وخت کې دې نور زده‌کوونکي هم په خپلو کتابچو کې د کتاب له لېدو پرته حل کړي او په پای کې دې خپل حلونه د تختې له حل سره پرتله کړي. د ستونزو په صورت کې لارښوونه او مرسته وکړئ.

په پای کې داوطلب زده‌کوونکي په وارسره تختې ته راوغواړي چې د درسي کتاب د 320 او 321 مخونه دريم، څلورم او پنځم مثالونه پر تخته حل کړي، تېروتنې يې د نورو زده‌کوونکو په واسطه اصلاح کړي له هغه پرته تاسو ورسره مرسته وکړئ.

7- د لوست د پایلې ارزونه: (5) دقيقې

ښاغلی ښوونکی ددې لپاره چې ډاډمن شي، چې ايا زده‌کوونکو لوست زده کړی دی او که نه؟ د لوست په اړوند له زده‌کوونکو څخه لاندې پوښتنې وکړي او کوبښن وکړي چې له زده‌کوونکو څخه سم ځوابونه ترلاسه کړي:

1. که يوه سکه 5 ځلې واچول شي په دريم ځل کې يې د خط راتگ احتمال پيدا کړي.
2. د دوه جملېي احتمال فورمول و وياست او اجزاي يې تشرېح کړي.
3. که يوه سکه 20 ځلې واچول شي، په 12 ام ځل کې يې د شېر راتگ احتمال څومره دی؟
4. دوه جملېي احتمال په احتمالاتو کې د څو احتمالي پېښو لپاره په کار وړل کېږي؟

8- د ښوونکي لپاره اضافي معلومات:

ښاغلی ښوونکی د دوه جملېي احتمال هره هغه رياضيکي افاده ده چې دوه حده ولري؛ يعنې هغه ناڅاپي پېښه چې د پېښېدو احتمال يې له دوو حالتونو څخه خالي نه وي، يا کاميابي او يا ناکامي په احتمالاتو کې دوه جملېي احتمال هغه وخت کارول کېږي چې کله موږ دوي مشاهدې سره يو ځای لیکو په ځانگړي توگه د احتمالاتو په سنجش کې ډېر معمول دی، د لارښه وضاحت لپاره لاندې مثال په پام کې نيسو.

مثال: که چيرې په 6 دانو هگيو کې د څلورو چرگانو او دوو چرگو د راوتلو احتمال پيدا کړو، نو په 6 واړو کې د ښځينه چرگو داسې محاسبه کوو:

$$P(k, n, p) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 4$ ټولې ناڅاپې پېښې

$n = 6$ ټولې هڅې

$P = \frac{1}{2}$ د چرګ يا چرګې د وتلو احتمال يا په يوه هڅې کې 50% د چرګې او 50% د چرګ احتمال:

$$P(4, 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(4, 6, \frac{1}{2}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{64} = 0.23 = 23\%$$

يعنې له 6 هڅيو څخه د ښځينه چرګورې راوتل 23% امکان لري.

9- د تمرين او پوښتنو ځوابونه:

يوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پيدا کړي چي:

(i) په 4 ځله غورځېدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii) په 6 ځله غورځېدو، 3 ځلې خط راشي

(iii) په 8 ځله غورځېدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv) فکر وکړئ چې که سکه $2n$ ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېريدو، د p بدلون په څه ډول

دی؟

حل (i): د درسي کتاب د 316 مخ د خط راتګ له فورمول څخه په کار اخېستني سره لرو:

$$P(\text{خط راتګ}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \quad \text{د خط راتګ احتمال په } k - \text{ام مرتبه کې}$$

$$P(2) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = \frac{\binom{6}{3}}{2^6} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

حل (ii):

په همدې ډول:

$$P(4) = \frac{\binom{8}{4}}{2^8} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 5}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

حل (iii):

په عمومي توګه:

$$P(2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{n!(2n-n)!}{2^{2n}} = \frac{n! \cdot n!}{2^{2n}}$$

حل (iv):

يعنې ددې احتمال چې په $2n$ ځلې غورځېدو کې n ځلې خط راشي عبارت دی له: $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

د نهم خپرکي د عمومي پوښتنو حل (خلور درسي ساعتونه)

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پورتنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

حل (i): د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره درې تش ځایونه په پام کې نیولی شو، اوس د سلیز ځانې د ډکولو لپاره د S په سټ کې له راکړل شوو عددونو څخه شپږ امکانونه شتون لري، ځکه چې یو رقم یې صفر دی، چې د سلیز په ځانه کې یې نه شو لیکلای، ځکه درې رقمي عدد په لاس نه راځي. څرنگه چې په نوموړي سټ کې ټول اووه عددونه دي او یو یې په سلیز ځانه کې ټاکل شوی دی، نو د لسیز ځانې لپاره هم شپږ امکانونه موجود دي، له هغه وروسته د یويز ځانې د ډکولو لپاره پنځه عددونه پاتې کېږي، ویلای شو چې د یويز ځانې د ډکولو لپاره پنځه امکانونه شته، چې په لاندې ډول لیکل شوي دي:

↓ ↓ ↓

6 6 5

$$6 \cdot 6 \cdot 5 = 36 \cdot 5 = 180$$

حل (ii): د ټولو درې رقمي جفتو عددونو د شمېر د پیدا کولو لپاره درې تش ځایونه په پام کې نیسو. له شرط سره سم لومړی د یويز ځانې د ډکولو لپاره څلور امکانونه شته، یعنې د یويز ځانه د (0, 2, 4, 6) هر یوه عدد په واسطه ډکولای شو. د لومړي جزء په ډول د لسیز ځانې د ډکولو لپاره شپږ امکانونه شتون لري، نو د سلیز ځانې د ډکولو لپاره پنځه عددونه پاتې کېږي، خو څرنگه چې صفر د سلیز په ځانه کې نه شو لیکلای، ځکه درې رقمي عدد نه راځي، نو له دې امله د سلیز ځانې د ډکولو لپاره څلور امکانونه شتون لري، چې په لاندې ډول ښودل شوي دي:

↓ ↓ ↓

4 6 4

$$4 \cdot 6 \cdot 4 = 24 \cdot 3 = 96$$

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کونکي په یوه کتار کې څنگ په څنگ درېدلې شي؟

حل:

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

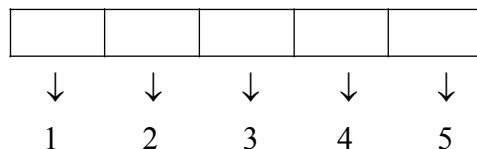
1 2 3 4 5 6

$$N = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \cdot 24 = 720$$

یعنې په 720 ډوله کولای شي په یوه کتار کې ودرېږي.

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظلہ او خبیب کولای شي، په یوه کتار کې خوا په خوا دیو یادگاري تصویر د اخیستلو لپاره ودرېږي؟

حل:



$$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 6 = 120$$

یعنې ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظلہ او خبیب کولای شي، د تصویر اخیستلو لپاره په یوه کتار کې په 120 ډوله ودرېږي.

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 گروپونو ووېشو؟

حل:

$$N_1 = C_3^9 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84$$

$$N_2 = C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$N_3 = C_3^3 = \binom{3}{3} = 1$$

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680$$

یعنې کولای شو 9 تنه په 1680 ډوله په 3 گروپونو باندې ووېشو.

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

حل:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library