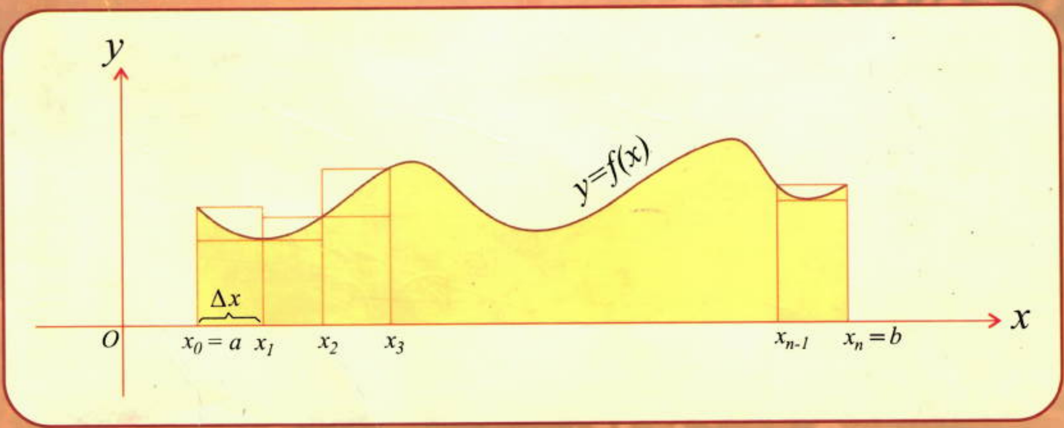
(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس

اراتوستنس

محمد بن موسی

اسحاق نیوټن

کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردارمحمد (خوږیانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږياني)

سنخر کتابکور
0700202080
0700203080

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/

عمومي رياضي (نوی نصاب)

مؤلف/

سردار محمد (خوږياڼی)

ډيزاين/

الله يار تسل

خپرندوی/

ميهن خپرندويه ټولنه

چاپکال/

۱۳۹۵ل

چاپشمېر/

۱۰۰۰ټوکه

آدرس

ميهن خپرندويه ټولنه پېښور- جلال آباد

جلال آباد: اسحاقزی مارکيټ لاندې پوړ، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرندويې ټولنې سره خوندي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانۍ باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لندېز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي څو څو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غوارې که څه هم مونږ دا کتاب څو څو واره په غور سره کتلي او کمې او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار-تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیک لړ

حساب

اول فصل

حساب........ 1
د حساب د علم موضوع........ 1
د مکمل اعدادو سیټ........ 1
د طبیعي اعدادو سیټ........ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض........ 2
د حساب اصطلاحات........ 2
واحد........ 2
عدد........ 2
ارقام........ 4
طبقې........ 5
د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې........ 6
1- د صحیح عددونو جمع........ 6
2- د صحیح عددونو تفریق........ 8
3- د صحیح عددونو ضرب........ 10
اضافي معلومات........ 12
4- د صحیح عددونو تقسیم........ 16

دویم فصل

کسر........ 21
اعشار کسر........ 21
د اعشار کسر څلور ګونې عملیې........ 21
عام کسر........ 24
د کسرونو مقایسه........ 26
تجنیس........ 26
د کسرونو اختصار........ 27
د عام کسر څلور ګونې عملیې........ 33

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر.......... 37
د کسرونو تبادله.......... 39
دریم فصل
طاقت لرونکی عددونه.......... 42
تجزیه.......... 44
جذر.......... 49
د اعدادو سیستمونه.......... 59
د 2 په قاعده د اعدادو سیستم.......... 60
د 5 په قاعده د اعدادو سیستم.......... 61
خلورم فصل
نسبت.......... 63
تناسب.......... 83
پنځم فصل
فیصد.......... 72
تخفیف.......... 73
أحدیت.......... 75
ربحه.......... 76
تنزیل.......... 79
مشارکت.......... 80
شپږم فصل
سیټ.......... 84
د سیټ د لیکلو طریقې.......... 84
د سیټ اقسام.......... 86
د روابطو له مخې د سیټونو اقسام.......... 86
د سیټونو عملیې.......... 89
الجبر
اول فصل
الجبر.......... 93
د الجبر اصطلاحات.......... 94

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم........ 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې........ 97
د پولینومونو څلور ګونې عملیې........ 100
د باقي مانده دعوه........ 102
ترکیبي تقسیم........ 104

دویم فصل

مساوات........ 106
مطابقت........ 106
تجزیه........ 110
الجبري کسرونه........ 116
د الجبري کسرو خواص........ 116
د الجبري کسرونو جمع........ 117
د الجبری کسرونو تفریق........ 117
د الجبري کسرونو اختصار........ 118
د الجبري کسرونو تقسیم........ 118
د کسرونو ګویا کول........ 119
قسمي کسرونه........ 122

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات........ 127
د معادلې اقسام........ 127
یو مجهوله اوله درجه معادله........ 127
د معادلې خواص........ 128
جذري معادلی........ 129

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلی........ 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل........ 133
متریکس........ 138
د متریکس ډولونه........ 139
د متریکسونو جمع........ 141

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس تفریق 141
د دوه متریکسونو ضرب 143
د یوه متریکس ترانسپوز متریکس 144
دیترمینانت 145
د دیترمینانت د حل طریقه 145
د دیترمینانت خواص 147
الحاقي متریکس 148
پنځم فصل
دویمه درجه یومجهوله معادلې 151
د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې 152
دجذرو له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول 161
د دویمه درجه یومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول 162
ددیکارت قاعده 163
شپږم فصل
غېرمساوات 173
د غیرمساوات خواص 173
دغېرمساوات اقسام 175
مطلقه قیمت 177
دبېنوم داشاری څېړل 177
د یو مجهوله غېرمساوات سیستم 183
دوه مجهوله غېرمساوات 184
ددوه مجهوله غېرمساوات سیستم 185
ددوه مجهوله غېرمساوات د سیستم د حل طریقه 185
یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات 186
ددویمه درجه غېرمساوات دحل طریقه 187
اووم فصل
پارامتریک معادلې 190
اتم فصل
اکسپوننشل (نمائي) معادلې 199

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلې 203
دقاعدې د بدلولو فارمول 206
د لوګاریتم اقسام 207
دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول 208
د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم 209
انتي لوګاریتم 210
انترپولیشن 211
کولوګاریتم 212
د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه 213

لسم فصل

توابع 220
د تابع اقسام 221
ناطقه تابع 221
خطي تابع 221
دخطي تابع د تعریف ناحیه 222
د مستقیمې کرښې میل 224
دمیل معادله 225
محوري معادله 227
پولینومي تابعګانې 231

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع 233
د دویمه درجه تابع ګراف 233
د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم 233
د ګراف انتقال 235
هوموګرافیک تابع 248
مجانب 248
د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم 250
اکسپونتشل تابع 253
لوګاریتمي تابع 255

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد........ 257
حسابي ردیف........ 257
د حسابي ردیف فارمول........ 257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول........ 259
هندسي ردیف........ 260
د هندسي ردیف فارمول........ 260
د هندسي ردیف خصوصیات........ 262
هارمونیکي ردیف........ 263
سلسلې........ 265
حسابي سلسله........ 265
د حسابي سلسلې فارمول........ 265
د مسلسلو عددونو فارمول........ 266
دجفتو عددو فارمول........ 267
د طاق عددونو فارمول........ 267
هندسي سلسله........ 269
د هندسي سلسلې فارمول........ 269

دیارلسم فصل

د ریاضي استقراء........ 274

څوارلسم فصل

فکتوریل........ 277
د بینوم قضیه........ 279

پنځلسم فصل

لیمیټ 281
انټروال........ 281
د لیمیټ تعریف........ 288
د لیمیټ د استعمال ځایونه........ 284
د لیمیټ پیدا کول........ 285
په (∞) کې د یوی تابع لیمیټ 287

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ قضیې............ 288
ابهام............ 295
د ابهام رفع کول............ 295
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ............ 302
د تابعګانو متمادیت (اتصال)............ 305
متمادي تابع............ 305
غیر متمادي تابعګانې............ 305
د متمادیت شرطونه............ 306
د ښي لاس لیمیټ............ 307
د چپ لاس لیمیټ............ 307
د متمادي تابعګانو خواص............ 309
شپاړلسم فصل
مشتق............ 311
منحني یا وسطي تعبیر............ 312
د یوې تابع مشتق............ 313
د مشتق تعریف............ 314
د مشتق هندسي تعبیر............ 315
د مشتق قوانین............ 318
د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق............ 318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق............ 319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق............ 320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق............ 321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسیم مشتق............ 322
د جذري تابع مشتق............ 324
د مرکبې تابع مشتق............ 326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق............ 329
ضمني مشتقات............ 333
د تابع دویم ضمني مشتق............ 334
متوالي مشتقات............ 336

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه.......337
د یوې تابع بحراني ټکي.......339
د انعطاف نقطه.......340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه.......343
د انعطاف د نقطې پیدا کول.......344
د دویمه درجه تابع ګراف.......345
هوموګرافیک تابع.......348
د مجانب د ټاکلو عمومي لار.......351
د دریمه درجه یومجهوله تابع ګراف.......352
د رول قضیه.......355
د متوسط قیمت قضیه.......357
د لوهپیتال قاعده.......358
دبحراني ټکو تطبیق.......359

اولسم فصل

انتیګرال.......363
د ریمان مجموعه.......363
د انتیګرال مفهوم.......368
د انتیګرال اقسام.......368
غیرمعین انتیګرال.......368
د غیر معین انتیګرال خواص.......369
معین انتیګرال.......373
د معین انتیګرال خواص.......375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې.......382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول.......385
قسمي انتیګرالونه.......386
دلوګاریتمي او اکسپونتشل تابعګانو مشتق.......387
د اعشاري لوګاریتم مشتق.......388
د معکوسو تابعګانو مشتق.......392
د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق.......392

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه.... 394
د اکسپونشل تابعګانو انتيګرالونه.... 396
د لوګاريتمي تابعګانو انتيګرال.... 397
د منحني سطحې د مساحت پيدا کول.... 401
د کروي اجسامو د حجمو محاسبه.... 410
د انتيګرال پواسطه د کرې د حجم پيدا کول.... 411
د انتيګرال پواسطه د مخروط د حجم پيدا کول.... 411
د انتيګرال پواسطه د بيضوي د حجم پيدا کول.... 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه.... 416
تفاضلي معادلې.... 419
د ديفرينشيال ترتيب.... 420
د ديفرينشيال معادلې درجه.... 420
خطي ديفرينشيال معادلې.... 421

احصائيه

اتلسم فصل

احصائيه.... 425
د اطلاعاتو د راټولو طريقه.... 425
ټولنه او جامعه.... 426
تصادفي نمونه.... 426
تصادفي متحول او دولونه يې.... 426
دفريکونسي جدول.... 427
انځوريز ګراف يا تصويري ګراف.... 427
موډ.... 428
اوسط.... 428
د مجزا داتاګانو د کثرت جدول.... 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه.... 429
ډله ايز (تجمعي) کثرت.... 430
نسبي کثرت.... 430
ميله اي ګراف.... 431

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منکسرې کرښې ګراف...431
د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط.................................432
د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط.................................433
د داتاګانو د ګېډۍ کولو طریقه...434
وسعت..434
د ګېډۍ اوږدوالی...434
میله ئي ګراف..434
د متصلو داتاګانو دسته بندي...434
وزني اوسط یا منځنۍ قیمت...435
مستطیلي ګراف..436
دایروي ګراف..437
میانه..438
د تحول ساحه...438
د انحراف اوسط...439
د څوضلعي فریکونسي ګراف...440
د ساقې او پاڼې ګراف..441
ربعي...442
صندوقچه یي ګراف...443
ربعي انحراف..446
واریانس..446
معیاري انحراف (مطلق تیتوالی)..448
د بدلون ضریب یا نسبي پراګنده ګي....................................450
په نورمال منحني کې تیتوالی...451
د نورماله توزیع مشخصات...452
څومتحوله ټولنې...453
د پراګنده ګۍ ګراف...454
پیوستون او د پیوستون ضریب...454
د خطي مېلان معادله..456
د احتمال د تابع توزیع..459

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت 461
د پواسن داحتمال توزيع 462
د نورمال توزيع 463
نمونه اخيستل 467
د نمونې د اوسط توزيع 468

احتمالات

نوولسم فصل

احتمالات 471
چانس 471
تصادفي پېښه 471
تجربوي احتمال 471
نظري احتمال 471
نسبي كثرت او احتمال 472
په نمونه يي فضا كې برابر او نابرابر چانس 472
د يوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه 472
د احتمال قاعدې 474
ونه ايز دياګرام 475
د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده 475
د ناڅاپي پېښو اتحاد 476
د ناڅاپي پېښو تقاطع 477
د سيټونو او مډل جوړونه 478
د شمېرنې اصل 479
ترتيب (پرموټېشن) 480
تركيب 480
وريشن (تبديل) 481
د بينوم قضيه 483
د دوه جمله يي احتمال 484
متمادي او غير متمادي فضاګانې 486
هم چانسه پېښې 487

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال......488
مشروط احتمال......488
د ناڅاپه پېښنو استقلاليت......493
شلم فصل
موهومي عددونه......495
د اعدادو سيټونه......496
دموهومي عددونو څلورګوني عمليې......497
صفري مختلط عدد......498
د مختلطو عددونو څلورګونی عمليې......498
د مختلط عدد مزدوج......500
د مختلط عدد ضري معکوس......500
ديوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت......501
دمختلطو عددونود دويم جذر پيدا کول......505
يوويشتم فصل
د رياضي منطق......507
د رياضي استدلال......507
تمثيلي استدلال......507
استقرائي استدلال......507
استنتاجي استدلال......509
دحکم د نفی کولو استدلال......509
د رياضي منطق او د بيان استنتاج......510
د بيانونو ترکيب......510

(c) ketabton.com: The Digital Library

حساب

(c) ketabton.com: The Digital Library

[illegible]

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي د ېرې ځانګې لري لکه :

1- حساب
2- الجبر
3- نجوم
4- هندسه
5- مثلثات
6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنګه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايي او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايي.

$$0 \longrightarrow \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل ، خرڅول ، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک ، کيميا ، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر ، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي . لکه (1) ، 13 ، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه ، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180 ، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170 ، 532 ، 714 ، 326 ، 748 او داسې نور ،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه : 3 ، 41 ، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږی. لکه 2 ، 3، 5 ، 7 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دی. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192) ق م کی یي یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67، 71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $\frac{3}{4} = 0.75$ او $\frac{2}{5} = 0.4$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور .

چې $\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}$ کیږي او $\frac{1}{6} = 0.166\overline{6}$ کیږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- غير مختوم غير متوالي کسر: که د يوه کسر صورت په مخرج پوره تقسيم نه شي او دخارج قسمت رقمونه يې هم تکراري نه وي دی کسر ته غير مختوم غير متوالي کسر وايې لکه $\frac{13}{47}$ چې ... $\frac{13}{47} = 0.27659574468085$1 کيږي.

9- ناطق عدد: صحيح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غير ناطق عدد: غير مختوم غير متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غير ناطق عددونه دي لکه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د ليکنې سمبول ته رقم وايي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د ليکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په هغه ممالکو کې استعماليږي. مګر هغه رقمونه چې د نړۍ په زياتو ممالکو کې استعماليږي درې دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اريک رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربيک رقمو تر ليکنې د مخه رومي رقمونه زيات استعماليدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعماليږي. خو په حسابي او الجبري عمليو کې نه استعماليږي I د يو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبوليک ډول استعماليږي.

که يو رقم درې واره څنګ په څنګ وليکل شي جمع کيږي لکه II دوه دي III درې دي که X درې واره وليکل شي (30) کيږي که L درې واره وليکل شي 150 کيږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ وليکل شي که د ښي خوا عدد زيات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي کيږي IV چې څلور دي IX نه دی $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او که د چپې خوا عدد زيات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع کيږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دی $XIX = 19$ او $CX = 110$، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وایې. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وایې دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه 2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وایې .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیریږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلي دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

1- احادو طبقه
2- زرو طبقه
3- میلیون طبقه
4- میلیاردو طبقه
5- بیلیون طبقه
6- بیلیاردو طبقه
7- تریلون طبقه
8- تریلیارد طبقه
9- کوادریلیون
10- کوادریلیارد
11 - کوینتیلیون
12- کوینتیلیارد
13- سکستیلیون
14- سکستیلیارد
15- سپتیلیون
16- سپتیلیارد
17- اوکتیلیون
18- اوکتیلیارد
19- نونیلیون
20- نونیلیارد
21- د سیلیون
22- دسیلیارد

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شویدي یعنې تر تریلیارد پورې طبقي استعمال شویدي.

د عدد لوستل : عدد د ښي خوا څخه په طبقو ویشو او د چپې خوا څخه يې لولو اول د طبقي عدد لولو بیا دطبقې نوم اخلو. که طبقه یا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخیستل کیږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ویل کیږي څلورسوه اوپنځوس تریلیارده دری سوه اواوه څلویښت تریلونه اته سوه اوپنځه ویشت بیلیارده شپږسوه اویوبیلونه دوه سوه اوڅلوردېرش میلیارده څلورمیلونه اواته سوه اویو.

د عددو لیکل : عدد د چپې خوا څخه لیکل کیږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې لیکل کیږي که د کومې طبقې یا مرتبې نوم وانه خیستل شي پر ځای صفرونه لیکل کیږي لکه.

درې سوه څوارلس تریلیارده اوه تریلیونه نه ویشت بیلونه یو سل او دولس میلیارده نه څلویښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې:

1- د صحیح عددونو جمع:

جمع په لغت کې یو ځای کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وايي.

هغه عددونه چې جمع کیږي د جمع عوامل ورته وايي او هر عدد ته عامل وايي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتیجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وايي.

د جمع د عملیې طریقه :

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بیا د یویز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل یې دوه رقمي شو لمړی رقم يې لیکو او دویم رقم يې دلسیز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} +456783456 \\ 789432187 \\ \hline 1246215643 \end{array}$$

د جمع د عمليې ميزان:

1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} \underline{12349391} \\ +7894321 \\ 2578092 \\ 1876978 \\ \hline 12349391 \end{array}$$

2- د جمع ميزان په تفريق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 489785 \\ 675974 \\ \hline 1165759 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1165759 \\ 675974 \\ \hline 489785 \end{array}$$

3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو . بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 5689247 \\ 7563785 \\ \hline 13253032 \end{array}$$

1 X 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

```
+238        +451
 451         238
----        ----
 689         689
```

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيد اکوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچني عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

```
-78402138
 14987675
---------
 63414463
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

```
+30368784        −48356782
 17987998          17987998
 48356782          30368784
```

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

```
−7854321546
 1789756798
 6064564748
```

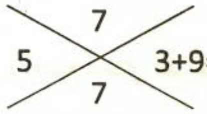
میزان

```
−7854321546
 6064564748
 1789756798
```

3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو . او منفي کوو یې او په دریم طرف کې یې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو د دریم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

```
−43756832109
 12898098734
 30858733375
```



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کي تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کي وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کي د مساوی عددونو د جمع لنډي طریقي ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کي اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کي د مضروب د ضرب په نتیجه کي چي کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عملیې طریقه:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فیه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بیا د مضروف دویم رقم د مضروب فیه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

$$\begin{array}{r} \times\ 4587 \\ 896 \\ \hline 27522 \\ 41283\ \ \\ 36696\ \ \ \ \\ \hline 4109952 \end{array}$$

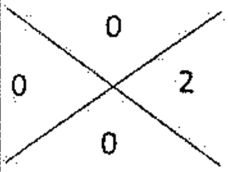
د ضرب د عملیې میزان:

1- د ضرب میزان په تقسیم:

د ضرب حاصل په مضروب فیه ویشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحیح حل شوی دی او یا د ضرب حاصل په مضورب ویشو که مضروف فیه لاس ته راغي سوال حل شوی دي.

2- د ضرب میزان په طرح نه :

مضروب فیه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مضروب فیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحیح دی.



$$\begin{array}{r} \times\ 56783 \\ 5238 \\ \hline 454264 \\ 170349\ \ \\ 113566\ \ \ \ \\ 283915\ \ \ \ \ \ \\ \hline 297429354 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

اضافی معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلي دي. موږ د شاګردان د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان و عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دويمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دريمه قاعده:

د يو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو يو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې يې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه يې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده:

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي.

د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د يويز رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفې وي.

د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويز مرتبې او دلوی عدد د لسيز مرتبې د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 47او 95 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسيم په لغت کې ويشلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه عدد څخه د مساوي عددونو دتفريقولو لنډې طريقې ته تقسيم وايي.

هغه عدد چه ويشل کيږي مقسوم بلل کيږي هغه عدد چې مقسوم پرې ويشل کيږي مقسوم عليه بلل کيږي په مقسوم عليه باندې د مقسوم د تقسيميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کيږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم عليه څخه کمه شي او په مقسوم عليه نه ويشل کيږي باقي بلل کيږي.

د تقسيم د عمليې طريقه:

د مقسوم عليه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم عليه سره يې مقايسه کوو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې حاصل يې په خارج قسمت کې ليکو په مقسوم عليه کې يې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې ليکو او منفي کوو يې. د تفريق د حاصل مخې ته د مقسوم يو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه يو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او يا د مقسوم عليه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


```
456340189 | 56342
450736    |------
          | 8099
---------
 560418
 507078
---------
  533409
  507078
---------
   26331
```

د تقسیم د عملیې میزان:

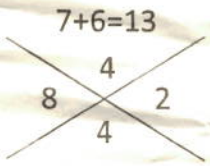
1- د تقسیم د عملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

```
                       × 56342
                          8099
                      --------
+456313858              507078
     26331             507078
----------             00000
 456340189            450736
                  -------------
                     45631385 8
```

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

893001	197
788	4534
1050	
985	
650	
591	
591	
394	
197	

893001	4532
4532	197
44980	
40788	
39214	
31724	
197	

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي. لکه:

60	8
56	7
4	

300	50
280	7
20	

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

25	2
2	12
5	
4	
1	

250	20
20	12
50	
40	
10	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر يو په يو دريم عدد ويشل کيږي مجموعه يې هم په هغه عدد ويشل کيږي خارج قسمت يې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

```
1280 | 80
 80  |----
---- | 16
 480
 480
----
 xxx
```

```
2000 | 80
 160 |----
---- | 25
 400
 400
----
 xxx
```

```
3280 | 80
 320 |----
---- | 41
  80
  80
----
 xxx
```

$$
\begin{array}{r} +1280 \\ 2000 \\ \hline 3280 \end{array}
$$

4- که د دوو عددو څخه هر يو په يو دريم عدد ويشل کيږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ويشل کيږي خارج قسمت يې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

$$
\begin{array}{r} -2000 \\ 1280 \\ \hline 720 \end{array}
$$

```
720 | 80
720 |----
----| 9
xxx
```

5- که د دوه عددو څخه يو په دريم عدد ويشل کيدلو د ضرب حاصل يې هم په هغه دريم عدد ويشل کيږي.

لکه 48 په 6 ويشل کيږي مگر 50 په 6 نه ويشل کيږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ويشل کيږي.

```
2400 | 6
 24  |----
---- | 400
  00
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دویم مجموعه 105 ده د دویم او دریم مجموعه 135 ده عددونه پیدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده یو موټر د یو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانیږي او دویم موټر د دویم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانیږي وواياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له یوه جنسه یو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخیستل د تانونو فرق 5 متره دی وواياست چې هر تان څو متره دی.

5- یو سړي دوه بوجۍ ممیز له یوه جنسه یو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ یې په $31500Rs$ واخیستل که د بوجیو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پیدا کړئ؟

6- دوه طیاري له یوه میدان څخه په یوه وخت کې پرواز کوي د یوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی یوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به یې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- یو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي یو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د یوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وایي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دې عملیې ته کسر وایي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 یا د 10 په طاقت وویشل شي دی کسر ته اعشار کسر وایي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شویدی او 3 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شویدی او 13 برخې ترې اخیستل شویدي. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شویدی او 7 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

د اعشار کسر څلور ګونې عملیې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 14524.13 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غوندې دي.

2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غوندې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو. د صحيح عددونو د ضرب په شان يې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فيه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بيلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
      4563.85
       3278.3
      1369155
     3651080
    3194695
   912770
  1369155
  14961669.455
```

ميزان يې د صحيح عددونو د ضرب د ميزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسيم:

د اعشار کسر تقسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاريه وي او په مقسوم عليه کې نه وي.

لکه

```
4587.5 | 345
       |_____
       |
```

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو کله چې اعشاريې ته ورسيږو اعشاريه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عمليې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

```
4587.5   | 345
345      | 13.297
-------
 1137
 1035
-------
 1025
  690
-------
  3350
  3105
-------
   2450
   2415
-------
     35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاریه مخ ته وړو بیا یې د اعشار کسر د تقسیم د اول حالت په څېر تقسیموو.

8452.34 | 857

ج: چې د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زیات وي لکه.

87635.3 | 0.456

د مقسوم او مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

87635300 | 456

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو.

میزان یې د صحیح عددونو د تقسیم د میزان غوندې دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غیر په نورو عددو وویشل شي دی کسر ته عام کسر وایي لکه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر یا واقعي کسر
2- واحد کسر
3- غیر واجب کسر
4- واجب کسر یا کسري عدد یا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت یې لږ مخرج یې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج یې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت يې ډېر او مخرج يې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې ديوه صحيح عدداو يوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غير واجبول:

په غير واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غير واجبول وايي.

طريقه يې داسې ده چې مخرج په صحيح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج يې ليکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غير واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غير واجب يې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحيح:

په واجب کسر باندې د غير واجب کسر بدلولو ته تصحيح وايي .

طريقه يې داسې ده چې صورت په مخرج ويشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غير واجب کسر دی واجب يې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \underline{25} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

1- غير واجب يې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ 4 – $9\frac{1}{8}$

2- تصحيح يې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقايسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه يې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج يې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه يې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت يې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقايسې لپاره کسرونه تجنيسوو.

تجنيس :

تجنيس په لغت کې هم جنس کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې که د يوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عمليې ته تجنيس وايي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقايسه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

تمرین :

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4- $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

د کسرونو اختصار :

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو.

$$\frac{\overset{4}{12}}{\underset{5}{15}}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{\overset{5}{35}}{\underset{9}{63}}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\overset{\overset{5}{20}}{120}}{\underset{\underset{6}{24}}{144}}=\frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په 12 ويشو او بيا يې په (2) ويشو.

$$\frac{\frac{120}{10}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسيم د قابليتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا جفت وي په (2) ويشل کيږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد رقمو مجموعه په 3 ويشل کيدله دا عدد په (3) ويشل کيږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه يا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ويشل کيږي. نو دا ټول په څلور ويشل کيږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا 5 وي دا عدد په 5 ويشل کيږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ويش قابليت :که يو عدد په 2 او 3 ويشل کيدلو دا عدد په (6) هم ويشل کيږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوؤ که په اخر کې صفر يا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په (7) ويشل کيږي.

لکه: 359156 په 7 ويشل کيږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ \underline{12} \\ 35903 \\ \underline{6} \\ 3584 \\ \underline{8} \\ 350 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ویشل کیږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کیږي.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کیدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کیږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کیداله نو دا عدد په 9 ویشل کیږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کیږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کیږي.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کیدلو دا عدد په 12 هم ویشل کیږي لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کیږي.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عملیې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کیږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغلی چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږی لکه (871701) اوداسې نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په په لاس راغی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

26- په 71 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ويشل کيږي نو دا ټول په 71 ويشل کيږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ويشل کيږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 79 ويشل کيږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عمليه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 83 ويشل کيږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ويش قابليت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ويشل کيږي.

لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسيم قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او يا داسې يو عدد شو چې په 97 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ويشل کيږي.

لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عام کسر څلور ګوني عملیې

1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وایې.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\;\underline{\Big)\;\frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}}$$
$$\quad 3 \quad 2$$

4- **متباين مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ \underline{120} & 24 \\ 280 & \\ \underline{240} & \\ 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ \underline{6} & 10 \\ 5 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

1- $9\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times 21}{3\times 4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

$12\frac{3}{4}\times 8\frac{7}{9}$ -1

$6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$ -2

$2\times 4\frac{3}{4}$ -3

$6\frac{1}{8}\times 7$ -4

3- د عام کسرتقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې . بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوؤ.

$19\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{8}$ -1

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

$8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$ -2

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$15\frac{4}{9} \div 3$ -3

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$ -4

تمرین:

$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$ -1

$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$ -2

$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ -3

$111 \div 1\frac{1}{2}$ -4

$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$ -5

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي

لکه:

$\frac{\frac{2}{3}}{7}$ یا $\frac{5}{\frac{3}{4}}$ ، $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وايي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرین: لاندي کسرونه ساده کړئ؟

1- $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

2- $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

3- $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

4- $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

5- $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

6- $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسرونو تبادله:

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \underline{40} & 0.8 \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & 0.16 \\ \underline{40} & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \underline{24} & 0.375 \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ xx & \end{array}$$

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاریې د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ

$$\frac{0.375}{1000} = \frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}} = \frac{3}{8}$$

(اختصار: 375 → 75 → 15 → 3 ، 1000 → 200 → 40 → 8)

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه:

1- احمد د يوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخيسته پاتې شوې برخه يې پيدا کړئ؟

2- د تيلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ ګنجايش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تيل څومره وي؟

3- د غوړيو د بيلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړيو څخه ډکه ده د ډکې برخې دريمه برخه يې $30kg$ ده د بيلر ګنجايش څو دی؟

4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ يې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ يې مالګه او اورلګيت واخيست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امين $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخيسته که غوښه کيلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخيستي دي؟

6- چاى خرڅوونکی د چايو يو پيټی چې $50kg$ چاى پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چاى عمود ته يې $3\frac{1}{4}kg$ چاى او يو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کيلو ګارم چاى واخيستی دوست چې په پيټی کې څومره چاى پاتې دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم فصل

طاقت، تجزيه او جذر

طاقت لرونکی عددونه:

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربيږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربيدو کرتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانين:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي . د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوو او د توانو څخه يو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل ليکو او د توانو څخه يو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه يې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي. یعني $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یاد مخرج څخه صورت ته ویوړل شي د توان علامه يې تغیر خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجزيه :

تجزيه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

د تجزيې طريقه:

عدد ليکو خط يې لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوو تر څو چې د عدد په ستون کې يو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزيه کړئ؟

3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

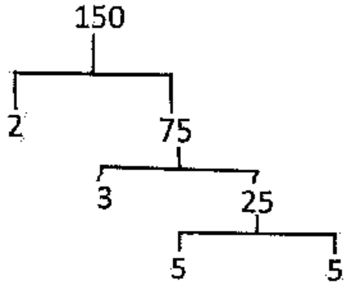
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیاګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: دڅوعددولوی مشترک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچنی مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غير مشترک پيدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوويي لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غير مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړی؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دي

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ \underline{780} & 1 \\ 300 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ \underline{600} & 2 \\ 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ \underline{180} & 1 \\ 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ \underline{120} & 1 \\ 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ \underline{120} & 2 \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوو.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کیږي د عملیې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولی، ریښه یا جرړې ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2)په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي . لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$

2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $4^3 = 64$ کیږي.

ددویم جذرپیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه 2- په عمومي طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

2	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
3	3	9
	3	3
		1

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

د يوه عدد د دريم جذر پيدا کول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئې درې،درې جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يې د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

2	2	1000
	2	500
	2	250
5	5	125
	5	25
	5	5
		1

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

2	2	1296
	2	648
	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښي خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښي خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرني عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څېر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ورڅخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکینې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

4	20 97 64	458
85	16	
805	497	
	425	
	7264	
	7264	
	xxxx	

$$\sqrt{502681} = 709$$

7	50 26 81	709
1409	49	
	12681	
	12681	
	xxxx	

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$
2- $\sqrt{318096} = ?$
3- $\sqrt{734449} = ?$
4- $\sqrt{2047.5625} = ?$
5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه   2- د اوسط په طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- په عمومي طريقه:

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلی جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	باقي 1431	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه:

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچني عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عددتقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيداکوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقريبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقريبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقريبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دويم جذر پيدا کول:

صحيح عدد يې د ښي خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشار يې د علامې څخه اوړو اعشاريه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دويم جذر پيدا کړئ؟

3	$\overset{\frown}{9}\,\overset{\frown}{03}.6036$	30.06
6006	9	
	036036	
	36036	
	xxxxx	

تمرين:

لاندې عددو تقريبي جذر په عمومي طريقه پيدا کړئ؟

4716 -1   35811 -2   7504-3   9814 -4   6763 -5

2- د لاندې عددو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کړئ؟

11 -1   13 -2   19 -3   29 -4   34-5

3- د لاندې اعشاري عدد دويم جذر پيدا کړئ؟

457.96 -1   1229.9049 -2   337444.81 -3   48830.25 -4

2605.0816 -5   64.048009 -6   2711.2849 -7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذر قوانين:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندي عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي. که وغواړو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو يې بدلووو طاقت قوانين پرې تطبيقوو اخري عدد بيرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندي عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوی وي. د طاقت د قوانينو سره سم کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$

$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسيم په حال کې وي د جذر لاندي عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي د طاقت د قوانينو په اساس کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسيم په حال کې وي د جذر لاندي عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي د طاقت د قوانينو سر سم يې تر يوه جذر لاندې ليکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندي عدد لاس ته راځي

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^{7}=\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^{7}=5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}}=5^{\frac{7}{7}}=5^{1}=5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}=\sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}=\left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{30}}=\sqrt[30]{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$　　2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$　　3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$　　5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عملیې (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه وړو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عملیې او په اخر د جمع او تفریق عملیې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچني قوسونه چې شکل یې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div2-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې یې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کوو. طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3}\times\sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5}\times\sqrt[10]{3^2}=\sqrt[10]{2^5\times3^2}=\sqrt[10]{32\times9}=\sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}}=\sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{5}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

2- $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرين:

لاندې جذري عددونه جمع او تفريق کړئ؟

1- $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

2- $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

3- $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې ګويا يې کړو. مګر مشهور په رياضي کې د مخرج ګويا کول دي د کسر د مخرج ګويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$. صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times 12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرين : ګويا يې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

د اعدادو سيستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه ليکل شويدي نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعماليږي د 10 په قاعده د اعدادو سيستم او يا اعشاري سيستم بلل کيږي.

مثلاً 5918 يو عدد راکړ شويدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه يې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځايه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې ليکو.

$$5918 = 5000 + 900 + 10 + 8$$
$$= 5\times 10^3 + 9\times 10^2 + 1\times 10^1 + 8\times 10^0$$

که ضريبونه څنګ په څنګ په ترتيب سره وليکل شي نو بيرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وويشو او باقيات د تقسيم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته وليکو. او بيا دباقياتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې وليکو چې د ستون د سر رقم يې په سر کې راشي. او نور رقمونه يې په ترتيب سره ورپسې وليکل شي بيرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوټري معايناتو کې د امراضو د تشخيص لپاره دوه نور سيستمونه هم ليکل شويدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سيستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سيستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سيستم:

که وغواړو چې يو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ويشو باقيات يې د تقسيم د عمليې په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ليکو که د باقياتو د ستون رقمونه په افقي ډول وليکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سيستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوئ؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$31_{10} = 11111_2$

يا دا چې د طاقت د قوانينو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$251 = 2 \times 125 + 1$

$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$

$251 = 2001_5$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

33-1 47 -2 65 -3

77-4 71-5 97-6

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

211-1 314 -2 97 -3

86 -4 98 -5 101 -6

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوئ.

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$
$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د يوه عدد اړول

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتيب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په 5^0 کې دريم رقم 5^1 کې .... په همدې ترتيب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوؤ د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$
$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرين:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 101111_2 2- 111011_2 3- 111111_2

4- 1010001_2 5- 100011_2

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 231_5 2- 341_5 3- 423_5 4- 143_5 5- 234_5

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پيدا کول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت يې پيدا کړو يو پر بل يې ليکو او اختصاروو يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت يې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوو.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\qquad$ $\text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپۍ} = 430$ $\qquad$ $\text{د محمود روپۍ} = 688Rs$

$\text{د محمود روپۍ} = ?$

دريمه قاده: چې د دوه کميتو نسبت او دويم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دويم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\qquad$ $\text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپۍ} = 688$ $\qquad$ $\text{احمد روپۍ} = 430Rs$

$\text{احمد روپۍ} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې يې ضرب کړو دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پيسو مجموعه 4080 ده د هر يوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\qquad$ $\text{اکرم روپۍ} = \frac{3 \times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپۍ} = ?$ $\qquad$ $\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپۍ} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپۍ $=?$

عبدالباري $=?$

عبدالهادي روپۍ $= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپۍ $= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپۍ $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپۍ $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وایي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\not{b}}\times\frac{\not{b}}{\not{c}}\times\frac{\not{c}}{\not{d}}\times\frac{\not{d}}{e}=\frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپی 300 وي د حامد روپی څو دی؟

$$\text{نسبت}=\frac{\text{د احمد روپی}}{\text{دمحمودروپی}}=\frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت}=\frac{\text{محمود روپی}}{\text{حامد روپی}}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{محمود}}\times\frac{\text{محمود}}{\text{حامد}}=\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{15}{28}$$

$\text{احمد روپی}=300Rs$ $\quad$ $\text{نسبت}=\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{15}{28}$ $\quad$ $\text{د حامد روپی}=300\div\frac{15}{28}$

$\text{حامد روپی}=?$

$\text{دحامد روپی}=300\times\frac{28}{15}=20\times 28=560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

1- يو سړي 42 منه مميز د 70 منه نخودو سره ګډوي نسبت يې پيدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- يو دکاندار دوه قسمه چاي سره ګډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د ګډ شوي چاي تفاضل 50 منه وي د چاي د هر قسم مقدار پيدا کړئ؟

4- د ميو او وريجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وريجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زياتې شي چې نسبت يې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل يې 36000 دې د هر يوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قيمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پيستې ديومن قيمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$
$$2\times 24=3\times 16$$
$$48=48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په دريو حالتو کې مطالعه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب   b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

لکه .... $\frac{5}{8}=\frac{35}{56}=\frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب   b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېرېدو د بل نسبت مربوطه حد ډېرېدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12}=\frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېریدولو او په ډېریدو سره یې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وایي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6}=\frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ځلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک وُ دی تناسب ته ځلورم تناسب وایي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8\times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وایي.

مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30\times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وایي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5\times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{900}$$

$$x = 30$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه یو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځوکې وکړي؟

3- احمد یو کار په 4 ورځو او حامد یې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به یې په شریکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شریکه یو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد یې یوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به یې په څو ورځو کې وکړي؟

5-احمد یو کار په 6 ورځو کې محمود یې په 9 ورځو کې او حامد یې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به یې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او یو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووایه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دریم تناسب پیدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پیدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او یوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او یوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د ګټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي.

يا داچه په يوه مرکبه ماده، مخلوط يا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي.

د فيصد فارمولونه دا دي.

$$\text{ګټه} = \frac{\text{سرمايه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مرکبه ماده يا مخلوط يا محلول کې د هغوي مقدار د سرمايې حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حيثيت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ګټه} \times 100}{\text{سرمايه}}$$

$$\text{سرمايه} = \frac{\text{ګټه} \times 100}{\text{نرخ}}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فيصد په نرخ پيدا کړئ؟

$$\text{ګټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو کې 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$\text{سرمايه} = 12000Rs$

$\text{ګټه} = 960Rs$

$\text{نرخ} = ?$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه $= 15000$

نرخ $= 6$

سرمایه $=?$

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = 250000$$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه $= 28000Rs$

نرخ $= 12$

سرمایه $=?$

ګټه $=?$

$$100 + 12 = 112$$

$$\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{سرمایه} = x = 250000Rs$$

$$\text{ګټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{ګټه} = 3000$$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پرېږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{تخفيف} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت –
تخفيف

فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخیستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفیف او اصلي قیمت یې پیدا کړئ؟

$\text{اصلي قيمت} = 300000$

$\text{نرخ} = 8\%$

$\text{تخفيف} = ?$

$\text{فعلي قيمت} = ?$

$$\text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$$\text{تخفيف} = 24000$$

$$\text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \qquad \text{نرخ} = 7$$

3- د یوه موټر تخفیف $80000Rs$ دی نرخ یې 8 دی اصلي قیمت یې څو دی؟

$\text{تخفيف} = 80000R_s$

$\text{نرخ} = 8$

$\text{اصلي قيمت} = ?$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000R_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهایي او یوازي والي ته وایي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شیانو د مجموعي قیمت څخه د یوه شي د قیمت پیدا کولو ته احدیت وایي.

طریقه یې داسې ده چې مجموعي قیمت د شیانو په شمېر ویشو.

$$\text{احدیت} = \frac{\text{مجموعي قیمت}}{\text{د شیانو شمېر}}$$

مثال: یو خیاط په څلور ورځو کې 28 کمیسونه وګنډل ووایاست چې په یوه ورځ کې به یې څو کمیسونه ګنډلي وي؟

ورځې	کمیسونه
$\frac{4}{1}$	$\frac{28}{x}$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په یوه ورځ کې یې 7 کمیسونه ګنډلي دي.

2- یو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کیږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کیږي خو د احدیت په طریقه داسې حلیږي اول د یو پنسل قیمت پیدا کوو بیا یې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قیمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قیمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قیمت 360 روپۍ وي د یو متر رخت قیمت څو دی او بیا د 5 مترو قیمت یې پیدا کړئ؟

$$\text{د یوه متر قیمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قیمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربحه يا ربح:

ربح په لغت کې سود يا ګټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د ګټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح 2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته ګټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$\text{ربح} = \frac{\text{سرمايه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{ربح}}{\text{موده} \times \text{سرمايه}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{ربحه}}{\text{سرمايه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمايه} = \frac{1200 \times \text{ربحه}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د 15% په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$\text{ربحه} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad \text{ربحه} = 2000Rs$$

مثال: يو سړی د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad \text{نرخ} = 15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د %15 په نرخ 2000 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad \text{موده} = 8 \text{ میاشتې}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د %15 په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایې.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

A د سرمایې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمایه ده r نرخ دی او n د کلونو شمېر دی.

C سرمایه او Cr ګټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی ګټه او سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$A = 50000(1+\frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100+5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5\times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرین:

1- د 10000 روپیو ربحه 8٪ په نرخ په 9 میاشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپیو ګټه په 6 میاشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ یې پیدا کړئ؟

3- د 20000 روپیو ګټه د اوه میاشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ یې څو دی؟

4- د 18000 او ګټه د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

5- لوی سرمایې په 8 میاشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمایه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولې ګټه او سرمایه یې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کیږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزیل} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت $300000Rs$ دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې 15٪ دي تنزیل یې څو دي؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل $3000Rs$ دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ میاشتې} = \text{موده}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د یوه سند تنزیل د 15% په نرخ چې مودې ته یې 6 میاشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قیمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د یوه سند اصلي قیمت $450000Rs$ مودې ته یې 6 میاشتې پاتې دي د 15% په نرخ یې تنزیل څو دی؟

2- د یوه سند اصلي قیمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ یې تنزیل $2250Rs$ شو مودې ته یې څومره وخت پاتې دی.

3- د یو سند اصلي قیمت $90000Rs$ دی مودې ته یې 8 میاشتې دی که تنزیل $3000Rs$ وي نرخ یې پیدا کړئ؟

4- د یوه سند تنزیل په 8 میاشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قیمت یې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په یوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان یې سره شریک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وایي.

د شراکت د ګټې تقسیم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمایې او مودې یې مساوي وي. ګټه په نفرو ویشل کیږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر یوه $500000Rs$ لري د حمل په اول یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هريوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لرې په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ 1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ 1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ 1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library -

حل:

احمد	150000	1/ حمل/	12
محمود	150000	1/ اسد/	8
حامد	150000	1/عقرب/	$\frac{5}{25}$

گټه = 500000

د هر یوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$\text{د احمد گټه} = 12 \times 20000 = 240000$$

$$\text{د محمود گټه} = 8 \times 20000 = 16000$$

$$\text{د حامد گټه} = 5 \times 20000 = 100000$$

څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سرې موده د هغه به سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلی د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وګټلې د هر يوه گټه څو ده؟

احمد	= 50000	1/حمل/
محمود	= 80000	1/ميزان/
گټه	= 216000	

د هر يوه گټه =?

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلی. په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې [illegible] روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلی د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول دسنبله ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلی په اول د ثور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلی په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

سیټ (Set):

سیټ یو انګلیسي لفظ دی چې مفهوم یې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سیټ د هغو شیانو مجموعه یا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخیص وړ وي.

سیټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کیږي لکه A ، B ، C ، M .... او داسې نور.

د سیټ نظریه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په ریاضي کې داخل او معرفي شوه.

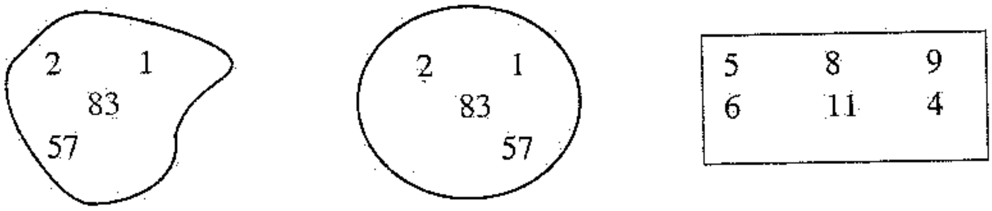
د سیټ عناصر Element of set:

په سیټ کې شاملو شیانو ته د سیټ عناصر وایي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

چې 2، 3، a او b د سیټ عناصر دي.

د سیټ نمایش:

Venn برطانوي عالم سیټ د هندسي او غیر هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسیټ دغه نمایش Venn diagram وایي.



د سیټ د لیکلو طریقې:

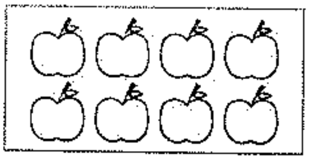
د سیټ د لیکلو طریقې څلور دي.

Picture Method -1:

پدې میتود کې د سیټ د عناصرو شکلونه رسموي دا میتود په کښته ټولګیو کې استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د E ژبې د بې اوازه تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بی اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيټ اقسام:

سيټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سيټ
2- يو عنصره سيټ
3- معين سيټ
4- غير معين سيټ

1- خالي سيټ: هغه سيټ چه عناصر نلري د خالي سيټ په نوم يادېږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سيټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کيږي.

2- يو عنصره سيټ: که کوم سيټ يو عنصر ولري دې سيټ ته يو عنصره سيټ وايي. لکه $A = \{$لمر$\}$ يا $B = \{3\}$

3- معين سيټ: هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سيټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سيټ:

هغه سيټ چې عناصرئې د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سيټ.

$$A = \{IN \text{ د طبيعي اعدادو سيټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سيټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سيټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سيټ　　2- کلي سيټ　　3- مکمله سيټ
4- طاقت لرونکي سيټ　　5- مساوي سيټونه　　6- معادل سيټونه
7- منفصل سيټونه　　8- غير منفصل سيټونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- فرعی سیټ: که د A او B دوه داسې سیټونه ولرو چې د B د سیټ هر عنصر د A په سیټ کې شامل وي نو د B سیټ د A د سیټ فرعي سیټ بلل کیږي لکه

$B = \{4,6,8,10\}$ او د $A = \{x \epsilon IR/1 < x < 12\}$

څرنګه چې د B د سیټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سیټ د A د سیټ فرعي سیټ دی او داسې لیکل کیږي. $B \subset A$

فرعي سیټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سیټ b- غیر واقعي فرعي سیټ

a- واقعي فرعي سیټ: که دیوه سیټ ټول عناصر په بل سیټ کې شامل وي او په دویم سیټ کی داسې عناصر وي چې په لمړی سیټ کې نه وي.لکه:

$B \subset A$ نو $B = \{3,4,5,6\}$ او د $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b- غیر واقعي فرعي سیټ: که دوه داسې سیټونه ولرو چې د اول سیټ ټول عناصر په دویم سیټ کې او د دویم سیټ هر عنصر په اول سیټ کې شامل وي دغه سیټونه یو دبل غیر واقعي فرعي سیټونه دي. لکه:

$B \subseteq A$ او $A \subseteq B$ نو $B = \{10,8,2,6,4\}$ او $A = \{2,4,6,8,10\}$

2- کلي سیټ: که یو سیټ څو فرعي سیټونه ولري دې سیټ ته کلي سیټ وایې لکه $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ چې $B = \{3,4\}$ او $C = \{5,6,7\}$ او د $D = \{8,9,10\}$ فرعي سیټونه دي نو د A سیټ کلي سیټ وي.

3- مکمله سیټ: که یو کلي سیټ یو واقعي سیټ ولري نو د کلي سیټ د پاتی عناصرو سیټ د فرعي سیټ مکمله سیټ دی.

مثلاً $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ او $B = \{2,3,4,5,6\}$ دوه ستونه لرو چې $B \subset A$ دی نو د B د سیټ مکمله سیټ چې په د B' ښودل کیږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سیټونه: هر کلي سیټ د خپلو فرعي سیټونو طاقت لرونکي سیټ یا $Power\ Set$ دی لکه $A = \{\Delta, \odot, \boxdot\}$ او $A_1 = \{\Delta\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\triangle,\odot\}$ ، $A_5 = \{\triangle,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\triangle,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

سټونه لرو چې A سيټ ئي کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د 2^n پواسطه بيدا کيږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$n = 4$ $\quad\quad P(B) = 2^n$

$P(B) = ?$ $\quad\quad P(B) = 2^4 = 16$

$P(B) = 16$

5- مساوي سيټونه: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د B په سيټ کې او د B دسيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي . نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايې.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

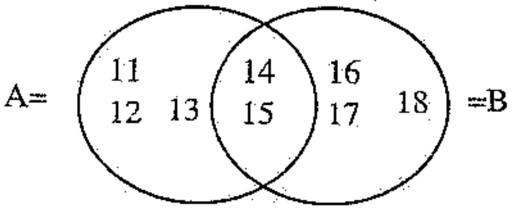
7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايې.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سيټونه غير منفصل دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد   2- د سیټونو تقاطع   3- د سیټونو تفاضل

1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$
$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او
$B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$
$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$
$$A - B = \{1,2,3\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخيستل شويدی چې جبر د مات هډوکي تړلو ته وايي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسايلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقيقي اعدادو سيټ دی چې په IR سره ښودل کيږي.

د حقيقي اعدادو سيټ IR :

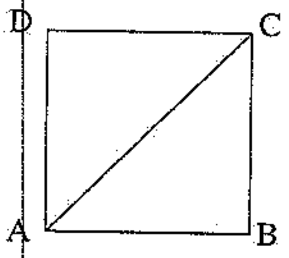
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سيټ ته د حقيقي اعدادو سيټ وايي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

يا دا چې د ناطق او غير ناطق عددونو سيټ ته د حقيقي عددونو سيټ وايي که ناطق عدد په Q او غير ناطق په Q' وښيو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحيح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په يوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غير ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پيدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوې چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پيدا کولو لپاره د هندسي طريقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ يوه مربع چې هره ضلع يې يو واحد ده داسې رسموو چې يو راس يې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دې که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پيدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نيسو او د $\overline{AC}=\sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او يوه دايره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتيب کولای شو چې دغير ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پيدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غير ناطق عدد نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصوواو قوس وهو د XX' د محور سره يې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه ليکل کيږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه يو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر 19− او 19+ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعماليږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړيږي.

لکه $4x-5$ ، $7x^2+6x+7=0$ ، $y=3x-4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانين بشپړ شويدي زيادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنيک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم يې قوانين او فارمولونه د پريږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسيم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفريق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترينوم وايي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه

$$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادي.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولينوم دهر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$$a_5 = 7 \quad , a_4 = -12 \quad , \quad a_3 = 13 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , a_1 = -2 \quad , \quad a_0 = 15$$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7 + 8x^4 - 8x^2 + 20x^3 - 7x$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتنې پولينوم کامل پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه پکې موجود نه وي لکه .

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف یې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل ولیکل شي توانونه یې کسري کیږي.

د مونوم درجه: د یو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دریمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله یا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ یو $3+2=5$ درجه مونوم دی.

د پولینوم درجه: Degree of a Polynome د پولینوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولینوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2+5x^2y^3+8x^3y^4$ چې اومه درجه پولینوم دی. $8x^3+5x^2-4x+2$ یو دریمه درجه پولینوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې یې مساوي وي. لکه $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

که په یوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قیمت د هغه حد د توان څخه پیدا کوو چې توان یې معلوم وي.

لکه $x^3+x^my+x^ny^2+y^3$

حل:

$m+1=3$	$m=3-1$	$m=2$
$n+2=3$	$n=3-2$	$n=1$

د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عددونه جمع کیږي او علامه یې شریکه علامه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلف العلامه عددونه یو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ورکوو. او د جمعې عمليه پرې اجراء کوؤ.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په يوه جدول کې مطالعه کوو.

$+\times+=+$ $-\times-=+$	د عين علامو د ضرب حاصل مثبت دی.
$+\times-=-$ $-\times+=-$	او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.

د $+=-\times-$ ثبوت:

اول د $+=-\times-$ ثبوت په عدد:

$$5\times 8=40$$

$$(6-1)(9-1)=40$$

$$54-6-9 \boxdot 1=40$$

$$54-15 \boxdot 1=40$$

$$39 \boxdot 1=40$$

که په خالي خانه کې + علامه وليکل شي د مساوات دواړه خواوې مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1)=+1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم د + =− × − ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$

$$-a(-b + b) = x - ab$$

$$-a(0) = x - ab$$

$$0 = x - ab$$

$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوؤ.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې + =− × − کیږي.

د − =− × + ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$

$$(+3)(+3) = 9$$

$$(+3)(+2) = 6$$

$$(+3)(+1) = 3$$

$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$

$$(+3)(-1) = -3$$

$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې − =− × +

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$

$$(-8)(-9) = 72$$

$$(-5)(+3) = -5$$

$$(+4)(-7) = -28$$

−13	+3	−9	+8
− 5	−4	+3	+7
+65	−12	−27	+56

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ويشو لمړی د علامو خارج قسمت په يوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$$\frac{+}{+}=+ \qquad \frac{-}{-}=+ \qquad \frac{+}{-}=- \qquad \frac{-}{+}=-$$

$$\frac{+18}{+3}=+6 \qquad \frac{-15}{-5}=+3 \qquad \frac{+12}{-6}=-2 \qquad \frac{-10}{+2}=-5$$

د پولينومونو څلور ګونې عمليې

1- د پولينومونو جمع:

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې مشابه حدونه يو تر بل لاندې راشي بيا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه يې شريکه علامه ليکو او مختلف العلامه مشابه حدونه يو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد ليکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3+8x^2-11x+8 \\ \underline{11x^3+9x^2+15x-3} \\ 18x^3+17x^2+4x+5 \end{array}$$

2- د پولينومونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې مشابه حدونه يو د بل لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ور کوؤ او د جمع عمليه پرې تطبيقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4-15x^3+8x^2-20x+\ \ 8 \\ \underline{\pm35x^4\pm9x^3\pm11x^2\pm\ \ 9x\mp16} \\ -22x^4-24x^3\ \ -3x^2-29x+24 \end{array}$$

3- د پولينومونو ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو بيا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولينومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\ 7x^2 - 8x + 9 \\ \hline 21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \qquad\qquad \\ - 24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \qquad \\ 27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\ \hline 21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63 \end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوې برخې ته باقي وایي.

مثال:

$$\begin{array}{l|l} 72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\ \cline{2-2} \pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\ \cline{1-1} \qquad 32x^4 - 12x^3 + 9x^2 & \\ \quad \pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad -40x^3 + 21x^2 + 64x & \\ \qquad\quad \mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad 56x^2 + 49x - 21 & \\ \qquad\qquad\quad \pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونود تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم عليه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم عليه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R وښيونو ليکو چې:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقيمانده دعوه يا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښياست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولينوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x+2$ جذر پيدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولينوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولينوم جذر دی او $x+2$ د پولينوم فکتور دی.

$P(-2) = 3(-\ 2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$

$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$

$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$

$P(-2) = -28 + 28$

$P(-2) = 0$

$R = 0$

$x+2$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: هغه افاده پیدا کړئ چه په $x-1$ باندی وویشل شي باقي ئي (-3) شي او که په $x+2$ باندې وویشل شي باقي ئي -9 شي.

$p(x) = ax + b$

$p(1) = a.1 + b = -3$

$p(-2) = a(-2) + b = -9$

$a + b = -3$
$\mp 2a \pm = \mp 9$

$3a = 6$

$3a = 6 \Rightarrow a = 2$

$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$

$b = -5$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرین:

1- جمع یې کړئ؟

a- $11x^3 - 11x^2 + 7x - 9$
$8x^3 + 16x^2 - 11x + 13$
$9x^3 - 4x^2 + x - 2$

b- $3x^2 - 4x + 16$
$7x^2 - 20x + 8$
$5x^2 + 3x - 11$

2- تفریق کړئ؟

a- $8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15$
$7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20$

b- $11x^3 - 13x^2 + 20x - 8$
$5x^3 + 15x^2 + 8x + 11$

3- ضرب یې کړئ؟

a- $4x^3 - 8x^2 + 5x - 2$
$7x^2 - 8x + 6$

b- $2x^2 - 4x + 7$
$3x^2 + 7x - 8$

c- $6x^3 + 2x^2 - 4x + 7$
$3x^3 - 8x^2 + 6x - 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تقسيم يې کړئ؟

$$a-\quad \frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6}$$

$$b-\quad \frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11}$$

$$c-\quad \frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3}$$

$$d-\quad \frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37}$$

ترکيبي تقسيم *Synthetic Division*

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضريبو د پيدا کولو لپاره د مقسوم ضريبونه ټول په يوه وار استعماليږي.

طريقه يې داسې ده چه د مقسوم ضريبونه په يوه افقي کرښه کې ليکود کرښې په اخر کې په يوه کنج کې د قيمت ليکوبيا يوی کرښی ته ځای پريږدو او يو خط کشوو د مقسوم د پولينوم د اول حد ضريب بې له کوم تغيره راکښته کوو. د x په قيمت کې يې ضربوو د دويم حد دضريب لاندې يې ليکو او ورسره جمع کوو يې. د جمع حاصل د x په قيمت کې ضربوو. په همدې ترتيب تر اخره اجراات کوو. د خط لاندې اخرني عدد د R قيمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضريبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجې څخه يوه کمه ده.

که R=0 وي نو x-a د مقسوم دپولينوم فکتور دی. او د قيمت د پولينوم جذر دی.

مثال:-د ترکيبي تقسيم پواسطه وښياست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولينوم فکتور دی.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او (2) د پولينوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي. نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یي حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي يي (-24) شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي يي (-6) شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یي حل کړئ؟

$$a:\ \frac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$$

$$b:\ \frac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$$

$$c:\ \frac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$$

$$d:\ \frac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو برابری ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمه دی.

1- مطابقت 2- شرطیه مساوات یا معادله

1- مطابقت :

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قیمتو باندې یې دواړه خواوې مساوي وي.

د اساتیا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې یې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضریب یو دی د دویم حد ضریب n دی د نورو حدو د ضریبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکیني حد ضریب د a په توان کې ضربوو د مخکینو حدو په شمېر یې ویشو.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$
$$(a+b)^8=a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$$
$$(a+b)^9=?$$
$$(a+b)^{10}=?$$
$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+n(n-1)a^{n-2}b^2+\dots\dots+nab^{n-1}+b^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول ګروپ د مطابقتو په څیر دي. صرف داول ګروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دویم ګروب د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دریم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|

|

|

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = \left(a + b - \sqrt{2ab}\right)\left(a + b + \sqrt{2ab}\right)$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$$

$$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$$

شپږم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري دري لمړي حدونه يې مربعګاني دي دري وروستي حدونه يې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دي.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$
$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$
$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$
$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$
$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزيه يې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$
$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$
$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرين:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$	2- $(2x + 7y)^3$	3- $(4x + 5y)^4$
4- $(4x - 5y)^5$	5- $(3x - 7y)^4$	6- $(2x - 3y)^6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3$ -9 $\quad 8m^3 - 125n^3$ -8 $\quad 7x^2 - 9y^2$ -7

$\frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3$ -12 $\quad 64m^3 + 1000n^3$ -11 $\quad 8x^3 + 27y^3$ -10

$\frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4$ -15 $\quad 16x^4 + 256y^4$ -14 $\quad 4x^2 + y^2$ -13

$(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z)^2$ -18 $\quad (3x + 2y - 5z)^2$ -17 $\quad (2x + 3y + 5z)^2$ -16

تجزيه:

تجزيه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوې افادې د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

1- د مشترک نيولو پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد يا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسو د قوس د باندې يې ليکو بيا د افادې هر حد په دې مشترک ويشو د قوس په داخل کې يې ليکو افاده تجزيه کيږي.

1: $3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$

2: $5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2)$

3: $4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9)$

4: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3)$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right)$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

2: $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)$

3: $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

2: $216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$

$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

3: $\frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$

ترينوم:

دري حده افادې ته ترينوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترينوم تجزيه:

د ترينوم تجزيه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترينوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترينوم د دغه شکل د تجزيې لپاره داسې دوه عدده پيدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$
$$(x + m)(x + n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$

$x^2 + 5x + 6x + 30$

$x(x + 5) + 6(x + 5)$

$(x + 5)(x + 6)$

2- مثال:

$x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 5x + 6x + 30$

$x(x - 5) - 6(x - 5)$

$(x - 5)(x - 6)$

نوټ: که په ترينوم کې د (c)علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعماليږي هم علامه دي بيا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$

$x^2 + 12x + 3x + 36$

$x(x + 12) + 3(x + 12)$

$(x + 12)(x + 3)$

2: $x^2 - 13x + 40$

$x^2 - 8x - 5x + 40$

$x(x - 8) - 5(x - 8)$

$(x - 8)(x - 5)$

2- که په ترينوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعماليږي مختلف العلامه دي بيا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$

$x^2 - 6x + 11x - 66$

$x(x - 6) + 11(x - 6)$

$(x - 6)(x + 11)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$

$x^2 - 11x + 6x - 66$

$x(x - 11) + 6(x - 11)$

$(x - 11)(x + 6)$

تمرین:

1- $x^2 + 15x + 44$ 2- $x^2 + 19x + 70$ 3- $x^2 + 29x + 180$

4- $x^2 - 16x + 55$ 5- $x^2 - 21x + 90$ 6- $x^2 - 13x + 36$

7- $x^2 + 6x - 135$ 8- $x^2 + 11x - 210$ 9- $x^2 + 31x - 630$

10- $x^2 - 7x - 170$ 11- $x^2 - 9x - 400$ 12- $x^2 - 25x - 186$

2- حالت چې $a \neq 1$ وي

د ترینوم د دغه حالت د تجزیې لپاره داسې دوه عددونه پیدا کوو چې دضرب حاصل یې ac او د جمع حاصل یې b شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
   $ac = 3(10) = 30$
   $b = 11$
   $3x^2 + 6x + 5x + 10$
   $3x(x + 2) + 5(x + 2)$
   $(x + 2)(3x + 5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
   $ac = 5(12) = 60$
   $b = -19$
   $5x^2 - 15x - 4x + 12$
   $5x(x - 3) - 4(x - 3)$
   $(x - 3)(5x - 4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
   $ac = 7(-34) = -238$
   $7x^2 - 14x \qquad x - 34$
   $7x(x - 2) + 17(x - 2)$
   $(x - 2)(7x + 17)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x-3) + 10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرین:

لاندي ترينومونه حل کړئ؟

$5x^2 + 11x + 2$ -1	$7x^2 + 24x + 9$ -2	$3x^2 + 31x + 80$ -3
$7x^2 - 19x + 10$ -4	$5x^2 - 22x + 21$ -5	$2x^2 - 17x + 35$ -6
$3x^2 + 2x - 33$-7	$4x^2 + 7x - 57$-8	$7x^2 + 3x - 34$-9
$5x^2 - 10x - 54$-10	$7x^2 - 11x - 30$-11	$8x^2 - 23x - 85$-12

د ګروپ بندۍ پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې حدونه تر درې حدو زيات وه او په ټولو حدو کې يو کوم حرف يا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ويشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نيسو تر مشترک نيولو وروسته بايد قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نيسو افاده په قوسو تجزيه کيږي.

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x+5) + 3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

د تجزيې د استعمال ځايونه:

تجزيه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پيدا کولو لپاره استعماليږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوي افادې تقسيم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ويشل کيږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچني مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچني مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچني مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x}\ ,\qquad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}\ ,\ \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$\

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ

$$1:\quad \frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3:\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$
$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیې بیا یې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $\frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$
$=\frac{x^2+x}{x+5}$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

1: $\frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$

2: $\frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

1: $\frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$

$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$

$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$

2: $\frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$

$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$

$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$

تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$ 2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$ 　　 4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$ 　　 6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ 　　 2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$ 　　 3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$ 　　 2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$ 　　 4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$ 　　 2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$ 　　 4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

د کسرونو ګویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې يو جذري حل موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د ګويا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه يې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$

$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$

$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2)څخه زياتې وي.

لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيي دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيي دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}} = \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$= \frac{(x+3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{x+3}$$

$$= \sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرين:

د لاندې کسرو مخرجونه ګويا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$
2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$
3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$
4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$
5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$
6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$
7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$
8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$
9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$
10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$
12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$
14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$
15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه يو واقعي کسر جوړ شي. دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ يو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه يې قسمي کسرونه دي.

د يوه واقعي کسر د قسمي کسرو پيدا کول:

د قسمي کسرو د پيدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرج تجزيه کوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښيي.د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پيدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري بينومونه وي هر بينوم د يوه کسر مخرج دی صورت يې د الفباء په غټو حروفو ښيو عمليې پرې اجراء کوو د حروفو قيمتونه پيدا کوو د هغوي په عوض يې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه يې مساوي دی نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د A او B د قيمتو د پيدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قيمتونه پيدا کوو نو د هر قوس جذر پيدا کوو.

$x+7=0$

$x=-7$

-7 د x په عوض وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$8(-7) + 51 = A(-7+7) + B(-7+6)$

$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$

$-5 = 0 - B$

$-B = -5 \qquad B = 5$

$x + 6 = 0 \qquad x = -6$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوؤ.

$8(-6) + 51 = A(-6+7) + B(-6+6)$

$-48 + 51 = A(1) + B(0)$

$3 = A \qquad A = 3$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عينيت پواسطه:

$8x + 51 = A(x+7) + B(x+6)$

$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$

$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$

$8x + 51 = (A+B)x + 7A + 6B$

په عينيت کې د مشابه حدو ضريبونه مساوي وي.

$$\begin{aligned} A + B &= 8 \\ 7A + 6B &= 51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7A + 7B &= 56 \\ -7A \pm 6B &= \pm 51 \\ \hline B &= 5 \end{aligned}$$

$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$

$A = 3$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بينومونه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$

$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

$$A+B=5$$

$$2A+B+C=12$$

$$A=2$$

$$A+B=5\rightarrow 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$

$$B=3$$

$$2A+B+C=12$$

$$2\times 2+3+C=12$$

$$4+3+C=12$$

$$7+C=12$$

$$C=12-7$$

$$C=5$$

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو:

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times 2+B=7\Rightarrow 6+B=7\Rightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times 2+3\times 1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times 1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوي مساوي وي
لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوي مساوي دي
دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وايي.

د معادلې اقسام:

معادله ډېر قسمونه لري.

1- یو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپوننیشل معادلې
10- لوګاریتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.
عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چه a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی ځرنګه چې د x توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عين عدد جمع شي په معادله کې تغير نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عين عدد منفي شي په معادله کې تغير نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوي په عين عدد کې ضرب شي په معادله کې تغير نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوي په عين عدد تقسيم شي په معادله کې تغير نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوي په عين توان رفع شي په معادلې کې تغير نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوي تر عين جذر لاندې شي په معادله کې تغير نه راځي.

د يو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طريقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښي خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د يوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کيږي که مثبت وي منفي کيږي که منفي وي مثبت کيږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربيږي.

مثال:

1: $x+5=8$ $\quad x=8-5$ $\quad x=3$

2: $x-7=11$ $\quad x=11+7$ $\quad x=18$

3: $3x=36$ $\quad \frac{3x}{3}=\frac{36}{3}$ $\quad x=12$

4: $\frac{x}{5}=4$ $\quad 5\times\frac{x}{5}=4\times 5$ $\quad x=20$

5: $\frac{5}{x}-3=-2$ $\quad \frac{5}{x}=-2+3$ $\quad \frac{5}{x}=\frac{1}{1}$ $\quad x=5$

6: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2}{x}=36$

$$\frac{3+7+2}{x}=36$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{12}{x} = 36$ $\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$ $36x = 12$

$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$ $x = \frac{1}{3}$

جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

د جذري معادلو دحل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوې خواته پرېږدو نور جذري او غېرجذري حدونه د مساوات بلې خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي .که بيا هم په معادله کې جذر موجود ؤ عمليه تکراروو .

1- مثال:

$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$

$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$

$\sqrt{5x-4} = 6$

$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$

$5x - 4 = 36$

$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$

$x = 8$

2- مثال:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$

$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$

$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x+6}$$

$$\frac{2x+108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x+6}$$

$$(x+54)^2 = \left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x+6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\acute{\Delta} = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196-190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+4} = -1 \quad \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x+4} - 1$$

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+4} - 1\right)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1$$

$$2\sqrt{3x+4} = 6$$

$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2 = 6^2$$

$$4(3x+4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرین

لاندی جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$
2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$
4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$
5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$
6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$
7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $\sqrt{x}+5=6-\sqrt{x+7}$ $\quad x=9$

10. $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$ $\quad x=\frac{5}{3}$

تمرين:

1. $\frac{5-x}{4}+\frac{x}{8}=1$
2. $\frac{2}{x}-3=\frac{3}{x}-8$
3. $\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x-3}=6$
4. $\frac{x}{2}-\frac{2x-8}{5}+\frac{4}{5}=3$
5. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}+x-4=4$
6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم فصل

دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان یې یو وي عمومي شکل یې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a_1 ، a_2 ، b_2 ، b_2 ، c_1 او c_2 ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي ځرنګه چې د هر مجهول توان یو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم زیات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سیستم یو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طریقو حلیږي.

1- د جمع یا افناء په طریقه:

په دواړو معادلو کې د یوه مجهول ضریبونه مساوي کوو. که هم علامه ود معادلې یو د بل ځخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتیب د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قیمت یې پیدا کوو بیا دا جذر د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د دویم مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$

$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$

$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$

$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$

$$6x - 10y = 4$$
$$20x + 10y = 100$$

$$26x = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{cases}$

4- $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{cases}$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$3x - 11y = 10$$
$$4x + 2y = 30$$
$$x = \frac{11y + 10}{3}$$
$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$
$$44y + 40 + 6y = 90$$
$$50y = 50$$
$$y = 1$$
$$3x - 11y = 10$$
$$3x - 11 \times 1 = 10$$
$$3x - 11 = 10$$
$$3x = 10 + 11$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{array}{l} 3x + 13y = 25 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}$

2- $\begin{array}{l} 6x - 5y = 20 \\ 7x + 3y = 41 \end{array}$

3- $\begin{array}{l} 11x + 5y = 53 \\ 8x - 9y = -12 \end{array}$

4- $\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{array}$

3- د مساوات په طریقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د يو مجهول قيمت د بل مجهول له جنسه پيدا کوو او سره مساوي کوو يې د دوه مجهوله معادلو سيستم په اوله درجه يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو د مجهول قيمت يې پيدا کوو د مجهول دغه قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$\begin{array}{l} 3x + 7y = 19 \\ 5x - 2y = 18 \end{array}$$

$$3x + 7y = 19$$
$$3x = 19 - 7y$$
$$x = \frac{19 - 7y}{3} \dots\dots I$$

$$5x - 2y = 18$$
$$5x = 18 + 2y$$
$$x = \frac{18 + 2y}{5} \dots\dots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي نو ليکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$
$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$
$$54 + 6y = 95 - 35y$$
$$6y + 35y = -54 + 95$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad , \quad x = 4$$

تمرین:

-1 $\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{cases}$ -2 $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases}$

-3 $\begin{cases} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{cases}$ -4 $\begin{cases} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{cases}$

4-د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب ته د یترمینانت وایي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل:

د x او y د ضریبو دیترمینانت په D ښیو او قیمت یې پیدا کوو . د x د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_x یې ښیو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیتر مینانت د y د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې نیسو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{cases}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1b_2 - a_2b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په (　　) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس($Matrixes$):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وايي ترتیب ته متریکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو خروفو ښودل کیږي او هغه اعداد یا حروف چې په متریکس کې لیکل کیږي د متریکس د عناصرو په نوم یادیږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول لیکل شوی وي د متریکس د سطر په نوم یادیږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول لیکل شوی وي د متریکس د ستن په نوم یادیږي د سطرونو شمیر په i او د ستونونو شمیر په j ښیئ چې i او j طبیعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

1- $(a_{ij})_{2\times2} = (i+j)_{2\times2}$ 　　 2- $(a_{ij})_{3\times2} = (i+j)_{3\times2}$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i+j$ 　　 $a_{12} = 1+2 = 3$ 　　 $a_{21} = 2+1 = 3$

$a_{11} = 1+1 = 2$

$a_{22} = 2+2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times1}$

3- صفري متریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري ، چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته (*Minor diagonal*) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22} \dots\dots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \dots\dots\dots a_{12}$ ، a_{21} فرعي قطر دی.

لاندې متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. 3×1 او 1×4

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه په غير نور عناصر يې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متريکس دی.

په انګلیسي کې ورته $Upper\ Tringolar\ matrix$ او $Lower\ Tringolar\ matrix$ وايي.

متقابل یا متضاد متريکس:

هغه متريکسونه چې عناصر یې یو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} . \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي یعنې که a_{ij} او b_{ij} دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوول متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفريق:

په تفريق کې هم د متريکس د تفريقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شویدي $A - B$ متریکس پیدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې یې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو KA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي KA پیدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمېر د بل متریکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1(-1) \\ -1 \times 1 + 0 \times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 1 \\ -1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عمیله د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي یعني:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د متريكسونو ضرب د توزيعي خاصيت پيروي كوي.

$$A(B+C) = AB + Ac$$

د يوه متريكس ترانسپوز متريكس:

كه د يوه متريكس سطر په ستون او ستون يې په سطر بدل شي نوی متريكس ته ترانسپوز متريكس وايي.

كه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متريكس وايي په A^T ښودل كيږي.

كه $A = A^T$ وي نو پدې صورت كې A ته متناظر متريكس وايي.

لكه $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ يو متناظر متريكس دی ځكه $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

د ترانسپوز متريكس خواص:

1- ترانسپوز متريكس د خپل لمړني متريكس سره مساوی وي.

$$(A^T)^T = A = \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه يا څو ترانسپوز متريكسو د جمع او تفريق حاصلونه د لمړنيو متريكسو د جمع د حاصلو او تفريق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots)^T = A^T + B^T + C \ldots\ldots\ldots$$

3- $(AB)^T = A^T \times B^T$

4- $(\alpha A)^T = \alpha \times A^T$

5- $(-A)^T = -A^T$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیترمینانت

مربعي متریکس ته دیترمینانت وایي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متریکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ یو دیترمینانت دي او په $|A|$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وایي.

د دیترمینانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_{1b_2} - a_2b_1$

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلیږي.

1- دساروس په طریقه 2- دکرامر په طریقه

1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړواو پاتې 2× 2 مرتبې دیترمینانت محاسبه کوواو دتقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم ستون او دريم سطر د منځه ورو. اودتقاطع په عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ ديترمينانت حل کړئ

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دويم- د کرامر په طريقه:

د ديترمينانت دوه لمړي ستونونه د ديترمينانت د باندي ليکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرو مجموعه منفي کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت یې صفر دي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د متریکس دیترمینانت د A^T دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی

د 2×2 مرتبې متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نودی متریکس ته *Singular Matrix* وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وايي.

هغه متریکسونه چې معکوس لري .

1- چې متریکسونه مربعي وي یعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لیدل کیږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي متریکس Adjoin of Matrix

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وايي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي طریقه یې داسې ده چې دالحاقي متریکس د دیترمینانت دقیمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ويلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$\underline{a_2x + b_2y = c_2}$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضریبو متریکس په A ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B ښيي. اود x او y متریکس په X ښیو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې ددوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1$ & $y = 2$

تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طريقه د افقاً طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله،پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

دویمه درجه یومجهوله معادلی

هغه معادلی دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دادي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې b, a او c ثابت عددونه دي (x) مجهول دي څرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلی دواړه جذرونه صفردي یعنی :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نیسو اومعادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کوواو د معادلی جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسی معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادي چې a او c باید مختلف العلامه وي .اوکه نه نو د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سیټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلی حل کړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلی په څلورو طریقو حلیږي.

1- د تجزیې پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلوحلول

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیي پواسطه دیو مجهوله دویمه درجه معادلوحل:

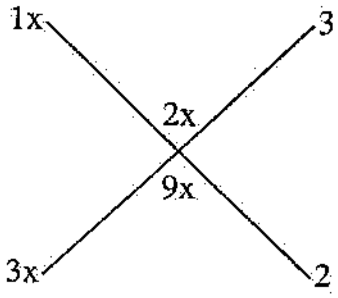
(a) او (c) تجزیه کوو د ضربي عواملو څخه یي داسې یوه یوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یي (b) شي بیا دغه ضربي عوامل په چارت کې لیکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیي پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$

$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$

$$b = 11$$



$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_{1=-3}$$

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یي حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلو حل:

لمړي د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داسانتیا لپاره b^2-4ac په Δ ښيو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب دری حالته موجود دي .

1- چې $\Delta>0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه يې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پيدا کيږي.

2- چې $\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري اوجذر يې د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پيدا کيږي.

3- چې $\Delta<0$ وي معادله دحقيقي اعدادو په سيټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندي معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$
$$\Delta=169+672=841$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7}=\frac{13+29}{14}=\frac{42}{14}=3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7}=\frac{13-29}{14}=\frac{-16}{14}=-\frac{8}{7}$$

$$x_{1=3} \qquad x_2=-\frac{8}{7}$$

مثال: لاندي معادله حل کړئ؟

$$9x^2+30x+25=0$$

حل:

$$\Delta= b^2-4ac=30^2-4\times 9\times 25=900-900=0$$

$$\Delta= 0$$

معادله یوجذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=-\frac{30}{2\times 9}=-\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2+3x+10=0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta= b^2-4ac=3^2-4\times 2\times 10=9-80=-71$$

څرنګه چې $0>\Delta$ دي نو معادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلې د تجزيې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2+5x-42=0$ 2: $7x^2-29x+4=0$ 3: $2x^2+3x-14=0$

لاندې معادلې دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2-17x-48=0$ 2: $13x^2+7x-360=0$ 3: $8x^2-65x+102=0$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2+3x-65=0$ 2: $9x^2-43x+48=0$

3: $25x^2-11x-192=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-ac$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعني:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم دری حالته موجود دي.

1- که $\acute{\Delta}>0$ وي معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $\acute{\Delta}=0$ وي معادله یو جذر لري، او جذر یې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $\acute{\Delta}<0$ وي معادله جذر نه لري.

مثال:- $3x^2+14x-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12x+9=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta} = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta} = -19$$

$$\acute{\Delta} < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسی فارمولونه ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1.x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2-\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

4: د $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه، د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

دجذرو له مخی د یو مجهوله دویمه درجه معادلی جوړول

که د یوی معادلی جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله یې پیدا کړو نو جذرونه د معادلی د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلی د جوړولو فارمولونه دوه دي-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال:- د یوی معادلی جذرونه په ترتیب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله یې پیدا کړئ

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

تمرين

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په يوه جدول مطالعه کوو

که $S>0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S<0$ وي دواړه جذرونه منفي دي	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S>0$ وي لوی جذر مثبت دي	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S<0$ وي لوی جذر منفي دي	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري
که $S>0$ وي لوی جذر مثبت دي		$\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري
که $S<0$ وي لوی جذر منفي دي		$\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري
	معادله جذر نه لري	$\Delta<0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر يې منفي دی.

د ديکارت قاعده

ديکارت ددويمه درجه معادلو د علامو تغير ته تحول وايي.

ديکارت وايي:

1- که دويمه درجه معادلو دعلامو دوه تحوله لرل دمعادلې دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول يو ؤ د معادلې يو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه يې منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه يې مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ يو جذر يې مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه يې منفي دي.

دهغه معادلو حلول چې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي:

شپږ قسمه معادلې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- دريمه درجه معادلې:

هغه دريمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري.دداسې معادلود حل لپاره x مشترک نيسو.اومعادله د دوه فکټورو په حاصل ضرب بدلوو.هر فکټورد صفر سره مساوي کووډمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.طريقه يې داسې ده چې x^2 په y شيوڅلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه به يې مثبت او دوه به يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلې يو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو به يې مثبت اوبل به يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : x^2 په y ښيو نو $x^4 = y^2$ کيږي

$3y^2 - 7y - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$

$\Delta = 289$

$\Delta > 0$

معادله دوه جذره لري يوجذر يې مثبت او بل يې منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$

$x^2 = y = y_1 = 4$

$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

تمرين

لاندې معادلې حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$ 2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$

3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$ 4- $13x^2 + x - 14 = 0$

5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ 6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

3- جذري معادلې :

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادلو بدليدلای شي طريقه يې داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دويمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دويمه درجه معادله بدله کړئ او حل يې کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ ښيو نو $x = y^2$ کيږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$
$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$
$$\acute{\Delta} = 100$$
$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$
$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي اود يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$5y^2 + 3y - 26 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$
$\Delta = 529$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$
$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \quad y_1 = 2$$
$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \quad y_2 = -2\frac{3}{5}$$
$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$
$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ:

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي:

هغه معادلې چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په y او $x^{\frac{m}{n}}$ په y^2 بنيو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول يا په کومه بله طريقه حلوو قيمتونه يې پيداکوو د y

د قيمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قيمت پيداکوو دمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلې جذرونه پيدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنيو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کيږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$

$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \&\ x_1 = 27$$

$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$

$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرين:

لاندې معادلې دويمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1: د (A)او (B) ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کیلومتره ده یو موټر سهار په اوه بجې په یوسرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د $(x+15)$ کیلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په یو وخت کې د (B)ښار ته ورسیدل د هر یوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$
$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$
$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times 1\times(-6750)=225+27000=27225$$
$$\Delta=27225$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times 1}=\frac{-15\pm 165}{2}$$
$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$
$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د یوه قایم الزاویه مثلث ضلعی په ترتیب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعی پیدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$
$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدی څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدی څخه دری متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل یي اوه مترمربع دی ذهر یوه مساحته قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$

$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x}{2}=7 \Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

ارتفاع د کوچني مثلث $x+1=8$

ارتفاع د لوی مثلث $x+3=10$

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دری متره زیات دی که مساحت یي (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی یي پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$

$$x^2+3x-88=0$$

$$\Delta = x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$

$$\Delta = 361$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- يو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په يوه سرعت روان شو بله ورځ يي په خپل سرعت کی دوه متره زيادت راوست نيم ساعت مخکی ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm 9=8$$

اولنی سرعت $x=8$

اخرنی سرعت $x+2=10$

7- د يوې دايرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يې څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1- د یوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زیاته ده مساحت یې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع یې پیدا کړئ؟

2- د یوه مستطیل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زیات دی مساحت یې $(24cm^2)$ دی سور او طول یې پیدا کړئ؟

3- دیوې دایرې مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع یې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده یو موټروان په یوه سرعت سره دا فاصله طی کوي دبېرته راتګ په وخت کې $5m$ په خپل سرعت کې تغییر راولي یو ساعت مخکې رارسېږي دتګ او راتګ سرعت یې پیدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه یوه روپۍ زیاته لري که د پیسو د ضرب حاصل یې (840) وي دهر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

6- یو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نیم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته یې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟

7- د یوې دایرې مساحت د هغې تر محیط (5) واره زیات دې ضلعه یې پیدا کړئ؟

8- د یوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پیدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي دیوه ارتفاع دقاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زیاته ده که مساحتونه یې جمع شي $(76cm^2)$ کیږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعګانې پیدا کړئ؟

11- احمد دمحمود دری چنده کار کوي که دواړه په شریکه یو کار په (3) ورځو کې وکړي ووایاست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

12- که د یوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کیږي عدد پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

13- که د يوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يې کټلي وي وواياست چه څو ورځي کار يي کړئ دئ؟

14- د يوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پيدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پيسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يي (609) ده د هر يوه پيسي څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زياتي او د محمود روپۍ (5)کمی شي د يوی ورځی د اجوری د ضرب حاصل يي (2475) روپۍ کيږي د هر يوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګيا دي احمد خپل کار تر محمود دری ورځی د مخه خلاصوي که په شريکه يي په دوه ورځو کی وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

18- د مربع مساحت ($125316cm^2$)دی ضلعه يي پيدا کړئ؟

19- د يوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زياته ده که مساحت يي ($675cm^2$) وي قاعده او ارتفاع به يي څو وي؟

20- يو موټر سهار په اته بجی حرکت کوي بل موټر يوساعت وروسته (10)کيلو متر سرعت په زيادت وريسی روان شوکه دواړه په يوه وخت کی مطلوب ته رسيږي که وهل شوی فاصله (900) کيلو متره وي د هريوه سرعت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

غیرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو نه برابری ته غیرمساوات وایي.

د غیر مساوات علامه دا (>) یا دا (<) ده هره افاده چې ددی علامی مخی ته لیکل شوی وي لویه ده تر هغه افادی چې د علامی شاته لیکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

د غیرمساوات خواص:

1- که د غیرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غیرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غیرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که د غیرمساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوې منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوې خوا عدد مثبت او د بلې خوا عدد منفي وي دلته دري حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات
2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات
3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- يومجهوله اوله درجه غير مساوات:

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې يوه وي عمومي شکل يې دا $ax + b \geq 0$. يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

ديومجهوله غيرمساوات د حل طريقه:

معلوم دغيرمساوات ښي خواته او مجهول د غيرمساوات چپې خواته ورولازمي عمليې پرې اجراء کوو په اخر کې د غيرمساوات دواړه خواوې د x په ضريب ويشو د غيرمساوات دحل سيټ لاس ته راځي.

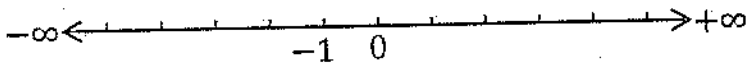
مثال: لاندې غيرمساوات حل کړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سيټ يې عبارت دی له:

$$A = \{x/-1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کيږي.



تمرين:

لاندې غيرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وايي.د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت يي مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ ليکل کيږي. لکه $|-15|$ يا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې ليکل کيږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لويه او بيايي دعدد د متناظرڅخه کوچنی فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

دبینوم داشاری څېړل

د بینوم عمومي شکل $(ax + b)$ دې د بینوم داشاری د څېړلو لپاره (a) مشترک نیسو د قوس د باندی يي ليکو د بینوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داخل کی يي ليکو.دقوس جذر پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي .

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

$$-\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$			$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$	
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$-$	0	$+$	

دبینوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

$$-\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$			$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$	
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$+$	0	$-$	

د بینوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $(3x-6)$ اشاره وڅېړئ؟

حل: $3x-6=0 \quad \Rightarrow 3(x-2) \quad \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$3(x-2)$	$-$	0	$+$

دجذر څخه کېښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وڅېړئ ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$-5(x-3)$	$+$	0	$-$

دجذر څخه کېښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وڅېړئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

د هغه افادو د اشارو څېړل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو اوضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4-x)(x+4)$ اشاره وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$4-x=0 \quad \Rightarrow -x=-4 \quad \Rightarrow x=4$

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$	-4		$+4$	$+\infty$
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$(4-x)(x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

دجذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرين:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

1- $(2x-12)(3-x)$ 2- $(3-x)(x+7)$

3- $(-4x+12)(x+8)$ 3- $(-6x-18)(x+5)$

دکسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوواو يو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

$2x-6=0$

$2x=6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \quad \Rightarrow x=3$

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{2x-6}$	$+$	0	$-$	0	$+$

دجذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وټاکئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$ 2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$ 4: $\frac{-x-1}{1-2x}+3$

دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي.دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دی

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)>0$	د حل سیټ		د حل سیټ ندی		د حل سیټ

تمرین:

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

1: $(x-8)(2-x)<0$ 2: $(3x-6)(12-x)>0$

3: $(x-1)(1-x)\leq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دهغه غیرمساوات دحل د سیټ پیدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشاري پیدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ویشود کسر اشاري لاس ته راځي. دغه اشاري د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو د غیر مساوات د حل سیټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}<0$	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ		د حل سیټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غیرمساواتو دحل سیټ پیدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$ 2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتوصدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندې غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	$-$		$-$	0	$+$
$5x + 20 < 0$	$-$	0	$+$		$+$
	د حل سیټ				

تمرین:

په لاندې ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مجهوله غیرمساوات

هغه غیرمساوات دی چې مجهولونه یي دوه او د هر مجهول درجه یي یوه وي عمومي شکل یي دا $ax + by \geq c$ یا دا $ax + by \leq c$ دي

د دغه رنګه غیرمساوات دحل د سیټ د لاس ته راوړلو لپاره دغیرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یي په غیرمساوات کی صدق کوي او بله برخه یي نه کوي دغه برخه یي کرښې، کرښی کوو بله برخه یي دغیر مساوات د حل سیټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیرمساوات حل کړئ.

حل: غیرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف یي رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

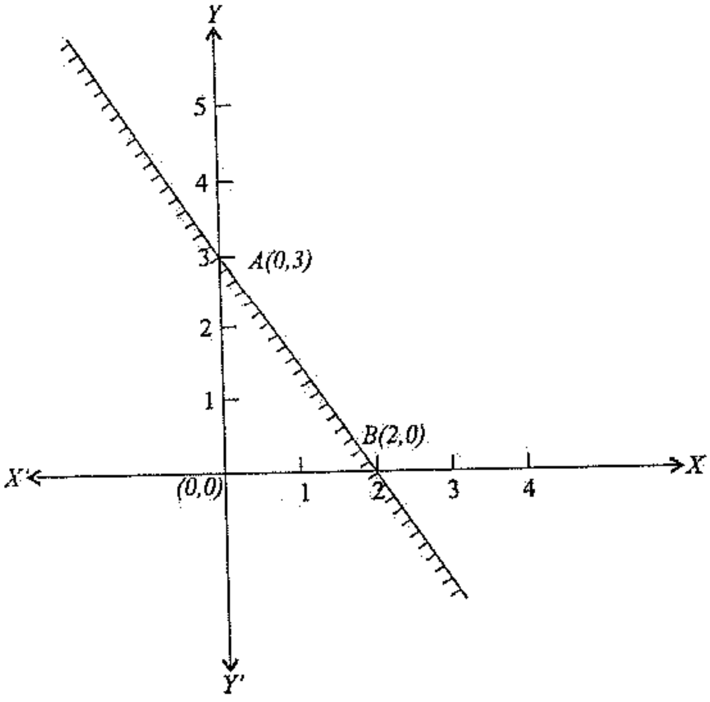
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کی دوه غیرمساواتونه د غیرمساوات سیستم وایي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرېنه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کی صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دوارو غیرمساواتو کی صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \qquad \Rightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

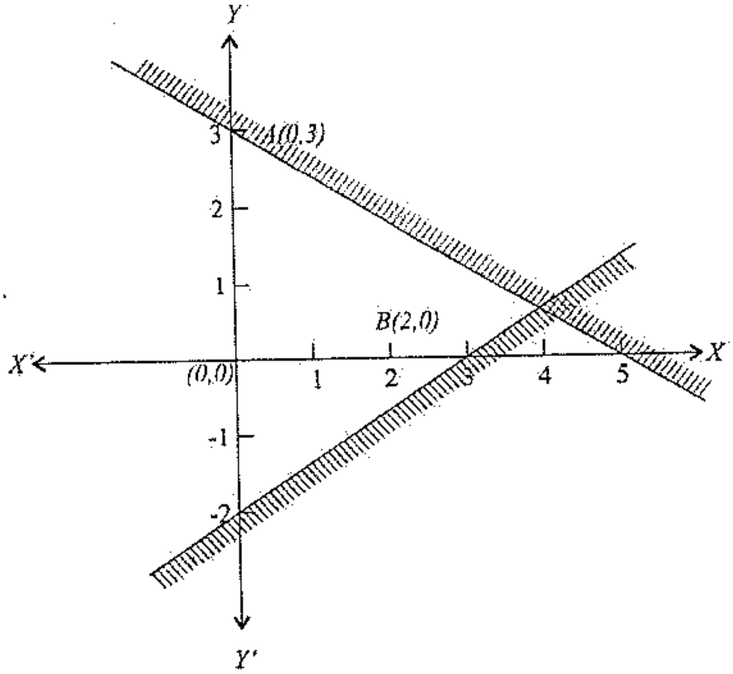
$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که دری دوه مجهوله غیرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسیم په وخت کی مثلث لاس ته راځي د څلور غیرمساواتونوڅخه څلور ضلعي په همدی ترتیب د دوه مجهوله غیرمساواتونو شمیر دمضلعګانو دضلعو شمیر رابنیئ.

یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات

هغه غیرمساوات دي چې مجهول یي یو او د مجهول درجه یي دوه وي عمومي شکل یي دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیرمساوات د حل څخه مطلب د هغه سیټ پیدا کول دي چې په غیرمساوات کی وضع شي اوپه غیرمساوات کی صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويمه درجه غېرمساوات د حل طريقه

که د غېرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غېر مساوات چپې خواته وړو او لازمې عمليې پرې اجراء کوو او د ترينوم شکل ته يې راوړو او تجزيه کوو يې. د هر قوس جذر پيدا کوو د حل سيټ يې په دوه طريقو پيدا کيږي.

1- د جدول په طريقه　　　2- د سيټ بلډر په طريقه

1- د جدول په طريقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپې خواته او لوی جذر ښی خواته ليکو که د (a) علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي اوپورته مثبت ده او که د (a) علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دويمه درجه غېرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ.

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$

$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$

$$3x(x-2) + 19(x-2) < 0$$

$$(x-2)(3x+19) < 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 19 = 0 \quad \Rightarrow 3x = -19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$ … $-\frac{19}{3}$	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{19}{3}$ … 2	2	2 … $+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+19$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(3x+19)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x-2)(3x+19) < 0$	د حل سيټ نه دی		د حل سيټ		د حل سيټ نه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

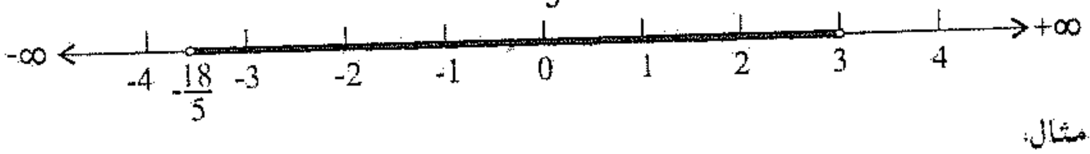
2- د سیټ بلډر په طریقه د دویمه درجه غیرمساوات حلول:

تر تجزیه کولو وروسته د غیرمساوات علامې ته ګورو که د غیرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي یو وار دواړه مثبت اوبل وار دواړه منفي فرضوو او که د غیرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره یو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2 + 3x - 54 < 0$

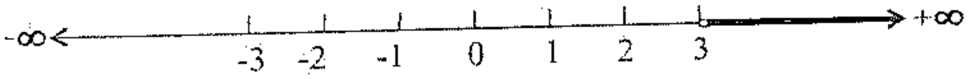
حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$
$$5x(x-3) + 18(x-3) < 0$$
$$(x-3)(5x+18) < 0$$
$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$
$$5x + 18 > 0 \Rightarrow 5x > -18 \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$
$$A = \{x \,/ -\frac{18}{5} < x < 3\}$$



مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$
$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$
$$3x(x-3) - 4(x-3) > 0$$
$$(x-3)(3x-4) > 0$$
$$x - 3 > 0 \qquad \Rightarrow x > 3$$
$$3x - 4 > 0 \qquad \Rightarrow 3x > 4$$
$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$
$$A = \{x \in I\mathcal{R} \,/\, x > 3\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

لاندې دویمه درجه غیرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غېرمشخص مقدار ته وايي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غېر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وايي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلیدله حلوو يې.

مګر ښه او اسانه طریقه يې د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$$

$$\Delta=m^2+24m^2+40m+16$$

$$\Delta=25m^2+40m+16$$

$$\Delta=(5m+4)^2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرين:

لاندې پارامتريک معادلو جذرونه د m له جنسه پيدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$2: (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$

$3: (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$

$4: x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

$5: x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

2- د پارامتر د قيمت له مخې د مجهول د قيمت پيدا کول:

د يوه شرط له مخې د پارامتر قيمت پيدا کوو اوپه معادله کې يې وضع کوي يومجهوله دويمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو دمعادلې د اصلي مجهول قيمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلې دجذرو دضرب حاصل (-15) معادله حل کړئ ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta}=16$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{16}}{1}=\frac{1\pm 4}{1}$$

$$x_1=\frac{1+4}{1}=\frac{5}{1}=5 \qquad \Rightarrow x_1=5$$

$$x_2=\frac{1-4}{1}=\frac{-3}{1}=-3 \qquad \Rightarrow x_2=-3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2-3mx+9m-1=0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}}=\frac{-b}{+c}=\frac{-(-3m)}{9m-1}=\frac{+3m}{9m-1}=\frac{12}{35}$$

$$108m-12=105m$$

$$108m-105m=12$$

$$3m=12$$

$$\frac{3m}{3}=\frac{12}{3} \quad \Rightarrow m=4$$

$$(m-3)x^2-3mx+9n-1=0$$

$$(4-3)x^2-3\times 4x+9\times 4-1=0$$

$$x^2-12x+35=0$$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=(-6)^2-1(35)=36-35=1$$

$$\acute{\Delta}=1$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{1}}{1}=6\pm 1$$

$$x_1=6+1=7 \quad \Rightarrow x_1=7$$

$$x_2=6-1=5 \quad \Rightarrow x_2=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلې جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کې صدق کوي د معادلې جذرونه پيدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times 2+1)x+5\times 2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 1\times 10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times 1}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \;\Rightarrow\; x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \;\Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- مثال: د $(m-4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1$$
$$(m-4)64 - 8m - 5m + 1 = 0$$
$$64m - 256 - 13m + 1 = 0$$
$$51m - 255 = 0$$
$$51m = 255 \quad \Rightarrow m = 5$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندې $(m-2)x^2 - (m-3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\} = 0$$
$$m - 3 = 0 \quad \Rightarrow m = 3$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2 - (2m+1)x + 2m - 4 = 0$ څخه داسې پیدا کړئ چه د معادلې یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کیږي چه $c = 0$ شي

$$-(2m+1) = 0$$
$$2m - 4 = 0 \ \Rightarrow 2m = 4 \quad \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$m = 2$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2 - (7m+2)x + 6m + 1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta = 0$ شي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \{-(7m+2)\}^2 - 4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4$$
$$\Delta = m^2 - 4m$$
$$\Delta = 0 \quad \therefore \ m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$
$$m_1 = 0$$
$$m - 4 = 0 \quad \Rightarrow m = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- مثال: د $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ په (m) کومو قیمتو باندی معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندی $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندی $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقیقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3m-10)^2 > 0$$
$$3m-10 > 0$$
$$3m > 10 \quad \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$
$$A = \{m \in IR \,/\, m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b \;\&\; c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Delta = \{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta = m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta = 25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta = (5m-5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m-5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m-5>0 \Rightarrow 5m>+5 \Rightarrow m>1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5) \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1 = \frac{m-5+5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2 = \frac{m-5-5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان يي مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي يعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزایده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښې خواته وړو. لازمی عملیي پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی يي سره مساوي وي. نو توانونه يي هم مساويدي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم یا بینوم وي نو يو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يي پيدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې يي مساوي دي نو توانونه يي هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$
$$3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کې دوه یا څو حده وي قاعدی يې مساوي اود يوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلې په دويمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلې حلوو اود جذرو له مخې يې د اکسپوننشل معادلې جذرونه پيدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$
$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$
$$(y - 27)(y + 26) = 0$$
$$y_1 = 27$$
$$x_2 = -26$$
$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننشل معادلې دومېن همېشه مثبت وي نود (y_2) د قيمت څخه دمعادلې جذرنه پيدا کيږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کې دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه يې جذري حدونه وي دغه ډول معادلې هم په دويمه درجه يو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR/x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپونشل معادلې راکړ شوې وي چه چپ طرف یې د دوه داسې طاقت لرونکو عددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي، دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{2x+3y} = 2^{15}$$

$$x + y = 4$$
$$2x + 3y = 15$$

$$2(x + y = 4)$$
$$2x + 2y = 8$$
$$\pm 2x \pm 3y = \pm 15$$
$$-y = -7$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

تمرین

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{array}{l} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{array}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{array}{l} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{array}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوگاریتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوگاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وايي.

او په اصطلاح کی داکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوگارتمي معادله وايي.

فرضاً ($b = a^x$) یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله يي لوگاریتمي معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي.

$$log_a b = x$$

a ته د $log\, b$ قاعده وايي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوگاریتمي تابع او لوگاریتمي تابع په اکسپوننشل تابع بدله کړو.لکه ($x = 2^3$) یوه اکسپوننشل تابع ده لوگاریتمي تابع يي عبارت له ($log_2 x = 3$) څخه ده.

اوهمدا ډول ($log_2 8 = x$) یوه لوگاریتمي تابع ده اکسپوننشل تابع يي عبارت له ($8 = 2^x$) څخه ده.

د لوگاریتم خواص:

1- د (1) لوگاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوگاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $\begin{pmatrix} log_b b =.1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه ($b = b^1$) کیږي.

مثال:

$$log_8 8 = 1 \qquad\qquad log_x x = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^r = b^r$$

4- د يوه حاصل ضرب لوګاريتم په يوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاريتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپونشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاريتم نيسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: ?= $log_2(2x)$ لوګاريتم پيدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندي لوګاريتم پيدا کړئ؟

$$log_x(xy) = ?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د يوه خارج قسمت لوګاريتم په يوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاريتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپونشل معادلی طرف په طرف يو پر بل ويشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a\frac{M}{N}=x-y=log_a M-log_a N$$

1- مثال: لاندې لوګاریتم حل کړئ؟

$$log_2\frac{x}{2}=?$$

$$log_2\frac{x}{2}=log_2 x-log_2 2=log_2 x-1$$

2- مثال:

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=log_x x+log_x 5-log_x y$$

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=1+log_x 5-log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم یې عبارت دې توان ضرب یې د هغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r=r\,log_b M$$
$$log_b M=x$$
$$M=b^x$$
$$M^r=(b^x)^r\Longrightarrow M^r=b^{rx}$$
$$log_b M^r=rx$$
$$log_b M^r=r\,log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7=?$$
$$log_3 81^7=7\,log_3 81=7\,log_3 3^4=4\times 7\,log_3 3=28\times 1=28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5=?$$
$$log_3(3x)^5=5\,log_3(3x)=5(log_3 3+log_3 x)$$
$$=5(1+log_3 x)=5+5\,log_3 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- ديوه عدد لوګاريتم د يوه طاقت لرونكي عدد په قاعده باندې عبارت دي د قاعدې د توان معكوس ضرب يي دهغه عدد لوګاريتم د قاعدې دقاعدې په قاعده.

$$log_{a^b} M = \frac{1}{b} log_a m$$
$$x = log_{a^b} M$$
$$(a^b)^x = M$$
$$(a^x)^b = M \qquad \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$
$$x = log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} log_a M$$
$$log_{a^b} M = \frac{1}{b} log_a M$$

مثال:

$$log_{16} 32 = ?$$
$$log_{16} 32 = log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} log_2 32$$
$$= \frac{1}{4} log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4} log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$
$$log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدې د بدلولو فارمول:

كه د يوه عدد لوګاريتم په يو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندې د راكړ شوي عدد د لوګاريتم پيدا كول مشكل وي نو د راكړشوي عدد او د لوګاريتم د قاعدې لوګاريتم په يوه بله قاعده باندې پيدا كوو د عدد لوګاريتم د لوګاريتم د قاعدې په لوګاريتم ويشو د راكړ شوي عدد لوګاريتم په را كړشوی قاعده باندې لاس ته راځي.

مثلاً $log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاريتم يي د لاندې فارمول پواسطه پيدا كيږي.

$$log_b M = \frac{log_a M}{log_a b}$$

ثبوت: $log_b M$ په x ښيو.

$$log_b M = x \qquad \Rightarrow M = b^x$$
$$log_a M = log_a b^x = x\, log_a b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$

$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$

$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$

$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وايي.

$\log x$

2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده یي (e) وي.

څرنګه چه د دوارو قسمو قاعدی معلومی دي نو قاعده یي نه لیکل کیږي.

$\ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديوه عدد د لوګاريتم پيداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوګاريتم دوه برخې لري.يوه برخه يې صحيح او بله برخه يې اعشاري ده .صحيح برخې ته کرکترستيک ($Characteristic$) او اعشاري برخې ته يې مانتيس ($Mantesa$) وايي .کرکترستيک د محاسبې پواسطه او مانتيس د جدول او يا د حساب د ماشين پواسطه پيدا کيږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي يوازې کرکترستيک لري او مانتيس نه لري

1- مثال : ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکترستيک د ارقامو د شمېر څخه يو کم وي.

2- مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکترستيک يې د اعشاريې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه يې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه ؤ نو دغه عدد مانتيس او کرکترستيک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوګاريتم د پيدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه يو رقم يې صحيح او نور رقمونه يې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته ګورو عدد اوه رقمي دی نو په ($10^6 = 1000000$) کې يې ضربوو په دی ترتيب کولای شو چه کرکترستيک يې پيدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستيک دی.مانتيس يې د ($log\,4.56$) څخه لاس ته راوړو.طريقه يې داسې ده چه (6) د دری رقمي عددو د لوګاريتمي دجدول په پورتنی. کرښه کې پيدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پيداکوو او د مخکيني ليکل شوي عدد شاته يې ليکو بيا کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ نو د کرکترستيک په اندازه د جدول څخه د پيدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکترستيک منفي ؤ د پيدا شوي عدد شاته د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس يي مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر يي بدلوو او د مخکیني سوال په څېر يي حلوو

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او دمانتیس څخه يي منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً ($\log 1000 = 3$) دی او 1000 د $anti\log 3 = 1000$ دی.

انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کی پيدا کووهغه عدد چه د مانتيس په ستون کی ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی ليکو کرکترستيک ته ګوروکه مثبت ؤ کرکترستيک د عدد د ارقامو دشمېر څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$antilog(2.3690) = ?$$
$$anti\,log(0.3690) = 2.338837239$$
$$anti\,log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$anti\,log\,\bar{6}.3710 = ?$$
$$anti\,log\,0.3710 = 2.35$$
$$anti\,log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $anti\,log(3.4581)$

2- $anti\,log(\bar{2}.6589)$

3- $anti\,log(-4.2907)$

4- $anti\,log(0.7551 - 4)$

د لوګ (log) اولن (ln) پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$log_b M = \frac{log_a M}{log_a b}$$
$$log_b M \cdot log_a b = log_a M$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$log_e M \cdot log_{10} e = log_{10} M$$
$$ln M \cdot log 2.72 = log M$$
$$ln M \cdot 0.4343 = log M$$

مثال: $(ln 6.73 = 1.9066)$ دی $(log 6.73)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$log M = ln M \cdot 0.4343$$
$$log 6.73 = ln 6.73 \cdot 0.4343$$
$$log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$log 6.73 = 0.8280$$

د log څخه د ln د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343} log M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$ln M = 2.3026 \cdot log M$$

مثال:

$$ln 563 = ?$$
$$ln 563 = log 563 \cdot 2.3026$$
$$ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انټرپولېشن $Interpolation$:

انټرپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انټرپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویي اومانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسوعددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- log 4567 پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix} log\,4.57 & 0.6599 \\ log\,4.567 & m \\ log\,4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

دانټر پولېشن پواسطه د انټي لوګاريتم پيدا کول:

د انټي لوګاريتم د پيدا کولو لپاره مانټيس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانټيس انټي لوګاريتم په يوه حرف ښيو د مانټيس څخه لاندې باندې مانټيسونه په جدول کې پيدا کوو په نتيجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه يو به يې مجهول وي پيا د دوه،، دوه هم جنسو عددو تفاضل پيدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدليږي. چه يو به يې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پيدا کوو اود کوچني عدد د انټي لوګاريتم سره يې جمع کوو د راکړشوي لوګاريتم انټي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- ديوه عدد لوګاريتم (3.7351) دی انټي لوګ يې پيدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$
$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

کولوګاريتم $Cologarthm$:

د يوه عدد د معکوس لوګاريتم ته د هغه عدد کولوګاريتم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً (a) او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاریتم د (a) د کولوګاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\,log\,a = log\frac{1}{a} = log\,1 - log\,a = 0 - log\,a = -log\,a$$
$$co\,log\,a = -log\,a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوګاریتم دهغه عدد منفي لوګاریتم دی.

د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوګاریتمي معادلو په حلولو کې د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$log_a(x+6) - log_a(x+2) = log_a x$$
$$log_a\frac{x+6}{x+2} = log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1\pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\,log\,x} = 10x$$
$$log\,x^{2\,log\,x} = log\,10x$$
$$2log\,x \times log\,x = log\,10x \Longrightarrow 2\,log^2 x = log\,10 + log\,x$$
$$2\,log^2 x - log\,x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\,x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10}\,x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10}\,x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10}\,x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\,log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Longrightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10}\sqrt{x+1} + \log_{10}\sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$
$$Log\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad \Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \qquad \Longrightarrow x - 1 = 2\ ,\ \ x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow \log^2{}_{10}\, x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- مثال:

$$log_3(x+1) - log_3(x-1) = 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$

$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \quad \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$log_4(3x-3) = log_2 3$$

$$log_{2^2}(3x-3) = log_2 3$$

$$\frac{1}{2} log_2(3x-3) = log_2 3$$

$$log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = log_2 3$$

$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$

$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = log_2 4$$

$$log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = log_2 2^2 \Rightarrow log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2\, log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$

$$log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$

$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$log\sqrt{x} + log\, x^{\frac{3}{2}} = log\, 100$$

$$log\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = log\, 100 \Rightarrow log\sqrt{x \cdot x^3} = log\, 100$$

$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$log_{(x^2-x+4)}(x^2 + 5x - 1) = 1$$

$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \quad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$

$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17- مثال:

$$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$$

$$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$$

$$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2))^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$$log_3 log_2(x-1) = 2$$

$$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$$

$$= 513 \Longrightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$$

$$log_{10} x = log_{10} 12$$

$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{log_4 16} = 27^x$$

$$3^{log_4 16} = 3^{3x}$$

$$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $\ln(y+1) = \ln(y-7) + \ln 4$

5) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین،

6) $log_2 x + log_3 x = 1$

7) $log_3 x + log_5 x = log_{10} 15$

8) $log^2{}_2(x-1)^2 - log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} log_3 x + log_3 y = -3 \\ log_{10} x^3 - log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} log_4 x - log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

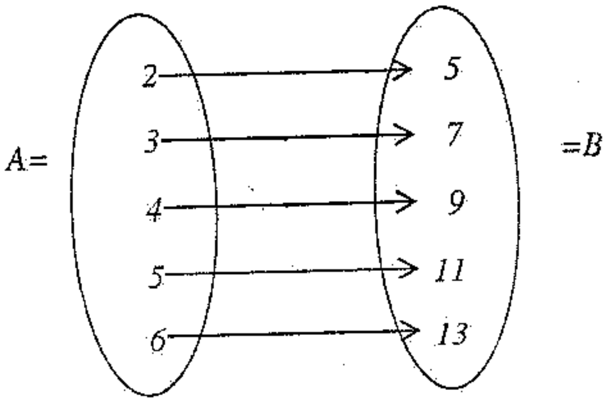
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) دسیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن $(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج $(Range)$ او کوډومېن $(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتني سیټونه .

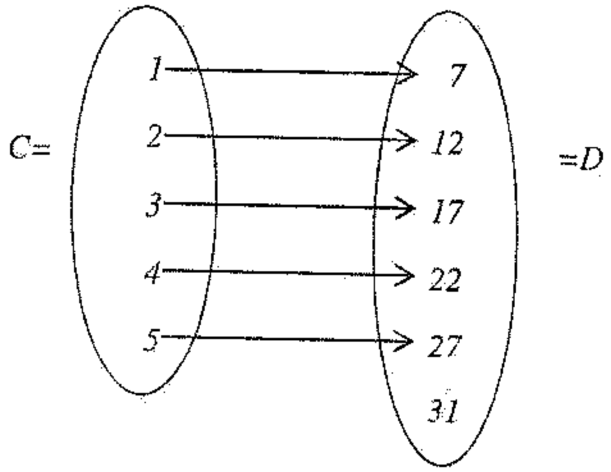
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومین په نوم یادیږي.

$$C = (1,2,3,4,5)$$

$$D = (7,12,17,22,27,31)$$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومین تر منځ لاندې رابطه موجوده ده.

$$Range \subseteq Codomain$$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع   2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانی ناطقی تابعګانی دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یي مستقیم خط وي. عمومي شکل یي دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یو شی دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (IR) سره يي ښيي يعني:

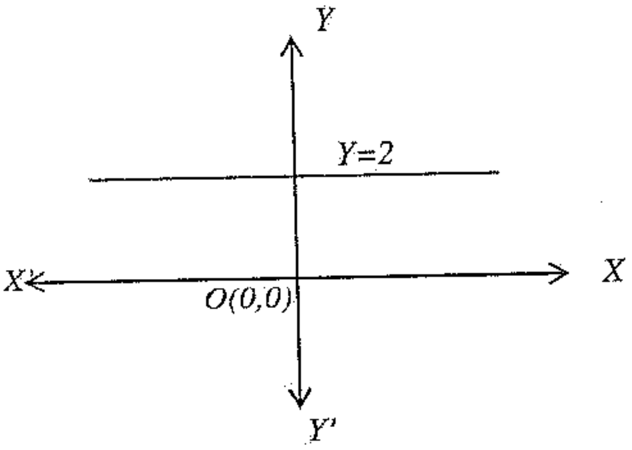
$$IR = (-\infty , +\infty)$$

د خطي تابع مېل د (x) ضريب يعنی (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- كه په يوه تابع كې $m = 0$ تابع لاندې شكل غوره كوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم كړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شكل غوره كوي.

$$y = mx + b \Rightarrow 1.x + 0 = x$$

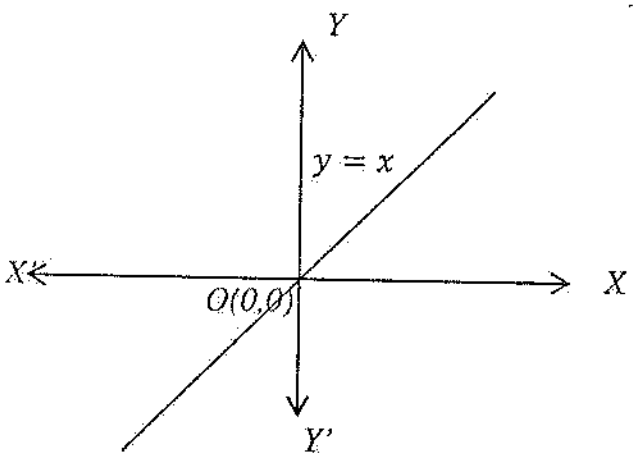
$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي كوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم كړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دخطي تابع د عمومي شکل د ګراف ترسیم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پیدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کیږي نود (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

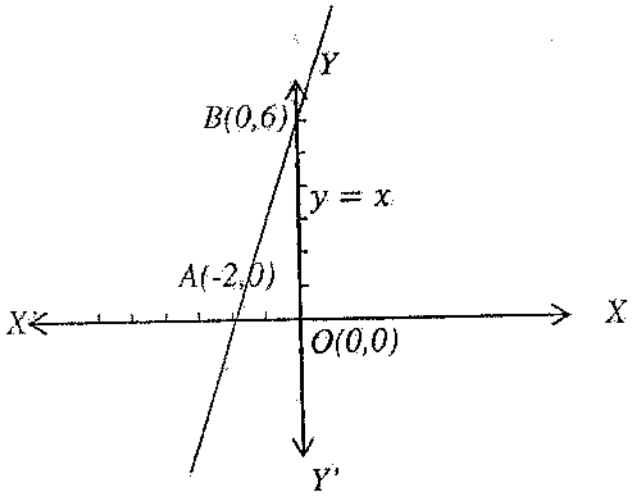
$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعیه کمیتونو د محورونو په مستوي کې یې د وضعیه کمیتونو د محورونو پر مخ یې پیدا کوو او و صلوو یې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



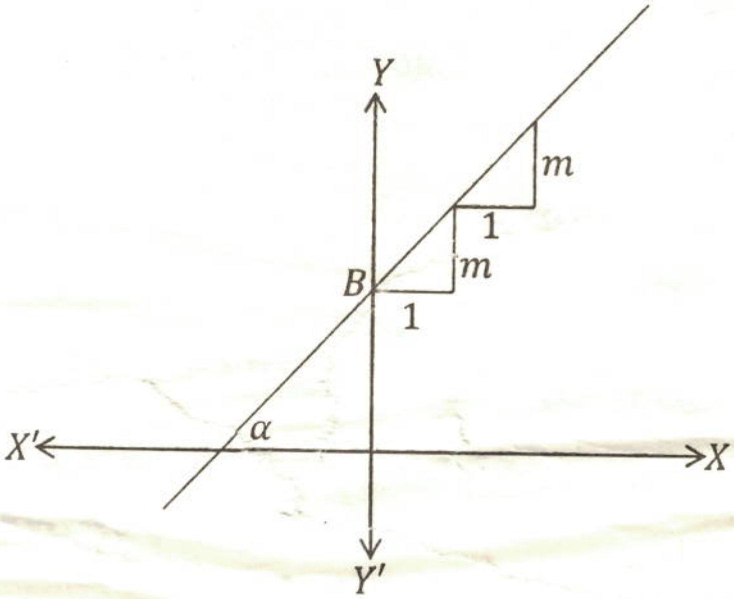
د مستقيمي کرښې مېل:

د مستقيمې کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يي د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضريب د مستقيمې کرښې مېل دی.ددی خبرې دثبوت لپاره د وضعيه کميتونو په مستوي کې د وضعيه کميتونو محورونه د (Δ)د مستقيم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د B په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د (α) په اندازه زاويه جوړه کړي بيا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه توټې را بېلو او د (α) د زاويې تانجانت پيدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقيمې کرښې مېل دی. α

$$\tan\alpha = \frac{m}{1} = m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



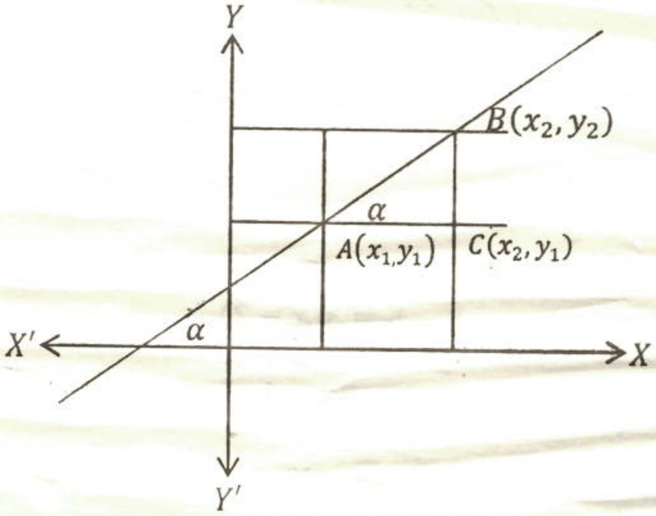
دمیل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطی د مستقیمی دوه نقطی دي

د (A) او (B) د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه يو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC

په مثلث کې د α دزاويي تانجانت پيدا کوو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کرښی دوه نقطی دي مېل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمی کرښې معادله چه مېل او يوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقیمی کرښی عمومي معادله ليکو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقیمی کرښی يوه نقطه ده په عمومي معادله کې يي وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطی څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{c} y = mx + b \\ \pm y_1 = \pm mx_1 \pm b \\ \hline y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پيدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6 + 5$$

$$y = 3x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې يي معلومې وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه يي معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض يي قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې يي $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره يي د تقاطع نقطې معلومې وي. معادله يي په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ د محور سره يي د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره يي د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې يي معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

$$y=\frac{b}{-a}(x-a)$$

$$-ay=bx-ab$$

$$-bx-ay=-ab$$

$$\frac{-bx}{-ab}-\frac{ay}{-ab}=\frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

مثال: د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$$

$$\frac{2x+y}{10}=1$$

$$y=-2x+10$$

تمرين:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راکړ شويدي مېل يې پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)\,,B(4,-11)$ 2- $C(9,3)\,,D(2,7)$
3- $E(9,3)\,,F(3,-5)$

2- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې یوه نقطه او مېل راکړشوی دي معادله يې پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)\,,m=4$ 2- $B(5,8)\,,m=2$

3- $C(-3,7)\,,m=\frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول دمستقیمې کرښې دوه نقطې راکړ شويدي معادله يې پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)\,,B(6,2)$ 2: $C(8,12)\,,D(4,-7)$
3: $E(2,-1)\,,F(3,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- په لاندي ډول د محورېنوسره د مستقيمی کرښی د تقاطع نقطی راکړشويدي محوري معادلی يي پيدا کړئ؟

1- $A(4,0)$, $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$, $D(0,12)$
3- $E(8,0)$, $F(0,24)$

جفته تابع :

که يوه تابع د x او $-x$ لپاره يو شان وي دی تابع ته جفته تابع وايي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

يعنی:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه او لپاره يو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د (x) او لپاره يو شان نه ده يعني د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانی هغه وخت يو د بل معکوسی دي چه د يوی ډومېن دبلی کوډومېن وي او کوډومېن دبلی تابع ډومېن وي .

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قيمت د (y) له جنسه پيدا کوو اوبيا د (x) او (y) ځايونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پيدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وايي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسی ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولی تابع د تعريف د ناحيي د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \ domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$

$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرين:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ y = 4x - 3$ $\qquad 2\text{-}\ y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

$3\text{-}\ y = x - \frac{1}{2}$ $\qquad 4\text{-}\ y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکیب او دومېنونه پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ f(x) = 3x - 4\ ,\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$2\text{-}\ f(x) = x^2 + 1\ ,\ h(x) = \sqrt{x}$

پولینومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولینومي تابع وايي.لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

x	3	4
y	6	7

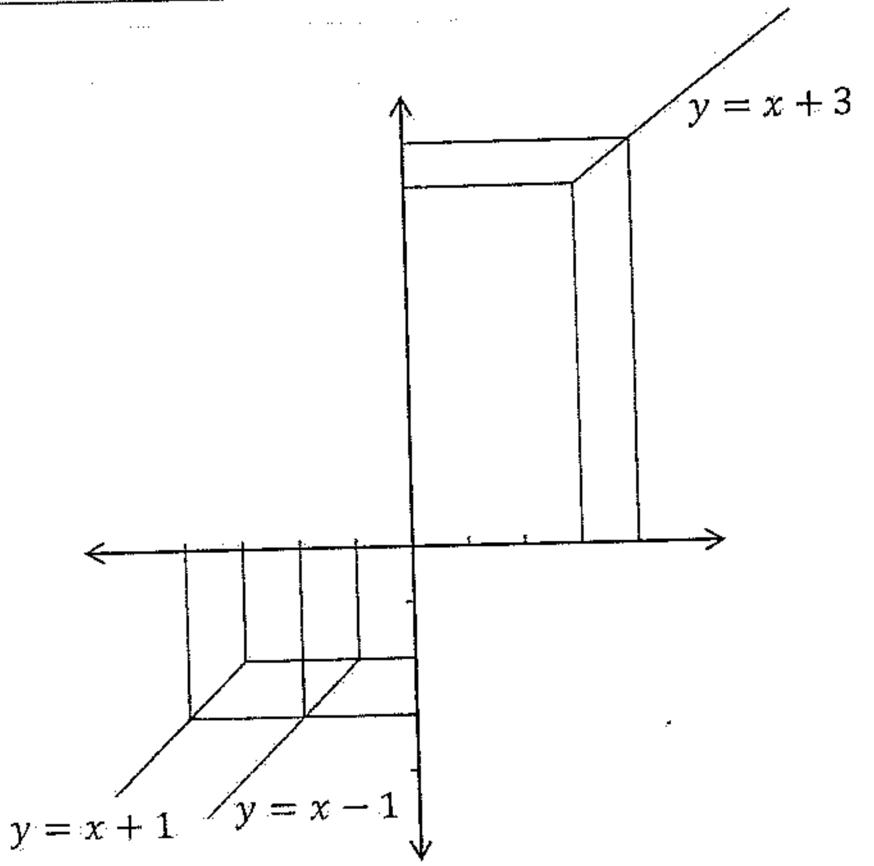
$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

x	−4	−3
y	−3	−2

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

x	−2	−1
y	−3	−2

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = \begin{cases} x+2 & : x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$

2- $y = \begin{cases} x-1 & : x > 2 \\ x+1 & : x < 2 \\ x+2 & : x > 5 \end{cases}$

3- $y = \begin{cases} x+4 & : x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$

4- $y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$

5- $y = \begin{cases} x+4 & " \quad x < 3 \\ x-4 & " \quad x > 3 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم فصل

دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يي دوه وي.

عمومي شکل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په IR سره يي ښيي. د تعريف ناحيي ته د قيمتونوسيټ او ډومېن $(Domain)$ هم وايي.

د دويمه درجه تابع ګراف:

د دويمه درجه تابع ګراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع ګراف اصغري نقطه لري اوه پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم په دری حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

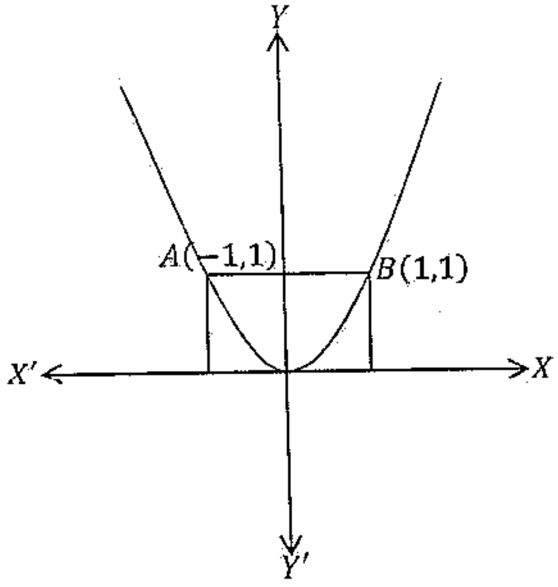
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

x ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

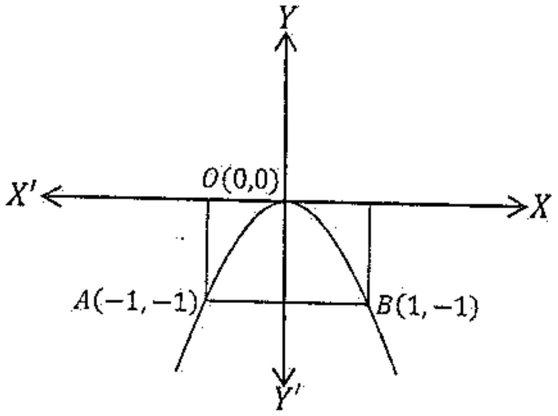
x	-1	0	1
y	-1	0	$+1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$



نوټ:

که $(1 < a)$ وي نو د تابع ګراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع د ګراف انتقال وايي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښي خواته انتقال ورکړئ؟

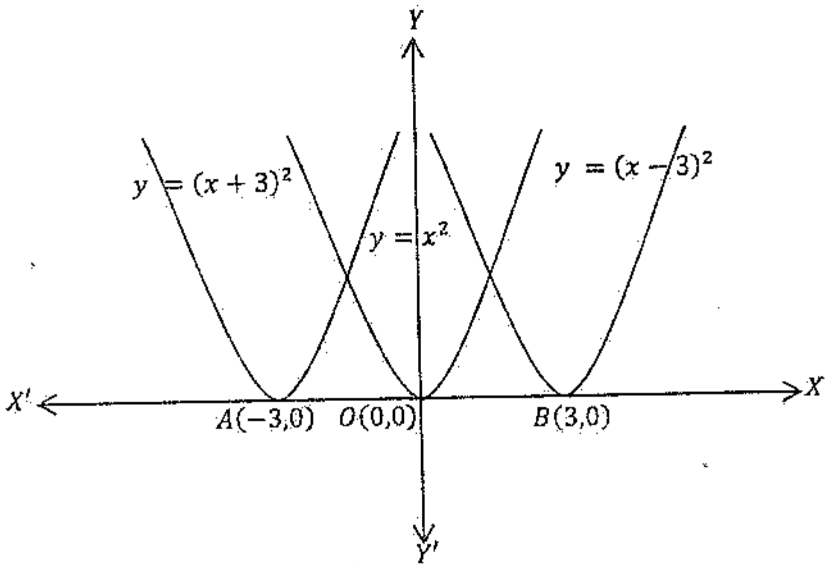
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع دګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو(2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

... د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

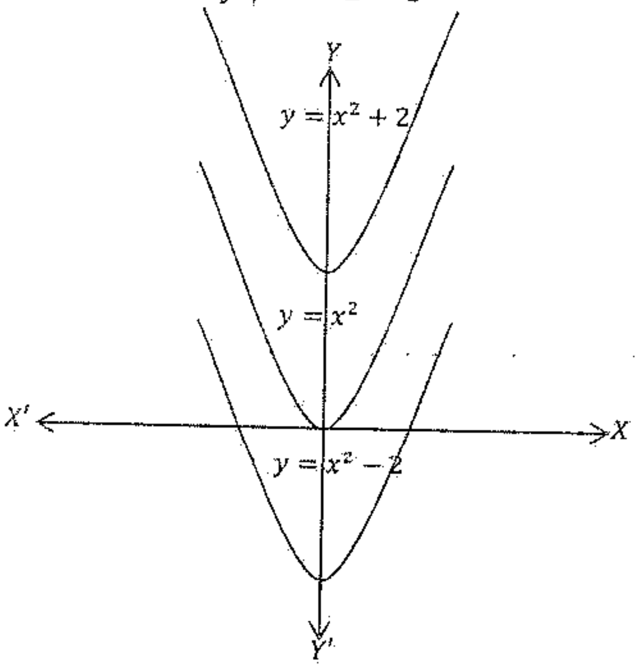
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ دمحور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

x	-1	0	$+1$
y	3	2	3



تمرین:

لاندي تابعګانی رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښي او چپی خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسیم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې یې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}}, 0\right)$$

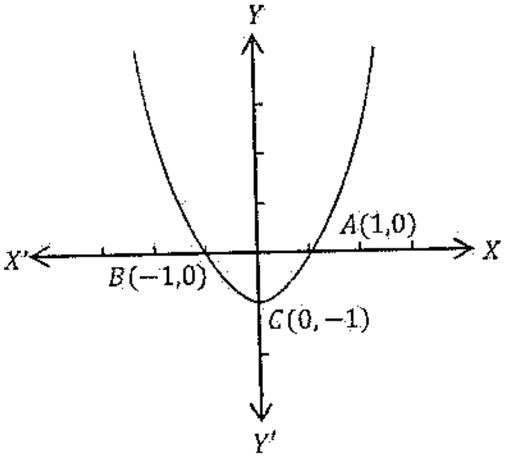
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له $M(0, C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (C)سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د xx' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو چې $y = -1$ کیږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

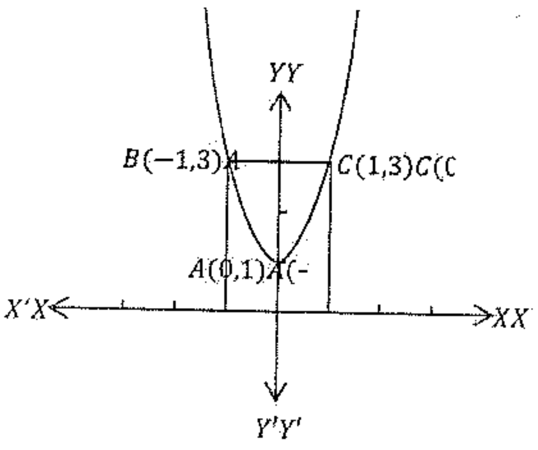
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	$+1$
y	2	0	2

$B(-1,2) \qquad O(0,1) \qquad C(1,2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

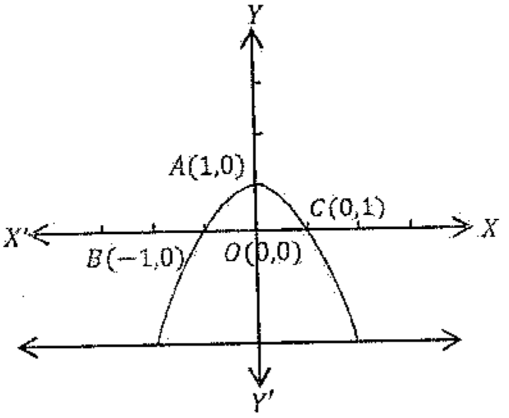
1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کيږي د تقاطع نقطه يې عبارت ده.

$C(0,1)$



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 - 1 = 0$
$-x^2 = 1$
$x^2 = -1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$

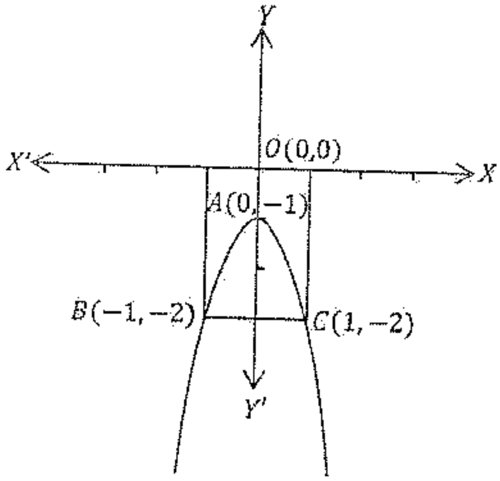
نو د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$A(0,-1)$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$B(-1,-2)$ $O(0,0)$ $C(1,-2)$



3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو. په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قیمت پیدا کوو د (Δ) په باب درې حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې یې عبارت دي له : $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له : $A(x, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- که ($\Delta=0$) وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د ($X\acute{X}$) محور نه قطع کوي.په دغه حالت کې د پاره ددې چه د ($Y\acute{Y}$) د محور یوی او بلی خواته دګراف خط السیر تعین شي نو(x) ته یو منفي او یو مثبت قیمت ورکوو اود (y) قیمتونه پیدا کوو د ($Y\acute{Y}$) د محور یوی او بلی خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السیر تعینوي.

2- د ($Y\acute{Y}$) دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x=0$ فرضوود ($Y\acute{Y}$) د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0,c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کیږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $0 < a$ وي بيا هم $0 < \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي مګر $0 < a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي. دواړه خواو ځخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \qquad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \qquad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره دګراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

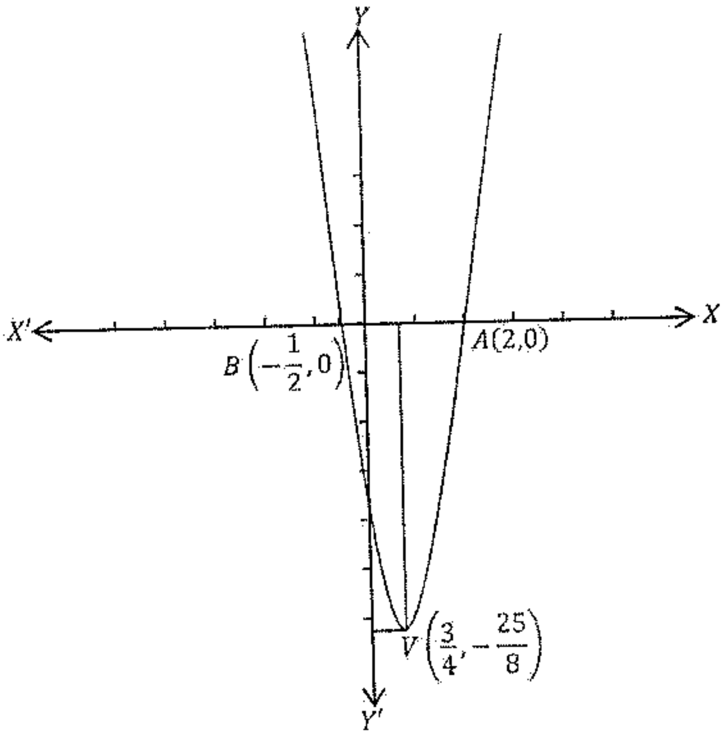
د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کيږي. نو
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times 2\times(-2)-(-3)^2}{4\times 2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$



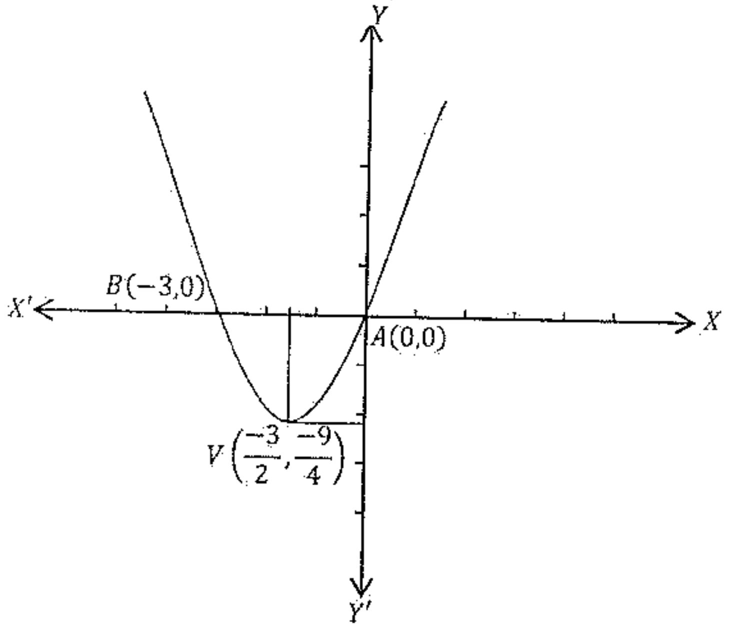
مثال: $y=x^2+3x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\qquad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times 1\times 0-3^2}{4\times 1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$

$$X_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

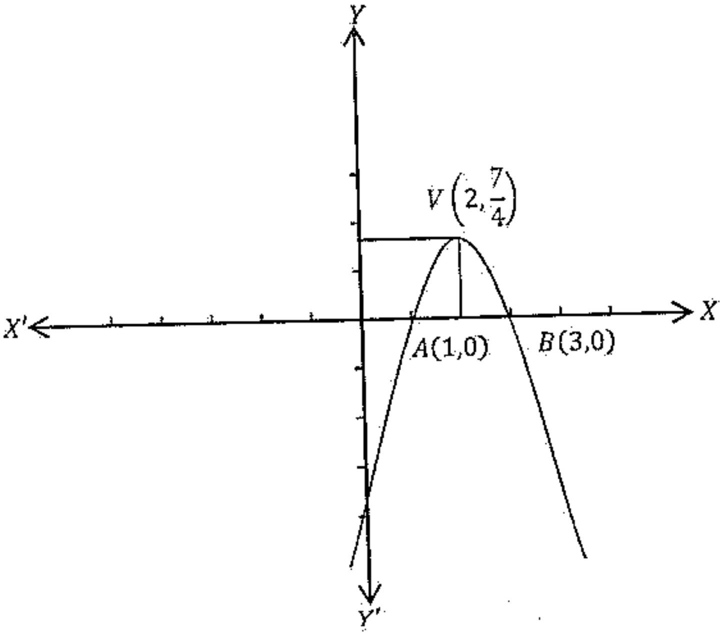
$y = -3 \qquad C(0, -3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y=x^2+2x+1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y=0$ فرضوو نو:

$$x^2+2x+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$$

$$\Delta=0$$

معادله يو جذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$A(-1,0)$$

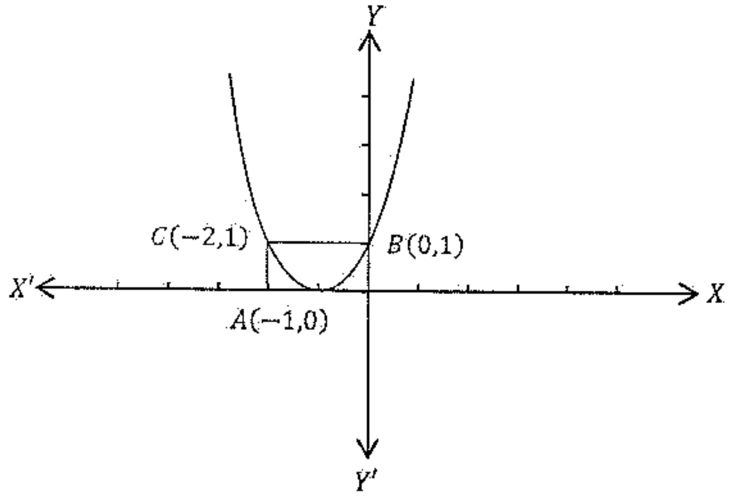
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$
$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرین:

د لاندي تابعگانو گراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$
2- $5x^2 - 13x + 6$
3- $4x^2 - 4x + 1$
4- $-x^2 + 5x - 6$
5- $-2x^2 - 3x + 14$
6- $3x^2$
7- $4x^2 + 8x$
8- $6x^2 + x - 57$
9- $11x^2 - 13x - 18$
10- $2x^2 - 6x$
11- $2x^2 + x - 21$
12- $-x^2 + 4$
13- $11x^2 - 13x - 18$
14- $3x^2 - x - 10$
15- $5x^2 + 2x - 51$
16- $-9x^2 + 17x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل يې دا دې.

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} \qquad \text{زوړنصاب}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{نوی نصاب}$$

a، b، c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانب $Asymptotes$:

که د يو مستقيم او يوه منحني ترمنځ فاصله په لايتناهي(∞) کې صفرشي دا مستقيم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horiztil\ Asymptotes$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ oblique\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب:

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل ميږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کووو عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$cx+d=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د(y) په ترتيب د$(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ويشو خارج قسمت يي په (m)ښيو او باقي په (p) ښيو نو ليکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$ax + b = mcx + md + p$$
$$a = mc \Rightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پيدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md + p = b \Rightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$
$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $h(x)=\frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پیدا کړئ؟

حل:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{8}{4}=2$$
$$m=2$$
$$p=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-3\times 4-8(-9)}{4}=\frac{-12+72}{4}=\frac{60}{4}=15$$

3- مایل مجانب $Slant\ or\ Oblique\ Asymptotes$:

که د یوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زیاته وي دغه ډول تابعګانې مایل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ویشو.

مثال: د $g(x)=\frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مایل مجانب یې پیدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=\frac{-d}{c}=\frac{-2}{1}=-2$$

افقي مجانب نلري، مایل مجانب معادله یې دا ده.

$$\frac{6x^2-24}{x+2}=6x-12$$

د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم:

1- عمودي مجانب پیدا کوو او رسمووېي.

2- افقي مجانب پیدا کوو او رسموو يي.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پیدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

6- پیدا شوی نقطې دوضعیه کمیتونود محورونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوی تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x=-\frac{d}{c}=-\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

افقي مجانب:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$$

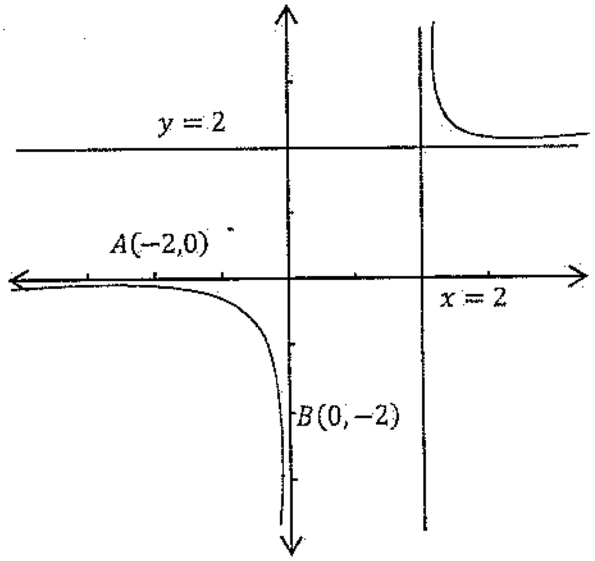
د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پيدا کوونو $(y=0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2}=0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right)=0(x-2)$$
$$2x+4=0$$
$$2x=-4$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$$
$$x=-2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x=0$ فرضوو،

نو $y=-2$ کيږي او د تقاطع نقطه يې: $B(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

دلاندي تابعګانو ګراف رسم کړئ

$$1: G(x) = \frac{4x-3}{2x+1} \qquad 2: F(x) = \frac{2x-6}{3x+6} \qquad 3: h(x) = \frac{3x+9}{x-6}$$

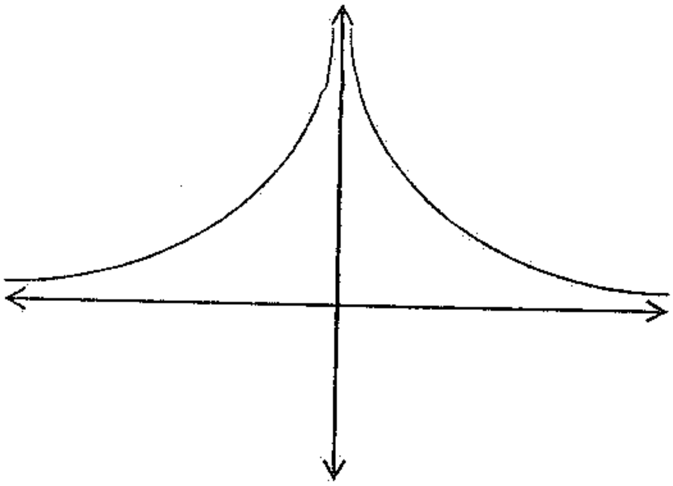
مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$$A\left(-2,\frac{1}{4}\right) \quad B(-1,1) \quad C(1,1) \quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نو تابع متناقصه ده.

د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د ګراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړشوې تابع ګراف لاس ته راځي.

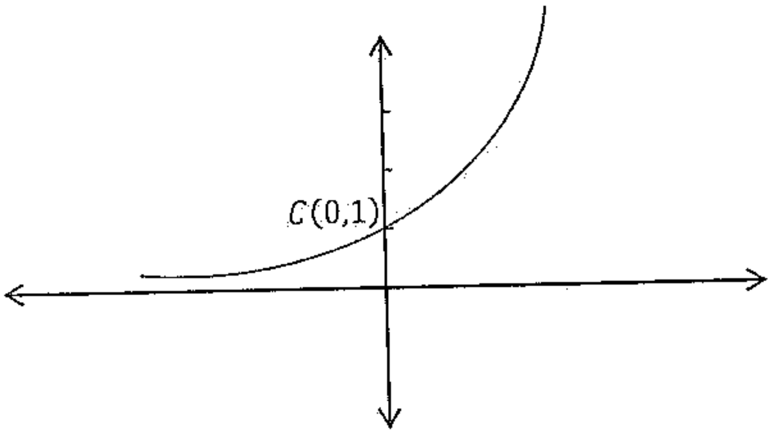
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



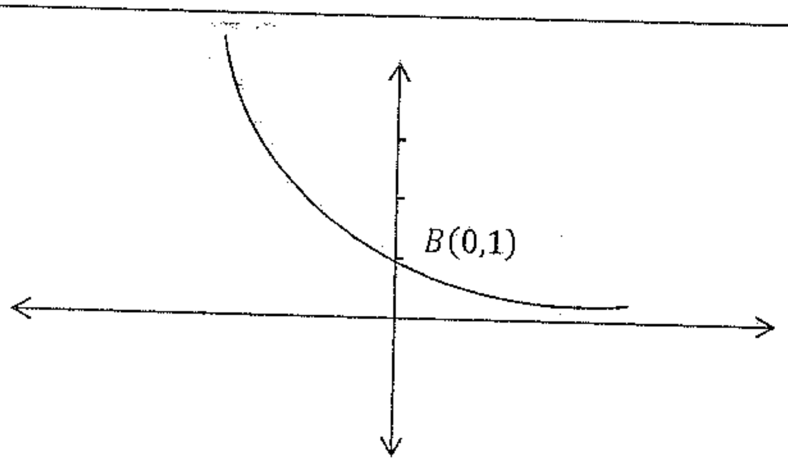
مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1\text{-}\ y = 3^x$ $\qquad$ $2\text{-}\ y = 5^x$ $\qquad$ $3\text{-}\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4\text{-}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5\text{-}\ y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\qquad$ $6\text{-}\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $\qquad$ $7\text{-}\ y = 5^x$

$8\text{-}\ y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوګاریتمي تابع *Logarithmical functions*:

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دې او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. ګراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمیږي.

د ګراف د ترسیم لپاره x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمت پیدا کوو.

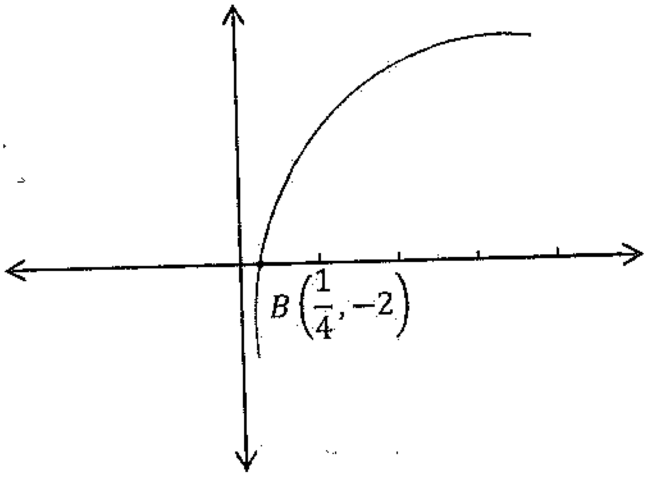
مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$



تمرين

دلاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$

2- $log_2 x = y$

3- $log_4 x =$ y

4- $\log_5 x = y$

5- $log_2 x = y$

6- $\log_8 x =$ y

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه :

1, 5, 9, 13, 17 ...

دغیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یي د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یي ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او دحدونو شمېر په (n) ښیو نو فارمول یي په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ضریب ته متوجه شود (d) ضریب د حدو تر شمېر یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضریب به $(n-1)$ وي فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$a_1\ , a_1 + d\ , a_1 + 2d\ , a_1 + 3d\ , a_1 + 4d, \dots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د يوه حسابي ردیف اول حد (30) دې مشترک تفاضل يې (17) دی (51) حد يې څو دی؟

$$a_1 = 30 \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$d = 17 \qquad a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$n = 51 \qquad a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = ؟ \qquad a_{51} = 880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: دیوه حسابي ردیف اول حد (15) دې (31) حد يې (585) دې مشترک تفاضل يې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد دطرفينو اوسط دې.

مثال:- د يوه حسابي ردیف (50)ام حد (1973) دی مشترک تفاضل يې (40) دی اول حد يې څو دې؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او اخري حد يي (2117) دی او مشترک تفاضل يي (21) دی د حدونو شمېر يي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی دداخل شوي حدونه په (m) ښیاودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض يي لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \quad \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$3 \ , \ 9.4 \ , \ 15.8 \ , \ 22.2 \ , \ 28.4 \ , \ 35$

تمرین:

لاندي عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي رديف:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره ديوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې په لاس راغلې وي يا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

$$2,8,32,128,512 \ \ldots$$

د هندسي رديف اول حد (a_1) په مشترک نسبت يې په (r) ښيي.

د هندسي رديف فارمول:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې لاس ته راغلی وي او يا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$
$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي رديف فامول:

اول حد يي په (a_1) او مشترک فصل په (r) او ورستنی حد په (a_n) ښيو نو .

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته ځير شو د (r) توان د حدو د شمېرڅخه يو کم دې نوکه دحدونو شمېر (n)وي نو د (r) توان به $(n-1)$ وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots \ldots a_1 r^{n-1}$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یې $r = 3$ دې اوم حد (a_7) یې څو دې؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1) او (r) قیمتونه د لاندې فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دې مشترک نسبت یې $(r = 2)$ دی اول حد یې څو دې؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یې (5832) دی مشترک نسبت یې پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دی (n) ام حد یې $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یې (2) دې د حدونو شمېر یې څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Longrightarrow 128 = 2^{n-1} \Longrightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 7 + 1 = 8 \Longrightarrow n = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څويم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2 \qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1 \qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ? \qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \qquad \Rightarrow n = 6$

د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کی هر حد د طرفينو د حاصل ضرب جذر دي.

مثال: (3, 6,12,24,24) د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \qquad and \qquad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کی اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د رديف د ټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ردیف کې د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف دفارمول څخه د (r) قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمیر (n) اوتر دخول وروسته د حدو شمیر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کې $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: دری داسې عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د (6)په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Longrightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Longrightarrow 9x - 6x = 9 \Longrightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وایي. مثلاً لاندې ردیف یوحسابي ردیف دی. لکه:

(2,4,6,8 ,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دغه ردیف معکوس ردیف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه ردیف ته هارمونیکي ردیف وایي.

مثال: په یوه هارمونیکي ردیف کې $a_1=\frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل یې $d=-3$ دی ترادف یې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4},\frac{1}{4}-3,\frac{1}{4}-6,\frac{1}{4}-9,\frac{1}{4}-12,\cdots$$
$$\frac{1}{4},\frac{1-12}{4},\frac{1-24}{4},\frac{1-36}{4}\quad\cdots$$
$$\frac{1}{4},\frac{-11}{4},\frac{-23}{4},\frac{-35}{4}\quad\cdots$$

د هارمونیکي ردیف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n-1}}$ د هارمونیکي ردیف دری حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دریم حدونو اوسط پیدا کوو.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$
$$a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونیکي اوسط پیدا کړئ

حل: $a_n=\frac{2(2\times 8)}{2+8}=\frac{32}{10}=3.2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله Arithmetc Series

2- هندسي سلسله Geometric Series

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونومجموعه په منظم ډول داسی لیکو چه اخر حد یي په سر کی راشي بیا یي د ولنی مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \hline 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او$(6$ $(d =$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه دحسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کې 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواياست چه د ټولو سره څو روپۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2} \times 2(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړې وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړې وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$

$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) اومشترک تفاضل يي (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$

$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېرکې ضرب شي دحدونو مجموعه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل :

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولوحدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله $Geometric\ Series$:

د هندسي ردیف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وایي.

د هندسي سلسلې فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوی په (r) کې ضربوو اوبیا (I) رابطه ورځخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$

$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \cdots \pm a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلې ته متزایده سلسله وایي.

مثال: د یوی هندسي سلسلې $a_1 = 5$ او مسترک نسبت یي $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$S_7 = 5465$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او که د I رابطي څخه II رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلی ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يي $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوي هندسي سلسلی د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يي 5 دی مشترک نسبت يي څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$

$S_8 = 120$

$n = 4$

$r = ?$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

1	1	1	−14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې د اعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \to 0)$ صفر کیږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کیږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشار کسر دی . په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$

$r = \frac{1}{10}$

$n = \infty \qquad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10 \times 3}{10 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_n = ? \qquad S_n = \frac{1}{3}$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a = \frac{8}{10}$

$a_1 = \frac{3}{100} \qquad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$

$r = \frac{1}{10} \qquad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10 \times 3}{100 \times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$

$S_n = ? \qquad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پيدا کړئ چه لمړی رقم يي (3) وي؟

2- يو ديوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي ووایاست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د يوه حسابي رديف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل يي (1287) دی عددونه يي پيدا کړئ؟

4- د يوه حسابي رديف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يي (214) ده عددونه پيدا کړئ؟

5- د يوه حسابي رديف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يي (2) دی عددونه پيدا کړئ؟

6- (3003) کسان په يوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی يو نفربيا دوه بيا دری.......په همدی ترتيب تر اخره ولاړ دي ووایاست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- a , b او c په کوم شرط په يوه حسابي رديف کی شامل دي؟

10- د يوه رديف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنيو حدو د ضرب حاصل يي(285) دی عدونه پيدا کړئ؟

11- (3) او (243) د يوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دريم او اول حد تفاضل يي (136) وي؟

13- د يوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه يي(65) ده ابعاد يي پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځې (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي ووایاست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعې دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$ ،$0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$, $0.41\overline{6}$, $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديارلسم فصل

د رياضي استقراء *Induction of Math*

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (1) لپاره صحيح دی . د (n) لپاره يي صحيح فرضوو .

د $(n+1)$ لپاره يي ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د (1)لپاره یې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) + \{3(n+1) - 2\} = \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1) - 2\}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2}$$

$$S_n = \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي (n)لپاره صحیح دي.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنۍ رابطه صحیح ده څکه چه:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1) + 1\}\{2(n+1) + 1\}$$

ثابته شوه چه پورتنۍ مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) \quad , \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يي ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يي صحيح فرضوو.

د لپاره يي ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1)$$

تمرين

لاندي فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7) $4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

8) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

9) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2 + 5 + 10 + \cdots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوارلسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وایي.

د فکتوریل علامه دا (!) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $k < n$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کیږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کیږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کیږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کیږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1)\cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بینوم قضیه $Binomial\ Theorem$:

که چېرته (a) او b حقیقي عددونه او (n) یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتنۍ قضیې ثبوت پورتنۍ قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1\cdot a^1 + 1\cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د (n) لپاره یي صحیح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره یي ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوې په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په Σ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ:

$$(x+y)^5$$

$$(x+y)^5 = \sum_{n=1}^{5} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځلسم فصل

لیمیټ limit

انټروال Interval:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وایي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال Closed Interval :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې وي.

او په غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي.

$$A = [x \epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نیم کښن انټروال Half Open Interval:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي. $A = [x \epsilon IR/4 \le x < 14]$

3- خلاص انټروال Open Interval:

هغه انټروال دې چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي.

$$A = (x \epsilon IR/4 < x < 16)$$

مجاورت Vicinity:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کې واقع وي نو دا انټروال ددې نقطې متناظر مجاورت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په يوه مجاورت کې هره نقطه زيات متناظر مجاورتونه لري.

د ليميټ تعريف:

$Kart\ weierstras$ کارت ويرس ترس انګليسي رياضيدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دليميټ تعريف داسې کړېدی.

ديوی تابع ليميټ په يوه نقطه کی هغه عدد دې چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعريف په ناحيه يو داسې مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصوير د تابع د ليميټ په مجاورت کی شامل وي.

يعنی د $F(x)$ دتابع ليميټ د (a) په نقطه کی (b) دې په دی شرط چه د (b) دهر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کی د (D) يو داسې مجاورت موجود وي چه د(D) دهر عنصر تصوير په (N)کی شامل وي. او داسې ليکل کيږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع ليميټ د $x \to 1$ په نقطه کی پيدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د ليميټ ثبوت په دوه طريقو کيږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طريقه

1- د جدول په طريقه د تابع د ليميټ ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلوميږي چه (x)ته په هره اندازه چه (1) ته نژدې قيمت ورکړشي په همغه اندازه د (y) قيمت (8) ته نژدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8 - \varepsilon, 8 + \varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8 - \varepsilon < 5x + 3 < 8 + \varepsilon$$
$$8 - \varepsilon - 3 < 5x < 8 + \varepsilon - 3$$
$$5 - \varepsilon < 5x < 5 + \varepsilon$$
$$\frac{5}{5} - \frac{\varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5}{5} + \frac{\varepsilon}{5}$$
$$1 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{5}$$
$$D = \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}, 1 + \frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = \left(8 - 0.5, 8 + 0.5\right)$$
$$N = (7.5, 8.5)$$
$$D = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{5}, 1 + \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$
$$D = (0.9, 1.1)$$
$$\lim_{x \to 0.9}(5x + 3) = 5 \times 0.9 + 3 = 7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x + 3) = 5.5 + 3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x \to 1}\left(3 - \frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$$
$$2 - \varepsilon < 3 - \frac{1}{x} < 2 + \varepsilon$$
$$2 - 3 - \varepsilon < -\frac{1}{x} < 2 - 3 + \varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1-\varepsilon < -\frac{1}{x} < -1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) = \left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1}-\frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1}-\frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نيوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنې دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غير ناممکن دی.

ارشميدس د دايرې دمحيط د اندازه کولو لپاره داسې محاطي مضلعګانې په دايره کې رسمولې چه ضلعې يې بې اندازه کوچنې وې په دې ترتيب يې د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ .نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړې وه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \to -3} g(x) = \lim_{x \to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x \to 3} h(x) = \lim_{x \to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یي لیمیټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال: $\lim_{x \to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نهٔ ؤ لیمیټ یي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x \to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب: چه په صورت کی ثابت عدد وي او په مخرج کی نه وي لیمیټ یي په صفر کی لایتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کی ثابت عدد نه وي او په مخرج کی وي لیمیټ یي په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عدد نه وي دلته بیا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت اومخرج دټیټ حد درجی مساوي وي لیمیټ یي په صفر کی د کوچني توان حدو دضریبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج د ټیټ حد د درجی څخه ډیره وي لیمیټ یي په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج دټیټ حد د درجی څخه کمه وي لیمیټ یي په صفر کی (∞) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په (∞) کې د یوې تابع لیمیټ:

په (∞) د یوې تابع لیمیټ په دوه حالته کې مطالعه کوو.

الف: په (∞) کې د تامې تابع لیمیټ: د تامې تابع لیمیټ په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع لیمیټ: د کسري تابع لیمیټ په (∞) کې په درې حالته کې مطالعه کوو.

a- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې څخه ډېره وه لیمیټ یې په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې سره مساوي وي نو لیمټ یې په (∞) کې د لوړ توان والاحدود ضریبو نسبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجې څخه کمه وي ليميټ يې په (∞) کې صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د ليميټ قضيې *Theorms of limit*:

اوله قضيه:

د ثابتې تابع ليميټ په يوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3}12=12$$

دويمه قضيه:

د يوه عدد او يوې تابع د حاصل ضرب ليميټ د تابع د ليميټ اوثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}6x^2=6\lim_{x\to 2}x^2=6\times 2^2=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

څلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضيه:

د يوى جذري تابع ليميټ په يوه نقطه کی دتابع دليميټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهايت کوچنی تابع: که د يوی تابع ليميټ په يوه نقطه کی صفر شي دی تابع ته بی نهايت کوچنی تابع وايي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهايت کوچنی تابع ګانو مجموعه يوه بی نهايت کوچنی تابع ده.

b- د بی نهايت کوچنی تابعګانو دضرب حاصل هم يوه بی نهايت کوچنی تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی يوه بی نهايت کوچنی تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چېرى $\varepsilon(x)$ يوه بی نهايت کوچنی تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع ليميټ پيدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x \to \infty$ کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1- د $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a} f(x) = b + \varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x\to a} f(x_1) + \lim_{x\to a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x\to a} f(x_1) + \lim_{x\to a} f(x_2) = \{b_1 + \varepsilon_1\} + \{b_2 + \varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} = 0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = b_1 b_2 + b_1\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_1\cdot\varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_2\varepsilon_1 = 0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = b_1 b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ درې تابعګانې ولرو چه $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\leq u(x)\leq\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ? $=\lim_{x\to 0}u(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u(x)$ د $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نودساندويچ د قضيي سره سم د $u(x)$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a}u(x)=1$$

تمرين:

لاندې ليميتونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضيه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه (n) يو طبعي عدد او (a) يو حقيقي عدد دي.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه قضیه د ټولو جذري افادو د لیمیټ د پیدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ بنیو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا (∞) باندی دعملیودنتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومی ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندی ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړيو شکلو یعنی $\left(\infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \frac{0}{0}\ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کی د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزيي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی مبهم شکل غوره کړي او د تجزیي وړ وي تجزیه کوو یي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د يوی تابع ابهام د تقسيم او تجزيي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی يي ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot 2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\left(1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $e=2.718281828$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر $Euler$ پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ورواړوؤ نو $\frac{1}{\alpha}$ په x ښیو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\because\ \alpha\to 0\quad\therefore\ x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Rightarrow\ \therefore\ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Rightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x}=u\Rightarrow x=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ x\to 0\quad \because\ u\longrightarrow\infty$$

$$=ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}=lne=1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

د سوال د حل لپاره (e^x-1) په (y) ښيو:

$$e^x-1=y\Rightarrow e^x=1+y\Rightarrow \ln e^x=\ln(1+y)=x\ln e=\ln(1+y)$$

$$x=\ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=x\Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to 0\quad \because\ x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

تبصره:

که يوه تابع د $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د ليميټ د لاس ته راوړلو لپاره يې طبعي لوګاريتم نيسو او د پورتنيو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل يې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکينيو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\ln\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دی حالت کی(α) په $(u-1)$ ښیو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چه $(\alpha = u-1)$ دی نو که $(u \to 1)$ وګرځي په نتیجه کی $(\alpha \to 0)$ کوي په نتیجه کی لیکو چي:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د لیمیټ بڼه لیکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^{p}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}$$

$$p=\lim_{x\to a}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{cos^2x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-sin^2x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ y\to 0\quad \because\ u\to\infty$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

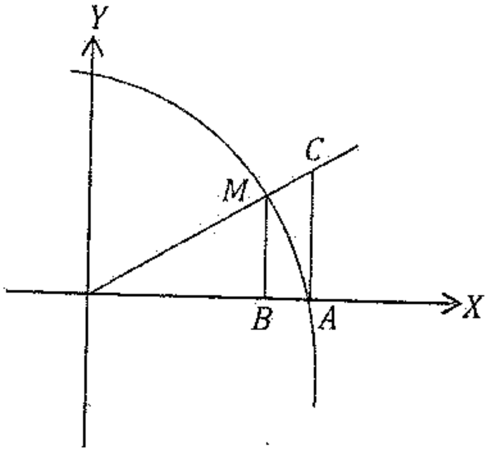
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ :limit of Trigono metrical Functions

د یوې زاويي د ساین او هغه زاويي د نسبت لیمیټ په صفر کی (1) دي. یعنې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددې مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه ئي پیدا کوو او مقایسه کوویې.



$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{MB} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$

$\overline{OB} = \cos x \quad , \quad \overline{MB} = \sin x \quad , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$

$\sin x \cos x < x < \tan x$

$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$

$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x \to 0} \cos x$

د ساندویچ د قضیې سره سم:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\longrightarrow 0 \qquad \because\ \ \alpha\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\sin x=2\cdot1\cdot0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

د تابعګانو متماديت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع   2- غېر متمادي تابع

1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسيم په وخت کې يې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کيږي يعنې ګراف يې پريکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دويمه درجه تابع، اکسپونشل تابع، لوګاريتمي تابع، د ساين او کوساين تابعګانې متمادي تابعګانې دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلې نه وي .

2- غېر متمادي تابعګانې:

هغه تابعګانې دي چه ګراف يې څو ټوټې وي. لکه هوموګرافيک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سيکېنټ او کوسيکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانې په غېرمتمادي تابګانو بدلې کړو مګر نشو کولای چې غېر متمادي تابعګانې په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متماديت شرطونه:

د متماديت شرطونه درې دي .

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کې شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کې باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني درې واړه شرطونه په یوه تابع کې موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه درې شرطو څخه یو یکې موجود نه و تابع متمادي نه ده غېرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کې متمادي ده.

حل:

1- $2 \in IR \because 2\epsilon dom f(x)$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $(x = -1)$ په ټکي کې وڅېړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی $(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دښي لاس لیمیټ :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(a, a+\delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه د دې انټروال د هر عنصر تصویر د (N) په مجاورت شامل وي او داسې لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

د چپ لاس لیمیټ:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ یو انټروال موجود وي چه د دې مجاورت د هر عنصر تصویر د (N) په مجاورت کې شامل وي او داسې لیکل کیږي.

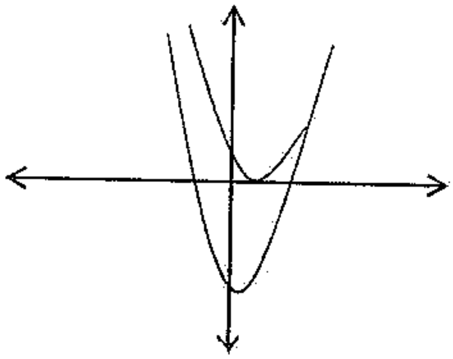
$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \exists$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1 - x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متمادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1+} (2x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1-} (1 - x) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$ تابع لیمیټ نه لري.

نو تابع د $(x = 1)$ په نقطه کې غیر متمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x = a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x = g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x = a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره لمړی د تابع لیمیټ پیدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a} (f(x))^a = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیټ د پیدا کولو لپاره قاعده د تابع د توان د لیمیټ په توان لیکو.

$$\lim_{x\to a} (b)^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاریتمي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د تابع د لیمیټ د لوګاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د هغه تابع د لیمیټ د مثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to a} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کی متمادي وي نو د دوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کی متمادي دی.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$$1: Df(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$
$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$
$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کی متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متماديت څیړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$
$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$$
$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$
$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متماديت وڅیړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$
$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

د لاندې تابعگانو ليميټ پيدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x+17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x+1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3+5x^2-11x+1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صیغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو اواسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وايي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمی درجې ،دریمی درجې اوداسی نورو تابعګانو د میل پیدا کول دي .

د خطي تابع میل:

په خطي تابع کی د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمی کرښی دوه نقطی دي میل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دمیل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د میل څخه استفاده کوي.نو ځکه د منحني میل ته مشتق وايي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راکړشوی ده د میل ددغه تابع د ګراف دوه نقطی په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطی پیداکواو میل یې لاسته راوړوفرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقیم خط د میل څخه استفاده کوونو لیکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختیاري نقطی میل عبارت $\lim_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف میل د $P(3,-3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x=3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-(3+h)^2-(2\cdot 3-3^2)}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-6+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-9-6h-h^2+9}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4-h)=-4\Rightarrow m=-4$$

2- مثال: د $f(x)=x^3-1$ د تابع میل د $(x=-3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m=\lim_{x\to -3}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{x\to -3}\frac{\{(-3+h)^3-1\}-\{(-3)^3-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-27+27h-9h^2+h^3-1+27+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-9h^2+27h}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-9h+27)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2-9h+27)=27$$

منحني یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S=f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلو تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وایي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وایي.

$$\bar{v}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کې متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2،4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که (x) د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو (y) د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پییري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړی ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کې ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یې پېشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یې په ډېر ښه ډول وکړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تعريف:

د صفر په نقطه کې د تابع او متحول د زيادت د نسبت ليميټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او په $f(x)$ يا $\acute{y}$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کيږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\acute{y}=\acute{f}(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow \acute{f}(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق دتعریف په مرسته وځېرئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

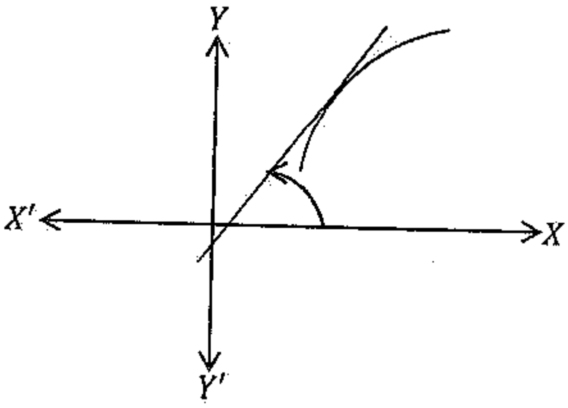
$$\lim_{\Delta\to x0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1\quad \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کې د یوه منحني خط مېل دهغه زاویي تانجانت دی چه مستقیمه کربنه یي د (XX') د محور دمثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندي د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس میل $m = f'(x) = f'(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \qquad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) په نقطه کی پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x_0)$$
$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{{x_0}^2} \quad \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 2- $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ 4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 6- $f(x) = 5x - 1$

د مشتق قوانین:

اوله قضیه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

د یوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$
$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$
$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $f(x)=x^5$ تابع مشتق $x=\frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x)=x^5$$
$$f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=5\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x)=x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2-3}{3}}=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\cdot x^{\frac{1}{3}}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعی مشتق د تابعګانو دمشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y'=u'+v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په (y) ښیو:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=u'+v'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق د تابعګانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض : (u) او (v) دوه تابعګانې لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د (u) او (v) تابعګانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because \ \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \ w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمې تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.او د حاصل ضرب تابع یې په (y) ښیو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$$
$$v = 3x - 15 \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$
$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$
$$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانی لرود خارج قسمت تابع يي په (y) ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim_{\Delta x \to 0}(v + \Delta v)}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{u} = 3$$
$$v = 1 - 2x \quad \Rightarrow \acute{v} = -2$$
$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

حل:

$$u = 7x - 15 \quad \Rightarrow \acute{u} = 7$$
$$v = 2x^2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{v} = 4x + 3$$
$$\acute{f}(x) = \frac{7(2x^2+3x) - (4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$
$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$
$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي.لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجراٸت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\acute{y}_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\acute{y}_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\acute{u}_{(x)}$$

$$\acute{y}_{(x)}=\acute{y}_{(u)}\cdot\acute{u}_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق يې $\acute{y}=nu^{n-1}\cdot\acute{u}$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال :

$y = (2x^2 - 1)^3$
$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$
$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$
$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$
$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$

نوټ:

که د (f) تابع د (x_0) په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندی مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کيږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مېل يي عبارت دی.

$$\acute{f}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق ورړ وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

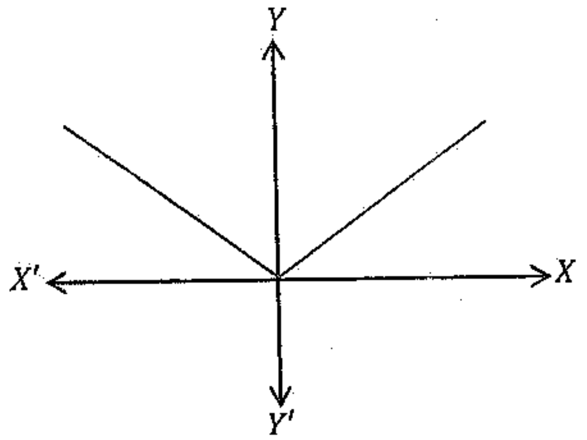
$$\acute{f}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\acute{f}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعگانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او (u) د (x) تابع وي نو مشتق يي عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ u = 4x &\Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) &= \acute{u}\cos u \end{aligned}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3-مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$$
$$v = 1 + x \Rightarrow \acute{v} = 1$$
$$\acute{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\acute{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$
$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$
$$\Delta y = -2\sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = -2\sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$
$$y = \cos x \Rightarrow \acute{y} = -$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2x + cos^2x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1 - sin^2x} = (1 - sin^2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x \cos x) = \frac{-2\sin x \cos x}{2(1 - sin^2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{cos^2x}}$$
$$= -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1- مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \dfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \dfrac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \dfrac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$v = \sin x \quad \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2x} = \frac{-(sin^2x + cos^2x)}{sin^2x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2x} = -csc^2x \qquad \therefore \quad cot\acute{g}x = -csc^2x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \quad \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \quad \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2x} = \frac{\sin x}{cos^2x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \quad \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \quad \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2x} = \frac{-\cos x}{sin^2x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \ v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کی پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ رابطی څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کی د (x) او (y) قیمتونه وضع کووچه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطی ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتنی تابع ضمني مشتق په لاندی ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق:

که يوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يي پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يي د فارمول پواسطه پيدا کوو.او بيا د مشتق دفارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطې $y''_{(x)}$ پیدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کې د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ او د منحني د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2\cdot 1 + 1}{1 + 2\cdot 1} = -\frac{2+1}{1+2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1\cdot(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندې ډول هم پیدا کولای شو

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د يوی تابع دويم ،دريم، څلورم ... او نور مشتقات ونيسو ترڅو چه مشتق يې صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دريم مشتق ونيسئ؟

حل:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$

$f''_{(x)} = 6x - 6$

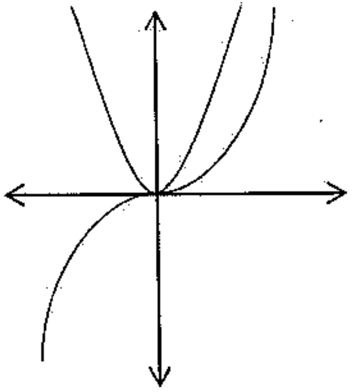
$f'''_{(x)} = 6$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پيدا کړئ؟ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$\acute{y} = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دويم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = \sin x + \cos x$$
$$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$
$$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$$
$$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$$
$$\vdots$$
$$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$$
$$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$
$$= cos^2x - 2\sin x\cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x\cos x + cos^2x$$
$$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیت د پیداکولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه اونورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په (a,b) انټروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دي؟

حل: څرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دي مشتق يي په لاندې ډول دي:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په مشتق کی د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کیږي نو $\acute{f}(x) > 0$ دی په نتیجه کی تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کی متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلوم‌ولو لپاره $\acute{f}(x) < 0$ پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کی منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$کی متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅیړی؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$\acute{f}(x) = 5 > 0$$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کی متزایده او په کوم انټروال کی متناقصه ده.

حل: که $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده او که $\acute{y} > 0$ وي تابع متزایده ده.

$y = x^2$

$\acute{y} = 2x$

$\acute{y} < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط

$\acute{y} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزاید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
$\acute{y}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘	4 ↘	1 ↘	0	1 ↗	4 ↗	$+\infty$ ↗

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع بحراني ټکي

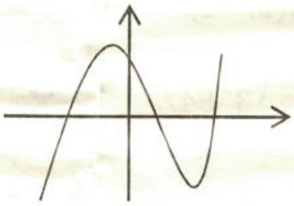
د يوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point*:

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point*:

د تابع دګراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



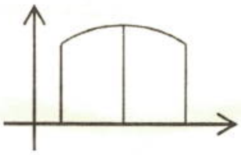
ثابته تابع:

هغه تابع ده چې مشتق يې صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

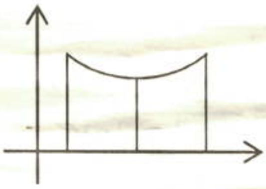
متزايده تابع:

که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع:- که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \; \acute{y} > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع گراف خپل جهت ته تغییرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده ووایاست چه ددی تابع گراف ځو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود (x) قیمتونه پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2, -2)$ اصغري نقطه ده

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right)$ اعظمي نقطه ده

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{17}{54}$		-2		-2		$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا او علامی یي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftarrow f(x) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$

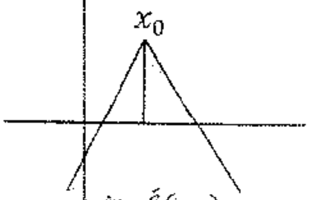
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 + \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\left(1 + \sqrt{3}\right)}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 - \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}{-2} = 0.73$$

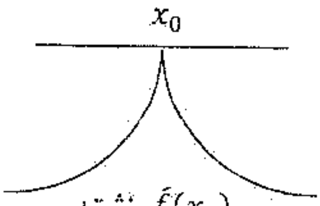
x		-3		-2.73		-1		0.73		
$\acute f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{2}{15}$	↘	min	↗	0	↗	max	↘ −2	↘

د کسر اشاره دجذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

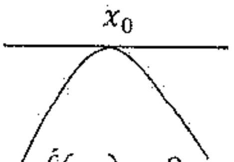
مطلق اعظمي $Maximum$ د $f(x)$ په تابع کې که د هر (x) لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.



$\acute f(x_0)$ نشته

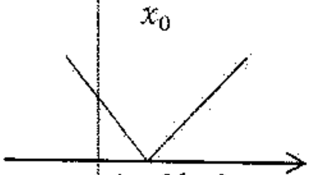


$\acute f(x_0)$ نشته



$\acute f(x_0) = 0$

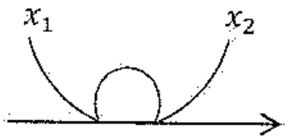
مطلق اصغري $Minimum$ که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیي د هر (x) لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



$f(x_0)$ نشته

$f'(x) = 0$

مطلق اصغري



$f(0)$ او $f(x_1)$ نشته

(c) ketabton.com: The Digital Library

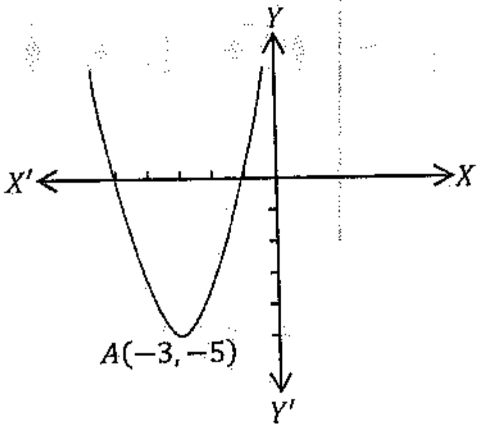
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$A(-3, -5)$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطی پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

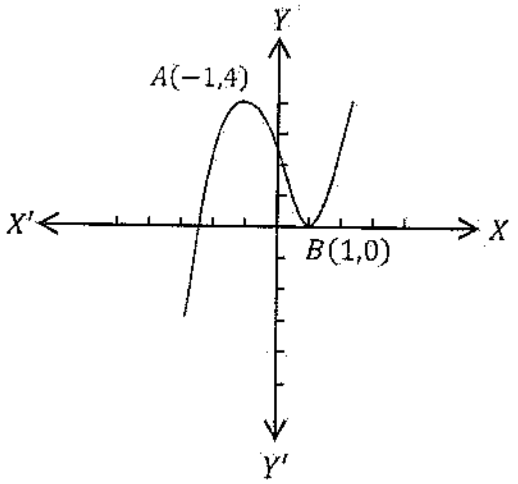
$$\acute{f}(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

$x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$ اصغري ده

$x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$ اعظمي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.

2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.

3- د تزاید او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشارې مطالعه کوو.

4- د ګراف مجانبونه معلوموو.

5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.

7- پیدا شوې نقطې د وضعیه کمیتونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \& \ x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د ګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$

$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \ \Rightarrow -2x = -1 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راورو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کووکه $y'' > 0$ ؤاصغري نقطه ده اوکه $y'' < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$

$$y'' = 6x + 18$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومېن يې د حقيقي اعدادو سيټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چې په دغه ساحه کې تابع متمادي ده. د تناظر محور يې د اول مشتق پواسطه پيدا کيږي:

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محور دی.

د راس د نقطې د پيدا کولو لپاره د تناظر په محور کې د x قيمت په تابع کې وضع کوو د راس د نقطې وضعيه کميتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه يې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وي د تابع ګراف مقعر دی يعنې ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وي د تابع ګراف محدب دی يعنی ګراف اعظمي نقطه لري.

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\acute{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پيدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

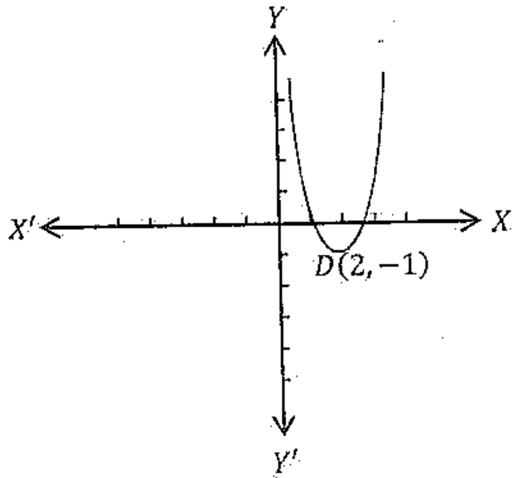
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$A(1,0) \quad , \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$x = 0$
$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$
$y = 3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطې دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.او د (x) قیمت پیدا کوودا قیمت په تابع کې وضع کوو.د (y) قیمت لاس ته راځي د (x) او (y) یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي.بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده.او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2,-1)$



دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف یې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $X\acute{X}$ سره تقاطع:

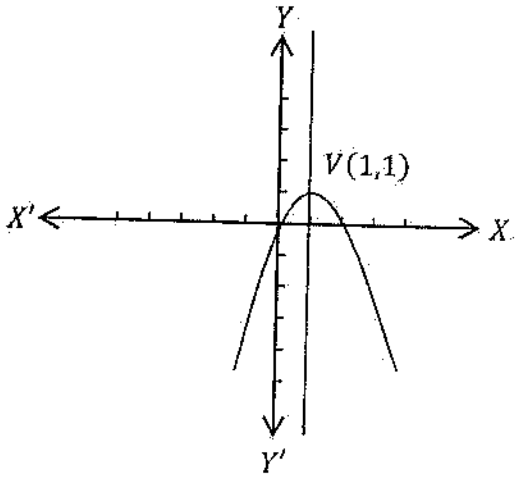
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY' سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. نومشتق يې نيسو.

$\acute{f}(x) = -2x + 2$
$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموگرافيک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي.عمومي شکل يي دادی
$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$

مجانب:- $Asymptote$: که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کی صفر شي دا مستقيم ددی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربښود دي.

مجانب په دری قسمه دی.

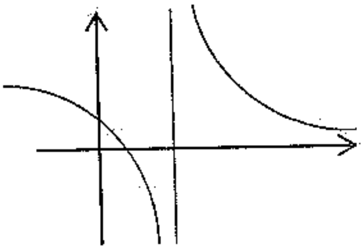
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب :

که په يوه ثابت عدد کی د تابع ليميټ (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د گراف عمودي مجانب دی. يعني که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.



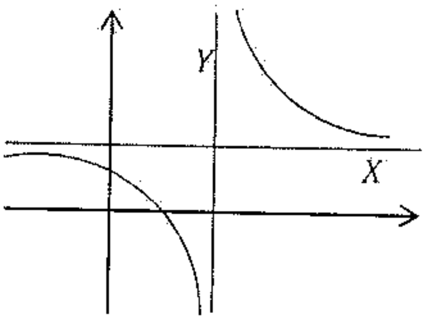
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لايتناهي کې د يوې تابع ليميټ يو ثابت عدد وي او نو هغه خط چه د دې ثابت عدد په ترتيب د YY' د محور سره موازي رسميږي د راکړشوې تابع افقي مجانب دی. يعنې که:

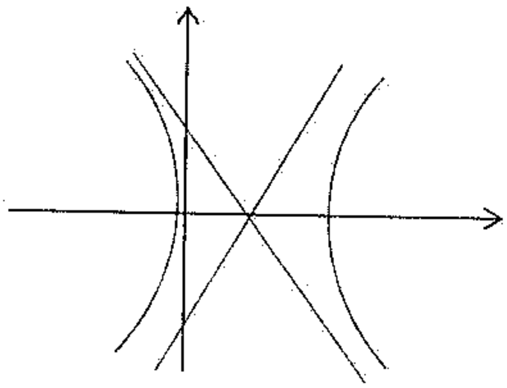
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دې.



3- مايل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کې که دصورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه ډېره وه نو دغه ډول تابعګانی مايل مجانب لري دمايل مجانب دترسيم لپاره صورت په مخرج ويشو خارج قسمت د مايل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

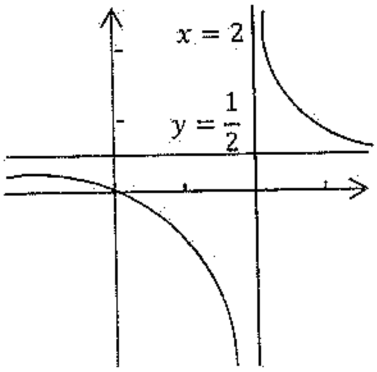
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مایل مجانب یې پیدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.



دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مایل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x + 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow y = x + 2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هرې تابع ګراف چه مایل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دریم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مایل مجانب نلري.

د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کی (m) دصورت درجه او (n) دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د (x) محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی (b) د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضریبونو نسبت دي.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مایل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجی څخه د واحد په اندازه ډېره وي مایل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزاید او تناقص په باب خپل نظر ولیکئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انعطاف نقطه یې داسې پیدا کیږي.

$f'(x) = 0$

$3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0$

$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$

$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$

$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$

$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$

$y_2 = 0$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 6x + 6$$
$$f''(x) = 0$$
$$6x + 6 = 0$$
$$x = -1$$
$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

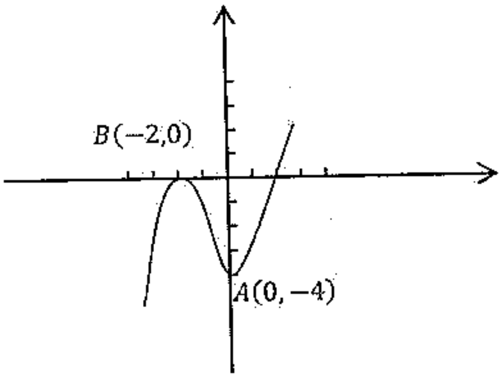
د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$
$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x - 1 = 0 \\ x = 1 \\ C(1,0) \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} (x+2)^2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = -2 \\ D(-2,0) \end{matrix}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$$
$$E(0,-4)$$



دویم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \;\Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;\Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \;\Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \;\Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

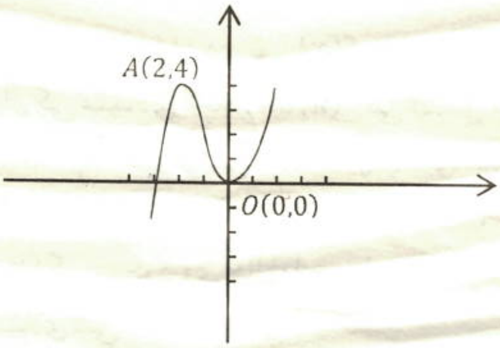
انعطاف نقطه پیدا کوو دویم جذر یي پیدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

$f(1) = 2$

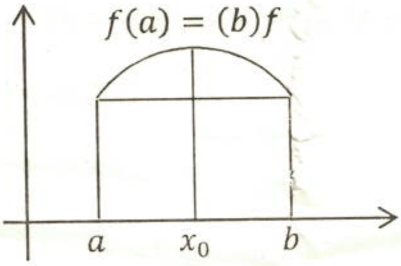
$C(1,2)$



د رول قضیه: *Theorem of Rolle*:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انټروال کې یو تکې شته چه $(x_0, f(x_0))$ $f'(x) = 0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي. نو دغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ نقطه کی $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a,b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضیه پری تطبیق کړئ؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضیي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د (x_0) یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنګه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی دری ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a,b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضیه تطبیق کړئ؟

حل: دانټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیره نده مګرد رول قضیه پری دتطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د (x_0) یو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي اوهغه $x_0 = 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د (a,b) په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د (a,b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ یعنی $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $g(x)$ په $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ بنیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو د رول د قضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د (c) یو داسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادي ده اود $(1,3)$ په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$ په انټروال کې یو (x_0) شته چه

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د (c) دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f'(x_0)=6x^2-8=18\Rightarrow 6x^2=18+8=26\Rightarrow x^2=\frac{26}{6}$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x=+\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x=-\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کې .که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یې نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{8+2-10}{4-4}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x+5x-10}{x^2-2^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)+5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

دبحراني ټکو تطبیق:

1- داسې دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل یې (20) او د ضرب حاصل یې اعظمي وي؟

حل:

$x =$ اول عدد

$20-x =$ دویم عدد

$f(x)=x(20-x)=20x-x^2 =$ د ضرب حاصل

$$f'(x)=20-2x$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0\Rightarrow -2x=-20\Rightarrow x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي نقطه $[10,100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحی تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګیرېډ او فارنهایټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګیرېډ او فارنهایټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوی مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د مستطيل طول} = x$$

$$\text{د مستطيل عرض} = y$$

$$\text{د مستطيل مساحت} = S$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$محیط = 2x + 2y = 200$

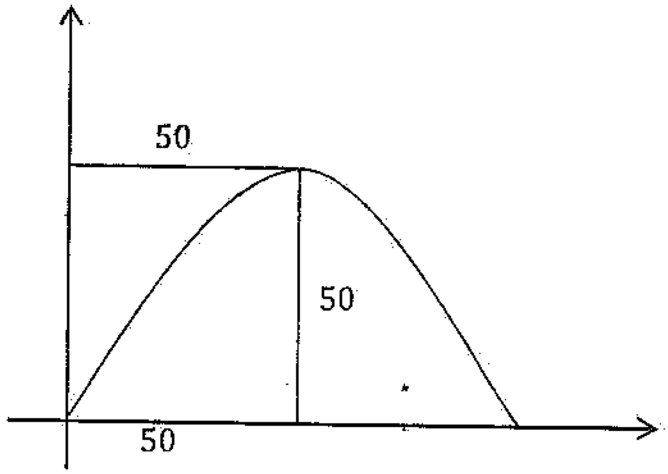
$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$

د $[0.100]$ په انتروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$\acute{S} = 100 - 2x$

$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د (A) او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$

$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$

$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{2x^4}{2}=\frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4=4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}$$

$x_1=\sqrt{2} \quad \& \quad x_2=-\sqrt{2}$

$$d_{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^2+\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=2+\frac{4}{2}=4$$

$d_{-\sqrt{2}}=4$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د دری واړه بعدونو مجموعه يي (24)ده اعظمي حجم يي پيدا کړئ؟

حل: دقاعدی اوږدوالی په (x)او ارتفاع په (y) ښيو.

$x+x+y=24 \ \Rightarrow y=24-2x$
$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$
$V=x^2 \cdot y=x^2(24-2x)=24x^2-2x^3$
$\acute{V}(x)=48x-6x^2 \quad \because \acute{V}(x)=0 \quad \therefore \quad 48x-6x^2=0$
$x(48-6x)=0 \quad , \quad x_1=0 \ \& \ x_2=8$
$V(0)=24\cdot 0^2-2\cdot 0^3=0$
$V(8)=24\cdot 8^2-2\cdot 8^3=1536-1024=512$
$V(12)=24\cdot 12^2-2\cdot 12^3=3456-3456=0$

د مکعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اولسم فصل

انتیګرال *Integral*

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

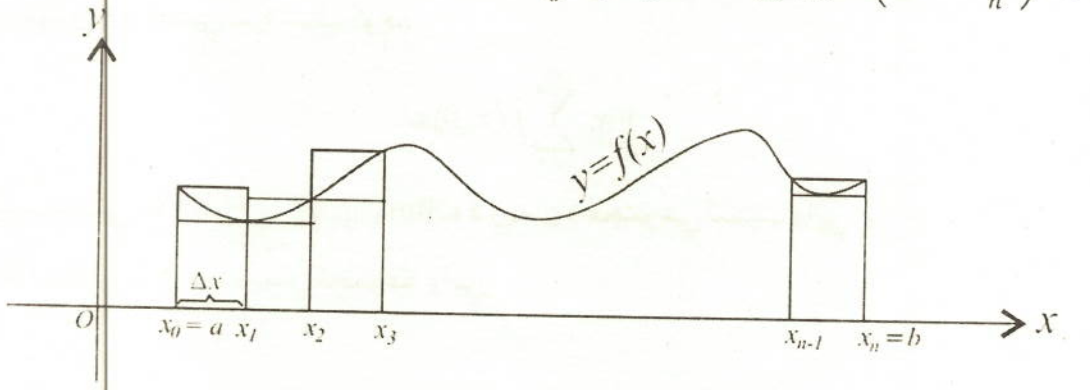
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعملیي معکوسی عملیي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز($\int$) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غیر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوتر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

د ریمان مجموعه *Riemann's sum*:

فرضاً $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y=f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a\,,b]$ ترلی انتروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x=\frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د هرمستطیل دهر انتروال اوږدوالی د $i = 1,2،3،4، \cdots، n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1]\ , [x_1, x_2]\ , [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1},)\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښيو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندویچ د قضیې سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وايي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او (xx') د محور تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0{,}2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \; , \quad [x_1, x_2] \; , \quad [x_2, x_3] \; , \quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \; , \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \; , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \; , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د ګراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \qquad , \; A(0,1)$$

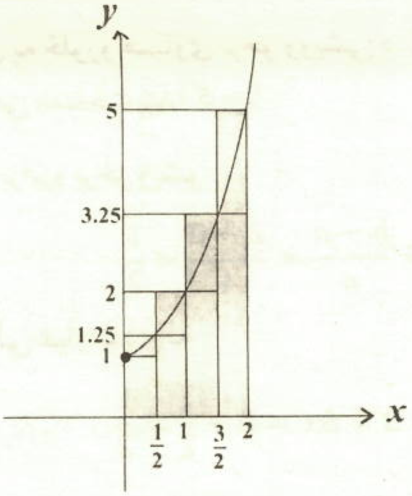
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \qquad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad E(2,5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مجموعه د مساحتونو د لاندينيو مستطيلونو $= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2}$

$= 3.75$

مجموعه د مساحتونو د پورتنيو مستطيلونو $= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}$

$= 5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعی ليميټ د $[1،10]$ په انټروال کی پيدا کړئ؟

حل: پوهيږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a + x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2+9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دويم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو وويشئ او $y = 3x$ د مستقيم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$

$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$

$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$

$[0,1] \quad , \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(0) = 0\,, \qquad A(0,0), \qquad f(1) = 3(1) = 3 \qquad B(1,3)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \quad , f(2) = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D(2,6)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right) \,, f(3) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow F(3,9)$

د انتیګرال مفهوم $Concept\ of\ Integral$:

انتیګرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق یې موجود وي یا د ریمان د مجموعی لیمیټ ته انتیګرال وایي. د انتیګرال علامه دا ($\int$)ده چه د ریمان دمجموعی Sum د لمړي توري غزیدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\, dx$$

چه دلته $f(x)$ داتیګرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ دتابع د انتیګرال متحول دي.

د انتیګرال اقسام:

انتیګرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیګرال

2- معین انتیګرال

1- غیرمعین انتیګرال $Indefinite\ Integral$:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع وي نود $F(x) + c$ دتابعګانو سیټ د $f(x)$ دتابع غیرمعین انتیګرال دی. اوداسی لیکل کیږي.

$$\int f(x)dx = \quad F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بې د ثبوته منل شوي دي.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یې داسې پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو د مجموعې اوتفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال يې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 + \int 9xdx + \int dx$$
$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي

الف: لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int [(x+1)(x-2)]dx$$
$$= \int (x^2 - x - 2)dx = \int x^2 dx - \int xdx - 2\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ب: د هرې تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو

$$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (x+1)dx \cdot \int (x-2)dx$$
$$= \left[\int xdx + \int dx\right]\left[\int xdx - 2\int dx\right]$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + c = \left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right) + c$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \neq \left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right) + c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګاني راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2+2x+1)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int dx$$
$$= \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$
$$\int (1+x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$
$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$
$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$
$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}dx = 2\cdot\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^xdx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^xdx = 4e^x + c$

د $\int a^xdx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیګرال *Definite Integral*

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعې لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ ته وکړي نو د $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیګرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال: د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

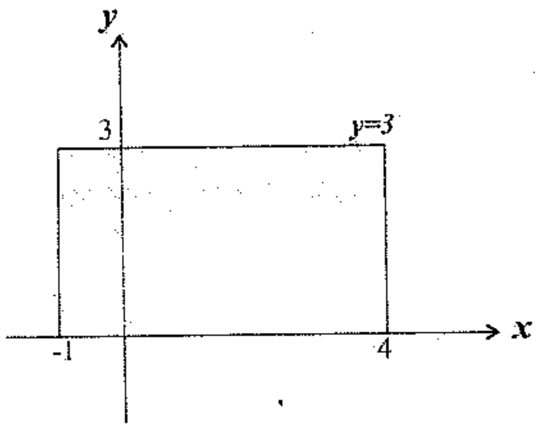
$\int_{-1}^{3} 3dx$ د مستطیل مساحت رانښیي

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقیم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کی جوړیږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال : د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انټروال کی محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص $Properties\ of\ definite\ integral$:

1- د $[a,b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیګرال یعنې $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د $i-$ ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د x_i چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په (n) مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعې او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع او په $[a, b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نو انټیګرال یې صفر دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2dx$ انټیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_3^3 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انټیګرال په یوه انټروال کې د تابعګانو د انټیګرالو د مجموعې او تفاضل د انټیګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انټیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې نیول شوی دي نو:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_a^b f\,(x)dx \pm \int_a^b g(x_i)dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

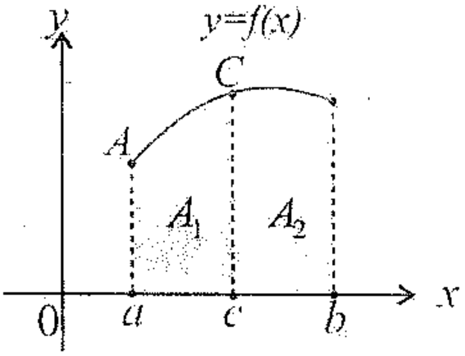
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چېرته د $f(x)$ يوه تابع چه په يوه تړلي انټروال چه د a ، b او (c) ټکي پکې شامل وي او انټيګرال منونکي وي. نو د ټول انټروال انټيګرال د انټروال د ټوټو د انټيګرالو د مجموعې سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ويشو.



$A=\int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحې مساحت دی چه د $f(x)$ د تابع د ګراف او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د گراف د توټو مساحت دی. نو ليکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:-که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعگانی په $[a,b]$ کی انتیگرال منونکي وي او $g(x) \geq f(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دي پس ليميټ يې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښياست چه

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اطراف په $(b-a)$ ویشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\le 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\le \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6} \quad \Rightarrow -1<2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$
$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

دغه قضیه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=$ $e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چه:

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0)\le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

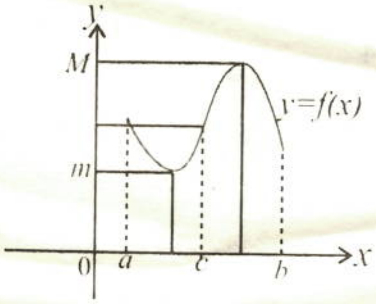
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کی متمادي وي نو د (c) يو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قیمتونه په ترتیب سره د $[a,b]$ په انټروال کی د تابع اصغري او اعظمي نقطی دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی اود هر (c) حقیقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادیږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي او حاصل ضرب يي د مستطیل مساحت دی. یعنی:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c) قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x) په عوض (c) وضع کوواو د متوسط قیمت د قضیي څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

دانتیګرال او مشتق اساسي قضیي:

اوله قضیه :

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او (x) په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نولیکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\big|_a^{x+h} - F(x)\big|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنییو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t\big|_a^{x+h} - F(t)\big|_a^x)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{F}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیي څخه لیکو چه :

$$f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x<c<x+h$

$$\acute{F}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)=\int_a^{g(x)}f(t)dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

$$\acute{F}(x)=f\big(g(x)\big)\cdot\acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ دتابع اولنی تابع اود $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي پدی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په (k) ښيو:

$$f(x)-F(x)=k\Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k\cdots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k\Rightarrow 0-F(a)=k\Rightarrow k=-F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کې وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کيږي. دغه رابطه د اولني تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتيگرال تر منځ رابطه ښيي چه د نيوټن (لايبنز) په نوم ياديږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتيگرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعويضي طريقى سره د انتيګرال نيول:

[illegible] انتګرال دلاس ته راوړلو لپاره يي

$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنيو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنيو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتيګرال پيدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دويم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غير معين انتيګرال کی هم د تطبيق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دويم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

قسمي انتيګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ ښيو او د حاصل ضرب مشتق يې پيدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\,udx = u \cdot v - \int \acute{u}\,vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

که (u) او (v) تابعګانې د $[a,b]$ په انتروال کې تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b \acute{v}\,u\,dx = u\cdot v|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\,dx \quad \text{V} \quad \int_a^b udv = u\cdot v|_a^b - \int_a^b vdu$$

لمړی مثال: د $\int x\sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h\int_a^b \acute{v}\,u\,dx = uv|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\,dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوګاریتمي او اکسپونتنشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کیږي او څرنګه چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

-2 که $g(x)=a^x$ وي نومشتق يې دلاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\acute{g}(x)=a^x\ln a$$
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$
$$(\ln y)'=(x\ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y}=1\cdot\ln a+x\cdot 0=\ln a$$
$$\acute{y}=y\ln a=a^x\ln a$$

د اعشاري لوګاريتم مشتق:

د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له :

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کیږي او کله چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}'=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

$$\acute{f}(x)=\{\log_a g(x)\}'=\{\log_a g(x)\}'\cdot\acute{g}(x)$$
$$=\frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot\acute{g}(x)=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$ln\, y = ln\, e^x = x\, ln\, e = x$$

$$(ln\, y)' = \acute{x} \quad \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u\, ln\, a$$

3- که په لوګاريتمي تابعګانو کې د لوګاريتم قاعده د طبعي لوګاريتم څخه اعشاري لوګاريتم ته بدله شي ټول لوګاريتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اويا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\acute{u}}{u\log_e a} = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دويم مثال:

$$f(x) = ln(x^2 - 5x + 4) \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال:

$$f(x)=\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}$$

$$f'(x)=\left(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}'$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$

$$=x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}$$

$$f'(x)=\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}'$$

$$=\frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}'-\{\ln(x^2-1)\}']$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y=e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y=\sqrt[x]{2}$$

$$\ln y=\ln\sqrt[x]{2}=\ln 2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[x]{2} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال : د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اوم مثال :

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x\log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y} = ?$

$x^2 + 1 = u$

$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$

د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانی يو د بل معکوس وي نو مشتقونه يي هم يو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

يا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخی ليکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پيدا کړئ؟

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$

$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$

د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پيدا کيږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-1

$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

-2

$y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2 y}} \Longrightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 y}}$$

$$= cos^2 y = \frac{cos^2 y}{1} = \frac{cos^2 y}{sin^2 y + cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2 y}{cos^2 y}}{\frac{sin^2 y}{cos^2 y} + \frac{cos^2 y}{cos^2 y}} = \frac{1}{tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

-4

$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2 y}}$$

$$= -sin^2 y = \frac{-sin^2 y}{1} = \frac{-sin^2 y}{sin^2 y + cos^2 y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{-sin^2y}{sin^2y}}{\frac{sin^2y}{sin^2y}+\frac{cos^2y}{sin^2y}} = \frac{-1}{1+cot^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لمړی مثال: - د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4\frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: - د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دریم مثال: - د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی د مجموعې څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بېنومونه وي. لکه

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-3x-10)+C(x^2-6x+5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$
$A-3B-6C=-1$
$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم حالت:

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دريم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غېرتکراري ترينومونه وي،په صورت کې يي بېنوم ليکل کيږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$$A+C=5$$

$$A+B+2C=8$$

$$B+4C=9$$

$$A=3 \quad , \; B=1 \quad , \; C=1$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \;\; \& \;\; a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \quad , \; \frac{du}{dx} = 0 \quad , \; du = 0 \cdot dx$$

$$v = a^x \quad , \; \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x \cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي نو انتیګرال یې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال یې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\; \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \quad , du = \frac{1}{x}\log_a e\, dx$$

$$v = x \quad , \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\, dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شو چه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2}e^{-2x-3}\,dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{1}{2}e^{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x + 2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x}dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{e^{u}}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x\cdot\ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x \ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیگرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \ , & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 \ , & u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \qquad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x \ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتیګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیګرال پیدا کړو نو لمړی یي قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیګرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمړی مثال : $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$

$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$

$$28-4B+2B=12$$

$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت يي دلاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی مثبت اومتمادي وي یعنی $y = f(x) \geq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کی پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کی پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د (y) قیمت په اوله معادله کی وضع کوود (x) قیمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

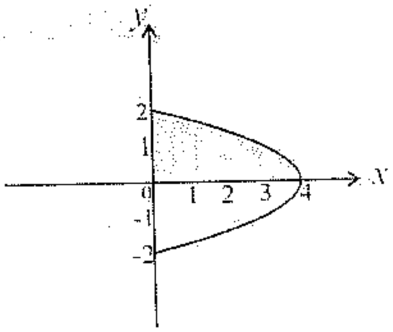
$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د y قیمت لاس ته راځي

$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2) \qquad C(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2) dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = 2\left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{24-8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$\acute{y} = -x$

$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$

$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

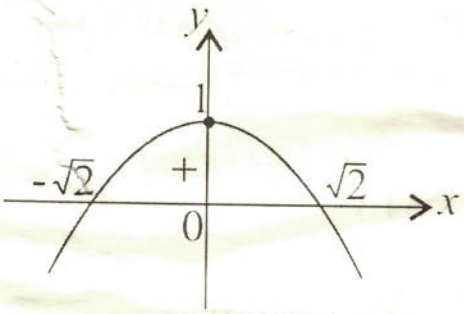
$y = 0$

$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\left(\left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A = 2\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6} - 0\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6}\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دریم مثال: د هغه سطحې مساحت پیدا کړئ چه د $y = x^2 - 3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y = x^2 - 3 \quad , \quad \acute{y} = 2x$

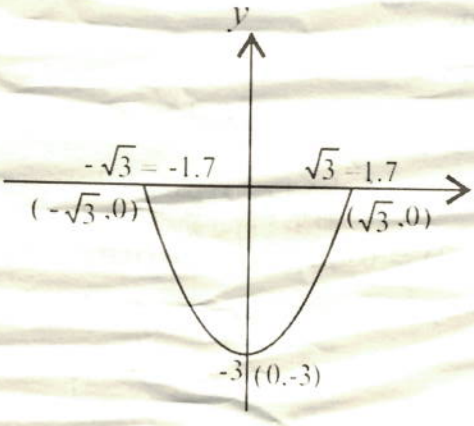
$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad x = 0$

$y = 0^2 - 3 = -3 \quad , \quad A(0, -3)$

$y = 0$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$B(\sqrt{3}, 0) \qquad C(-\sqrt{3}, 0)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چه ګراف يي د $y = x^2 - 3$ د محور لاندی واقع دی نو انتیګرال يي منفي دی. او څرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يي د سر حداتو دنیمايي څخه پیدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_{0}^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}} - [3x]_{0}^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پیدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$

$$\acute{y} = 2x - 3 \quad \Rightarrow \acute{y} = 0$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

بحراني نقطه $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

څرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطی د پیدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \quad , x_1 = 0 \quad , O(0,0)$$

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = 3 \quad , \quad B(3,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

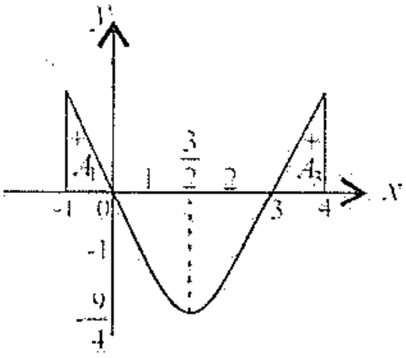
$$A = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



پنځم مثال:د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

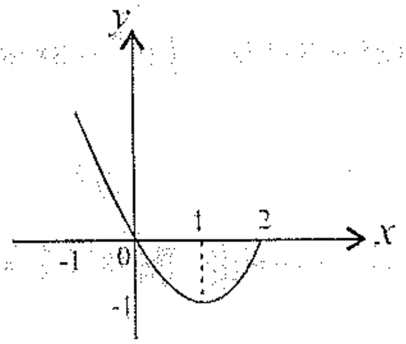
$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع تقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \quad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تیریږي یوه برخه یې د $[-1,0]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یې مثبت دي. بله برخه یې د $[0,2]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ دمحور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یې منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو د مساحت محاسبه چه د منحني خطو پواسطه محاصره وي:

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنیګانو پواسطه د محصور شوی سطحی دمحاسبې لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انتیګرال څخه د لاندینی تابع انتیګرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

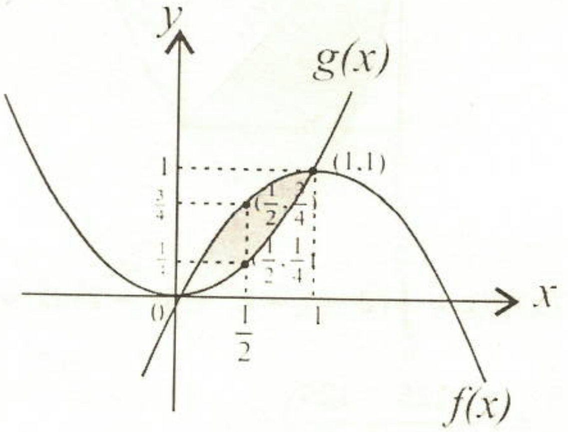
که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x) = 2x - x^2$
$g(x) = x^2$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$
$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$
$2x(1 - x) = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$



د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال :د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

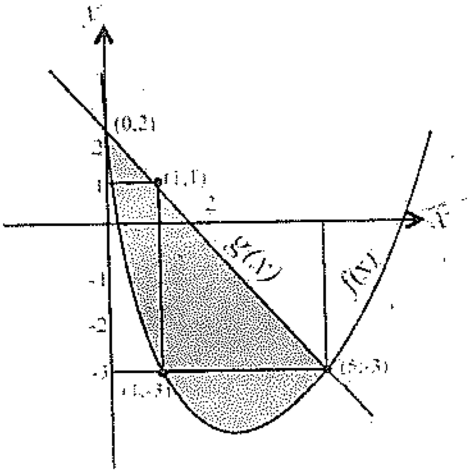
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$
$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$
$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$

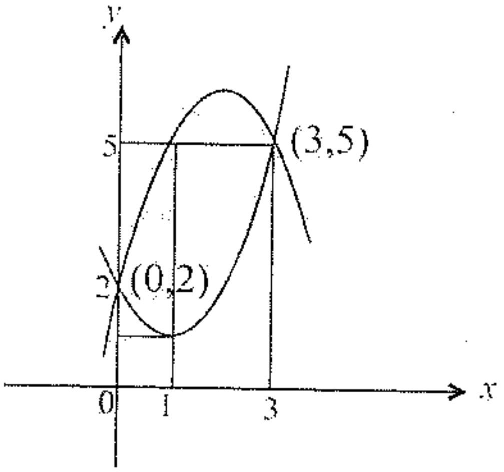
د منحنیګانو تقاطع نقطی عبارت دي $B(3,5) \quad , \quad A(0.2)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$

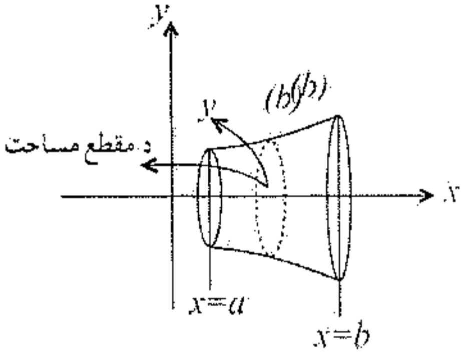


(c) ketabton.com: The Digital Library

دکروي اجسامو دحجمو محاسبه:

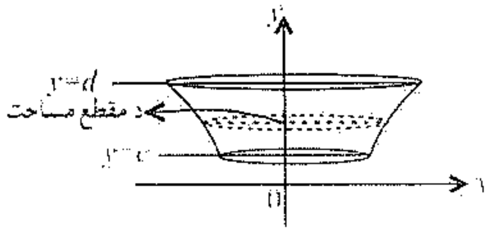
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ دتابع ګراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کی محصوروي د منحني خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع یي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دایروي سطحی دي چه مساحتونه یي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع یي $y = r$ ده د حجم فارمول یي د ریمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني ګراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت یي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع یي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع یي $y = r$ ده حجم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.



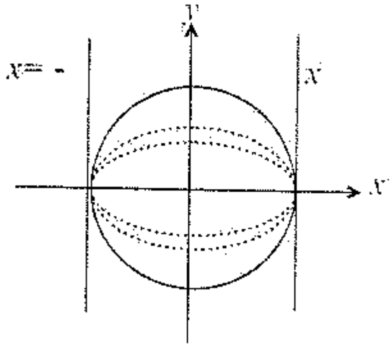
$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایری معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمی کری حجم د دایری د معادلی څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو بيي د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

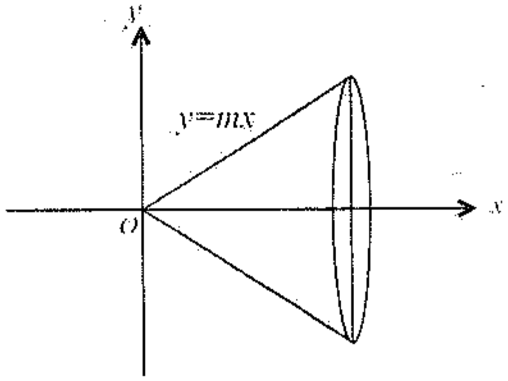
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتی نقطی په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$y = mx$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

$$\text{د مخروط حجم} = V = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د پورته شکل څخه معلومیږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعنی $y//r$ اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندی منطبق ده يعنی $(x = h)$ نود $y = mx$ په رابطه کی يي قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

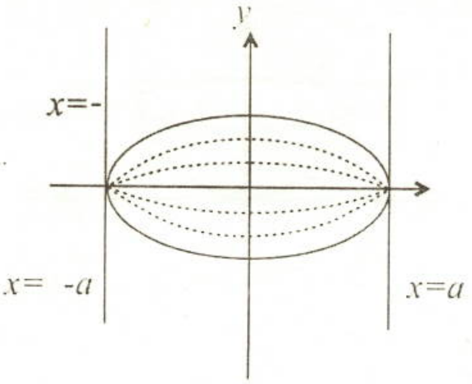
د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول

هغه بيضوي چه مرکز يي د وضعيه کمپتونو په ميداء واقع وي معادله يي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمی بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يي د ټولی بيضوي حجم لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

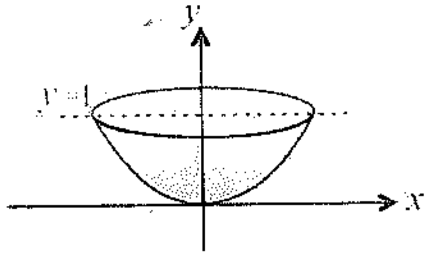
$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښی تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟

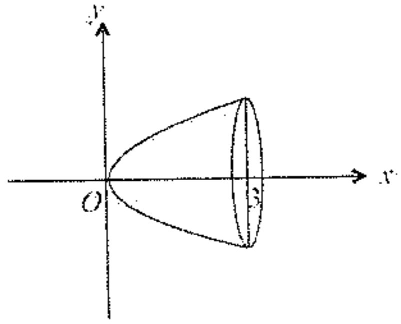
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$$

$$= \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پیدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنیګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

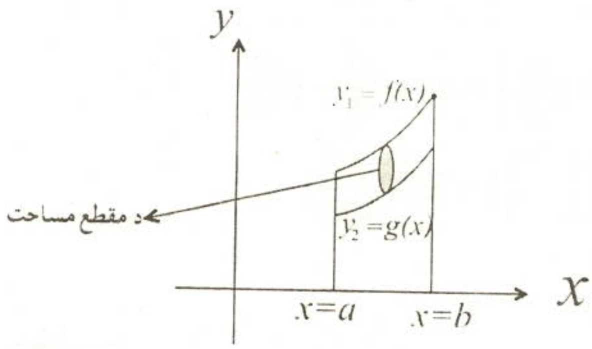
$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) = \left(\text{استوانې د مقطع مساحت}\right) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع ګراف د $g(x)$ د تابع د ګراف

شخه پورته پروت وي

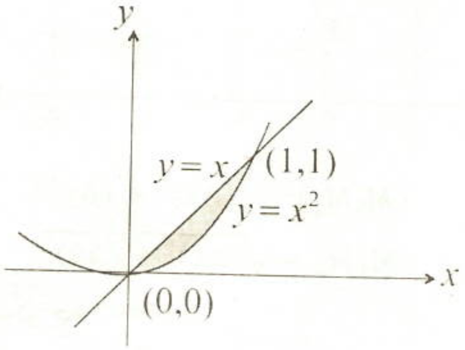


$$V = \int_a^b \pi(y_1{}^2 - y_2{}^2)dx = \pi\int_a^b (y_1{}^2 - y_2{}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع ګراف د $f(x)$ دتابع د ګراف شخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2{}^2 - y_1{}^2)dx = \pi\int_a^b (y_2{}^2 - y_1{}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کربنی تر منځ د (x) د محور په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.



$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

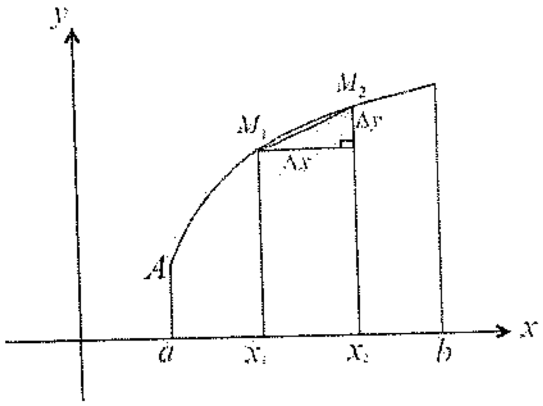
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په دری ټوټو ويشو د A, M_1, M_2 اود B د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بيا M_1 د M_2 سره په يوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسموواو دتقاطع نقطه په H ښيو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوودفيثاغورث دقضيي سره ليکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم ليکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعې څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

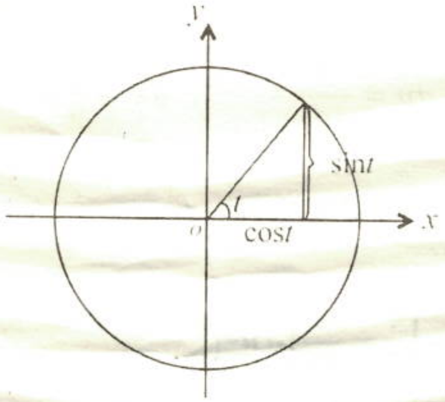
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایرې محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایرې نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r =$ د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړشوی ده د (x) دپارامتر په پام کې نیولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \le x \le 4$ انټروال کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کی راکړ شوی دې د (y) دپارامتر په پام کی نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{\acute{f}^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کی حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad \acute{f}(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \quad , \quad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \quad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

تفاضلي معادلي *(Differential Equations)*:

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یویاځو مستقل اوغیرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلی بلل کیږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
که په يوه تفاضلي معادله کې ديوه غېرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته
ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \quad (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتومستقلومتحولو ته ونيول شي دغسې ډيفرينشيال
معادلې ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډيفرينشيال ترتيب:

ديوې افادې دمشتق نيولو شمېرې ته د ډيفرينشيال معادلې ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چه دافادې څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ډيفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د
(d) دتوان څخه معلومېږي

د ډيفرينشيال معادلې درجه :

د مشتق دلوړ ترتيب توان ته د ډيفرينشيال معادلې درجه وايي.

که د ډيفرينشيال معادلې توان کسري وي. توان يې بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني معادلی درجه (2) ده:

د $y'''=\sqrt{4+y'}$ یا $y''''=\sqrt{5x+3y}$ معادلو درجه یوه ده.

کله کله یوه دیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\sin x)\frac{d^2y}{dx^3}-\cos xy=0$$

دپورته معادلی درجه معلومه نه ده.ځکه چه د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کی ده نو نه شو کولای چه دپولینوم په شکل یي ولیکواونه یي مشتق پیدا کیږي.

خطي دیفرینشیال معادلی Linear Differential equation

هغه دیفرینشیال معادله ده چه د (y)اول مشتق یي موجود وي او د (y) او (y') دضرب حاصل یي معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx}+5\frac{dy}{dx}+3y=0$$

$$\frac{dy}{dx}-x^2y=3x$$

هغه دیفرینشیال معادلی چه خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non-linear\ equation)$ په نوم یادیږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4y^2=0 \qquad (\text{د } y \text{ توان} \neq 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+7x\cdot\frac{dy}{dx}+12y=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin xy=0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\frac{d^2y}{dx^2}+3y=0$$

ځرنگه چه د دغه معادلو پروګرام د لیسی د سویئي څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د دیفریشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتلسم فصل

احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي. قاعده یي داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډیر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسی نور.

داتا Data:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاً په څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه
2-دلیکنو پواسطه
3- د لیدنی پواسطه
4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوی کورنی د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوی کورنی عایدات زیات وي په ذهن کی یي حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یي دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی یي لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وسائل شي او ورڅخه لاړ نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاګرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعنامه وکتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً ديوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي.جامعه بلل کيږي .

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کيږي او د جامعې خواص پکې موجود وي .لکه يو موټي وريجې د يو ګدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دپه يوه صفت موصوف شيانو څخه د يوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه بايد د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي بايد په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي اوکه نه. مثلاً که د دولت په مامورينو کې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يې:

که په يوه ټولنه کې د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- کیفي تصادفي متحول

2- مقداري تصادفي متحول

1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یې په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري.لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، یا د یوه کلي دیندراه خلک

2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلا عاتو معلومات یې په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دی.

الف: متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات یې په عدد سره کیږي او د پرلپسی عددو تر منځ یې عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسی عددو تر منځ یې عدد موجود وي.

دفریکونسي جدول $Table\ of\ frequncy$:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکې ترتیب شوی وي.که جدول په عمودي ډول ترتیب شوې وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګانې یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یې د داتاګانو فریکونسي ښیي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي اوښې طرف فریکونسي ښیي.او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي اودویم سطر د هری داتا فریکونسي ښیي.

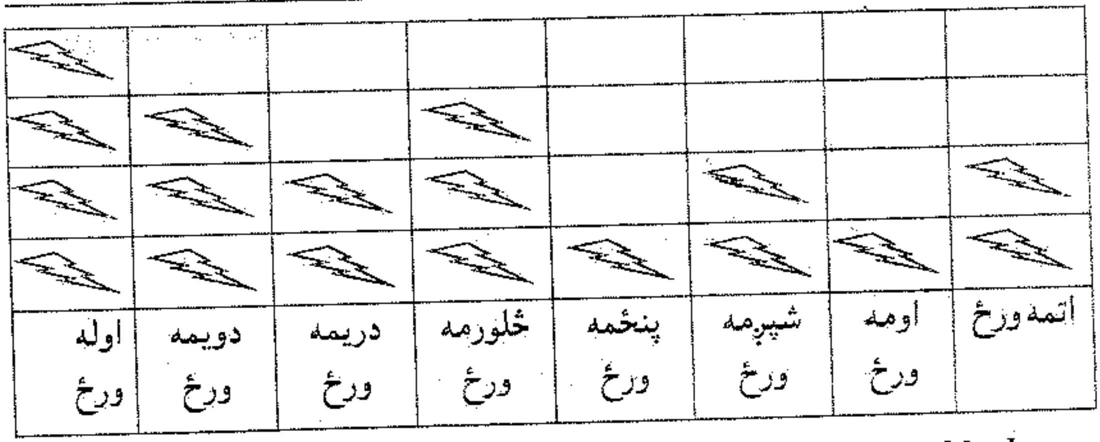
دکورنۍ غړي	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموعه
دکورنۍ شمېر	4	7	9	8	6	2	3	1	40

انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کې استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرڅی کړي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



موډ $Mode$:

دراټول شوو معلوماتو زیاتې فریکونسۍ ته موډ وایي.

موډ د مالونو په خرڅولو کې ، د رایو په اچولو کې ، د امتحان په نمرو او داسې نورو شیانو کې استعمالیږي.

اوسط $Mean$:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وایي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال : یو دکاندار په اوله ورځ څلور کتونه په دویمه ورځ پنځه کتونه په دریمه ورځ شپږ کتونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول يي د ورځې څو کتونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مجزا داتا گانو د کثرت جدول:

هغه جدول دې چه په هره طبقه کی د داتاگانوشمېر راښيي.

مثلاً د یوه ټولګي د شاګردانو د رياضي دمضمون نمري په یوه جدول کی لیکل شوي دي دا نمري په ګروپو ويشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرليکو په دغه شمېرکی زيات عدد ته د داتا کثرت وايي . اودی جدول ته د داتاگانو دکثرت جدول وايي که په جدول کی د داتاگانو دکثرت عدد کوچنی یا صفر وي. دجدول جوړول فايده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول یې داسی جوړیږي.

نمري	شمېر
0 -9	0
10 – 19	1
20 - 29	3
30 -39	2
40 -49	7
50 -59	11
60 -69	5
70 -79	11

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټيټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وايي.هغه داتاگانی چه په یوه طبقه کی راځي د طبقی د وسعت په نوم یادیږي.د یوی طبقی د وسعت دپيدا کولو دطبقی سرحدات یو دبل څخه منفي کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$50 - 0 = 50$	د لمړی طبقې وسعت
$60 - 50 = 10$	د دويمې طبقې وسعت

ډله ايز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هری مياشتي د رخصتی ورځو ته کثرت ووايو نود ټول کال د رخصتيو مجموعه ډله ايز کثرت يا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاگانو کثرت}}$$

مثال: په يوه ازموينه کی د دوه ټولگيو نمری په لاندی جدول کی راوړل شوي دي دا ټولگي د نمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

مطلق کثرت	د الف ټولگی
6	10-30 ضعيف
10	50- 30 متوسط
4	70- 50 ښه

مطلق کثرت	د ب ټولگی
19	30- 10 ضعيف
25	50- 30 متوسط
16	70- 50 ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10- 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30-50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50- 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

د ب ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10-30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30-50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50=70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

میله اي ګراف

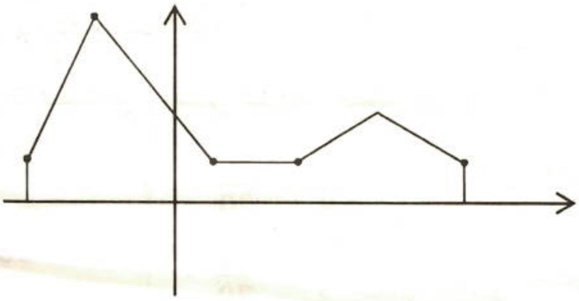
که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد یي یوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله یي ګراف وایي .

مثلاً دخو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل یي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط:

داتاګانی جمع کوو اود داتاګانو په شمېر یي ویشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.د داتاګانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاګانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو یي د داتاګانو په شمېر یي ویشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.که د داتاګانولمړی ګروپ په x_1 او فریکونسي یي په f_1 وښیو او اوسط په $\acute{x}$ وښیو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رئیس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدیر وایي چه بایداوسط عایدباید 30000 وي ووایاست چه دادعا درسته ده

$f \times x$	x	f	job
$1 \times 50000 = 50000$	50000	1	رئیس
$2 \times 40000 = 80000$	40000	2	مرستیال

(c) ketabton.com: The Digital Library

منشي	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتی داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیانی مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نږدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

د هری بوری وزن	د بوریو شمېر
6 - 6.5	11
6.5 - 7	14
7 - 7.5	12
7.5 - 8	8

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

دبوریو وزن	دبوریو شمېر
6.25	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.75	14
7.25	12
7.75	8

د بوریووزن $x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

د بوریو شمېر $n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$

په اوسط ډول د بوریو وزن $\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$

د داتاګانو د ګېډې کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدی ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډې جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 − 120

120 − 128

128 − 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

د ګېډې اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت دګېډیو په شمېر وویشل شي دګېډې طول يااوږدوالی لاس ته راځي.

میله ئي ګراف:

که مربعګانی یا مستطیلونه سر په سر کېښودل شي .میله ئي ګراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلی داتاګانی وايي . د دسته بندی لپاره يي هغه داتاګانی چه د واحداتو اندازه يي نژدی وي په يوه ګېډې کی ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندی ډول ليکل شوی دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	.132	146

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ.

د ذده کوونکو دونی اوږدوالی	دذده کوونکو شمېر
130 − 140	6
140 − 150	5
150 − 160	4

وزني اوسط يا منځنی قيمت:

وزني اوسط يا منځنی قيمت په مجموعه يي ويشو. هره داتا په مربوطه ضريب کی ضربوو او د داتاګانو په مجموعه يي ويشو.

$\acute{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د ځينو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري يو محصل لاندې لمبرې اخيستې دي.

مضمون	نمری	د کريديتونو شمېر
رياضيات	B	3
فزيک	A	3
کيميا	C	2
بيولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمری	د کريديتوشمېر $= x$	عددي لمبری $= w$	$w \cdot x$
رياضيات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزيک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

د کریدیتونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطیلي ګراف

په مستطیلي ګراف کې د مستطیل قاعده د داتاګانو اتصال یا پیوستون راښیي. مساحت د ګېډې کثرت راښیي. که د ګېډیو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت لیکو په دی حالت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په یوه ټولګي کې د ذده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

د ذده کوونکو وزن په کېلوګرام	$40-45$	$45-50$	$50-60$	$60-70$	$70-90$
دذده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښیو او څرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ محورټول وزنونه په یوه واحد اندازه کوو $(45-40)$ په یوواحدښیو. د مستطیلو د ارتفاعګانو پیداکولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

$$40-50 \to \frac{4}{1} = 4 \to \frac{4}{5} = 0.8$$

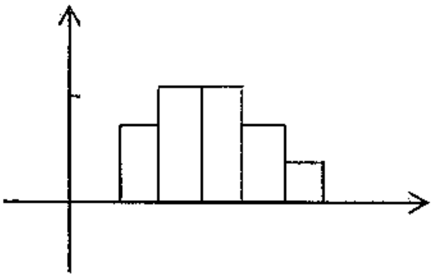
$$45-50 \to \frac{6}{1} = 6 \to \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50-60 \to \frac{12}{2} = 6 \to \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \to 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \to 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دایروي ګراف:

د دایرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دایروي ګراف وایي.

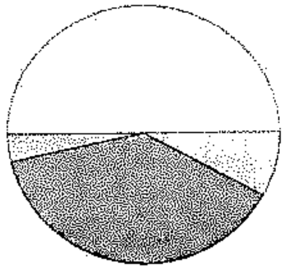
د کثرت د درجې دلاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر ليکواو په (360°) کې يې ضربوو دهرې ګېډۍ مرکزي زاويه لاس ته راځي.

$$\text{کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:-د یوې مؤسسې دکارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظیفې یې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلې دي.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$
ماشتر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$

(c) ketabton.com: The Digital Library



میانه $Median$:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څېر يي ترتيبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد يي (3) دي.که د داتاګانو شمېر جفت وي.د منځنيو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه يي داسی پيدا کيږي.(10 9 [4 6] 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ يعنی میانه يي (5) ده.

د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغير په يوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښيي.په هره اندازه چه دا توپير کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنی د وګړو تر منځ نژدېکت زيات دي. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنی د څېړنی ځانګړتياوی برابری دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور مياشتنی ازموينه کی د دوه ذده کوونکو لمبری په لاندی ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سيټونو د تحول ساحه پيدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډی کی پراګنده ګي زياته ده؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټيټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زياته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وایي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

نمری	کثرت
0 − 10	2
10 − 20	7
20 − 30	4
30 − 40	5
40 − 50	10
50 − 60	12

د انحراف اوسط یي پیدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاګانو اوسط	$f \cdot x$	$x - \acute{x}$	$f(x-\acute{x})$
2	5	10	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	15	105	$15 - 37.5 = -22.5$	$7(-22.5) = -157.5$
4	25	100	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	35	175	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	45	450	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	55	660	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
1 $n = 40$		1500		

$$f(x-\acute{x}) = -65 - 157.5 - 50 - 12.5 + 75 + 210 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کی نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز (منځنۍ نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطی وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$ نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

cl =د کلاسونو حدود	$11-16$	$16-21$	$21-26$	$26-31$	$31-36$
f_i = مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
x_i =د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه ا ختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5,0) = (13.5 - 5,0) = (8.5,0)$

$(x_2 + 5,0) = (33.5 + 5,0) = (38.5,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو ځخه تر (n) پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داولی ربعی او دریمی ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره	6	5	4	3	2	1
	140	120	100	90	85	80

د لمړۍ اودریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$q_1 = 85$ & $q_2 = 120$

صندوقچه يي ګراف:

صندوقچه يي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والي زیات روښانه ، کوي د ډېټا ګراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه ډېټا

مثال : په یوه ښارکی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دي صندوقچه يي ګراف ئي رسم کړئ.

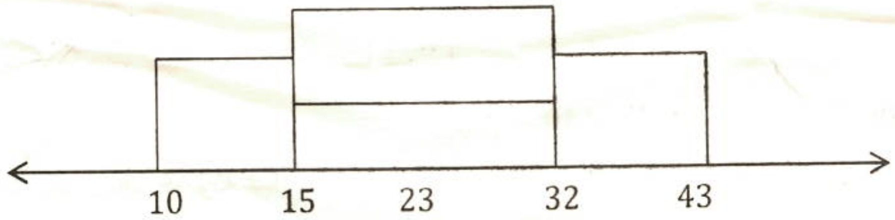
(c) ketabton.com: The Digital Library

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنی داتا په ترتیب لیکو .

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنی داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولويه داتا$(q_n = 43)$ ده میانه $(med = 23)$ده
لمړی ربعه $q_1 = 15$

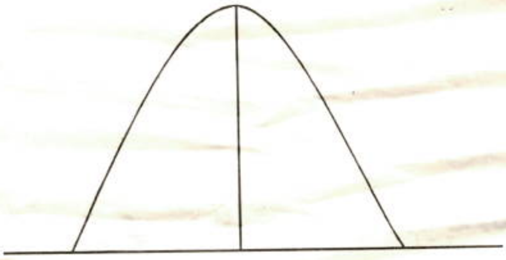


پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړی او ځلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:

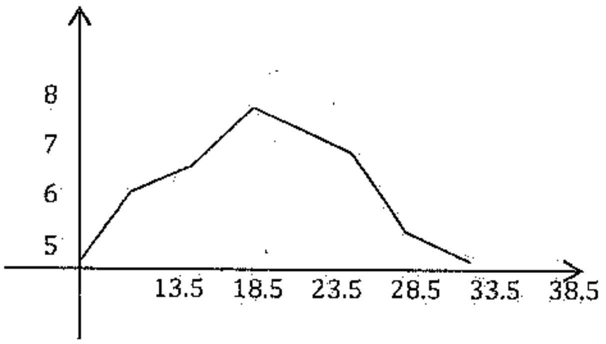
نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پيښی د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، میانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوځرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.

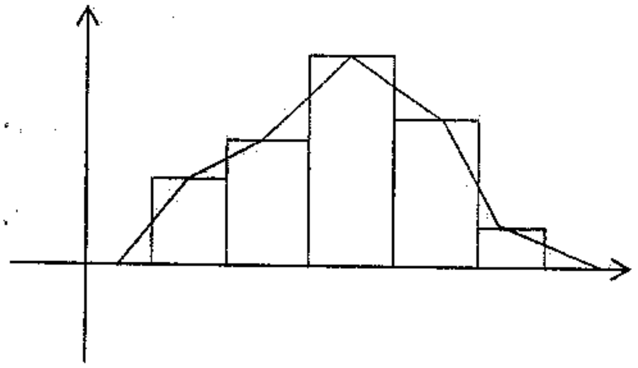


$\acute{X} = mod = med$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مستطيلي ګراف اود فريکونسي څو ضلعي ګراف:



د فريکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فريکونسي داړونده جدول د مستطيلو د پورتنی ضلعی په نیمایي منطبق دي دفريکونسي څو ضلعي مساحت دمستطيلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پاڼی ګراف *Grph of stem and wrench*:

په دوه رقمي عدد کی د لسيز رقم ساقه او د يويز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پيدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتيب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم يعنی دلسيز رقم یکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتيبوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$

د صفر څخه تر (9) پورې د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندې ډول هم لیکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

که د (1) شمارې د جدول څخه ګراف جوړ کړود ساقې او پاڼې ګراف لاس ته راځي چه (4) به يې قاعده او دقوس په منځ کې رقمونه به يې پاڼې وي.که پورتني جدول ته د 90° په اندازه دوران ورکړو. ميله يي ګراف لاس ته راځي.

3					9		
3	5		7		9		
3	5	6	7	8	9		
0	2	3	5	6	7	8	9

ربعي *Quarters*:

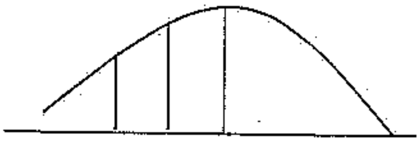
د يوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

يعنې که يو شی په څلورو برابرو برخو ووېشو برخې يي د اولې ربعې،دويمې ربعې، دريمې ربعې او څلورمې ربعې په نوم يادېږي.

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه دشي 50% اودريمه ربعه دشي 75% وي.كه داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د(Q_2)سره مساوي ده د داتا داولې نيمايي ميانه (Q_1)ده او د دويمې نيمايي ميانه (Q_3) ده.

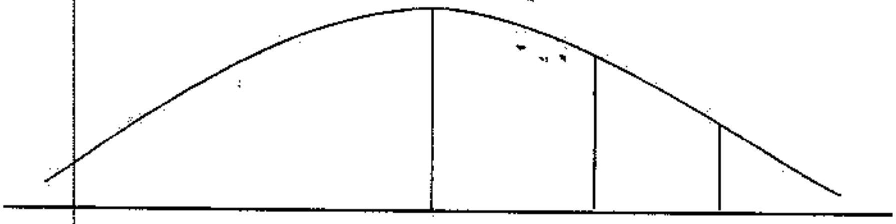
(c) ketabton.com: The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېتاګانو سره مساوي دي.اوکه اوسط د میانی کینی خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښی خواته پرتی دي زیات دی تر هغه دېتاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی دي.



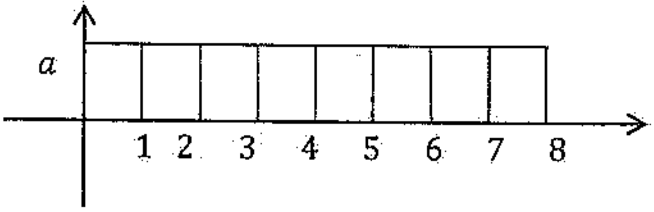
$\acute{X} = mod = med$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتی دي



$mod > med > \acute{x}$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟



$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي انحراف

ربعي انحراف یو له هغه تاکونکو څخه دی چه د ډېټا تیت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه ډېټا نژدی وي یعنی تیتوالی یې کم وي.

کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د څلورمی د نیمايي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس (*Variance*):

واریانس په لغت کی اختلاف ته وایي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاګانواو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واریانس وایې.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) یې ښیو واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \bar{x}.^2$$

مثال : دلاندې ډېټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف : د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x' = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

که دځو کلاسو دېټاګانی $x_1, x_2, \ x_3, \cdots x_n$ وي او فريکونسي ګانی يي په لاندی ډول وي $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واريانس يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تيتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يي ښيي اود لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يي د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2\acute{x} x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\acute{x}^2 \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړشوې ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (40-39.4)^2 + (41-39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د دېټا اوسط ، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي:

د بدلون یاتغیر ضریب د معیاري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کی ضرب کړودتحول ضریب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضریب دمثبتو دېټاګانو لپاره دی.که دېټاګانی مساوي وي د بدلون ضریب صفر دی.که ټولی دېټاګانی په یوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

که دهری دېټاسره یو مثبت عدد ورزیات شي د بدلون ضریب کوچنی کیږي.

مثال: د $(1،3،5)$ دېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دویم مثال: د تلویزون د تصویري لامپونو تولیدوونکې د(A) او (B) دوه ډوله لامپونه تولیدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دې معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ دضریب بدلون زیات دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی تینګښت یي کم دي.

په نورمال منحني کی تیتوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کی د $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ او یاد $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یي (700) دی.

الف: په نورماله توزیع کي د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\bar{x} \pm s$ او $\bar{x} \pm 2s$ او $\bar{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د (s) له مخی	فاصله د افغانیو له مخی	فیصدي
$\bar{x} \pm s$	11800 − 13200	68%
$\bar{x} \pm 2s$	11100 − 13900	96%
$\bar{x} \pm 3s$	10400 − 14600	99.6%

$$\bar{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \bar{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی ځکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات او هم د $(\bar{x})$ داندازی څخه ډېر دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورماله توزيع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کې د نورمال په نسبت د منحني د ټيټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي. شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص $Skewness$:

هغه توزيع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نوميږي. د لاندې دوو ضريبونو پواسطه ښودل کيږي.

الف- د خلمېدلو ضريب: د خلمېدلوضريب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره استعماليږي. فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \acute{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزيع خلمېدل مثبت دي $Possitive\ Skewness$ يعنی خمېدل يي ښي خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزيع خلمېدل منفي $Negative\ Skewness$ دي يعنی چپی خواته خلميږي. که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلميدلو(عدم تناظر) يي د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

ب- د پيرسون دخلميدو ضريب: د پيرسون د خمېده ګی ضريب په لاندې ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب $kurtosis$ شاخص:

دا شاخص ښيي چه څه وخت منحني جګوالی او څه وخت ټيټوالی لري فارمول يې په لاندې ډول دی ك

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

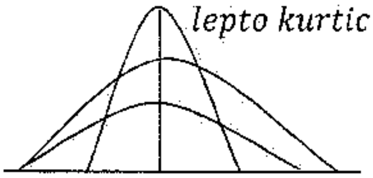
(c) ketabton.com: The Digital Library

که دکثرت جدول موجود وي نو دپړسوب فارمول په لاندي ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی (s) معیاري انحراف دی.دغه شاخص دپرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګۍ پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښیي.



حل : په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب یي د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب یي کم دی.

څومتحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کی یوازې دشاګردانو دونې په باب خبرې کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی.او که دشاګردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دې صورت کی متحولونه دوه کیږي.د دغسې متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړیږي.لمړی د متحولونو معادلې جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کووا و وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندی وڅېړل دغذاء تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیې تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړاو لاندی دېټا ګانې یې په لاس راوړلې.

$$(1.8).\ (2.3).\ (1.7).\ (3.5).\ (2.4)$$

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موږکانو شمېر	1	2	3	4	5
د موږکانو لمړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذائي موادو تر تطبيق وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

دغذائي رژیم ترتطبیق وروسته د موږکانووزن	د موږکانولمړنی وزن	دموږکانوشمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

دپراګنده ګی ګراف *Scatter Diagram*:

د دېټا داندازه کولولپاره په یوه مستوي کی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم یادیږي.

لاندي مرتبې جوړې راکړشوي دي.

$$(1،2)، (2،3)، (3،4)، (4،5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او دشېر مخ کښته خواته وي نود (y) په محور یو ډېرېږي.

د موږکانو د غذائي رژیم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2،4)، (1،8)، (2،3)، (3،5)، (1،7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع ببله ده. نو له همدغه جهته څو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او دپېوستون ضریب:

د یوه مستقیم او نقطو تر منځ دفاصلی د پیدا کولو فارمول ته دپېوستون ضریب وائي او په (r) سره يي ښيي .او د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندې د ډېټا د موږکانو د غذائي رژيم ډېټا ده.

د موږکانو شمېر	لمړني وزن (x)	وروستني وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

د موږکانو د غذائي رژيم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښيو د موږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$${s_x}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$${s_y}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پيوستون ضريب په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پيوستون ضريب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

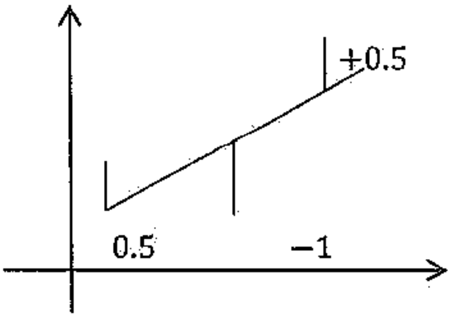
د خطي مېلان معادله:

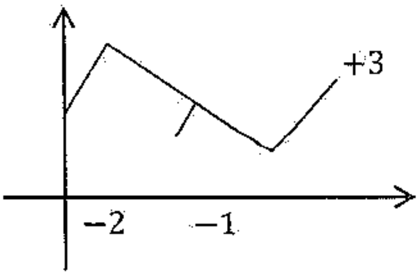
$y = ax + b$ د مستقیم خط معادله ده. چه دمستقیم خط مېلان دی.که $a > 0$ وي کرښه متزایده ده. اوکه $a < 0$ وي نوکرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي.

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسی پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پیوستون ضریب به (-1) او$(+1)$ ته نژدی وي که یوه داسی کرښه چه معادله یې $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسی تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدې وي نو د دغه کرښی د ترسیم لپاره باید یوه داسی معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نیسو

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی یې دمشاهدی څخه معلوموو.





په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفرده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت : $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومیږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی یو اوبل دمنځه یونسي نووروسته تر مربع کولو یې جمع کوو.

د خطاګانو ددویم توان جمع $= (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = 14$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم توان جمع $= (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$ دخطاګانو

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریګریشن کرښی وایي.د رګریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموعه} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$$

$$= \sum(y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د (a) او (b) دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعګانو دتګلاری په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریګریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریګریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$\sqrt{s_x{}^2}=\sqrt{2}\Rightarrow s_x=\sqrt{2}$$

$$S_y^2=\frac{\sum(y_1-\bar{y})^2}{n}$$

$$=\frac{(4-2)^2+(3-2)^2+(2-2)^2+(1-2)^2+(0-2)^2}{5}$$

$$=\frac{\mathbf{4+1+0+1+4}}{\mathbf{5}}=\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}}=\mathbf{2}$$

$$s_y{}^2=2\Rightarrow\sqrt{s_y{}^2}=\sqrt{2}\Rightarrow s_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n}=\frac{(1\cdot4)+(2\cdot3)+(3\cdot2)+(4\cdot1)+(5\cdot0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-\bar{x}\bar{y}}{s_x\cdot s_y}=\frac{4-3\cdot2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-b\cdot3\Rightarrow4b=2\Rightarrow b=0.5$$

$$a=r\frac{s_y}{s_x}=-1\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$$

$$y=ax+b=-x+0.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څرګند کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یې فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,\ldots}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چیری $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی د دی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چیری (x) پیوسته ناځاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه،

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چیری ناځاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. د لاندی رابطی سره برابر دی

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږید لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

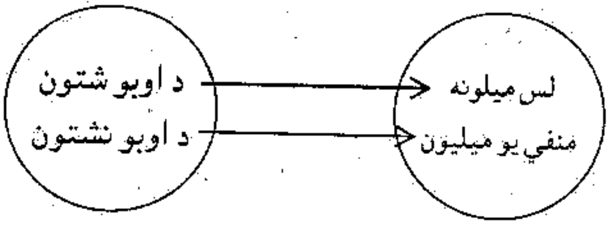
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو شخصي شركت غواړي د يوې غونډۍ په سر يوه څاه وكني د اوبو څاه په يوميلون افغانۍ تماميږي . كه څاه اوبه وكړي د شركت مالك لس ميلونه افغانۍ اخلي او كه اوبه ونه كړي يو ميلون تاوان وركوي.

الف :-دا موضوع د يوې تابع په شكل وښيئ.

ب:- كه د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه وركولو احتمال (0.8) وي په دې صورت كې د احتمال تابع ،اوسط (*Expected Value*) ، وريانس او د تصادفي متحول معياري انحراف پيدا كړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وريانس، او معياري انحراف په لاندې جدول كې ښودل شوي دي.

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	دتصادفي متحول دمربعاتوانحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واريانس	معياري انحراف
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	s
-1 10	0.8 0.2	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$ $10 \cdot 0.2 = 2$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$ $(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	4.4
	0.1	1.2		$\sum s^2 = 19.360$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناځاپي ازمايښت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x = m) = P^m(1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ بڼه وښيو.

(P) د برياليتوب او $q = I - P$ دنابرياليتوب احتمال دی.

که يو ازمايښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي.چه دهرازمايښت دبرياليتوب احتمال په (P) او دنابرياليتوب احتمال په (q)بښيو (n) ځله ازمايښت څخه د (m) ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \qquad ,0 \leq m \leq n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x} = np$ اومعياري انحراف يي په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پورې جوړشي.

حل:

$n = 15 \quad , \quad m = 5 \quad , \quad P = 0.4 \quad . \; q = 0.6$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$$

$$= \frac{15!}{5!\,(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^{4} \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$$

$$= (3^{15})(0.4\,)^3 (0.6)^{15-3} + (4)^{15} (0.4)^4 (0.6)^{15-4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!}\cdot(0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!}\cdot(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281\cdots$ دی.

مثال: (200) کسانو دطیارې ټېکټ اخيستی دی که د مسافرينود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$$

$$P(x-m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad ,\lambda = np = 200\cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x=m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x-m) = P(3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!}(0.01)^3(0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

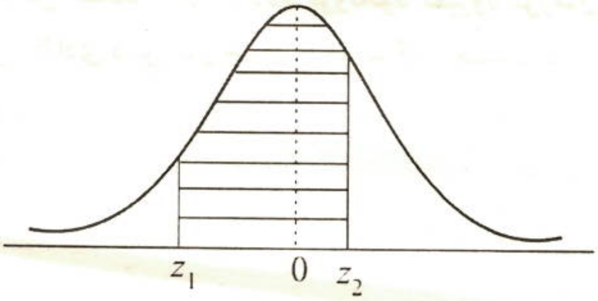
(c) ketabton.com: The Digital Library

د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېټا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ چه (z) د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني یا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د یوې برخې مساحت دی او $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ سره یې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-z^2}{2}}dx=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$



د ستېنډرډ نورمال د توزیع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاریي دعلامی دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاریي دعلامی سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z=1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z)په ستون کی (1.5) او په سطر کی (0.06) پیدا کوو ګوروچه د(1.5) دعددپه کرښه او د (0.06) دعدد په ستون کی واقع دی (0.9406) دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظیم شوی ده چه که(952)ملي لېتره مایع په بوتل کی واچوي معیاري انحرا ف یې (4) ملي لېتره کیږي که مایع د (952) او (956) ملي ېترو تر منځ وي معیاري انحراف یې څو دی؟

حل : لمړی د له جنسه پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاداشت:

که د پواسن په فارمول کې د (λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال رابښيي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

د نورمال توزیع:

دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندی ډول ده.

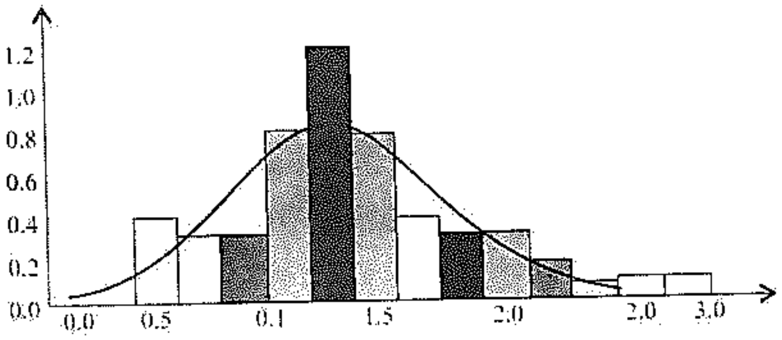
$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پېوسته تصادفي مقدار (s) معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټر ماشين دتېلو دسوځولو په وخت کې يوه اندازه مضرلوګي خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه توليديږي په (1980) ميلادي کې ديوه فزيکدان پواسطه چه لوړتزن نومېده وڅېړل شو. لوګي يوه اندازه N_2 او (O_2) لري لاندې مستطيلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد يې $gr/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه توليديږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزيع ، اوسط او وريانس راښئي.د هرمستطيل مساحت د مستطيل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې يې د قاعدې طول دې مساحت يې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

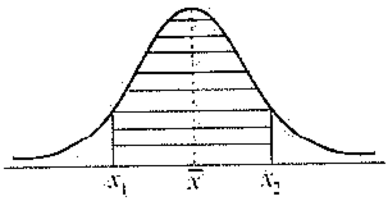


د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه (x)پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قيمت واخلي نوبايد د (x) داحتمال دتوزيع له تابع څخه انتيګرال ونيول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د څخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر څخه تر(1) پوری ده. د جدول څخه معلومیږي چه $P(0 \le z \le 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) څخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال : په یوه خاص مضمون کې د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف يي (8)دی د نورمال جدول څخه په گټه اخیستوسره د(54)څخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

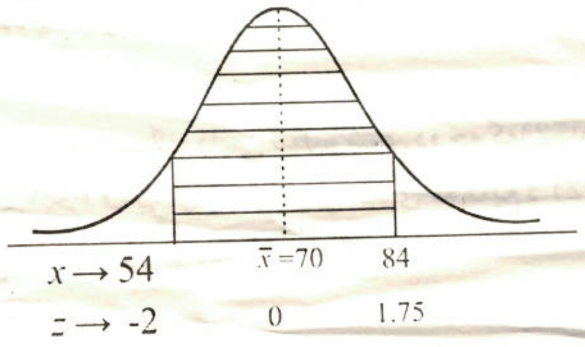
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$

$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنی په ټولو عناصرباندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشواو له هری ځانګی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددي خصوصیاتو (اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنی پارامتر وائي.

د هری ټولنی د عددي نمونه ګیری خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د (x) یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطۍ (5) سپینې او(7) توری ګلولی شته د قطۍ د منځ څخه (5) ګلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتوری ګلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی ګلولی لپاره انتخابوو.

د $i = 1,2,3$ او د $P = \frac{5}{12}$ د (x_1, x_2, x_3) ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0)=\left(\frac{5}{12}\right)^{0}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-0}=1\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$$

$$f(1)=\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$$

$$f(2)=\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-2}=\frac{25}{144}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}=\frac{25}{144}\cdot\frac{12}{7}=\frac{25}{84}$$

$$f(3)=\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{2}}=\frac{144\cdot 125}{1728\cdot 49}=\frac{125}{12\cdot 49}=\frac{125}{588}$$

$$f(4)=\left(\frac{5}{12}\right)^{4}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-4}=\frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}}=\frac{12^3\cdot 5^4}{12^4\cdot 7^3}=\frac{5^4}{12\cdot 343}$$

$f(5)=?$

د نمونې د اوسط توزيع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزيع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\cdots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots\ \frac{1}{n}$

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وريانس $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونه يي وريانس $s_n^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه يي وريانس اوسط $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه يي اوسط μ دټولنې اوسط δ^2 د ټولنې ريانس وي او s^2 دنمونې وريانس وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

نولسم فصل

احتمالات*Probability*:

که د یوی پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادیږي .د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دي.

مثلاً دمعارف رئیس بې سواده دې نو احتمال یې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال یې یو دې.

چانس:

که دیوې پېښې دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وایي.

په چانس کې دممکن ، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یې معلومه وي تصادفي پېښه، نا څاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمدد بامه راولویدلو پښه یې ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوی تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښې احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربې دټولوحالتونوشمېر}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کېږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربې احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اورښت او د وریځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه يي فضا (n) غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه يي شېر وي.لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پېښه شېر راشي.

ب: چه پېښه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

الف: $P\left(\text{شمېر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $0 \neq 1$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

د یوې نمونه یي فضا ناخاپي پېښنه:

د (S) د نمونه یي فضا هرفرعي سیټ یوه اتفاقي پېښنه ده چه په (E) سره ښودل کيږي. که د غړو شمېر یي (n) وي داتفاقي پېښنو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کې د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کې د احمد د جېب بټوه غلا شوې ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه دری ګڼکپان په دغه سیمه کې لیدل شوي دي دپېښې نمونه یي فضاده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب څېل معلومات ولیکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښنو نمونه یي فضا $S = (x, y, z)$ ده کلي سیټ یي پیدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ یوازې غل دی.

$E_2 = (y)$ یوازې غل دی.

$E_3 = (z)$ یوازې غل دی.

$E_4 = (x, y)$ (x, y) دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ (x, z) دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ (y, z) دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ (x, y, z) درې واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ يو هم غل نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال قاعدې:

1- د یوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د یوه ازمایښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د ډاډمنې پېښې په نوم یادېږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده $T =$ خط او شېر $= S$ دې لاندیني احتمالات پيدا کړئ؟

الف : دواړه سکې شېر دي.
ب: لږ ترلږه يوه سکه شېر ده.
ج : دواړه سکې يو شان دي.
د: دواړه سکې يو شان نه دي.
ها: د سکو يوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسی ده چه د ازمایښت دپېل څخه دیاګرام پېل کووبیا د هرې نتیجې څخه ځانګی شروع کوویه هره ځانګه کی نتیجې د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي د احتمالونو د جمع حاصل د هرې ځانګی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دي همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دي.

مثال: په یوه کڅوره کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) درې توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
$P(w)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

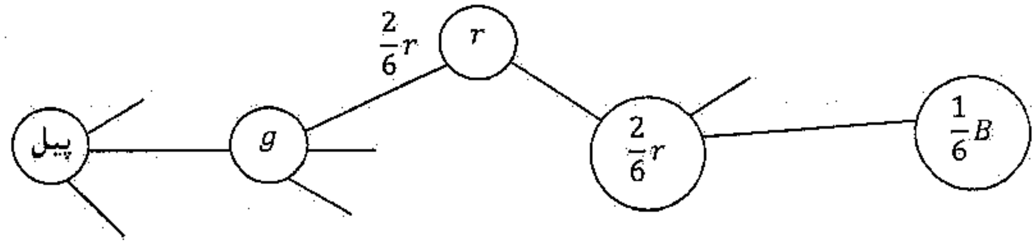
د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده:

د یوې لومړنی پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پېل څخه د پېښی تراخره پورې داحتمالاتو د ضرب د حاصل څخه .په دغه موضوع باندې د ښه پوهېدلو لپاره د یوې کورنی شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یي د ټولی کورنۍ د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوره کی سرې مرۍ درې شنې مرۍ او یوه توره مرۍ ایښودل شوي دي مرۍ د کڅورې څخه داسی راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅورې ته اچول کیږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی د (شنې، سرې، توري) مریو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) او (B) دوه داسې ناڅاپي پېښې وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د (S) په نمونه یي فضا کې (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې یود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د (S) په نمونه یي فضا کې د (A) یا (B) یوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-که د (A) پېښه د (S) په نمونه یي فضا کې پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دې معنی ده چه اقلاً د (A) یا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بېلا بیلې پېښې په ځان کې ولري نو په دې صورت کې د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان کې لري.

حل: فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي لیدل کیږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دناخاپي پېښو تقاطع

1- په يوه نمونه يي فضا کې د دوه يا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبديلي د قانون پيروي کوي.

فرضاً د (A)او (B) او (C) ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحيح ده.

2- که په يوه نمونه يي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری يو ناخاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

3- که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

4- که A او B دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A \cap B = A$$

مثال: ديوه ښوونځي دفوټبال دټيم څخه دری تنه د واليبال په ټيم کې هم شامل دي که دفوټبال دټيم غړي په (A) اود واليبال د ټيم غړي په (B) وښيو او ددواړو ټيمونو ګډ غړي په (C) وښيو نو دټيمونو تر منځ اړيکه د سيټ تيوري په شکل وليکئ.

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \;\&\; A \cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سيټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وايي. که په يوه کلي سيټ کې دوه سيټونه موجود وي نودا سيټونه يو د بل مکمله سيټونه دي.

که (S) يوه نمونه يي فضا وي او (A) يوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ يوه بله ناخاپي پېښه وي چه د (A) سره په يوه وخت کې پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړه سيټونو کلي سيټ دي او $(\acute{A})$ د (A) مکمله سيټ دی.

الف: $A \cup \acute{A} = S$

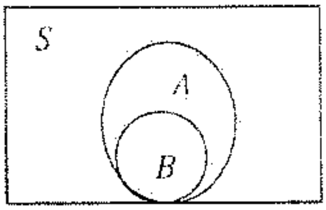
ب: $P(A \cup \acute{A}) = P(S) = 1$

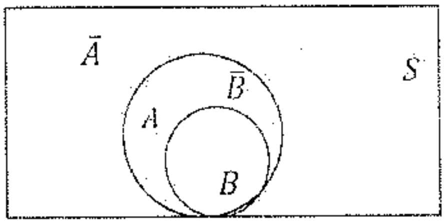
(c) ketabton.com: The Digital Library

ج: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناځاپي پېښه د (B) ناځاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافیکي ډول وښيي چه د $(\bar{A})$ ناځاپي د $(\bar{B})$ یوه ناځاپي پېښه په بر کې لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومیږي چه:





د سیټونو او مډل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسایل حلیږي یعني د ناځاپي پېښو د پېښېدو د مسایلو حل او س د سیټ تیوري په واسطه حلیږي چه په دې اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال د په نمونه یي فضا کې د او ناځاپي پېښې په لاندې دیاګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د (A) یا (B) حادثه ناځاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چه د (A) پېښه ،پېښه شي.

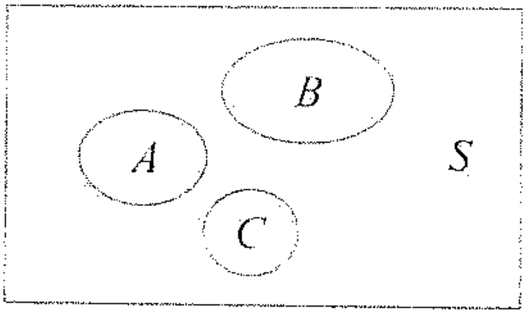
c: د دې احتمال چه د (C) پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د (A) یا (B) احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښې یو د بل څخه بېلې دي نو یعني $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b. د دی احتمال چه د (A) پیښه ناڅاپه پیښه شي د $(\acute{A})$ د پیښی څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$ پیښه نه ده پیښه شوی د $(\acute{A})$ پیښه د (B) او (C) د پیښو اتحاد دي یعنی دغه دواړه پیښی نه دي پیښی شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د (C) پیښه ناڅاپه پیښه نه شي هغه پیښی دپیښیدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پیښې. پیښې شي یعنی $(A \cup B)$ دپیښی د پیښیدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمیرنی اصل:

د دوه سیټونو د شمیرنی اصل په ترکیب او ترتیب پوری اړه لري

1- د دوه سیټونو دعناصرو دشمیرنی لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه یي د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د یو سیټ عناصر (m) اودبل سیټ عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ یي د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د $(0.1.2.3.4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړیږي او څو عددونه په (2) پوره وېشل کیږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړیږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په (2) پوره وېشل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموټېشن(ترتیب) *Permotaion*:

که څو شیان ولرو او ددې شیانو څخه جوړې جوړې کړوپه دغه جوړو کې د شیانو بدلولو ته ترتیب وایي.

(a, b, c, d) څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه یې جوړه کړو نو په لاندې ډول یې جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شیان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړیږي.

فکتوریل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوریل وایي. او په (!) سره ښودل کیږي.

$1 = 0!$ او همدا ډول $1 = 1!$ دی. ثبوت یې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په(P_n) ښیي $(P_n = n!)$ دی.

ترکیب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بینوم ضریبونه پیدا کیږي د ترکیب په نوم یادیږي. اوپه لاندې ډول لیکل کیږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \leq k \leq n$ او $\binom{n}{k}$ داسې ویل کیږي. (k)دپاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبینیشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قیمت پیدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریشن(تبدیل) *Variation*:

په تبدیل اوترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په (V_k^n) ښيي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k!C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځای د ریاست لپاره دویم ځای داول معاونیت لپاره دریم ځای د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځای کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26!\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{26!}$$
$$= 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه		دامکاناتو شمېر	
		پرته له تکرار څخه $k \le n$	سره له تکراره $k \le n$
	ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n!\,, n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
	ترکیب یا کمبېمیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
	تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د یوی سکې په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځلیوغورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتني مثال کې د شېر او خط دراتګ احتمال په یو ،دوه،دری، ثلور ځلې غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

ثلور خله		دری خله		دوه خله		یو خل		هیڅ خل		د سکې غورځول
احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
$\frac{1}{16}$	4									

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې تری استفاده وکړو

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}\,a + \textcircled{1}\,b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}\,a^2 + \textcircled{2}\,ab + \textcircled{1}\,b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}\,a^3 + \textcircled{3}\,a^2b + \textcircled{3}\,ab^2 + \textcircled{1}\,b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}\,a^4 + \textcircled{4}\,a^3b + \textcircled{6}\,a^2b^2 + \textcircled{4}\,ab^3 + \textcircled{1}\,b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}\,a^5 + \textcircled{5}\,a^4b + \textcircled{10}\,a^3b^2 + \textcircled{10}\,a^2b^3 + \textcircled{5}\,ab^4 + \textcircled{1}\,b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}\,a^6 + \textcircled{6}\,a^5b + \textcircled{15}\,a^4b^2 + \textcircled{20}\,a^3b^3 + \textcircled{15}\,a^2b^4 + \textcircled{6}\,ab^5 + \textcircled{1}\,b^6$$

عمومي شکل يې دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کی عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتک}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بینوم قضیه:

د بینوم قضیه مخکی ویل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د یوی ناخاپي پیښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته يي (0) ووایولاندی جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بينوم د ضريبونو ارايه
0		$(1-P)^2$	$\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$
1	10	$2P(1-P)$	
2	11		$\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$
		$\{P+(1-P)\}^2$	$\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کې د بينوم دانکشاف (k). ام حد لاندې احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنی بينوم په $B(n,p,k)$ ښودل کيږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم يادېږي.اوداسې ليکل کيږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جمله يي احتمال:

که يوه نمونه يي فضا دوه غږي ولري نو که د يوه غړي احتمال يي (P) وي نو دبل حالت احتمال يي $(1-P)$ دی چه بايلل ورته وايي.که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي ورل په ځلي تکرار کې او د بايللو احتمال په ښودل کيږي.

$$k-\text{ام ځلي ورل په n ځلي تکرار کی} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په يوه تجربه کی د ورلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بايللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه يي په لاندی ډول کيږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې د دې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي څو دي؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5} = \frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}}{32} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوددې احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل ورل وګڼو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$
$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$
$$= \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2}\cdot\frac{4}{729} = \frac{60}{729}$$
$$= 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوې سکې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دې احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3}P$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = \frac{3}{4} \quad , \quad Q = \frac{1}{4}$

$$= \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{4} = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زيات شي

حل سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$
$$= 1 - \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \quad \text{so} \quad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غير متمادي فضاګانې:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضايو معين يا غير معين سيټ دی يعنې که د فضا عناصر معين $(Countable)$وي نمونه يي فضا معينه ده. چه پريکړي فضا هم ورته وايي او که د فضا عناصر معين نه وي نو فضا غير معينه ده چه نښتې يا متمادي فضا هم ورته وايي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه يوه متصله او کوم يوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو زملو دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د يوې د کرې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د سانتي ګېرېډ څخه تر (1000) درجو د سانتي ګېرېډ پورې.

ها: د (30°) او (45°) درجو ترمنځ د يوې زاويي ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه د (الف او ج) نمونه یي فضاګانی دمحدودو عناصرو د شمیر شحخه جوړی شوي دي نو پربکړی فضاګانی دي او(ب ، د او ها) فضاګانی دنامحدودوعددونوڅخه جوړی شوي دي نو نبتی بامتمادي فضاګانی

ورته وایي.

دویم مثال: عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ وا خیستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخی پیدا کړی؟

حل: { } خالي سیټ د واټر پمپ د ورانیدو وخت دی او $0 \le t$: $S = \{t \in IR$ د واټر پمپ د عمر اوږد والی دی

هم چانسه پیښی

هغه ساده پیښی چه د هغوی د پیښیدلو چانس په یوه تجربه کی برابر وي د هم چانسه پیښو په نوم یادیږي

که چیری $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ یوه نمونه یي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1,2,3, \cdots n$ لپاره یوه ناڅاپه لمړنی پیښه ده په دې شرط چه $0 \le P(e_i) \le 1$ وي

د لمړنیو پیښو داحتمالاتو مجموعه دیوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال: څلور کسه په یوه لوبه کی اشتراک کوي د هر یوه نمونه یي فضا هم چانسه ده د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړی؟

حل: که چیری $S = (a, b, c, d)$ نمونه یي فضا وي نو دهری ناڅاپه لومړنی پیښی احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دي نو لیکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنی پیښی هم چانسه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانې د لايتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې ليدل کيږي. د دغه ډول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ،سطحې او حجمونه په ټوټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د يوه حرف لکه (x) او په سطحو کې ددوه تورو لکه (x, y) څخه او په احجامو کې د درې تورو څخه لکه (x, y, z) څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د (0.3) په انټروال کې د يو ټکي وټاکئ چه:

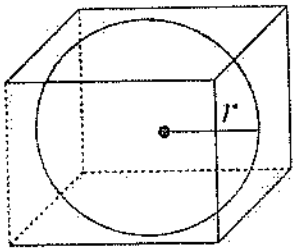
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دويم مثال: يوه کره په يوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې يوه نقطه ټاکو ايا ددې احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ دکرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه يي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ يعنې د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فارمول څخه لیکو چه:

1-

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2-

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ د ګاډی څخه کټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پېښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دې؟

حل:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\dot{3} = 58.33\%$$

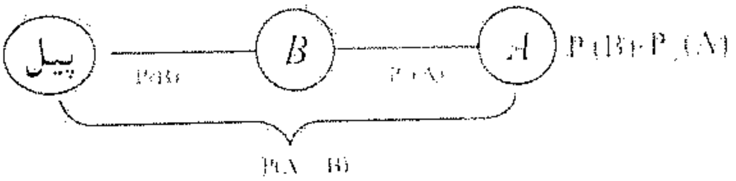
(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه يي فضا کی د او د دوه ناخاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعريف سره سم ليکو چه:

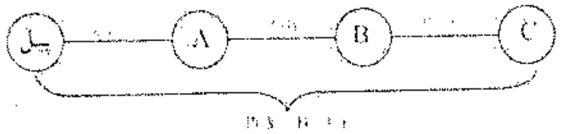
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ايز دياګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پېښو لپاره هم د تطبيق وړ دی

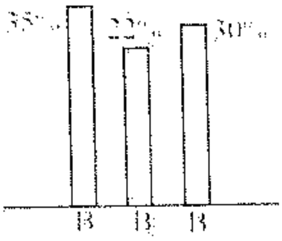


$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1، B_2 او B_3 په دري ولايتونو کی په پارلماني ټاکنو کی د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند فيصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او يا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناخاپي په لاندی ډول تعريفوو



V: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

B_i د ولايت رايي ورکوونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ولایت	د رایو ورکوونکو فیصدي	جمهوري کوند ته رای ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو د بل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه يي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap \mathbb{V}(i = 1,2,3,)$ يو له بل سره مستقل صورت نيسي

$$V = \bigcup_{i=1}^{3} (B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره ليکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف

که چېرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \cdots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه يي فضا کې یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم يادیږي او د (A) اختياري ناڅاپي پېښې لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چه $i = 1 \cdots n$ د (S) نمونه يي فضا د یوې پېښې لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښې احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائيزفارمول پواسطه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائيز فارمول زيات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$, $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونيسو په حقيقت کې B_1 او B_2 د (S) دنمونه يي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

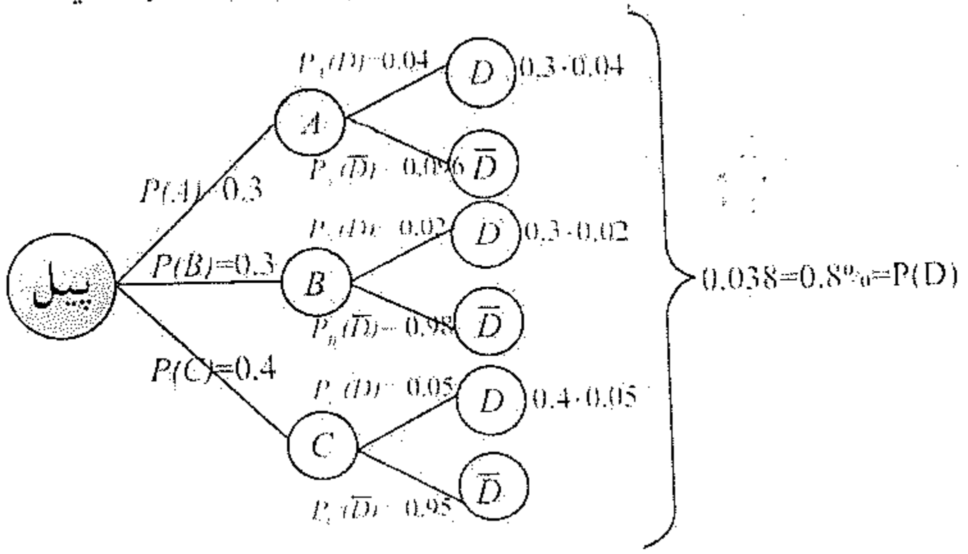
پورتنی فارمول د لپاره د بائيز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال: په يوه فابريکه کې د A ، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه توليدوي که چېرته په ماشينونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: د دې احتمال چه يو اخيستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د C په ماشين پورې اړه لري.

c: يو نوی توليد شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشين پورې اړه ولري.



د b جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوول ناڅاپي پېښو ته مستقلي پېښې وايي یعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ.

الف: تاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: تاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ او سربېره پردې $P_B(H) = \frac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعدة صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{B} \cap \bar{A}$, $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1-b)$	a
$\bar{A}$	$P(A \cap B) = b(1-a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2- د A، B او C دري ناڅاپه پېښې چه يو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

دويم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) =$?	?
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) =?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$?	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چه $P(\bar{B}) = 0.6$ نو $P(B)$ داسې پيدا کوو

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A = 1 - 0.3 = 0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

که پيدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځايو کې وليکو جدول تکميليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*:

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدی کبله کله چه په دویمه درجه معادلو کی $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترخو چه په (1795) میلادي کال یوجرمني ساینسدان چه *Friedrich Gouss* نومېدلو $(i^2 = -1)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد (*Imaginary Numbers*) یو عدد دی چه په روزمره ژوند کی په راکړه ورکړه کی نه استعمالیږي. مگر دعلمي مسایلو د حل لپاره د زیات اهمیت وړ دی لمړی حرف یي د ایوتا (*iota*) یوناني کلمی څخه اخیستل شوی دی.

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دویم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنگه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کیږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مگر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

1: $i = \sqrt{-1}$ 2: $i^2 = -1$ 3: $i^3 = -i$ 4: $i^4 = 1$
5: $i^5 = i$ 6: $i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i \ , i^{4n+2} = -1 \ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه یي منفي وي د پورته جدول پواسطه حلیږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$$
$$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$
$$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$$

لاندی موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

د اعدادو سیټونه:

1- د طبعي اعدادو سیټ *Set of Natural Numbers*:

د(1) څخه تر لایتناهي (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د طبعي اعدادو سیټ وايي.په (IN) سره يي ښيي.

$$\text{IN} = (1،2،3،4،5 \cdots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سیټ *Set of Whole Numbers*:

د (0) څخه تر (∞) پورې داعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي.په (w) سره يي ښيي.

$$\text{w} = (0،1،2،3،4، \cdots \infty)$$

3- د تام اعدادو سیټ *Set of Integer Numbers*:

د (−∞) څخه تر (+∞) پورې د اعدادو سیټ ته د تام اعدادو سیټ وايي او په (I) سره يي ښيي.

$$\text{I} = (-\infty، \cdots ، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty)$$

4- د د ناطق اعدادو سیټ *Set Of Rational Numbers*:

صحیح عدد،مختوم کسر،غیر مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي.او په (Q) سره يي ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \left(1 ، 2 ، 15 ، 109 ، \frac{4}{5} ، \frac{2}{3} \cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47} \ , \ \frac{13}{49} \ , \ \sqrt[3]{2} \ , \sqrt{3}\right)$$

[illegible] د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یې ښیي

$$IR = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty ، -3 ، +6 ، \sqrt{2} ، \frac{2}{5} ، \frac{5}{6} ، \frac{13}{49} \cdots \infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازې د (i) حرف پکې موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه $\left(-i \ , 11i, \ \frac{2}{3}i \ , \ \sqrt{5i^3},\right)$

دموهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کوو علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1: \ 15i - 31i = 16i$ $\qquad$ $2: \ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې ،عدد په عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ویشو او توانونه یو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه $Complex\ Numbers$.

هغه عددونه دي چه د حقیقي عدد او موهومي عدد د مجموعی یا تفاضل څخه لاس ته راغلی وي لکه ($5 + 11i$, $8 - 20i$) او داسې نور. مختلط عدد په (z) سره ښیي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کیږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وایي.

مثال: لاندي ($i - 3, 4, 2i, 2i - 3$) عددونه په معیاري شکل ولیکئ؟

مختلط عددونه	معیاري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلورګوني عملیې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقیقي عدد د حقیقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بیا هم یو موهومي عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 17+45i \\ \underline{28-106i} \\ 45-61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کيږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقيقي عدد د حقيقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29-18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64+49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونوضرب:

علامه په علامه کی عدد په عدد کی ضربوو اوتوانونه يې سره جمع کوو.

مثال:- $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل يې پيدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پيدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلط عدد مزدوج $(Cnjugate\ of\ Complex\ Number)$:

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره یې ښیي .مثلاً که (z) یو مختلط عدد وي نو مزدوج یې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ یو مختلط عدد دې او مزدوج یې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (میزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وایي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضربي معکوس:

فرضاً $a + bi$ یو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره یې د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دې.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پیدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2} i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کی ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخې دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د یوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخې دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د یوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال: که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1+7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$z_1 + z_2 = (4-5i) + (-3-2i) = 1-7i$$

ثابته شوه چه:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)(-3+2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$$
$$= -12 - 7i + 10(-1)$$
$$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$$
$$= -12 + 7i + 10(-1)$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

په نتيجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

د دويمې درجې معادلې عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلې د حقيقي اعدادو په سيټ کې حل نلري مګر په موهومي اعدادو کې حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

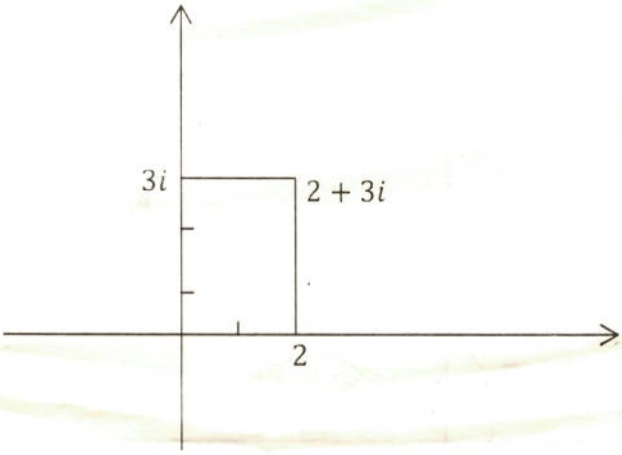
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2\cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

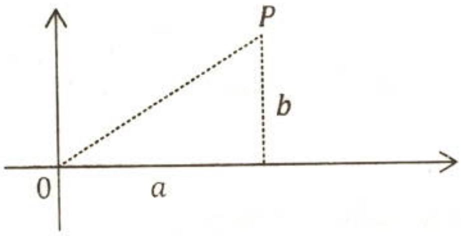
په مختلط عددونو کې حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کې مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کې مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال:- د $(2+3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یې مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یې فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یې د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یې هم فاصله پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



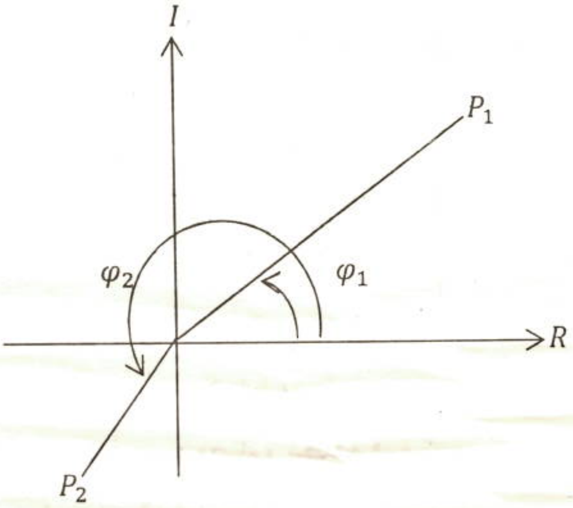
مثال: د (P) د نقطي وضعيه كميت $(4 + 3I)$ دی مطلقه قیمت یي د مبداء څخه څو دی؟

$$4 + 3i = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یي د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

$-5 + 12i$	$-5 - 12i$
$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$	$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$
$= \sqrt{169}$	$= \sqrt{169}$
$= 13$	$= 13$

د (φ) هغه زاويه چه د $(\overline{OP})$ خط يي د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم يادېږي حرکت يي د ساعت د عقربی خلاف وي يعنی دا زاويه همېشه مثبت وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یوویشتم فصل

د ریاضي منطق

د ریاضي استدلال:

د ریاضیکي بیان د سمون لپاره چه کومې علامې اوطریقې استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي

شهودي درک یا مشاهدات:-هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلیدل یي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاویې مساوي وي.او داسې نور.

تمثیلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د یوریاضیکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

استقرائي استدلال :

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کې د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کې ثبوت شوي دي.

لاندې جدول کې خالي ځایونه ډک کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبعي عددونومکعبونه	دمکعبونومجموعه	دمجموعې فارمول
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$		$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n)=4^{2n}-1$ په (5) باندی د وېش وړ دې؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1)=4^{2\cdot 1}-1=16-1=15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په (n)باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n+1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n)=4^{2n}-1=5r$$
$$4^2\cdot(4^{2n}-1)=5r\cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2}-4^2=5r\cdot 16$$
$$4^{2(n+1)}-1=15+16\cdot 5r=5(3+16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يي هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1)=4^{2(n+1)}-1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د (n) په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همېشه ثابته وي او ښه په ډاډ سره يي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي.لاندی جدول ته وګورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	[illegible]	[illegible]
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل يي دوه چند شوی دي.بیا ببرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل يي نیمايي شوی دې په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دي.چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

دحکم د نفی کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل یو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو(x) او(y) دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه دجمع حاصل يي $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ یو ناطق عدد دې.غېر ناطق عدد نه دي.نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غېر مستقیم ثبوت:

دقضيي د عکس ثبوت ته غېر مستقیم ثبوت وايي.

قضيه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطی څخه څرگنده شوه چه (n^2) طاق دي او دا د فرضيي خلاف ده نو داچه (n) يو جفت عدد دی صحيح نه دی.

د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(P~) د (P) دبيان نفي وي نو د صحت جدول يي په لاندی ډول جوړيږي.

P	$\sim P$
T	P
F	T

د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.
2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.
3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.
4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کی وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کی صحيح دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Longrightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

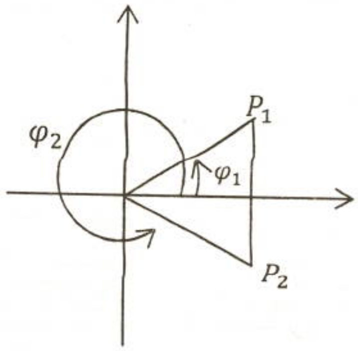
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژی د مبارکی مياشتی د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تالاشی چوک د حاجي زرخان په پلازه کی پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږيانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارګومينټونو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونود دويم جذر پيدا کول:

دمختلط عدد دويم جذر د لاندې فارمول په واسطه پيدا کيږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots..2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots..4$$

دريمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots 6$$

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} = 3+2i$$

دويم مثال:

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځینو کاشفینو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

(c) ketabton.com: The Digital Library

فارما

وین ستهندریو

لایبنز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپ شوي کتابونه

- عمومي رياضي (نوی نصاب)
- عمومي فزيک (نوی نصاب)
- ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

- د فزيک د تمريناتو حل (نوی نصاب)
- د رياضي د تمريناتو حل (نوی نصاب)
- د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- عمومي هندسه
- د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
- عمومي مثلثات
- عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- عمومي فزيک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

ميهن خپرندويه ټولنه

پېښور، جلال آباد

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library