د فورمولونو

او جدولونو ټولګه

(ریاضیات، فزیک، کیمیا، جیولوجي او بیولوژي)

د کانکور ازموینې د ګډون کوونکو او د پوهنتون د محصلینو غوره همکار

۲۰۵۰+ فورمولونه

۴۵+ جدولونه

۹۰+ ګرافونه

ترتیب کوونکی: انجنیر محمد اجمل بهرامزوی

د فورمولونو او جدولونو ټولګه

ترتیب کوونکی: انجنیر محمد اجمل بهرام زوی

کمپوز او ډیزاین: انجنیر محمد افضل ذاکر

چاپ لړ: اول

چاپ شمېر: ۱۰۰۰ ټوکه

چاپ کال: ۲۰۱۶ز (۱۳۹۵ل) کابل

خپرندوی: علمي خپرندویه ټولنه/ ګردیز

چاپځای: حسین احمد چاپخانه

د ترلاسه کېدو ځایونه:

علمي کتاب پلورنځی

پته: د ګردیز ښار، غزني لین، د عبدالحمید ګردیزي مارکیټ، پکتیا ، افغانستان

اړیکشمېرې: +۹۳(۰)۷۷۲۹۳۶۳۴۱/+۹۳(۰)۷۷۲۲۸۸۱۹۰

بریښنالیک: ilmiketabtoon@gmail.com

کابل:

۱- مستقبل کتاب پلورنځی

۲- خیبر کتاب پلورنځی

جلال اباد:

۱- مومند کتاب پلورنځی

۲- ختیځ کتاب پلورنځی

۳- یار کتاب پلورنځی

خوست: **رحیمي کتاب پلورنځی**

کندهار: **کروړ کتاب پلورنځی**

بسم الله الرحمن الرحيم

سریزه

د لوی خدای «جل جلاله» ډیر شکر ادا کوم چې ماته یې د دې کوچني کتاب د ترتیب کولو وړتیا را په برخه کړه.

څرنګه چې تیرو څو لسیزو جګړو او ناخوالو زموږ د ګران هېواد بېلابېلې بنسټیزې برخې له منځه وړې او یا یې ډیر زیان ور اړولی دی، چې له دې څخه یوه ارزښتناکه برخه د علم او پوهې ده. نو اړینه ده چې هر افغان د هیواد پالنې د حس له مخې د خپل توان تر کچې پورې د بېلابېلو علومو په برخه کې که هغه دیني وي یا ساینسي؛ په بډاینه کې ونډه واخلي. نو دې اړتیا ته په کتو سره مې د (فورمولونو او جدولونو ټولګه) تر سرلیک لاندې دا کوچنی کتاب ترتیب کړ، چې له نېکه مرغه دا دی اوس ستاسو په لاس کې دی.

ددې کتاب د تصحیح په برخه کې د خوست د شیخ زاید پوهنتون ښاغلو استادانو هر یو، پوهندوی امرالله آصفي د کیمیا په برخه کې، پوهنمل علي جان عادل د فزیک په برخه کې او پوهیالي اسد الله سروري او د کابل پوهنتون د ساینس پوهنځي استاد پوهیالی ثمرالدین جبران د ریاضیاتو په برخه کې ډیره مرسته کړې ده.

دا کتاب د ټاټوبي په ملي ژبه (پښتو) کې د خپل ډول لومړنی دی. د دې کتاب څخه د ښوونځیو زده کوونکي په ځانګړې توګه د کانکور د ازموینې ګډونوال او همدارنګه د پوهنتونونو د بېلابېلو پوهنځیو محصلان ګټه پورته کولای شي.

دا کتاب پنځه برخې لري، لومړۍ برخه یې د ریاضیاتو ده چې د حساب، الجبر، مثلثاتو، هندسې، احصایې او احتمالاتو مهم فورمولونه او جدولونه لري، دوهمه برخه یې فزیک، دریمه برخه یې کیمیا، څلورمه برخه یې جیولوجي او پنځمه برخه یې د بیولوژي ده چې هره برخه یې خپل خپل مهم فورمولونه او جدولونه لري.

په پای کې د خپل ګران تره او د بهرام زوی توتاخیل ساختماني شرکت رئیس الحاج محمد داود توتاخیل څخه د زړه له کومې مننه کوم چې د دې کتاب د چاپ مالي لګښت یې پر غاړه واخیست.

څرنګه چې دا لیکنه زما لومړنۍ هڅه ده نو طبعاً به ځینې نیمګړتیاوې ولري، نو د ګرانو لوستونکو څخه هیله لرم چې د نیمګړتیاوو سره د مخامخ کیدو په صورت کې دې د لاسمون لپاره راسره ګټورې مشورې شریکې کړي.

په درنښت

انجنیر محمد اجمل بهرام زوی (توتاخیل)
mohammadajmalhairan@gmail.com

لیکلړ

د ځينو واحداتو د يو پر بل د اړولو فکتورونه

❖ اوږدوالى $(Length)$

$1m = 10dm = 10^2 cm = 3.28 ft = 1.094\, yard = 39.37 in$

$1mm = 10^{-3} m \;\; ; \;\; 1\mu(micron) = 10^{-6} m \;\; ; \;\; 1nm = 10^{-9} m$

$1\,A(Angstrom) = 10^{-10} m \;\; ; \;\; 1pm = 10^{-12} m$

$1\,Km = 10Hm = 10^2 Dm = 10^3 m$

$1\, yard = 0.914m = 3\,ft$

$1\,ft = 12inch \;\; ; \;\; 1\,inch = 2.54cm$

$1\,mi(mile) = 1760\; yard = 1.609\; Km \;\; ; \;\; 1\,ligth - year = 9.461 \cdot 10^{15} m$

❖ مساحت $(Area)$:

$1\,m^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2 = 10.8\,ft^2$

$1Hm^2 = 1Hectare = 10^4 m^2$

$1mi^2 = 640acres = 2.59Km^2$

؛ $1acre = 43560ft^2 = 4046.9m^2$

$1\,ft^2 = 144in^2 = 929cm^2$

20 بسواسي = 1 بسوه ; بسوې 20 = 1 جريب

جريب 1 = $2000m^2$

❖ حجم $(Volume)$

$1\,l(liter) = 10^3 cm^3\,,\; cc\;,\; ml\; = 1.057gt\,(quart)$

$1\,m^3 = 10^3 l = 35.32\,ft^3 = 264\,u.s.gal(gallon)$

$1\,ft^3 = 7.481\; u.s.gal = 28.32l$

$1u.s.gal = 231in^3 = 3.795l$

$1\,British\;\; gal = 1.201\; u.s.gal$

$1\,u.s.Barel = 42u.s.gal = 158.98l$

❖ وخت $(Time)$

$1\,hr = 60\min = 3600s$

$1\,d(day) = 86400s = 24hr$

$1\,y(year) = 365.25d = 3.156 \cdot 10^7 s$

$1\,century = 100y$

❖ کتله $(Mass)$

$1kg = 10^3 gr = 2.2lb = 0.068slug = 5000carat$

$1ton = 10^3 kg\; ;\; 1\,oz(ounce) = 0.028kg = 0.062lb$

$$1\,u.s.ton = 907.2kg = 2000lb \;;\; 1slug = 14.593kg$$
$$1\,u.s.ton = 1016kg = 2240lb$$
$$1\,lb = 0.4536kg = 16\,oz \;;\; 1\,carat = 0.2gr$$
$$1\,u.k.stone = 6.35kg = 14lb$$

❖ وزن یا قوه $(weight\ \&\ force)$

$$1\,N = 10^5\,dyne = 0.225lb = 7.233\,poundal$$
$$1\,lb = 4.45N \;;\; 1\,KN = 10^3\,N \;;\; 1\,K(klb) = 10^3\,lb$$
$$1\,kgf = 9.81\,N \;;\; 1grf = 981dyne$$

❖ زوايه $(Angle)$

$$1^\circ = 60' = 3600'' = 0.0174\,rad$$
$$1\,grad = 0.9^\circ = 54' = 0.0157\,rad$$
$$1\,rad = 57.3^\circ = 63.66\,grad$$
$$1\,circle = 360^\circ = 400\,grad = 6400mil\,(mils)$$

❖ سرعت $(Speed)$

$$1\frac{m}{s} = 60\frac{m}{\min} = 3.6\frac{km}{hr} = 2.237\frac{mi}{hr}(mph)$$
$$1\frac{ft}{s} = 0.3048\frac{m}{s} = 0.6818\frac{mi}{hr}$$
$$1\frac{mi}{hr} = 88\frac{ft}{\min} = 1.609\frac{km}{hr}$$

❖ فشار $(Pressure)$

$$1\,pa(pascal) = 1\frac{N}{m^2} = 1.45\cdot 10^{-4}\,\frac{lb}{in^2}(psi)$$
$$1\,bar = 10^5\,pa = 14.5\,psi \;;\; 1piz = 10^3\,pa = 10^4\,Barry$$
$$1\,atm = 1.0132bar = 101.32kpa = 14.69\ psi$$
$$1\,atm = 76\,cm\,Hg = 1033.23\,cm\,H_2O$$
$$1\,ksi = 10^3\,psi = 68.046\ atm$$

❖ کار او انرژي $(work\ \&\ Energy)$

$$1\,J = 10^7\,erg = 0.2389\ Cal = 0.738\ ft\cdot lb$$
$$1\,Cal = 4.186J = 0.004BTU\,(British\ lhermal\ unit)$$
$$1\,BTU = 1055\,J \;;\; 1KW\cdot hr = 3.6\cdot 10^6\,J = 860\ kcal$$

❖ توان $(Power)$

$$1\,w(watt) = 1\frac{J}{s} = 3.41BTU/hr$$
$$1\,HP = 550\frac{ft\cdot lb^f}{scc} = 74.7w$$

❖ کثافت $(Density)$

$$1\frac{kg}{m^3} = 10^{-3}\frac{gr}{cm^3} = 0.06243\frac{lb}{ft^3} \;;\; 1\frac{gr}{cm^3} = 1.940\frac{slug}{ft^3}$$

حساب

په رياضياتو کې د ځينې علامو د کارولو هدف

هدف	علامه
اول کميت مثبت، دوهم منفي	$\pm$
اول کميت منفي، دوهم مثبت	$\mp$
د دوو کميتونو مساوي والی	$=$
د دوو کميتونو نه مساوي والی	$\neq$
د دوو کميتونو مطابقت لرل	$\equiv$
د دوو کميتونو متناسب والی	$\propto$ يا $\sim$
د لومړني کميت لوی والی	$>$
د لومړني کميت کوچني والی	$<$
لومړنی کميت ډير لوی دی	$\gg$
لومړنی ډير کوچنی دی	$\ll$
لومړي کميت مساوي يا لوی	$\geq$
لومړي کميت مساوي يا کوچنی	$\leq$
د دوو کميتونو تقريباً مساوي والی	$\cong$ يا $\approx$
ادامه لرل	$\Rightarrow$
او	$\wedge$
يا	$\vee$
نسبت شمارنګه	$:$
تناسب	$::$
د هر (x) لپاره	$\forall x$
د (x) د ځينې قيمتونو لپاره	$\exists x$
شامل والی (موجوديت)	$\in$
نه شامل والی (نه موجوديت)	$\notin$
اتحاد	$\cup$
تقاطع	$\cap$
فرعي	$\subset$
غيرفرعي	$\not\subset$
خالي سيټ	$\emptyset$
زاويه	$\angle$
د دوو خطونو عمود والی	$\perp$
د دوو خطونو موازيتوب	$\parallel$

د دوو خطونو نا موازیتوب	$\nparallel$
د دوو خطونو مساویتوب او موازیتوب	$\#$
د (x) د متحول تغیرات	Δx
د $y = f(x)$ د تابع تغیرات	Δy
د (x_i) د ټولو قیمتونو مجموعه	$\sum x_i$
د (x_i) د ټولو قیمتونو حاصل ضرب	$\prod x_i$
لایتناهي	∞

د عددونو طبقې

مرتبه	عدد	مرتبه	عدد
زر	10^3	سپتلیون	10^{24}
میلیون	10^6	اکتیلیون	10^{27}
بیلیون(میلیارد)	10^9	نونیلیون	10^{30}
تریلیون	10^{12}	کواتوارددیسیلیون	10^{45}
کوادریلیون	10^{15}	سکس دیسیلیون	10^{51}
کونیتلیون	10^{18}	ندوم دیسیلیون	10^{60}
سکستیلیون	10^{21}	ګوګول	10^{100}

د عددونو ډولونه

❖ لومړني عددونه: هغه دي چې پرته له یو او خپل ځان څخه په بل عدد پوره د ویش ور نه وي: $P = \{2,3,5,7,11,\cdots\}$

❖ مرکب عددونه: هغه دي چې پرته له یو او خپل ځان څخه په نورو عددونو هم پوره د ویش وړ وي: $C = \{4,6,8,9,10,\cdots\}$

- د یو (1) عدد نه لومړنی او نه مرکب دی.

❖ طبیعي عددونه: $\mathrm{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\dots\}$

❖ مکمل عددونه: $\mathrm{N_0} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,\dots\}$

❖ تام عددونه: $\mathrm{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

❖ ناطق عددونه: $\mathrm{Q} = \{\mathrm{x}/\mathrm{x} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}، \mathrm{a,b} \in \mathrm{z} \wedge \mathrm{b} \neq 0\}$

❖ غیر ناطق عددونه: هغه عددونه دي چې د $\frac{a}{b}$ په شکل نشي وړاندې کیدلای یا هغه عددونه چې نه په اعشاري محدود او نه په متوالي ډول ښودل کیدای شي: $Q' = \{\dots,\sqrt{2},e,\pi,\dots\}$

❖ حقیقي عددونه: $\mathrm{R} = \{-\infty,\dots,+\infty\}$

❖ موهومي عددونه: $\mathrm{I_m} = \{\mathrm{xi}/\mathrm{x} \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$

❖ مختلط عددونه: $C = \{x+iy/x,y \in R \wedge i = \sqrt{-1}\}$

❖ دوه مثبت جذرونه: $-\frac{b}{a} > 0$

❖ دوه منفي جذرونه: $-\frac{b}{a} < 0$

❖ هم علامه جذرونه: $\frac{c}{a} > 0$

❖ مختلف العلامه جذرونه: $\frac{c}{a} < 0$

❖ مساوي او مختلف العلامه جذرونه: $b = 0$

❖ يو د بل معکوس جذرونه: $a = c$

غیر مساوات (Inequalities)

د غیر مساواتو ځانګړتیاوې

❖ $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$

❖ $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \vee \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, $c > 0$

❖ $a > b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \vee \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, $c < 0$

❖ $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, $a > 0$, $b < 0$

❖ $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $a > 0$, $b > 0$

❖ $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$

❖ $a > b \wedge c > d \Rightarrow a - d > b - c$

❖ $a > b > 0 \wedge n > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

❖ $a > b > 0 \wedge n < 0 \Rightarrow a^n < b^n$

❖ $x^2 < a \Rightarrow |x| < \sqrt{a}$, $a > 0$

❖ $x^2 > a \Rightarrow |x| > \sqrt{a}$, $a > 0$

❖ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$, $g(x) \neq 0$

❖ $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$, $g(x) \neq 0$

❖ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $a > 0$, $b > 0$

انټروالونه (Intervals)

❖ ترلی انټروال: $[a, b] = \{x \in IR: a \leq x \leq b\}$

❖ خلاص: $(a, b) = \{x \in IR: a < x < b\}$

❖ له چپ لوري نیم خلاص (له ښي لوري نیم ترلی): $(a, b] = \{x \in IR: a < x \leq b\}$

❖ له ښي لوري نیم خلاص (له چپ لوري نیم ترلی): $[a, b) = \{x \in IR: a \leq x < b\}$

❖ د خلاصو انټروالونو اتحاد: $(-\infty, a) \cup (b, \infty) = \{x \in IR: x < a \vee x > b\}$

❖ د نیمه ترلو انټروالونو اتحاد: $(-\infty, a] \cup [b, \infty) = \{x \in IR: x \leq a \vee x \geq b\}$

مطلقه قیمت (Absolute Value)

❖ $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

د مطلقه قیمت ځانګړتیاوې

❖ $|-x| = |x| \geq 0$

د معادلې تشکیلول د جذرونو د مجموعې او حاصل ضرب څخه

$$x^2 + Sx + P = 0$$

❖ هغه معادله چې جذرونه يې د $(ax^2 + bx + c = 0)$ د جذرونو (m) برابره وي $ax^2 + bmx + cm^2 = 0$ ده

❖ هغه معادله چې جذرونه يې د $(ax^2 + bx + c = 0)$ د جذرونو مخالف العلامه وي $ax^2 - bx + c = 0$ ده.

❖ هغه معادله چې جذرونه يې د $(ax^2 + bx + c = 0)$ د جذرونو معکوس وي $cx^2 + bx + a = 0$ ده.

د دیکارت قانون

۱) که $\left(\frac{c}{a} > 0\right)$ وي نو دواړه جذرونه هم علامه دي:

الف– که $\left(-\frac{b}{a} > 0\right)$ وي دواړه جذرونه مثبت دي.

ب- که $\left(-\frac{b}{a} < 0\right)$ وي دواړه جذرونه منفي دي.

۲) که $\left(\frac{c}{a} < 0\right)$ وي نو جذرونه مختلف العلامه دي:

الف- که $\left(-\frac{b}{a} > 0\right)$ وي د مثبت جذر مطلقه قیمت زیات دي

ب- که $\left(-\frac{b}{a} < 0\right)$ وي د منفي جذر مطلقه قیمت زیات دی.

۳) که $\left(\frac{c}{a} = 0\right)$ وي نو یو صفري او بل د صفر خلاف جذر لري:

الف– که $\left(-\frac{b}{a} > 0\right)$ وي د صفر خلاف جذر مثبت دي.

ب- که $\left(-\frac{b}{a} < 0\right)$ وي نو د صفر خلاف جذر منفي دي.

۴) که $\left(-\frac{b}{a} = \frac{c}{a} = 0\right)$ وي دواړه جذرونه صفري دي.

۵) که معادله یو تحول ولري، یو مثبت جذر او که دوه تحوله ولري، دوه مثبت جذرونه او که تحول ونه لري، نو دوه منفي جذرونه به ولري.

-که $\Delta < 0$ شي نو تحول په معادله کې کومه معنا نه لري

پارامتریک معادلې

هغه معادلې چې له اصلي مجهول پرته یو فرعي مجهول هم ولري مثلاً: $mx^2 + 2mx + 12m^2 = 0$

m ته د معادلې پارامتر وایي.

که جذرونه د (m) له جنسه غوښتل شوي وي (Δ) يې تشکیلو و جذرونه يې لاسته راځي، او که په لاندې ډول غوښتل شوي وي نو:

❖ حقیقي جذرونه: $\Delta > 0$

❖ مساوي جذرونه: $\Delta = 0$

❖ موهومي جذرونه: $\Delta < 0$

د علامو ضرب او وېش(تقسیم) په الجبر کې

❖ $(+)\cdot(+) = + = (+) \div (+)$

❖ $(-)\cdot(-) = + = (-) \div (-)$

❖ $(+)\cdot(-) = - = (+) \div (-)$

❖ $(-)\cdot(+) = - = (-) \div (+)$

معادلې

❖ لومړۍ درجه یو مجهوله: $ax + b = 0 \;\; ; \;\; a \neq 0$

❖ دوهمه درجه یو مجهوله: $ax^2 + bx + c = 0$

❖ دریمه درجه یو مجهوله: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

❖لومړۍ درجه دوه مجهوله: $ax + by = c$

❖ دوهمه درجه دوه مجهوله: $ax^2 + by^2 = c$

❖لومړۍ درجه درې مجهوله: $ax + by + cz = d$

دوهمه درجه یو مجهوله معادلې

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

❖محمد بن موسی فرمول: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \Delta = b^2 - 4ac$

❖ د محمد بن موسی د نیمایي فرمول: $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

❖ که $\Delta > 0$ شي نو دوه حقیقي مختلف جذرونه لري.

❖ که $\Delta = 0$ شي نو دوه مساوي جذرونه لري.

❖که $\Delta < 0$ شي نو دوه موهومي جذرونه لري.

د دوهمه درجه یو مجهوله معادلو د جذرونو عملیې:

❖ د جمعې حاصل: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

❖ د تفریق حاصل: $|x_1 - x_2| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$

❖ د ضرب حاصل: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

❖ د مربعاتو مجموعه: ${x_1}^2 + {x_2}^2 = S^2 - 2P = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

❖ د مکعباتو مجموعه: ${x_1}^3 + {x_2}^3 = S^3 - 3PS = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

❖ معکوسه مجموعه: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$

❖ معکوس تفریق: $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{c}\right|$

❖ معکوس ضرب: $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{a}{c}$

❖ د دوهمې درجې یو مجهوله معادلې تشکیلول چې جذرونه یې معلوم وي: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

یا: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

الجبر (Algebra)

پولینوم

- ❖ که د P(x) پولینوم په (x-a) وویشو د باقیمانده قضیې پر بنسټ پاتې(باقي) له P(a) سره مساوي ده.
- ❖ که د P(x) پولینوم په (x-a) وویشو او پاتې (باقي) صفر شي نو (x-a) د P(x) د پولینوم یو فکتور دی.
- ❖ د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که (x-c) د M(x) د پولینوم یو فکتور وي، نو M(c)=0 او د (c) عدد د M(x)=0 د پولینومي معادلې یو جذر دی.
- ❖ هموجنه افاده: چې د ټولو حدونو درجې یې سره مساوي وي: هموجنس

$$a^2b^3 + bc^4 - z^5 + x^3y^2$$

مطابقتونه یا عینیتونه (Identities)

❖ $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$

❖ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

n-مثبت تام عددونه دي

❖ $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

n-طاق مثبت تام عددونه دي

❖ $a^n + b^n = \left[a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}}\right]\left[a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}}\right]$

$\binom{n}{k}\ \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\ a^{n-k}\cdot b^k$ n- جفت مثبت تام عددونه دي

❖ د دوه جمله یي k- ام حد: $\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-(k-1))!}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$

❖ په انکشاف ورکړشوي شکل کې دحدونو شمېر: $n+1$

❖ په انکشاف ورکړشوي شکل کې دضریبونو مجموعه:

که a او b متحولین وي: $(a+b)^n = 2^n$

که x او y متحولین وي: $(ax+by)^n = (a+b)^n$

مثلاً: $(3x+4y)^3 \Rightarrow (3+4)^3 = 7^3 = 343$

د ځینې مطابقتونو انکشاف ورکړ شوی یا د تجزیې شکل:

❖ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

❖ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

❖ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

❖ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

❖ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2$

❖ $a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$

❖ $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$

❖ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

- ❖ $\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \cdots}}} = \frac{\pm 1 + \sqrt{4a+1}}{2}$
- ❖ $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \ldots \sqrt{x}}}} = \sqrt[2^n]{x^{2^n-1}}$, $n \rightarrow$ جذرونو تعداد

د کسري عددونو عملیې

- ❖ $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$
- ❖ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm b}{b}$
- ❖ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- ❖ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- ❖ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
- ❖ $\left(a \pm \frac{b}{c}\right)\left(d \pm \frac{f}{e}\right) = \frac{(ac \pm b)(ed \pm f)}{ce}$

د دوو عددونو او د دوی د کوچني مشترک مضرب او لوی مشترک قاسم تر منځ اړیکه

- ❖ $G.C.D \times L.C.M = a \times b$

د تناسب خاصیتونه

- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{m}{n}$
- ❖ $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$, $m = m \Rightarrow a = b$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{h \cdot a}{b} = \frac{h \cdot c}{d}$ یا $\frac{a}{h \cdot b} = \frac{c}{h \cdot d}$
- ❖ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

اوسط

- ❖ حسابي اوسط: $A_A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- ❖ هندسي اوسط: $A_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$
- ❖ هارمونیک(مؤلفه) اوسط: $A_H = \frac{2a \cdot b}{a+b}$
- ❖ ګډه اړیکه یې: $A_G{}^2 = A_A \cdot A_H$, $A_A \geq A_G \geq A_H$

ربحه او زکات

- ❖ ساده ربحه: $R = \frac{S \cdot M \cdot N}{100}$ (Nنرخ، Mموده، Sسرمایه)
- ❖ مرکبه ربحه: $R = P - A$, $P = A(1+N)^n$

A لومړنۍ سرمایه، Pاخري سرمایه، n د کلونو شمېر

- ❖ زکات: $\text{زکات} = \frac{\text{سرمایه}}{40}$

طاقت

که چیرې $a, b \in R^{+};\ m, n \in Z$ وي

$$a^{m} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m-\text{خلي}} = \prod_{i=1}^{m} a \quad ; m > 0$$

د طاقت قوانین

- $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$
- $a^{m} \cdot b^{m} \cdot c^{m} = (a \cdot b \cdot c)^{m}$
- $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$
- $\frac{a^{m}}{b^{m}} = (\frac{a}{b})^{m}$
- $(a^{m})^{n} = a^{m \cdot n}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$
- $(\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^{m}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$
- $a^{0} = 1 \quad ; a \neq 0$

جذر

- $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}; (a, b \in R^{+} \cup \{0\}; m, n \in N)$

د جذر قوانین

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[n]{a^{m}} \cdot \sqrt[n]{a^{p}} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m} \cdot b^{n}}$
- $\sqrt[n]{a^{p}} \cdot \sqrt[m]{a^{q}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{pm+nq}}$
- $\frac{\sqrt[n]{a^{m}}}{\sqrt[n]{a^{p}}} = \sqrt[n]{a^{m-p}}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad , b \neq 0$
- $\frac{\sqrt[m]{a^{x}}}{\sqrt[n]{a^{y}}} = \frac{\sqrt[m \cdot n]{a^{x \cdot n}}}{\sqrt[m \cdot n]{a^{y \cdot m}}} = \sqrt[mn]{a^{xn-ym}}$
- $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$
- $(\sqrt[n]{a^{m}})^{p} = \sqrt[n]{a^{mp}}$
- $(\sqrt[n]{a})^{n} = a$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{p}}} = \sqrt[mn]{a^{p}}$
- $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{n} \cdot b}$
- $a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} + c\sqrt[n]{x} = (a + b + c) \cdot \sqrt[n]{x}$
- $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a} \qquad , a \neq 0$
- $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^{2}-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^{2}-b}}{2}}$
- $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b} \quad , a, b \neq 0$

په هغه صورت کې چې: $A \subset B \wedge B \subset A$

❖ فرعي سيټ: A د B فرعي سيټ دی هغه وخت چې د A ټول عناصر په B کې شامل وي. $A \subset B$

❖ د فرعي سټونو شمېر: (n د عناصرو شمېر) 2^n

❖ د خاص فرعي سټونو شمېر: $2^n - 1$

❖ د سټونو تقاطع: د A او B دوو سټونو د تقاطع سټ هغه دی چې عناصر يې هم په A او هم په B کې شامل وي.

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

❖ د سټونو اتحاد: د A او B دوو سټونو د اتحاد سټ هغه دی چې عناصر يې لږ تر لږه په A يا B کې شامل وي.

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

❖ د سټونو د تقاطع اتحادي خاصيت:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

❖ د سټونو د اتحاد اتحادي خاصيت:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

❖ غير مشترک (مجزا) سټونه: هغه سټونه چې هيڅ مشترک (ګډ) عنصرونه لري لکه A او B سټونه: $A \cap B = \phi$

❖ معين سټ: چې عناصر يې معين او د شميرلو وړ وي:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

❖ غير معين سټ: چې عناصر يې د شميرلو وړ نه وي:

$$B = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

❖ د سټونو سټ: چې ټول عناصر يې سټونه وي:

$$P = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c\}\}$$

❖ د طاقت سټ: چې عناصر يې د يوه بل سټ فرعي سټونه وي: د A سټ د طاقت سټ:

$$A = \{x, y, z\} \;;\; P(A) = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\}$$

❖ د دوو سټونو تفاضل: A تفاضل د B يا $A \backslash B$ هغه سټ دی چې عناصر يې په A کې شامل او په B کې شامل نه وي.

$$A \backslash B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

د سټونو متناظر تفريق: د $A - B$ او $B - A$ سټونو اتحاد د A او B سټونو متناظر تفريق دی:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

يا: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow A \Delta B = B \Delta A$

❖ مکمله سټ: که چېرې $B \subset A$ وي، نو $A \backslash B$ ته د B مکمله سټ وايي.

$$B' = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$i^{4n} = 1 \quad ; \quad i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1 \quad ; \quad i^{4n+3} = -i$

پـه هغـه صـورت کې چې (i) د موهومي عـددونو واحد او $n \in N_0$ وي

❖ د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$

❖ د یو مختلط عدد د مزدوج ځانګړتیاوې

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1$

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

5) $z + \bar{z} = 2x$

6) $z - \bar{z} = 2yi$

7) $\bar{\bar{z}} = z$ 8) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

❖ د عددونو د ستونو ترمنځ اړیکه: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

دوېش قابلیت

❖ پر ۲: چې یو یز رقم یې صفر یا جفت وي.

❖ پر ۳: چې د رقمونو مجموعه یې پر ۳ د وېش وړ وي.

❖ پر ۴: چې اولي دوه رقمونه یې صفر یا پر ۴ د وېش وړ وي.

❖ پر ۵: چې یو یز رقم یې صفر یا ۵ وي.

❖ پر ۶: چې یو وخت پر ۲ او ۳ د وېش وړ وي.

❖ پر ۷: د لومړي رقم ۲ چنده لـه بـاقي عـدد څخـه منفي کوو حاصل به صفر یا پر ۷ د وېش وړ وي.

❖ پر ۸: چې اولي ۳ رقمونه یې صفر یا پر ۸ د وېش وړ وي.

❖ پر ۹: چې د رقمونو مجموعه یې پر ۹ د وېش وړ وي.

❖ پر ۱۰: چې یو یز رقم یې صفر وي.

❖ پر ۱۱: د یو عدد د جفتو او طاقو رقمونو حاصـل تفریق صـفر یا پر ۱۱ د وېش وړ وي

❖ پر ۱۲: چې په یو وخت پر ۳ او ۴ د وېش وړ وي.

سټ

❖ د ځانګړو شیانو جمع آوري(collection) ته سټ وایي.

❖ معادل ستونه: یو ازې د عناصرو تعداد یې سره مساوي وي.

❖ مساوي ستونه: چې ټول عناصر یې سره یو شان وي $A = B$

- ❖ $|-x| \neq -|x|$
- ❖ $|x| \geq x\,;\ |x| > -x$
- ❖ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ❖ $|x+y| \leq |x| + |y|$
- ❖ $|x-y| > |x| - |y|$
- ❖ $|xy| = |x||y|$
- ❖ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ ,\ y \neq 0$
- ❖ $|x| = \sqrt{x^2}$
- ❖ $|x^n| = |x|^n$
- ❖ $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

مطلقه قیمت او حل یې $(a > 0)$

- ❖ $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$
- ❖ $|x| < a \Rightarrow -a < x < a\,;\ a > 0$
- ❖ $|x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a\,;\ a > 0$
- ❖ $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$
- ❖ $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \ \vee\ x \leq -a$

لوگاریتم (Logarithm)

❖ $\log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x,\ a \neq 1,\ \ y, a > 0$

د لوگاریتم ځانګړتیاوې

- ❖ $\log_a a = 1$
- ❖ $\log_a 1 = 0$
- ❖ $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$
- ❖ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- ❖ $\log_{a \cdot r} x = \frac{1}{\log_x a + \log_x r}$
- ❖ $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$
- ❖ $\log_y x = \frac{ln x}{ln y}$
- ❖ $\log_a a^r = r$
- ❖ $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_{a^r} x = \frac{1}{r} \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_{a^s} x^r = \frac{r}{s} \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_a \sqrt[s]{x^r} = \frac{r}{s} \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_a x \cdot \log_x a = 1$
- ❖ $\log_a x \cdot \log_r a \cdot \log_s r = \log_s x$
- ❖ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
- ❖ $a^{\log_a x} = x$

❖ $a^{\log_a x+\log_a y} = x \cdot y$

❖ $a^{\log_a x-\log_a y} = \frac{x}{y}$

❖ $a^{\log_r x} = x^{\log_r a}$

❖ $\log_a[\log_b(\log_c x)] = d \Leftrightarrow x = c^{b^{a^d}}$

❖ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x = co\log_a x$

❖ $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \log_a x$

❖ $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

د معمولي او طبيعي لوګاريتم تر منځ اړيکه

❖ $\log x = (0,4343)lnx$

❖ $lnx = (2,3026)\log x$

❖ $\log_a 0 = \begin{cases} -\infty \ , \ a > 1 \\ +\infty \ , \ a < 1 \end{cases}$

يادونه: د معمولي لوګاريتم ټولې ځانګړتياوې د طبيعي لوګاريتم لپاره د پلې کېدو وړ دي

❖ $lne^{f(x)} = f(x) \quad , \quad e^{lnf(x)} = f(x)$

❖ هره لوګاريتمي تابع معکوسه تابع لري چې $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې يو د بل معکوسې تابعګانې دي او ګرافونه يې د $y = x$ مستقيم خط ته متناظر دي.

❖ هره لوګاريتمي تابع يو په يو يا انجکتيف($injective$) ده. يعنې: د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

❖ انتي لوګاريتم: که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاريتم انتي لوګاريتم بلل کيږي يعنې: $y = antilog x$

ترادف يا تصاعد (Sequence)

حسابي ترادف

❖ n-ام حد: $a_n = a_1 + (n-1)d$

❖ د ترادف منځنی حد: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

❖ د ترادف ګډ توپير چې n-ام او m-ام حدونه يې معلوم وي:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

❖ د (n)حدونو مجموعه: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

❖ يا: $S_n = \frac{n}{2}(a_n + a_1)$

❖ د (m) حدونو د شاملولو لپاره ګډ توپير: $d = \frac{a_n - a_1}{m+1}$

❖ د (n) طبيعي اعدادو مجموعه: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

❖ د (n) جفتو اعدادو مجموعه: $S_n = n(n+1)$

❖ د (n) طاقو اعدادو مجموعه: $S_n = n^2$

په حسابي تصاعد کې

1- که د حدونو شمیر طاق وي: $S_n = n \cdot$ منځنی حد

2- که منځنی حد معلوم وي: د منځني حد دوه چنده $= a_1 + a_n$

3- کله چې k-ام حد او ګډ توپیر معلوم وي نو n-ام حد:

$$a_n = a_k + (n-k)d \,, n > k$$

هارمونیکي ترادف: چې معکوس یې یو حسابي ترادف وي.

❖ هارمونیکي حسابي اوسط: $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$

هندسي ترادف

❖ n-ام حد: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

❖ د ترادف منځنی حد: $a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$

❖ ګډ نسبت: $r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$

❖ د (m) حدونو د شاملولو لپاره ګډ نسبت: $r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$

❖ د (n) حدونو مجموعه: $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \,, r > 1$

❖ د (n) حدونو مجموعه: $S_n = \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{1-r} \,, r < 1$

❖ د لایتناهي حدونو مجموعه: $S_\infty = \infty \,, r \geq 1$

❖ د لایتناهي حدونو مجموعه: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \,, |r| < 1$

په هندسي تصاعد کې

1- که اول حد، آخر حد او د حدونو شمیر معلوم وي، نو د تصاعد د حدونو د ضرب حاصل مساوي دی له:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

2- که د تصاعد د حدونو شمیر طاق وي، نو د حدونو د ضرب حاصل:

$$P_n = \left(\text{منځنی حد}\right)^n$$

3- کله چې k-ام حد او مشترک نسبت معلوم وي نو n-ام حد:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \,, \quad n > k$$

سلسلې یا مجموعې (Series)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \sum_{k=1}^{n} a_i$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\frac{n}{2}(n+1)$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

$n(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2+1)}{3}$$

$$1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(4n^2-1)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\approx 1$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+..+\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots=e=2.718281\ldots$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)=\frac{1}{1-x}$$

د سلسلو یا مجموعو ځانګړتیاوې

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k}=1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k-1}=-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=c\cdot n$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$$

د عدد لیکني علمي طریقه *Scientific notation*

❖ کولای شو هر عدد د 10 د توان په څیر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N=a\cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1\le a<10$ او n یو تام عدد دی.

متریکس (Matrix)

❖ د (A) یو متریکس:

فرعی قطر

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{22} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

اصلی قطر

m د سطرونو شمیر او n د ستونونو شمیر راښیي.

i د سطر(کرښې) نمبر او j د ستون(ستنې) نمبر راښيي، مثلاً:

$$a_{ij} = a_{23} \Rightarrow i = 2 \wedge j = 3$$

د متريکسونو ډولونه

❖ سطري متريکس: چې يوازې يو سطر ولري:

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n]_{1\times n}$$

❖ ستوني متريکس: چې يوازې يو ستون ولري:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

❖ صفري متريکس: چې ټول عناصر يې صفرونه وي:

$$0_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

❖ مربعي متريکس: چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره مساوي وي:

m = n

m = n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

❖ مستطيلي متريکس: چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې مساوي نه وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

❖ قطري متريکس: له اصلي قطر پرته نور ټول عناصر يې صفر وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

❖ سکالري متريکس: هغه قطري متريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي:

$$A = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

❖ واحد متريکس: چې په سکالري يا قطري متريکس کې د اصلي قطر عناصر د يو(1) عدد وي:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

❖ ښکتنی مثلثي متريکس: چې د يو مربعي متريکس اصلي قطر څخه پورته عناصر صفرونه وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

❖ پورتنی مثلثي متریکس: چې د یو مربعي متریکس د اصلي قطر څخه ښکته عناصر صفرونه وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

یادونه: د ښوونځي په ریاضي کې د پورتني او ښکتني مثلثي متریکسونو په اړه یو څه تیروتنه شوې ده، په پورته ډول سم دی، د لازیاتو معلوماتو لپاره د ریاضیاتو مهمو کتابونو ته مراجعه وکړئ(۱۱ ټولګی، ۲ څپرکی، ۲۱۱ مخ)

❖ متقابل(متضاد) متریکس: چې عناصر یې یو په یو د لومړي متریکس متضاد وي:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \Rightarrow -A = \left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow -A$$

$$= \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

❖ ترانسپوز متریکس: که په لومړي متریکس کې د سطرونو او ستونو ځایونه تبدیل شي نو دوهم متریکس ته د لومړي متریکس ترانسپوز متریکس وایي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times2} , A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{3\times2} , A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

❖ د ترانسپوز متریکس ځانګړتیاوې:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $\left(A \pm B \pm C \pm \cdots\right)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \cdots$
3. $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$
4. $\left(\alpha \cdot A\right)^T = \alpha \cdot A^T \quad , \quad \alpha \in IR$
5. $\left(-A\right)^T = -A^T$

❖ متناظر متریکس: یو مربعي متریکس هغه وخت متناظر دی چې $a_{ij} = a_{ji}$ وي، په متناظر متریکس کې $A = A^T$ دی:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 7 \\ -2 & 9 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

❖ متوصله یا مجاور (Adjoint) متریکس: چې د اصلي قطر د عناصرو ځایونه تبدیل او د فرعي قطر د عناصرو علامې الحاقي متریکس

متناظر: چې ترانسپوز یې برابر له لومړي متریکس شي -

بدلې شي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \Rightarrow AdjA = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

د متریکسونو عملیې

❖ جمع او تفریق: دوه متریکسونه هغه وخت جمع او تفریق کولای شو چې هم مرتبه وي:

$$A = (a_{ij})_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$B = (b_{ij})_{3\times3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$A + B = C = c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$A - B = C = c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

د جمعی او تفریق ځانګرتیاوې:

1. $A + B = B + A$
2. $A - B \neq B - A$
3. $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$
4. دعینیت عنصر د متریکسونو په جمع کې صدق کوي، خو په تفریق کې صدق نه کوي:

$$A + 0 = 0 + A = A$$

❖ ضرب: دسکالر ضرب په متریکس کې:

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad K \cdot A = (Ka_{ij})_{m\times n}$$

په متریکس کې د سکالر ضرب ځانګړیتاوې:

که چیرې A او B هم مرتبه متریکسونه او $\alpha \wedge B \in IR$ وي نو:

$1 - \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$2 - (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$3 - \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

❖ د متریکسونو ضرب: د ضرب لپاره باید د لومړي متریکس د ستونونو شمېر د دوهم متریکس د سطرونو د شمېر سره مساوي وي:

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times q}, A \cdot B = C = (c_{ij})_{m\times q}$$

$$(a_{ij})_{m\times n} \cdot (b_{ij})_{n\times q} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij} = (c_{ij})_{m\times q}$$

$$A = (a_{ij})_{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$B = (b_{ij})_{2\times3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

د متریکس د ضرب ځانګړتیاوې:

1. په عمومي توګه د دوو متریکسو په ضرب کې:

$$AB \neq BA$$

2. که هم مرتبه متریکسونه وي، نو: $AB = BA$

3. $(AB)C = A(BC)$

4. $(A+B)C = AC + BC$

5. $K(AB) = (KA)B = A(KB)\,,\ \ K \in IR$

د متریکسونو لیکل د مستطیلي جدول په ډول:

❖ مثال: لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$a).\ (a_{ij})_{2\times2} = (2i + 3j)_{2\times2}$

$a_{ij} = 2i + 3j\ ;\ a_{11} = 2\cdot1 + 3\cdot1 = 5$

$a_{12} = 2\cdot1 + 3\cdot2 = 8\ , a_{21} = 2\cdot2 + 3\cdot1 = 7$

$a_{22} = 2\cdot2 + 3\cdot2 = 10 \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$b).\ (a_{ij})_{2\times3} = (3i\cdot j)_{2\times3}\ ;\ a_{ij} = 3i\cdot j$

$a_{11} = 3\cdot1\cdot1 = 3\ , a_{12} = 3\cdot1\cdot2 = 6$

$a_{13} = 3\cdot1\cdot3 = 9\ , a_{21} = 3\cdot2\cdot1 = 6$

$a_{22} = 3\cdot2\cdot2 = 12\ , a_{23} = 3\cdot2\cdot3 = 18$

$a_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}_{2\times3}$

ډیټرمینانټ (Determinant)

❖ $A = (a_{ij})_{m\times m} \Rightarrow detA = |A|$

❖ د (2×2) مرتبې لرونکي متریکس دیترمینانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

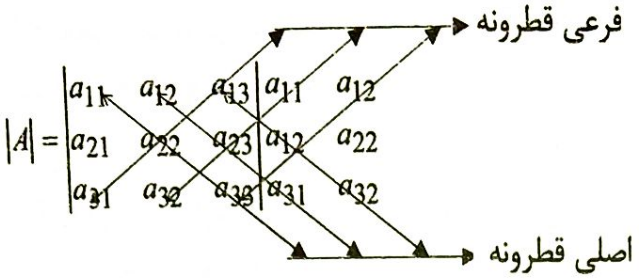
❖ د (3×3) مرتبې لرونکي متریکس دیترمینانت:

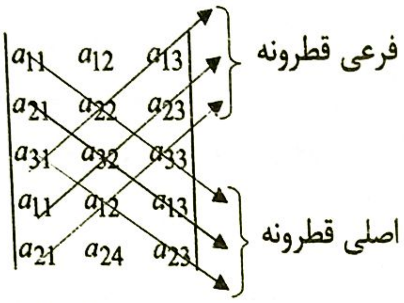
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

د ساروس په طریقه د (3×3) مرتبه متریکس د ډیټرمینانټ محاسبه:

په دغه طریقه کې د دیترمینانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته یا دوه لومړي سطرونه لاندیني برخه کې په لاندې ډول تکرار لیکو:





$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

❖ د دیترمینانت ځانګرتیاوې

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دیوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

3- که د $A_{n\times n}$ متریک دیوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګڼ فکتور وي، نو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

4- که د A متریکس دیترمینانت او A^T متریکس دیترمینانت یوله بل سره مساوي وي: $|A| = |A^T|$

❖ منفرد متریکس: $A_{n\times n} => |A| = 0$

❖ غیر منفرد متریکس: $A_{n\times n} => |A| \neq 0$

❖ معکوس متریکس: B متریکس د A د متریکس معکوس دی هغه وخت چې:

$$AB = B \cdot A = I \text{ (واحد متریکس) }, B = A^{-1}$$

❖ هغه وخت یو متریکس د معکوس متریکس لرونکی دی چې:

1- متریکس مربعي وي.

2- دیترمینانت یې د صفر خلاف وي.

یادونه: د معکوس متریکس موضوع د 2×2 مرتبې متریکس دی چې له لاندې فورمول څخه لاسته راځي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\, A \quad , \quad |A| \neq 0$$

❖ له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = C_1 \\ a_2x + b_2y = C_2 \end{cases} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

❖ د خطي درې مجهوله معادلو سیستم:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= d_3 \end{aligned} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

د y, x او z قیمتونه:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \quad ; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad ; \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} \quad ; \quad |A| \neq 0$$

د سیستم زیات شوی متریکس:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right]$$

- د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون پرځای څلورم ستون ځای پرځای کوو، د 3×3 ډیترمینانت په لاس راوړو.

- د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون پرځای څلورم ستون ځای پرځای کوو، 3×3 دیترمینانت په لاس راوړو.

- د $|A_z|$ د محاسبې لپاره د دریم ستون پرځای څلورم ستون ځای پرځای کوو، 3×3 دیترمینانت په لاس راوړو.

د معادلو د سیستم حل د گوس ($Gouse$) په طریقه

د گوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو متریکس او ثابت قیمتونه لیکو، وروسته په سطرونو او ستونو باندې لومړنۍ عملیې (جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې یو مجهول پاتې کېږي او قیمت یې لاسته راځي، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متریک سطرونه په $R_1, R_2, \cdots$، ښیو.

مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کوو:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\cdot(-1)\to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y=2} \quad , \quad \begin{matrix} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \end{matrix} \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه (2) سطر تفریق او په (2) سطر کې لیکل شوي دي.

$R_2(-1) \to R_2$ په دې معنا چې دویم سطر په (1−) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

وکتورونه (Vectors)

❖ وکتور: هغه کمیت دی چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه: قوه، تعجیل،....

❖ د شعاع وکتور یا د موقعیت وکتور: چې مبدا یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبدا کې واقع وي.

❖ د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د یو وکتور ښودل:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

a_x د x او a_y د y په محور د $\vec{a}$ فاصله او ترتیب ښیي.

❖ د وکتور او x محور تر منځ زاویه:

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

❖ په دوه بُعدي فضا کې د وکتور ښودنه:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_i + y_j$$

i او j واحد وکتورونه دي.

❖ واحد وکتور: چې اوږدوالی یې یو واحد وي: $1 = \vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

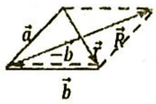
❖ مساوي وکتورونه: چې اوږدوالی یې سره مساوي، هم جهته او موازي وي:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \quad , \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

❖ صفري وکتور: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = 0$

❖ مخالف یا منفي وکتورونه: چې اوږدوالي يې مساوي او جهت يې مخالف وي: $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AO}|, \overrightarrow{AO} = -\vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}$

د وکتورونو جمع او تفريق (د متوازي الاضلاع په طريقه)



$$\left.\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{a} + \vec{b}\\ \vec{r} &= \vec{a} - \vec{b}\end{aligned}\right\}$$

❖ په دوه بُعدي (مستوي) کې د وکتورونو د جمعې قاعده:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \end{pmatrix}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + \acute{x} \\ y + \acute{y} \end{pmatrix}$$

❖ په دوه بُعدي (مستوي) کې د وکتورونو د سکالري ضرب قاعده:

$$a \cdot \vec{u} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}, \qquad a \in IR$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د وکتور ښودنه:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yj} + \overrightarrow{zk}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

په درې بُعدي فضا کې د x, y او z د محورونو په امتداد واحد وکتورونه دي:

$$i = (1,0,0), \quad j = (0,1,0), \quad k = (0,0,1)$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د وکتورونو د جمعې قاعده:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \end{pmatrix}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + \acute{x} \\ y + \acute{y} \\ z + \acute{z} \end{pmatrix}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د وکتورونو د سکالري ضرب قاعده:

$$a \cdot \vec{u} = a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن:

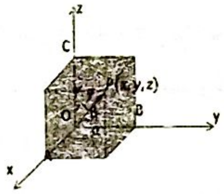
$$p_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad p_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$|\overrightarrow{p_1p_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د يو ټکي واټن له مبدا څخه:

$$|\overrightarrow{p_1p_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

❖ د يوه وکتور د جهت زاويې او کوساينونه:



$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \vec{r}\\ \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{r_x}\\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{r_y}\\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{r_z}\end{aligned}\right\}$$

❖ د $(\vec{r})$ وکتور د جهت کوساینونه:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cdot\cos\beta$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cdot\cos\gamma$$

❖ د جهت د زاویو او کوساینونو ترمنځ اړیکه:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

❖ د دوو وکتورونو سکالري ضرب(په مستوي او یا فضا کې):

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\cos\theta;\ \ \vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$$

❖ عمودي وکتورونو سکالري ضرب: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

❖ د ضرب تبدیلي خاصیت: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

❖ د ضرب توزیعي خاصیت په جمع:

$$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

❖ د ضرب توزیعي خاصیت: $(c\cdot\vec{u})\vec{v} = c(\vec{u}\cdot\vec{v})$

❖ د دوو وکتورونو وکتوري ضرب: ($\vec{n}$ واحد وکتور)

$$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\sin\theta\cdot\vec{n}$$

❖ په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}, \vec{b} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

❖ د وکتوري ضرب خاصیتونه:

$\vec{u}\times\vec{u} = 0$

❖ $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$

❖ $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

❖ $\vec{u}\times(k\vec{v}) = (k\vec{u})\times\vec{v} = k(\vec{u}\times\vec{v}), k\in IR$

د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو عمود دی.

❖ د وکتورونو خطي ترکیب:

$$\vec{\alpha}\,\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$$

وکتور د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ وکتورونو خطي ترکیب په نوم یادېږي

*سکالري حاصل ضرب

$\vec{u}\cdot\vec{v} = a1a2 + b1\cdot b2 + c1\cdot c2$

پداسې حال کې چې α_1 د $\overrightarrow{a_1}$ وکتور د i, j او k ضـریبونو مجموعه وي او په همدې توګه α_2 تر α_n پورې.

❖ پـه n بُعدي فضــا کې د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب پواسطه د یوه وکتور ښودل:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

پداسې حال کې چې $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ طبیعي واحد وکتورونه دي.

❖ د وکتورونو خطي استقلال: د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي استقلال لري، که چیرې:

$$\begin{cases} \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_1 \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \end{cases}$$

❖ د وکتورونو خطي ارتبـاط: د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ وکتورونـه خطاً مربوط (خطي غیرخپلواک) یـا خطي انحصـــارلري، کـه چیرې یوازې او یوازې، $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_1 \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$ وي او کم ترکمـه یوله ضـریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ څخه خلاف د صفر وي.

❖ د مخلوط ضرب حاصل(دری ګونی ضرب):

لاندې څو امکانه وجود لري:

$$i) \quad \vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$ii) \quad (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$iii) \quad \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$iv) \quad \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$$

رابطه (اړیکه)

❖ که $A \wedge B \neq \phi$ وي نود $A \times B$ هر فرعي سیټ له A څخه پـه B کې یوه رابطه ده، کـه $(a, b) \in IR$ وي، ویل کیږي چې a له b سره رابطه لري اود (aRb) په شکل لیکل کیږي.

❖ خطي رابطه: کـه چیرې د یوې رابطې ګراف مســتقیم خط وي، نو د متحولینونو ترمنځ رابطه خطي ده.

❖ د کارتیزیني ضرب حاصل:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}, \quad A \wedge B \neq \phi$$

❖ که $(A \neq B)$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$

❖ که د A سټ د عناصرو شمیر m او B سټ n وي، نو د

$A\times B$ د عناصرو شمیر $(m\times n)$ دی.

❖ که R که A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو:

$R\subset A\times B$

❖ که R په A کې یوه رابطه وي نو: $R\subset A\times A$

❖ که د $A\times B$ د عناصرو شمیر $m\times n$ وي، نو د A څخه په B کې د ټولو رابطو شمیر:

$2^{m\times n}$

❖ د R د تعریف ساحه:

$Dom_R =$ {د مرتبو جوړو لومړني عنصرونه دي}

❖ د R د قیمتونو ناحیه:

$Range_R =$ {د مرتبو جوړو دویمی عنصرونه دي}

❖ د R معکوسه رابطه:

$R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}\ ,\ (x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$

❖ د R دومین د R^{-1} رینج او د R رینج د R^{-1} دومین دی.

❖ معادله رابطه: د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که لاندې درې خاصیتونه ولري:

1. انعکاسی خاصیت: $\forall x\in A \Rightarrow (x,x)\in R$
2. تناظری خاصیت: $\forall (x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$
3. انتقالي خاصیت: $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقی عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده

تابع (Function)

د ځینو تابعګانو د تعریف ناحیې او ګرافونه:

❖ ثابته تابع: $f(x)=c\ ;\ Domf(x)=IR$

$$\begin{cases} f(x)=\frac{3}{2} \\ f(x)=2 \end{cases}$$

❖ د عینیت تابع: $y=f(x)=x\ ,\ Domf(x)=IR$

❖ د مطلقه قیمت تابع: $y = f(x) = |x| ; Domf(x) = IR$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

❖ پولینومي تابع:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ; n \in N \ ; \ Domf(x) = IR$$

$$y = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

a) خطي تابع: $f(x) = ax + b \,; a \neq 0$

$Domf(x) = IR$

$$\begin{cases} f(x) = 0.5x \\ f(x) = x - 1 \end{cases}$$

b) دویمه درجه تابع: $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 - 4 \end{cases}$$

❖ ناطقه تابع: $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)} \ ; \ g(x) \neq 0$

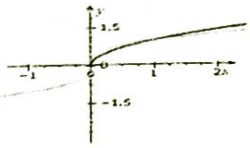
$Domf(x) = IR - \{g(x) = 0\}$

$$y = \frac{x}{x^2 - 9}$$

❖ جذري تابع:

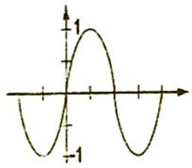
- د جذر درجه طاقه ده: $y = \sqrt[2n-1]{g(x)} \ ; \ Domy = IR$
- د جذر درجه جفته ده: $y = \sqrt[2n]{g(x)}$

$Domy = \{x / x \in IR, g(x) \geq o\}$



$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

❖ مثلثاتي تابع: مثلاً: $y = \sin x$



$Domy = IR \,, R_y = [-1,1]$

❖ معکوسه مثلثاتي تابع: مثلاً:

$y = \sin^{-1} x = arc\sin x \Rightarrow x = \sin y$

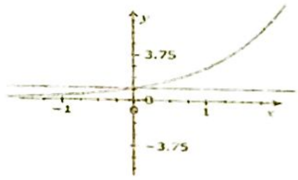
$Domy = [-1,1] \,, R_y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

❖ هوموگرافیک تابع: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \,;\ c \neq 0$

$Domy = IR - \{cx + d = 0\}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

❖ اکسپوننشیل تابع: $f(x) = a^x \,, f(x) = e^x ; D_f = IR$



❖ لوگاریتمي تابع: $y = \log_a g(x)$

$Domy = \{x/x \in IR \,, g(x) > 0\}$

$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = \log_{10} x \end{cases}$$

د اکسپوننشیل تابع ځانګړتیاوې

1. د هرې تابع $Dom = IR$ و $Range = IR^+$ دی.
2. هره تابع يې يو په يو $(injective)$ ده.
3. هره تابع يې د $a > 1$ لپاره متزایده، د $a < 1$ لپاره متناقصه او $a = 1$ لپاره ثابت تابع ده.
4. د هرې تابع ګراف يې د $(0,1)$ ټکي څخه تیریږي

5. د $f(x)=a^{x}$ او $g(x)=a^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر (y) محور ته متناظر پراته دي.

6. هر تابع يې معکوس لري چې معکوسه تابع يې $\log_a x$ ده.

❖ تابع په يوه انټروال کې متزايده ده که:

$$if\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \ ;\ \ x_1, x_2 \in D_f$$

❖ تابع په يوه انټروال کې متناقصه ده که:

$$if\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ \ ;\ \ x_1, x_2 \in D_f$$

❖ جفته تابع: $f(-x) = f(x)$

❖ طاقه تابع: $f(-x) = -f(x)$

❖ معکوسه تابع: يوه تابع هغه وخت معکوس پذيره ده چې بايجکتيف وي. نو که په يوه تابع کې د (x) او (y) ځايونه تعويض شي او معادله د (y) لپاره حل شي، لاسته راغلې تابع د لومړۍ تابع معکوسه ده.

$$\rightarrow f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

$$\rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(f(x)) = x$$

- د f(x) او g(x) تابع ګانې هغه وخت يو د بل معکوسې دي چې:

$$(fog)_{(x)} = (gof)_{(x)} = x$$

❖ د تابع ګانو ترکيب يا مرکبې تابع ګانې:

$$(fog)_{(x)} = f\left(g(x)\right) = f[g(x)]$$

$$Dom(fog)_{(x)} = \{x \in IR / x \in Domg, g(x) \in Domf\}$$

❖ د علامې تابع:

$$sgn = \begin{cases} 1\ ;\ x > 0 \\ 0\ \ ;\ x = 0 \\ -1\ ;\ x < 0 \end{cases}$$

$$Dom_{sgn} = IR\ , \qquad Range_{sgn} = \{-1,0,1\}$$

❖ يو په يو تابع (انجکتيف): که يو له لاندې شرطونو صدق وکړي تابع يو په يو ده.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\ \ ;\ \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2$$

❖ ضمني تابع: کله چې د x او y متحولينو ترمنځ اړيکه د $f(x,y) = 0$ اړيکې په واسطه تعين شي، نو ويل کيږي چې y د x د متحول ضمني تابع ده. د دايرې، بيضوي، ..... انکشاف لرونکې معادلې ضمني تابع ګانې دي: $x^2 + y^2 = r^2$

❖ پارامتريک تابع: شونې (ممکنه) ده چې د $y = f(x)$ تابع په غير مستقيم ډول د يوه دريمې متحول t (t پارامتر) په واسطه په لاندې ډول وښيو، چې د يوې تابع ښودل د پاراستريکې تابع په ډول ښيي:

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = V(t) \end{cases}$$

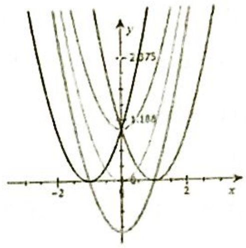
د تابع ګانو د ګراف انتقال د $(c > 0)$ ثابت عدد په اندازه:

❖ عموداً پورته خواته: $y = f(x) + c$

❖ عموداً ښکته خواته: $y = f(x) - c$

❖ ښي خواته: $y = f(x - c)$

❖ چپې خواته: $y = f(x + c)$



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 1 \\ y = (x-1)^2 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$$

د تابع ګانو د ګراف کش کول او منعکس کول $(C < 1)$

❖ په عمودي ډول د ګراف کش کيدل د (C) په اندازه: $y = Cf(x)$

❖ په عمودي ډول د ګراف غونجيدل (راټوليدل) د (C) ثابت عدد په اندازه:

$$y = \left(\frac{1}{C}\right)f(x)$$

❖ په افقي ډول د ګراف کش کيدل د (C) ثابت عدد په اندازه:

$$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$$

❖ په افقي ډول د ګراف غونجيدل د (C) ثابت عدد په اندازه:

$y = f(Cx)$

❖ د ګراف منعکس کيدل نظر د (x) محور ته: $y = -f(x)$

❖ د ګراف منعکس کيدل نظر د (y) محور ته: $y = f(-x)$

د تابع ګانو څلور ګونې عمليې

❖ $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$Dom(f \pm g)(x) = Domf \cap Domg$

❖ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$Dom(f \cdot g)(x) = Domf \cap Domg$

❖ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Domf \cap Domg - \{x/g(x) = 0\}$$

هایپربولیک تابع ګانې

- ❖ $\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ❖ $\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- ❖ $\tan hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, ❖ $\cot hx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- ❖ $\sec hx = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$, ❖ $\csc hx = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

د هایپربولیک تابع ګانو معکوسې تابع ګانې

- ❖ $y = \arcsin hx \quad , \ x \in IR$
- ❖ $y = \arccos hx \quad , \ x \in [1, \infty)$
- ❖ $y = \arctan hx \quad , \ x \in (-1,1)$
- ❖ $y = \operatorname{arccot} hx \ , \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- ❖ $y = \operatorname{arcsec} hx \ , \ x \in (0,1]$
- ❖ $y = \arcsin hx \ , \ x \in IR \ , \ x \neq 0$

مجانبونه په ناطقو تابع ګانو کې

❖ عمودي: مخرج مساوي په صفر فرض کوو عمودي مجانب لاسته راځي:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)}; \ h(x) \neq 0$$

❖ افقي: پدی لاندی ډول د تابع لیمیټ نیسو افقي مجانب لاسته راځي:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

❖ مایل: څرنګه چې دا مجانب هم یو مستقیم خط($y = ax + b$) ده، نو د لاسته راوړلو لپاره یې د a او b قیمتونه په لاندې ډول لاسته راوړو او په تابع کې یې وضع کوو نو د مایل مجانب معادله لاسته راځي:

$$a = \lim_{x\to\infty} f(x)/x \ ; b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$$

- یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي خو یو افقي یا مایل مجانب به لري

لیمیټ (Limit)

❖ په لیمیټ کې باید د چپې خوا او د ښې خوا لیمیټ د تابع د اصلي لیمیټ سره مساوي وي:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

❖ شتون نه لري:

د لیمیټ ځانګړتیاوې

❖ $\lim_{x\to a} c = c$

❖ $\lim_{x\to a} x = a$

❖ $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

❖ $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

❖ $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

❖ $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

❖ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

❖ $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

❖ $\lim_{x\to a}[\sin f(x)] = \sin\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

❖ $\lim_{x\to a} \log_d f(x) = \log_d\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

❖ $\lim_{x\to a}[c^{f(x)}] = c^{\lim_{x\to a} f(x)}$

❖ $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$

❖ $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

f په g(x) کې متمادي وي

❖ د خو معادله يي تابع ګانو لپاره د هرې تابع يو طرفه لېميټ محاسبه کوو که سره مساوي شول لېميټ لري او که مساوي نه شول لېميټ نه لري. مثلاً:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 \,; x < -2 \\ 1 - 3x \,; x \geq -2 \end{cases} ; \lim_{x\to -2} f(x)$$

وروسته له محاسبې پوهيږو چې تابع په $(x \to -2)$ کې لېميټ نه لري.

❖ بې اندازه کوچنۍ تابع ګانې: $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

❖ د ساندويچ قضيه: که د $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ شرط د هر (x) لپاره په يوه غيرتړلي انټروال کې چې د (a) عدد پکې شامل وي او که $(x \neq 0)$ صدق وکړي، په هغه صورت کې چې:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = b$$

❖ قضيه: که چيرې $f(x) < g(x)$ وي د لېميټ د شتون په صورت کې يې لېميټ دی: $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

د مبهم شکل لرونکو تابع ګانو لېميټ

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, \dots$$

❖ $(\frac{0}{0})$: د لېميټ لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو، د ابهام عامل (خبيثه فکتور) له منځه وړو او بيا يې

د لیمیټ قیمت لاسته راوړو.

❖ $(\frac{\infty}{\infty})$: د $f(x) = \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ، که چیرې $(x \to \infty)$ کړې وي؛ نو دلته دری حالته ممکن دي:

(1) د $m = n$ لپاره: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$

(2) د $m > n$ لپاره: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(3) د $m < n$ لپاره: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

❖ $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$: ددې د لیمیټ پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو تر څو د $(\frac{0}{0})$ یا $(\frac{\infty}{\infty})$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ پیدا کوو.

❖ $(1^\infty, \infty^0, 0^0)$:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a}[g(x)\cdot lnf(x)]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\cdot\beta}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(1)^\infty: \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^p\ ; p = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

د مبهم شکل د لیمیټونو ځینې نور فرمولونه

❖ $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = n\cdot a^{n-1}$

❖ $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n} = \frac{1}{n\cdot a^{n-1}}$

❖ $\lim_{x\to 0}\frac{a^n-1}{x} = lna$

❖ $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}} = \frac{n}{m\cdot\sqrt[m\cdot n]{a^{m-n}}}$

❖ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

❖ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

❖ $\lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty$

❖ $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \infty \quad ; n \to$ جفت

❖ $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \quad ; n \to$ طاق

مثلثاتي لیمیټونه

❖ $\lim_{x\to 0}\sin x = \lim_{x\to 0}\tan x = 0$

❖ $\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\sec x = 1$

❖ $\lim_{x\to 0}\cot x = \lim_{x\to 0}\csc x = \infty$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}=\dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c\cdot\sin ax}{\tan bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c\cdot\tan ax}{\sin bx}=\dfrac{a\cdot c}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ او $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x \Rightarrow$ موجود نه دي

د تابع گانو متماديت

- د $f(x)$ يوه تابع د $x=a$ په ټکي (نقطه) کې هغه وخت متمادي بلل کيږي چې:

(1) د $f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې تعريف شوې وي.

(2) راکړل شوې تابع د (a) په ټکي کې لېميټ ولري.

(3) د $f(a)$ قيمت بايد د $f(x)$ له لېميټ سره مساوي وي:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

مشتق (Derivative)

$$f'(x)=y'=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(f(x))=Df(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)$$

- د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې:

$$y=f(x)\Rightarrow f'(x)=m_T=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

د مشتق قوانين

- $y=c\Rightarrow y'=0$
- $y=ax\Rightarrow y'=a$
- $y=c\cdot f(x)\Rightarrow y'=c\cdot f'(x)$
- $y=x^n\Rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$
- $y=(x^{-n})\Rightarrow y'=-\frac{n}{x^{n+1}}$
- $y=u\pm v\pm\ldots\Rightarrow y'=u'\pm v'\pm\ldots$
- $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'\cdot v+v'\cdot u$
- $y=u\cdot v\cdot w\Rightarrow y'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$
- $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$
- $y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $y=\sqrt[n]{u^m}\Rightarrow y'=\frac{m\cdot u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ کله چې $n>m$ وي لئ
- $y=\frac{c}{v}\Rightarrow y'=\frac{-c\cdot v'}{v^2}$

$y=\sqrt[n]{u^m}$ $m>n\Rightarrow y'=\dfrac{m\cdot u'\sqrt[n]{u^{m-n}}}{n}$

- $y = \frac{u}{c} \Rightarrow y' = \frac{u'}{c} \;\; ; c \neq 0$
- $y = |u| \Rightarrow y' = \frac{u u'}{|u|}$

د معکوسو تابع ګانو مشتق

- $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$

د پارامتریک تابع ګانو مشتق

- $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$

د مرکبو تابع ګانو مشتق (ځنځیري قاعده)

- $y = f\big(g(x)\big) \Rightarrow y' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \;\; or \;\; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتقات

- $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$
- $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cdot \cos u$
- $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot \sin^{n-1} u \cdot \cos u$
- $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
- $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$
- $y = \cos^n u \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot \cos^{n-1} u \cdot \sin u$
- $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$
- $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \cdot \sec^2 u$
- $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot \tan^{n-1} u \cdot \sec^2 u$
- $y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$
- $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \cdot \csc^2 u$
- $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$
- $y = \sec u \Rightarrow y' = u' \cdot \sec u \cdot \tan u$
- $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتقات

- $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$
- $y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$
- $y = \mathrm{arccot}\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$
- $y = \mathrm{arccot}\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
- $y = \mathrm{arcsec}\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $y = \mathrm{arcsec}\, u \Rightarrow y' = \pm \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} \begin{cases} +; & u > 1 \\ -; & u < -1 \end{cases}$
- $y = \mathrm{arccsc}\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

❖ $y = \operatorname{arccsc} u \Rightarrow y' = \mp \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} \begin{cases} -; & u > 1 \\ +; & u < -1 \end{cases}$

د هایپربولیک تابع‌گانو مشتقات

❖ $y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$

❖ $y = \sinh u \Rightarrow y' = u' \cdot \cosh u$

❖ $y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$

❖ $y = \cosh u \Rightarrow y' = u' \cdot \sinh u$

❖ $y = \tanh x \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 x$

❖ $y = \tanh u \Rightarrow y' = u' \cdot \operatorname{sech}^2 u$

❖ $y = \coth x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch}^2 x$

❖ $y = \coth u \Rightarrow y' = -u' \cdot \operatorname{csch}^2 u$

❖ $y = \operatorname{sech} x \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$

❖ $y = \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -u' \cdot \operatorname{sech} u \cdot \tanh u$

❖ $y = \operatorname{csch} x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$

❖ $y = \operatorname{csch} u \Rightarrow y' = -u' \cdot \operatorname{csch} u \cdot \coth u$

د هایپربولیک معکوسو تابع‌گانو مشتقات

❖ $y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

❖ $y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

❖ $y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}; |x| < 1$

❖ $y = \coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}; |x| > 1$

❖ $y = \operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

❖ $y = \operatorname{csch}^{-1} x = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع‌گانو مشتقات

❖ $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$

❖ $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} = \frac{u' \cdot \log_a e}{u}$

❖ $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

❖ $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

❖ $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

❖ $y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$

❖ $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

❖ $y = e^u \Rightarrow y' = u' \cdot e^u$

❖ $y = u^u \Rightarrow y' = u^u(u' \cdot \ln u + u')$

❖ $y = u^v \Rightarrow y' = u^v\left(\frac{v \cdot u'}{u} + \ln u \cdot v'\right)$

ضمني مشتقات

❖ $y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته } (y \text{ ثابت دی})}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته } (x \text{ ثابت دی})}$

د لايب نيتز فرمولونه

❖ $y = u \cdot v \Rightarrow y'' = u''v + 2u'v' + uv''$

❖ $y = u \cdot v \Rightarrow y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

❖ $y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}$

لوړ مرتبه(متوالي)مشتقات

❖ $y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

❖ $y''' = f'''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$

❖ $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

❖ $y = x^m \Rightarrow y^{(n)} = (x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$

❖ $y = x^n \Rightarrow y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n!\ ; n \in N$

❖ $y = x^n \Rightarrow y^{(n+1)} = (x^n)^{(n+1)} = 0$

❖ $y = a^x \Rightarrow y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$

❖ $y = e^x \Rightarrow y^{(n)} = (x^n)^{(n)} =$

❖ $y = x^n \Rightarrow y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x$

❖ $y = e^{mx} \Rightarrow y^{(n)} = m^n \cdot e^{mx}$

❖ $y = a^{mx} \Rightarrow y^{(n)} = m^n \cdot a^{mx} \cdot \ln^n a$

❖ $y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0 \ \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-c)^{n-1} \cdot n! \cdot (ad-bc)!}{(cx+d)^{n+1}}$

❖ $y = \log_a x \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln a}$

❖ $y = \ln x \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$

❖ $y = \sin x \Rightarrow y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

❖ $y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

د مشتق د کارونې ځايونه

❖ د مماس ميل په $(x_1, f(x_1))$ ټکي کې: $f'(x_1) = m_t$

يا وايو چې په يوه ځانګړې ټکي کې د مماس ميل په راکړل شوي ټکي کې د تابع د لومړي مشتق څخه عبارت دی.

❖ تابع ثابته ده: $f'(x) = 0$

❖ تابع د (a, b) په انټروال کې متزايده ده: $f'(x) > 0$

❖ تابع د (a, b) په انټروال کې متناقصه ده: $f'(x) < 0$

❖ اعظمي ټکی: $f''(x) < 0,\ f'(x) = 0$

❖ اصغري ټکی: $f''(x) > 0,\ f'(x) = 0$

❖ تابع د (a, b) په انټروال کې محدبه ده: $f''(x) < 0$

❖ تابع د (a, b) په انټروال کې مقعره ده: $f''(x) > 0$

❖ انعطاف ټکی: $f'''(x) \neq 0,\ f''(x) = 0$

❖ د هوپیتال قاعده: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

که وروسته له لومړي مشتق نیولو څخه بیا هم د تابع شکل مبهم وه، بیا بیا یې مشتق نیسو تر څو له مبهم شکل څخه ووځي.

❖ د متوسط قیمت قضیه(لاګرانژ قضیه): که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ کې متمادي او په (a,b) کې د مشتق وړ وي، د (a,b) د انټروال څخه د (c) یو عدد شته:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یا وایو چې په دې ټکي کې د قاطع خط میل د مماس خط د میل سره مساوي دی یا په بل عبارت د c په ټکي کې د قاطع خط د مماس د خط سره موازي دی.

انټیګرال (Integral)

❖ غیرمعین انټیګرال(د لومړنۍ تابع پیدا کول):

$$\int f(x)dx=F(x)+c\;;\;\;F'(x)=f(x)dx$$

د غیر معین انټیګرال ځانګړتیاوې او د بیلابیلو تابع ګانو انټیګرال

❖ $\int dx=x+c$

❖ $\int k\cdot f(x)dx=k\int f(x)dx=k\cdot F(x)+c$

❖ $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

❖ $\int[f(x)\cdot g(x)]dx\neq\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$

❖ $\int[f(x)\div g(x)]dx\neq\int f(x)dx\div\int g(x)dx$

❖ $\int xdx=\frac{x^2}{2}+c$

❖ $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\;;\;\;n\neq-1$

❖ $\int x^{\frac{p}{q}}dx=\frac{p}{p+q}x^{\frac{p+q}{q}}+c$

❖ $\int(ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c\;;\;\;n\neq-1$

❖ $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

❖ $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c$

❖ $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$

❖ $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$

❖ $\int\frac{ax+b}{cx+d}dx=\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d|+c$

❖ $\int\frac{1}{(x+a)(x+b)}dx=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+c\;;a\neq b$

❖ $\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$

❖ $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

- $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
- $\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + c$
- $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x}{3}\sqrt{x} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$
- $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$
- $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$
- $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال نیونه

- $\int e^x dx = e^x + c$

$\int \log_a x\, dx = x\cdot\log_a\frac{x}{e} + c$

- $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
- $\int x\cdot e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + c$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$
- $\int a^{mx}dx = \frac{1}{m\cdot\ln a}a^{mx} + c$
- $\int \ln cx\, dx = x\cdot\ln cx - x + c$
- $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$
- $\int \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c;\ n \neq 1$
- $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx = \ln|\ln x| + c$

د مثلثاتي تابع ګانو انتیګرال نیونه

- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
- $\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$
- $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$
- $\int \cot x\, dx = -\ln|\csc x| + c = \ln|\sin x| + c$
- $\int \sec x\, dx = \ln|\tan x + \sec x| + c$
- $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$
- $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

❖ $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$
❖ $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$
❖ $\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c$
❖ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
❖ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$
❖ $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$
❖ $\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
❖ $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$
❖ $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}dx = \ln|\tan x| + c$
❖ $\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$
❖ $\int \sin x \cdot \cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$
❖ $\int \sin^n x \cdot \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c$
❖ $\int \sin x \cdot \cos^n x = \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c$
❖ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + c$
❖ $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \cot x \cdot \csc x\,dx = -\csc x + c$
❖ $\int \sin mx \cdot \sin nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c$
❖ $\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c$
❖ $\int \cos mx \cdot \cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c$

په پورتنیو دریو فرمولونو کې باید $(m^2 \neq n^2)$ وي.

همدارنګه د $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x\,dx$ ډوله انتیګرالونو د محاسبې لپاره کولای شو له لاندینیو ۴ فورمولو څخه کار واخلو:

❖ $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$
❖ $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$
❖ $\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$
❖ $\cos \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x]$
❖ $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$
❖ $\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$

د معکوسو مثلثاتي تابع ګانو انتیګرال نیونه

❖ $\int \arcsin x\,dx = x \cdot \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + c$
❖ $\int \arccos x\,dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c$
❖ $\int \arctan x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c$
❖ $\int \operatorname{arccot} x\,dx = x\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c$

د هایپربولیک تابع ګانو انتیګرال نیونه

❖ $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$
❖ $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

- $\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + c$
- $\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + c$
- $\int \operatorname{sech} x\,dx = \tan^{-1}(\sinh x) + c$
- $\int \operatorname{csch} x\,dx = -\cot^{-1}(\cosh x) + c$
- $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + c$
- $\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + c$
- $\int \operatorname{sech} x \cdot \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + c$
- $\int \operatorname{csch} x \cdot \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + c$

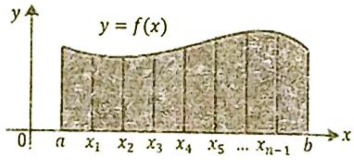
د هایپربولیک معکوسو تابع ګانو انتیګرال نیونه

- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1} x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c\,;\ \ a > 0$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \cosh^{-1} x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c\,;\ x > a > 0$
- $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \begin{cases}\tanh^{-1} x + c, & x^2 < 1\\ \coth^{-1} x + c, & x^2 > 1\end{cases}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = -\operatorname{sech}^{-1} x + c$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx = -\operatorname{csch}^{-1}|x| + c,\ \ x \neq 0$

معین انتیګرال (د منحني او x محور تر منځ محصور شوی مساحت):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)dx$$



- د ریمان د مجموعې لیمیټ (معین انتیګرال):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A\,;\ \ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = F(x)\Big|_a^b$$

د معین انتیګرال ځانګړتیاوې

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b dx = b - a$
- $\int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\ ,\ \ b \in [a,c]$
- $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx\ ;\ \ f(x) \geq g(x)$
- $\int_a^b f(x)dx \geq 0\,;\ \ f(x) \geq 0$

❖ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \; ; \; a < b$ ❖

د $|f(x)|$ انتیګرال په $[a,b]$ کې : $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

❖ $f^+(x) = \begin{cases} f(x); f(x) \ge 0 \\ 0 \quad ; f(x) < 0 \end{cases}, f^-(x) = \begin{cases} -f(x); f(x) < 0 \\ 0 \quad ; f(x) \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

د ټوټه ډوله تابع ګانو انتیګرال

❖ $f(x)\begin{cases} g(x); a \le x \le c \\ h(x); c \le x \le b \end{cases}, c \in [a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b h(x)dx$

د متناظرو تابع ګانو معین انتیګرال

❖ $[f(-x) = f(x)] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, f$ جفته تابع ❖

❖ $[f(-x) = -f(x)] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, f \rightarrow$ طاقه تابع

په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

غیرمعین :

❖ $\int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big)u'(t)dt \; ; \; x = u(t)$

معین :

❖ $\int_a^b f(x)dx \; ; x = g(t), \Rightarrow \int_c^d f\big(g(t)\big)g'(t)dt$

$c = g^{-1}(a), \qquad d = g^{-1}(b)$

د انقسام په طریقه انتیګرال نیونه

حصوی فرمول

$u = f(x), \qquad v = g(x)$

د غیرمعین لپاره : ❖ $\int udv = u \cdot v - \int vdu$

د معین لپاره : ❖ $\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

د انقسام په طریقه انتیګرال نیونه

❖ د انقسـام په انتیګرال نیونه کې ځینې تابع ګانې تکراري بڼه اختیـاروي او موږ اړ کیږو تر څو بیې څو ځله پـدې طریقـه انتیګرال ونیسـو تر څو نتیجې تـه ورسـیږو خو ددې ډول تابع ګانو لپاره یو بله طریقه هم لرو چې د جدولي طریقې په نوم یادیږي. مثلاً: $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$

۱- د $f(x)$ به تر هغې مشتق نیسو چې صفر شي.

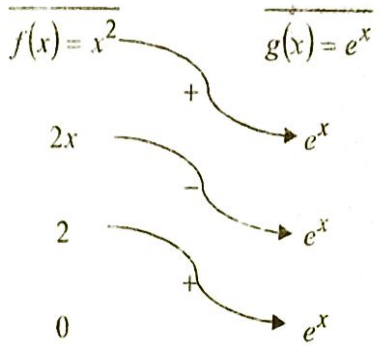
۲- د $f(x)$ په مقابل کې به د $g(x)$ انتیګرال نیسو.

۳- د علامو ترتیب: $+,-,+,-,+,-,\dots$

مثال: $\int x^2 \cdot e^x\, dx = ?$

انتګرال　　　　مشتق

انتگرال



$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

د بینوم دیفرانسیل انتیگرال: $\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$

m، n او p(+ یا -) نسبتي عددونه دي او $a, b \in IR$.

❖ د چیبیشف دعوی: پورتنی انتیګرال په دریو طریقو ساده کولای شو:

۱) که $p \in Z^+$ مثبت تام عدد وي نو د $(a + bx^n)^p$ افاده د بینوم فرمول د انکشاف په واسطه د ck^x په شکل بدلیږي چې انتیگرال یې په اسانۍ سره پیدا کولای شو.

۲) که $\frac{m+1}{n} \in Z$ وي نو $t = \sqrt[r]{a + bx^n}$ وضع کوو (r د p مخرج دی) انتیگرال ساده کیږي او حل کوو یې.

۳) که $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ وي نو د $t = \sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$ په وضع کولو سره انتیگرال ساده کیږي او حل کوو یې.

قسمي کسرونه

❖ هغه کوچني کسرونه چې د یوه واقعي کسر د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي دي، که هغوی سره جمع کړو نو راکړل شوی واقعي کسر په لاس راځي.

۱- که چیرې د $\frac{p_m(x)}{p_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج د خطي بیلابیلو ضربي عواملو څخه جوړ وي چې تکرار نه وي راغلي، په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \cdots + \frac{N}{x - x_n}$$

۲- که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړۍ درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلي وي یعني که $(x - x_0)$ عامل n-ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي نو لیکلای شو چې:

$$\frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{N}{(x - x_0)^n}$$

۳- که د مخرج ضربي عامل دویمه درجه پولینوم وي د تجزیې

ور نـه وي او تـکرار هـم نـه وي راغـلـې نو د $\frac{p_m(x)}{p_n(x)}$ واقعي پولینوم یو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري

۴- کـه د صـورت درجـه د مخرج څخـه لویـه وي نو دوه عملیې ورباندې اجرا کیږي:

الف) صورت پر مخرج تقسیموو.

ب) مخرج به تجزیه کوو باقي په مخرج کې لیکو نتیجه لاسته راځي.

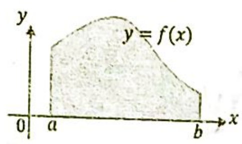
د قسمي کسرونو په مرسته انتیګرال نیونه

❖ ځینې هغـه تـابع ګـانې چې د پورتنیو څلورو ډولو کسـري تـابع ګـانو تـه ورته وي او وغواړو چې انتیګرال یې ونیسـو نو په پورتنۍ طریقه یې په قسمي کسرونو ویشو او بیا یې جلا ، جلا انتیګرال نیسو.

د انتیګرال کارونه(تطبیقات)

❖ د منحنی د محصور شوې سطحې مساحت محاسبه:

$$A=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

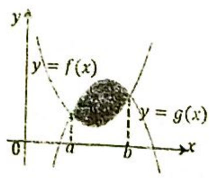


- د منحني د پارامتریک معادلو له مخې مساحت

$$\begin{cases}x=u(t)\\ y=v(t)\end{cases};\ \begin{matrix}\alpha\le t\le\beta\\ u(\alpha)=a\\ u(\beta)=b\end{matrix}\ \Rightarrow A=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta v(t)\cdot u'(t)\,dt$$

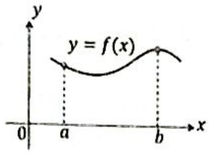
❖ د دوو محصور شویو منحنيګانو ترمنځ د مساحت محاسبه:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$



❖ د منحني یا د منحني د یوې برخې(قوس) اوږدوالې:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\ ,\ \ L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$



- د منحني د پارامتریک معادلو له مخې د قوس اوږدوالی:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

❖ د دایرې د محیط پیدا کول:(r شعاع)

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases};\quad P = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

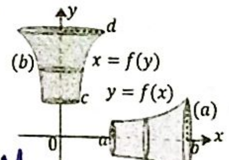
د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه:

❖ د (x) محور په شاوخوا د تابع د دوران څخه لاسته راغلي جسم حجم: $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2dx$ (a شکل)

❖ د (y) محور په شاوخوا د تابع د دوران څخه لاسته راغلي جسم حجم: $V = \int_c^d \pi[f(y)]^2dy$ (b شکل)

$V = \pi \int_a^b F(x)^2 dx$

$V = \pi \int_a^b F(y)^2 dy$

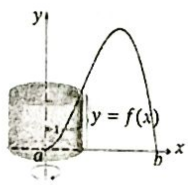


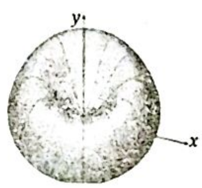
❖ د جسم حجم نظر د مقطع مساحت ته:

$V = \int_a^b A(x)dx$ ($A(x)$ د مقطع مساحت دی)

❖ د استوانه‌یي شیلونو په واسطه د جسم د حجم محاسبه چې د یوه عمودي خط څخه د دوران په نتیجه کې لاسته راغلي وي:

$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)dx$ (x د شیل شعاع، y=f(x) د شیل لوړوالی)

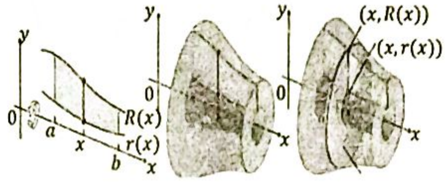




❖ د یوه افقي خط څخه د دوران لپاره کولی شو پاسني فرمول کې د (x) او (y) ځایونه تعویض کړو: $V = \int_a^b 2\pi y \cdot f(y)dy$

❖ د واشر (Washer) د مساحت په واسطه د (x) د محور څخه د دوران په نتیجه د لاسته راغلي جسم د حجم محاسبه:

$$V = \int_a^b \pi\{[R(x)]^2 - [r(x)]^2\}dx$$



د دوراني جسمونو بهرنۍ مساحت

❖ د (x) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

❖ د (y) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

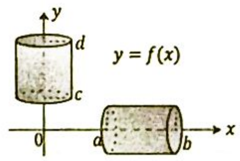
-د پارامتريک معادلو له مخې:

❖ د (x) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi \int_\alpha^\beta y \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

❖ د (y) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta x \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi \int_\alpha^\beta x \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$



د يوې تغير کوونکې قوې په واسطه ترسره شوې کار:

❖ د (x) محور په اوږدو کې: $W = \int_a^b F(x)dx$

د مومنټ محاسبه کول

❖ د (x) محور په شاوخوا: $M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx$

❖ د (y) محور په شاوخوا: $M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx$

د دوو منحني ګانو تر منځ د برخې لپاره مومنټ محاسبه کول

❖ د (x) محور په شاوخوا:

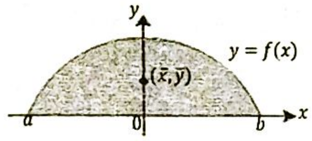
$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)^2] - [g(x)^2]\}dx$$

❖ د (y) محور په شاوخوا: $M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$

د ثقل مرکز پيدا کول

❖ $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$

❖ $\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx \ , \ \bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2 dx$



د دوو منحنيګانو تر منځ د ثقل مرکز

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]dx}, \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

دیوې تابع منځنۍ(متوسط) قیمت

❖ $f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

غیر واقعي انتیګرالونه (Improper Integrals)

په دوه ډوله دي:

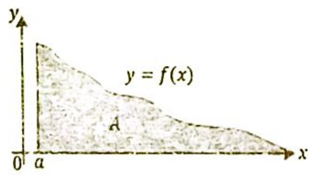
۱-لایتناهي انټروالونه:

ممکن د انتیګرال پورتنۍ یا لاندینۍ یا دواړه سرحدونه(∞)وي

❖ $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \ , \ [a, +\infty)$

❖ $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \ , \ (-\infty, b]$

❖ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

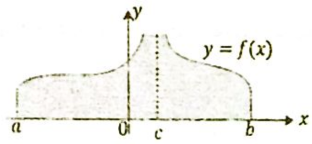


۲- غیر متمادي انتیګرالونه: پدې حالت کې د انتیګرال سرحدونه ثابت عددونه دي، مګر د انتیګرال لاندې تابع د سرحدونو له ډلې څخه پدیوه کې د تعریف وړ(متمادي) نه ده.

❖ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx \ , \ \ (a, b]$

❖ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx \ , \ \ [a, b)$

❖ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, , a < c < b$



تقریبي (اټکلي) انتیګرال نیونه

پدې طریقو کې مونږ د ځینو تابع ګانو چې په اسانۍ نشو کولای انتیګرال یې ونیسو لکه: $y = \sqrt{1+x^4}, y = \frac{1}{\ln x}, y =$ $\sin x^2$ ... نو کولای شو پدې طریقو سره د معین انتیګرال

اټکلي قیمتونه لاسته راوړو.

❖ د ذوذنقه يي قاعدې څخه په ګټه اخیستنې:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

❖ د منځنی(وسطي) ټکي څخه په ګټه اخیستنې:

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)]$$

❖ د سیمپسون قاعدې څخه په ګټه اخیستنې:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \; ; \quad n \to \text{جفت}$$

x_i^* منځنی نقطه ده د: $[x_{i-1}, x_i]$ او همدارنګه $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

د مثلثاتو برخه

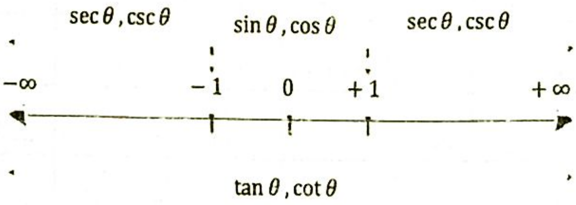
د ځینو مشهورو زاویو مثلثاتي نسبتونه											
نسبتونه	R	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	D	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$		0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$		1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$		0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot\theta$		∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞
$\sec\theta$		1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
$\csc\theta$		∞	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	∞

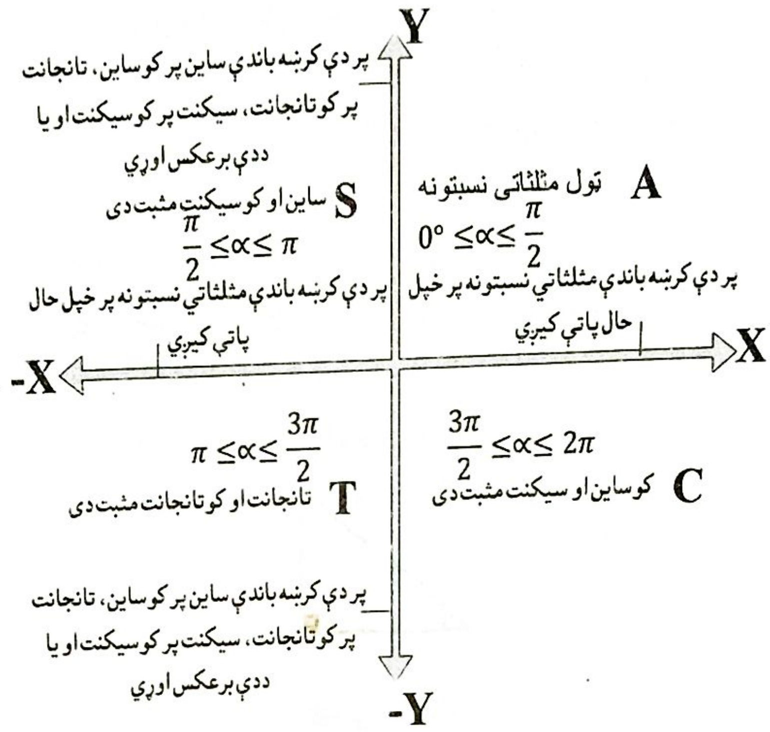
د یو او بل له جنسه د مثلثاتي نسبتونو پیدا کول						
نسبتونه	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\pm\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\pm\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

د اختیاري زاویو مثلثاتي نسبتونه								
نسبتونه / زاویه	$90-\theta$	$90+\theta$	$180-\theta$	$180+\theta$	$270-\theta$	$270+\theta$	$360-\theta$	$360+\theta$
$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$
$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$
$\sec\theta$	$\csc\theta$	$-\csc\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\csc\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$
$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$	$-\csc\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\csc\theta$	$\csc\theta$

د متضادو زاویو نسبتونه
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

د مثلثاتي نسبتونو د تعریف ناحیې:





په ناحیو کې د مثلثاتي نسبتونو علامې			
$\sin\theta$ $\csc\theta$	$\tan\theta$ $\cot\theta$	$\cos\theta$ $\sec\theta$	ناحیه
+	+	+	I
+	−	−	II
−	+	−	III
−	−	+	IV

گڼه	د کوترمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه
1	$\sin(n\cdot 2\pi+\theta)=\sin\theta$
2	$\cos(n\cdot 2\pi+\theta)=\cos\theta$
3	$\tan(n\cdot 2\pi+\theta)=\tan\theta$
4	$\cot(n\cdot 2\pi+\theta)=\cot\theta$
5	$\sec(n\cdot 2\pi+\theta)=\sec\theta$
6	$\csc(n\cdot 2\pi+\theta)=\csc\theta$

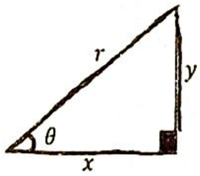
د یوه مثلث د شتون شرطونه

- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$
- $a+b>c, a+c>b, b+c>a$

د درجې، ګراد او راديان تر منځ اړيکه:

- $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$
- $1rad=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ\,17'4''$
- $1^\circ=\frac{\pi}{180}rad\approx 0.017453rad$
- د دايرې شعاع: $r=\frac{s}{\theta}=\frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{مرکزي زاويه په راډيان}}$
- ~~د ساعت~~ د دوو ستنو تر منځ زاويه: $\theta=|5.5min-30|$
- د فيثاغورث قاعده د قايم الزاويه مثلث لپاره):

$$r^2=x^2+y^2=\left(\text{مجاوره ضلع}\right)^2+\left(\text{مقابله ضلع}\right)^2$$



مثلثاتي نسبتونه

- $\sin\theta=\frac{y}{r}$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\tan\theta=\frac{y}{x}$
- $\cot\theta=\frac{x}{y}$ $\sec\theta=\frac{r}{x}$ $\csc\theta=\frac{r}{y}$

د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې

- $\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$
- $\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$
- $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$
- $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
- $\sin\theta\cdot\csc\theta=1$
- $\cos\theta\cdot\sec\theta=1$
- $\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

د مثلثاتو اساسي او فرعي رابطې

- اساسي رابطه: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
- فرعي رابطې: $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$; $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1$; $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

د مثلثاتي تابع ګانو ګرافونه او نورې ځانګړتياوې

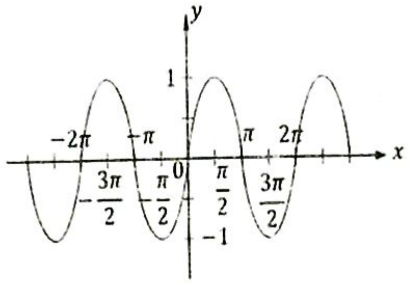
- ساين: $y=\sin x$

رنج: $R_y=[-1,1]$

ساين طاقه تابع ده؛

پريود: 2π

دومين: $D_y=(-\infty,\infty)=IR$



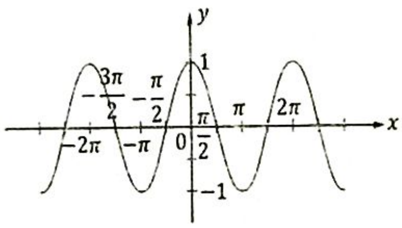
❖ کوساین: $y = \cos x$

رنج: $R_y = [-1,1]$

کوساین جفته تابع ده؛

پریود: 2π

دومین: $D_y = (-\infty,\infty) = IR$



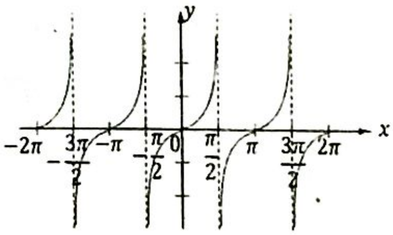
❖ تانجانت: $y = \tan x$

رنج: $R_y = (-\infty,\infty) = IR$

تانجانت طاقه تابع ده؛

پریود: π

دومین: $D_y = IR \backslash \left\{(n+\frac{1}{2})\pi\right\}\ ,\ n \in Z$



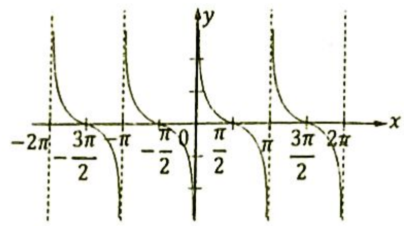
❖ کوتانجانت: $y = \cot x$

رنج: $R_y = (-\infty,\infty) = IR$

کوتانجانت طاقه تابع ده؛

پریود: $.\ \pi$

دومین: $D_y = IR \backslash \{n\pi\}\ ,\ n \in Z$



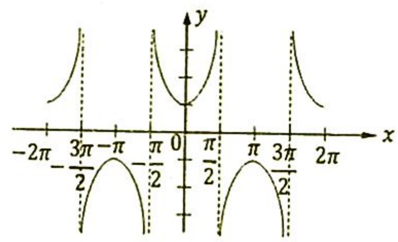
❖ سیکنټ: $y = \sec x$

رنج: $R_y = IR\backslash(-1,1)$

سیکنټ جفته تابع ده؛

پریود: 2π

دومین: $D_y = IR\backslash\left\{(n+\frac{1}{2})\pi\right\}$, $n \in Z$



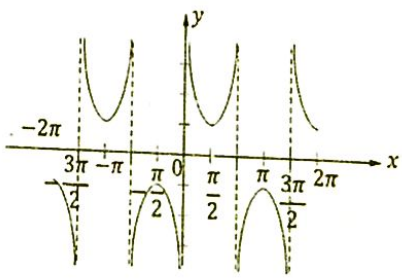
❖ کوسیکنټ: $y = \csc x$

رنج: $R_y = IR\backslash(-1,1)$

کوسیکنټ طاقه تابع ده؛

پریود: 2π

دومین: $D_y = IR\backslash\{n\pi\}$, $n \in Z$



د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي نسبتونه

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

$$\sec(\alpha \pm \beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta \cdot \csc\alpha \cdot \csc\beta}{\csc\alpha \cdot \csc\beta \mp \sec\alpha \cdot \sec\beta}$$

$$\csc(\alpha \pm \beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta \cdot \csc\alpha \cdot \csc\beta}{\sec\alpha \cdot \csc\beta \pm \csc\alpha \cdot \sec\beta}$$

د دریو زاویو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha$$
$$\sin\beta\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma$$
$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma - \tan\alpha\tan\gamma}$$

د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو مجموعه او تفاضل د ضرب حاصل په شکل

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$
$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$
$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$
$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$
$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$
$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$
$$\tan\alpha + \cot\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$$
$$\tan\alpha - \cot\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)$$
$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta)$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمع او تفاضل په شکل

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\tan\alpha\cdot\cot\beta=\frac{\tan\alpha+\cot\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}$$

د دوه ځلي زاويې څخه تر n- ځلي زاويې مثلثاتي نسبتونه

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$\cot 3\alpha=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1}$$

$$\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$$

$$\tan 4\alpha=\frac{4\tan\alpha-4\tan^3\alpha}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}$$

$$\cot 4\alpha=\frac{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}{4\tan\alpha-4\tan^3\alpha}$$

$$\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$$

$$\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-2\cos^3\alpha+5\cos\alpha$$

$$\tan 5\alpha=\frac{\tan^5\alpha-10\tan^3\alpha+5\tan\alpha}{1-10\tan^2\alpha+5\tan^4\alpha}$$

$$\cot 5\alpha=\frac{1-10\tan^2\alpha+5\tan^4\alpha}{\tan^5\alpha-10\tan^3\alpha+5\tan\alpha}$$

$$\sin(n\alpha)=2\sin[(n-1)\alpha]\cdot\cos\alpha-\sin[(n-2)\alpha]$$

$$\cos(n\alpha)=2\cos[(n-1)\alpha]\cdot\cos\alpha-\cos[(n-2)\alpha]$$

$$\tan(n\alpha)=\frac{\tan[(n-1)\alpha]+\tan\alpha}{1-\tan[(n-1)\alpha]\cdot\tan\alpha}$$

$$\cot(n\alpha)=\frac{\cot[(n-1)\alpha]\cdot\cot\alpha-1}{\cot[(n-1)\alpha]+\cot\alpha}$$

د $\sin\alpha$ او $\sin 2\alpha$ له جنسه د $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ او (α) مثلثاتي نسبتونه

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha} + \sqrt{1-\sin 2\alpha}}{\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}$$

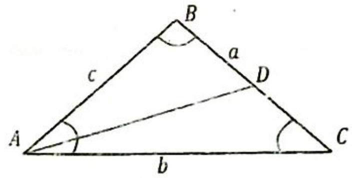
د $\cos\alpha$ او $\cos 2\alpha$ له جنسه د $(\frac{\alpha}{2})$ او (α) مثلثاتي نسبتونه

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}};\quad \cot\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$$
$$\sec\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{1+\cos 2\alpha}};\quad \csc\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos 2\alpha}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\quad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

د $\tan\alpha$ او $\tan\frac{\alpha}{2}$ له جنسه د (2α) او (α) مثلثاتي نسبتونه

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};\quad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha};\quad \sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

د مثلث اړونده فورمولونه



❖ د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې ضلعو ترمنځ د زاويې له جنسه: $S = \frac{1}{2}ab\cdot\sin C$

$$S=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B \quad , \quad S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$$

❖ د مثلث مساحت چې زاويې او يوه ضلع يې معلومه وي:

$$S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$$

❖ د مثلث مساحت د ضلعو له جنسه(د هيرون فرمول):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p د مثلث د محيط نيمايي ده: $p=\frac{a+b+c}{2}$

❖ د مثلث د محيطي دايرې شعاع:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

❖ د مثلث د محاطي دايرې شعاع: $r=\frac{S}{p}$

❖ د قايم الزاويه مثلث مساحت(a,b قايمې ضلعې):

$$S=\frac{1}{2}ab$$

❖ د متساوي الساقين مثلث مساحت

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}};(a=b)$$

❖ د مثلث مساحت چې د رأسونو نقطې يې معلومې وي:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|$$

❖ د مثلث د داخلي ناصف الزاويې اوږدوالی:

$$\overline{AD}=\frac{2}{b+c}\sqrt{p\cdot b\cdot c(p-a)}$$

❖ په هر مثلث کې د مياني اوږدوالی: $M_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

متساوي الاضلاع مثلث

❖ ارتفاع: $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

❖ مساحت: $S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

❖ د محيطي دايرې شعاع: $R=\frac{a}{3}\sqrt{3}$

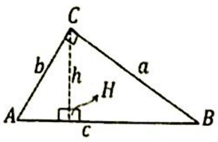
❖ د محاطي دايرې شعاع: $r=\frac{a}{6}\sqrt{3}$

❖ محيط: $p=3a$

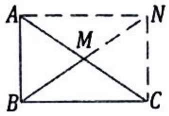
د قايم الزاويه مثلث قضيې

۱- $\overline{AC}\cdot\overline{CB}=\overline{CH}\cdot\overline{AB}$

۲- $\overline{CB}^2=\overline{AH}\cdot\overline{HB}$



۳- $(\overline{BM})$ میانه ده: $\overline{BM} = \frac{\overline{AC}}{2}$



۴- که پورتني شکل کې $(\hat{C} = 30°)$ فرض کړو نو:

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

د مثلث د ضلعو له جنسه دیوې زاویې د نیمایي مثلثاتي نسبتونه

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c}{ac}} \\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \\ \cot\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} \\ \cot\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sec\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \\ \sec\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} \\ \sec\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \csc\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} \\ \csc\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}} \\ \csc\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}} \end{cases}$$

د ساین قانون(Law of sine)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

د کوساین قانون(Law of cosine)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ba}$$

همدارنګه دا لاندې رابطې هم صدق کوي:

$$a = c\cdot\cos B + b\cdot\cos C$$

$$b = c\cdot\cos A + a\cdot\cos C$$

$$c = a\cdot\cos B + b\cdot\cos A$$

د تانجانت قانون(Law of tangent)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad;\quad\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}$$

همدارنګه لاندې رابطې هم صدق کوي

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cdot\cot\frac{B}{2}$$

د کوتانجانت قانون(Law of cotangent)

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}\;;\quad\cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}\;;\quad\cot\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}$$

همدارنګه:

$$\frac{\cot\frac{A}{2}}{p-a}=\frac{\cot\frac{B}{2}}{p-b}=\frac{\cot\frac{C}{2}}{p-c}$$

(r) د مثلث د محاطي دايرې شعاع او (p) د مثلث د محيط نيمايي ده.

د (Mollweid) **فرمولونه**

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\quad;\quad\frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

د نيوټن فرمولونه

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\quad;\quad\frac{c+a}{b}=\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

مثلثاتي معادلې (Trigonometry Equations)

لومړۍ درجه یو مجهوله معادلې

$$A\sin x \pm B\cos x = R\cdot\sin(x\pm\alpha)$$
$$A\cos x \pm B\sin x = R\cdot\cos(x\mp\alpha)$$

څرنګه چې: $R=\sqrt{A^2+B^2}\ ;\ \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$

د لومړۍ درجه دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سیستمونه او د حل شرطونه یې

❖ لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\quad \begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

د حل شرط یې: $a^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 0$

❖ دوهم ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$
$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\quad \begin{cases}\cos x\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

د حل شرط یې: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

❖ دریم ګروپ:

$$\begin{cases}\frac{\sin x}{\sin y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{\cos x}{\cos y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

❖ څلورم ګروپ:

$$\begin{cases}\tan x\pm\tan y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\quad \begin{cases}\cot x\pm\cot y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

د حل شرط یې: $a^2-4+4a\cdot\cot\alpha\ge 0$

❖ پنځم ګروپ:

$$\begin{cases}\tan x\pm\tan y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

د حل شرط یې: $-1\le\frac{1+a}{1-a}\cos\alpha\le 1$

❖ شپږم ګروپ:

$$\begin{cases}\frac{\tan x}{\tan y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

د حل شرط یې: $-1\le\frac{a-1}{a+1}\sin\alpha\le 1$

معکوس مثلثاتي نسبتونه

- ❖ $y=\sin x\Rightarrow x=\arcsin y$
- ❖ $y=\cos x\Rightarrow x=\arccos y$
- ❖ $y=\tan x\Rightarrow x=\arctan y$
- ❖ $y=\cot x\Rightarrow x=\text{arccot}\, y$
- ❖ $y=\sec x\Rightarrow x=\text{arcsec}\, y$
- ❖ $y=\csc x\Rightarrow x=\text{arccsc}\, y$

په معکوسو مثلثاتي نسبتونو کې بیلابیلې عملیې

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\arccos x = \operatorname{arcsc}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) , x > 0$$
$$\operatorname{arccot} x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) , x > 0$$
$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\operatorname{arccsc} x = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\arctan(-x) = -\arctan x$$
$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$
$$\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$$
$$\operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc} x$$

$$\sin^{-1} A \pm \sin^{-1} B = \sin^{-1}\left(A\sqrt{1-B^2} \pm B\sqrt{1-A^2}\right)$$
$$\cos^{-1} A \pm \cos^{-1} B = \cos^{-1}\left(AB \mp \sqrt{(1-A^2)(1-B^2)}\right)$$
$$\tan^{-1} A \pm \tan^{-1} B = \tan^{-1}\left(\frac{A \pm B}{1 \mp AB}\right)$$

د معکوسو مثلثاتي نسبتونو ترکیب

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \quad , -1 \le x \le 1$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad , -1 \le x \le 1$$
$$\tan(\tan^{-1} x) = x \quad , \quad x \in IR$$
$$\cot(\cot^{-1} x) = x \quad , \quad x \in IR$$
$$\sec(\sec^{-1} x) = x \quad , -1 \ge x \ge 1$$
$$\csc(\csc^{-1} x) = x \quad , -1 \ge x \ge 1$$

$$\sin^{-1}(\sin y) = y \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$
$$\cos^{-1}(\cos y) = y \quad , \quad 0 \le y \le \pi$$
$$\tan^{-1}(\tan y) = y \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$
$$\cot^{-1}(\cot y) = y \quad , \quad 0 < y < \pi$$

$$\sec^{-1}(\sec y) = y \quad , \quad 0 \le y \le \pi , y \ne \frac{\pi}{2}$$
$$\csc^{-1}(\csc y) = y \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} , y \ne 0$$

$$\sin(\cos^{-1} x) = \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\tan(\sin^{-1} x) = \cot(\cos^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\cot(\sin^{-1} x) = \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$
$$\sec(\sin^{-1} x) = \csc(\cos^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\sec(\sin^{-1} x) = \csc(\cos^{-1} x) = \frac{1}{x}$$

$$\sin(\tan^{-1} x) = \cos(\cot^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\cos(\tan^{-1} x) = \sin(\cot^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\cot(\tan^{-1} x) = \tan(\cot^{-1} x) = \frac{1}{x}$$
$$\sec(\tan^{-1} x) = \csc(\cot^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$$
$$\csc(\tan^{-1} x) = \sec(\cot^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$$

$$\sin(\sec^{-1} x) = \cos(\csc^{-1} x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$
$$\cos(\sec^{-1} x) = \sin(\csc^{-1} x) = \frac{1}{x}$$
$$\tan(\sec^{-1} x) = \cot(\csc^{-1} x) = \sqrt{x^2 - 1}$$
$$\cot(\sec^{-1} x) = \tan(\csc^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$\csc(\sec^{-1} x) = \sec(\csc^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\sin(2 \cdot \sin^{-1} x) = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$
$$\cos(2 \cdot \cos^{-1} x) = 2x^2 - 1$$
$$\tan(2 \cdot \tan^{-1} x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

د هندسې برخه

د زاويو ډولونه

❖ قايمه زاويه: $\hat{\alpha} = 90^\circ$

❖ حاده زاويه: $0^\circ < \hat{\beta} < 90^\circ$

❖ منفرجه زاويه: $90^\circ < \hat{\beta} < 180^\circ$

❖ مستقيمه زاويه: $\hat{\alpha} = 180^\circ$

❖ مکمله زاويې: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$

❖ متممې زاويې: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$

مضلع ګانې

❖ د (n) ضلعي مضلع د داخلي زاويو مجموعه:

$$A = (n-2)180^\circ$$

❖ د (n) ضلعي مضلع د قطرونو مجموعه: $D = \frac{n(n-3)}{2}$

❖ د منظمې مضلع د يوې داخلي زاويې پراخوالی:

$$\alpha = \frac{A}{n} \text{ يا } \alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

❖ د منظمې مضلع د يوې خارجي زاويې پراخوالی:

$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

❖ ديوې مضلع د يوه رأس څخه د قطرونو تعداد: $d = n - 3$

❖ د يوې منظمې مضلع د ضلعو تعداد که داخلي زاويې يې معلومې وي:

$$n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$$

❖له يوه رأس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر:

$$\Delta = n - 2$$

❖ د محيطي دايرې شعاع: $R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$

❖ د محاطي دايرې شعاع: $r = \frac{a}{2\tan\frac{\pi}{2}} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$

❖ محيط: $P = n \cdot a$

a د منظمې مضلع د يوې ضلعې اوږدوالی.

❖ د مضلع مساحت: $S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$

❖ د مضلع مساحت: $S = q \cdot r = q\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\ (q = \frac{P}{2})$

❖ د دوو منظمو مشابه مضلعګانو د محيطونو ، محيطي او محاطي دايرو تر منځ نسبت: $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}$

څلور ضلعي ګانې (Quadrilateral)

مربع Square:

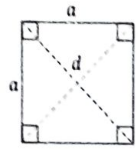
❖ محیط: $P = 4a$

❖ مساحت: $S = a^2$

❖ قطر: $d = \sqrt{2}a$

❖ د محیطي دایرې شعاع: $R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

❖ د محاطي دایرې شعاع: $r = \frac{a}{2}$



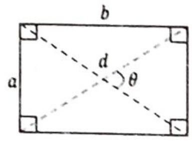
مستطیل Rectangle:

❖ محیط: $P = 2(a + b)$

❖ مساحت: $S = a \cdot b = \frac{1}{2}d^2 \cdot \sin\theta$

❖ قطر: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

❖ د محیطي دایرې شعاع: $R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$



متوازي الاضلاع Parallelogram:

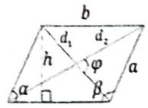
❖ محیط: $P = 2(a + b)$

❖ مساحت: $S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

❖ مساحت: $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$

❖ ارتفاع: $h = b \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta$

❖ د قطرونو د مربعاتو مجموعه: ${d_1}^2 + {d_2}^2 = 2(a^2 + b^2)$



لوزي (معین) Rhombus:

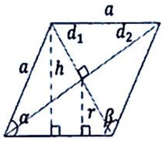
❖ محیط: $P = 4a$

❖ مساحت: $S = a \cdot h = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$

❖ د قطرونو د مربعاتو مجموعه: ${d_1}^2 + {d_2}^2 = 4a^2$

❖ ارتفاع: $h = a \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2a}d_1 \cdot d_2$

❖ د محاطي دايرې شعاع: $r=\frac{h}{2}=\frac{d_1\cdot d_2}{4a}=\frac{a\cdot\sin\alpha}{2}$

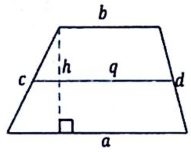


ذوذنقه Trapezoid:

❖ محيط: $P=a+b+c+d$

❖ مساحت: $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=q\cdot h$

❖ منځنی خط: $q=\frac{a+b}{2}$

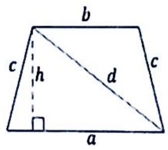


متساوي الساقين ذوذنقه Isosceles Trapezoid:

❖ قطر: $d=\sqrt{ab+c^2}$

❖ ارتفاع: $h=\sqrt{c^2-\frac{(a+b)^2}{4}}$

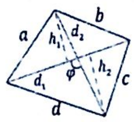
❖ مساحت: $S=\frac{a+b}{2}\cdot h=q\cdot h$



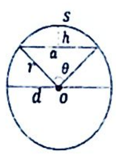
کيفي څلور ضلعي General Quadrilateral:

❖ محيط: $P=a+b+c+d$

❖ مساحت: $S=\frac{d_1}{2}(h_1+h_2)=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\cdot\sin\varphi$



دايره (Circle):



❖ محيط: $P=2\pi r=\pi\cdot d$

❖ وتر: $a=2\sin\frac{\theta}{2}=2\sqrt{2h\cdot r-h^2}$

❖ مساحت: $S=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{P\cdot d}{4}=\frac{P\cdot r}{2}$

❖ د مرکزي زاويې پراخوالی: $\theta = \frac{s}{r}$ (θ په راديان)

❖ د قطاع محيط: $P' = s + 2 \cdot r$

❖ د قطاع مساحت: $S' = \frac{r \cdot s}{2} = \frac{r^{2} \cdot \theta}{2}$ (θ په راديان)

❖ د قطعې محيط: $P'' = s + a$

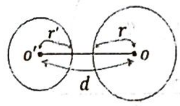
❖ د قطعې مساحت: $S'' = \frac{1}{2}[s \cdot r - a(r - h)]$

❖ د قطعې تقريبي مساحت: $S'' \approx \frac{2}{3} h \cdot a$

❖ د قطعې ارتفاع: $h = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^{2} - a^{2}}\ ; h < r$

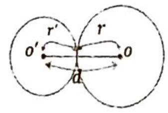
د دوو دايرو موقعيت نسبت يو بل ته

❖ ناپريکړې يا نامتقاطع دايرې:



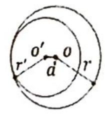
$d > r + r'$

❖ خارجاً مماس دايرې:



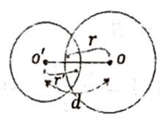
$d = r + r'$

❖ داخلاً مماس دايرې:



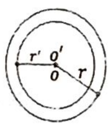
$d = |r - r'|$

❖ متقاطع دايرې:



$|r - r'| < d < r + r'$

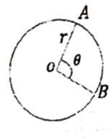
❖ متحدالمرکز دايرې:



$d = 0$

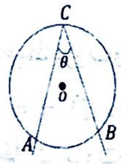
د دايرې اړوند زاويې

❖ مرکزي زاويه:



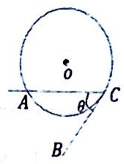
$A\hat{O}B = \hat{\theta} = \overset{\frown}{AB}$

❖ محيطي زاويه:



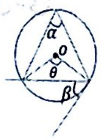
$A\hat{B}C = \hat{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC}$

❖ مماسي زاويه:



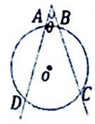
$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AC}$

❖ د محيطي، مماسي او مرکزي زاويو تر منځ اړيکه چې د عين قوس په مقابل کې واقع کوي:



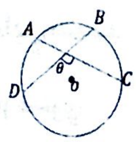
$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \hat{\theta}$

❖ خارجي زاويه:



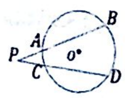
$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

❖ داخلي زاويه:



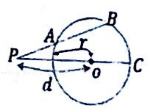
$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC}\right)$

په دايره کې د اوږدوالي اړيکې

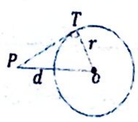


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

د يو ټکي طاقت نظر دايرې ته



$PA \cdot PB = d^2 - r^2$



$PT^2 = d^2 - r^2$

الف) که یو ټکی د دایرې څخه بهر پروت وي نو طاقت یې مثبت دی:

$p_{(0)} = d^2 - r^2 > 0$

ب) که یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي نو طاقت یې صفر دی:

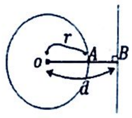
$p_{(0)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$

ج) که یو ټکی د دایرې په داخل کې پروت وي نو طاقت یې منفي دی:

$p_{(0)} = d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$

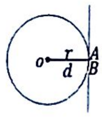
د دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

❖ که کرښه له دایرې سره ګډ ټکی ونه لري:



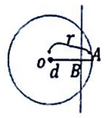
$d > r$

❖ که کرښه له دایرې سره یو ټکی ولري نو کرښه پر دایره مماس دی:



$d = r$

❖ که کرښه له دایرې سره دوه ګډ ټکي ولري:



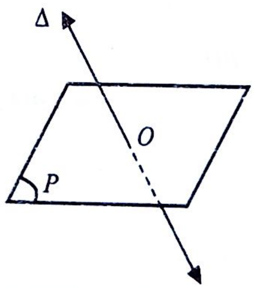
$d < r$

فضايي هندسه

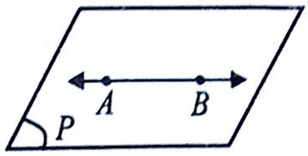
په درې بعدي فضاکې کرښه او مستوي

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

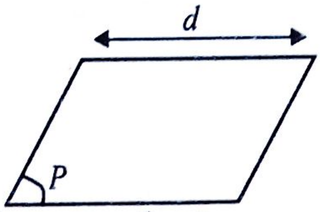
1- که چیرې یو مستقیمه کرښه او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري نو یو له بل سره متقاطع دي.



2- که چیرې یو مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره دوه اویا له دوو څخه زیاتې ګډې (مشترکې) نقطې ولري، نو مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله یا ورسره منطبقه ده.

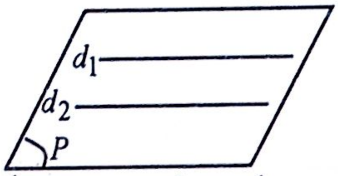


3- که چیرې یو مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه ونه لري، نو دامستقیم له مستوي سره موازي دی.

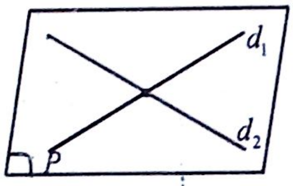


❖ له یوبل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

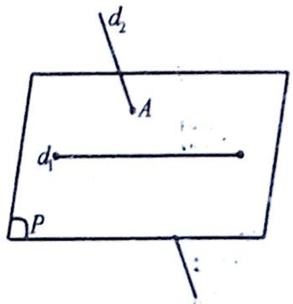
1- په یوې مستوي کې دوه کرښې هغه وخت موازي بلل کیږي چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه کرښې، چې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع کرښې بلل کیږي.

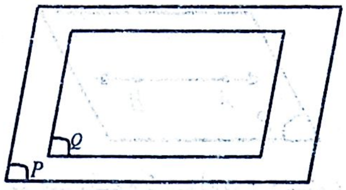


3- که دوه کرښې چې په یوه مستوي کې واقع نه وي او کوم ګډ ټکي هم ونه لري، متنافرې کرښې بلل کیږي.

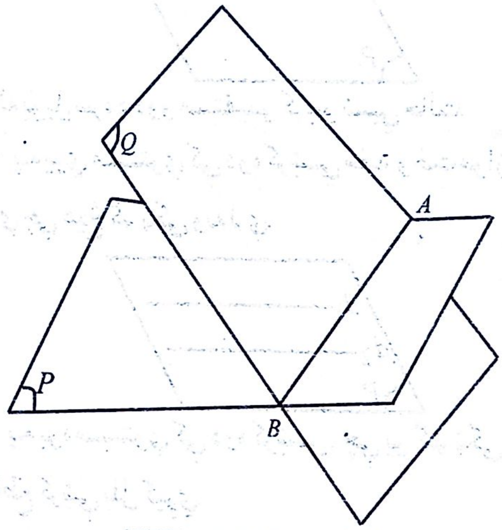


د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

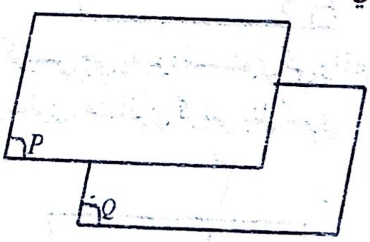
1- که چیرې دوې مستوي ګانې لږ ترلږه درې مشترکې نقطې ولري، چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې نه وي، یو پر بل منطبقې مستوي ګانې بلل کیږي.



2- که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ مستقیم خط ولري متقاطع مستوي ګانې بلل کیږي دغه AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وایي.



3- که چیرې دوه مستوي ګانې هیڅ کوم ګډ ټکی ونه لري، سره موازي دي.



د بیلابیلو جسمونو د بیلابیلو ځانګړتیاوو فورمولونه

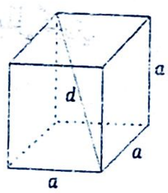
مکعب Cube:

❖ حجم: $V = a^3$

❖ جانبي مساحت: $S = 4a^2$

❖ ټولي مساحت: $A = 6a^2$

❖ قطر: $d = \sqrt{3} \cdot a$



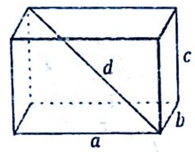
مکعب مستطیل Rectangular Parallelepiped:

❖ حجم: $V = a \cdot b \cdot c$

❖ جانبي مساحت: $S = 2(bc + ac)$

❖ کُلي مساحت: $A = 2(ab + ac + bc)$

❖ قطر: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

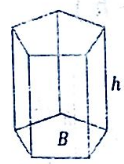


منشور Prism:

❖ حجم: $V = B \cdot h$

❖ جانبي مساحت:(P د قاعدې محیط) $S = P \cdot h$

❖ کُلي مساحت: $A = P \cdot h + 2B = S + 2B$

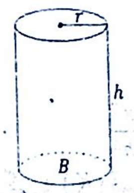


استوانه Cylinder:

❖ حجم: $V = B \cdot h = \pi r^2 h$

❖ جانبي مساحت: $S = 2\pi r \cdot h$

❖ کُلي مساحت: $A = S + 2B = 2\pi r(h + r)$

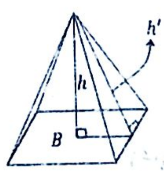


هرم:Pyramid

❖ حجم: $V = \frac{1}{3} B \cdot h$

❖ جانبي مساحت: $S = \frac{P \cdot h'}{2}$

❖ کُلي مساحت: $A = S + B$



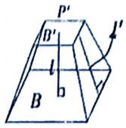
ناقص هرم :Frustum of Pyramid

❖ حجم: $V = \frac{K}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$

❖ جانبي مساحت: $S = \frac{l'}{2}(P + P')$

❖ ګڼلي مساحت: $A = S + B + B'$

❖ د مقطع مساحت: $B' = B \cdot \frac{K^2}{h^2}$

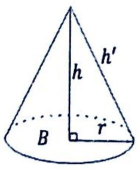


مخروط :Cone

❖ حجم: $V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

❖ جانبي مساحت: $S = \frac{P \cdot h'}{2} = \pi r h'$

❖ ګڼلي مساحت: $A = S + B = \pi r(r + h')$



ناقص مخروط:Frustum of Cone

❖ د مقطع شعاع: $r' = r \cdot \frac{K}{h}$

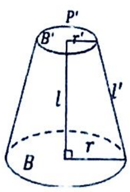
❖ حجم: $V = \frac{\pi K}{3}(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

❖ جانبي مساحت: $S = \pi \cdot l'(r + r')$

❖ ګڼلي مساحت: $A = S = B + B'$

❖ د مقطع مساحت: $B' = B \cdot \frac{K^2}{h^2} = \pi r^2 \cdot \frac{K^2}{h^2}$

په ناقص هرم او مخروط کې د (K) قیمت: $K = h - l$



کره:Sphere

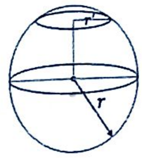
❖ حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

❖ د سطحي مساحت: $A = 4\pi r^2 = \pi d^2$

❖ د مقطع مساحت: $s = \pi r' = \pi(r^2 - y^2)$

❖ د مقطع شعاع: $r' = \sqrt{r^2 - y^2}$

y- د کرې د مرکز او قطع شوې برخې د مرکز تر منځ فاصله ده.



❖ د څو اړخيز جسم لپاره د (Euler) قاعده: $F + V = E + 2$

V- رأسونه، E- ضلعې، F- اړخونه يا مخونه د جسم.

تحليلي هندسه

❖ په يو محور د دوو ټکو ترمنځ واټن:

$$d = AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

❖ په سطحه کې د دوو ټکو ترمنځ واټن:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

❖ د يوې نقطې واټن د وضعيه کمياتو له مبدا څخه:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

❖ د دوو ټکو ترمنځ واټن په قطبي مختصاتو کې:

$$d = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

❖ د هغې نقطې مختصــات چې قطعه خط په يو نســبت باندې ويشي:

$$P\left(x = \frac{x_1 + x_2 \cdot r}{1 + r}, y = \frac{y_1 + y_2 \cdot r}{1 + r}\right)$$

❖ د $\left(\frac{m}{n}\right)$ په نسبت د يوه قطعه خط ويشل:

$$P\left(x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}\right)$$

❖ د قطعه خط د نيمايي نقطې مختصات:

$$P\left(x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

❖ د مستقيم خط ميل چې د (x) محور سره د (θ) زاويه ولري:

$$m = \tan\theta$$

❖ د مستقيم خط ميل چې دوې نقطې يې معلومې وي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

د مستقيم خط معادلې

❖ عمومي معادله: $Ax + By + c = 0$

۱- ميل او (y) محور سره تقاطع ټکی معلوم وي: $y = mx + b$

۲- چې د (x) محور سره موازي وي: $y = b\ ,\ b \neq 0$

۳- چې د (y) محور سره موازي وي: $x = a\ ,\ a \neq 0$

۴- ميل او يوه نقطه يې معلومه وي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

۵- دوې نقطې يې معلومې وي: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

محور الوسره تقاطع نقطه معلومه وی

۶- د محوراتو معادله: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

۷- نارمل معادله: $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$

p د عمود خط اوږدوالی، θ د عمود خط د میل زاویه.

۸- د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

۹- د مستقیم خط معادله په قطبي مختصاتو کې:

$$\frac{b}{r}=\sin\theta-a\cdot\cos\theta$$

❖ د یو ټکي واټن د مستقیم خط څخه: $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p$$

❖ د دوو موازي خطونو ترمنځ واټن: $d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

معادلی له معیاری شکل وړی

❖ د وضعیه کمیاتو له مبدا نه د یو مستقیم خط واټن:

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

❖ د دوو مستقیمو خطونو ترمنځ زاویه: $\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت یو پر بل عمود دي چې:

$$m_1\cdot m_2=-1\quad,\quad A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$$

عمومی شکل لرونکی

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت متقاطع دي چې:

$$m_1\neq m_2\quad,\quad \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت یو پر بل منطبق دي چې:

$$m_1=m_2\ ,\ \ b_1=b_2\ ,\ \ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت موازي دي چې:

$$m_1=m_2\ ,\ \ b_1\neq b_2\ ,\ \ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$

❖ د مثلث مساحت د رأسونو د مختصاتو له مخې:

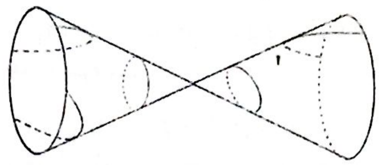
$$\begin{cases}A(x_1,y_1)\\B(x_2,y_2),S=\frac{[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]}{2}\\C(x_3,y_3)\end{cases}$$

❖ د مثلث مساحت چې د رأسونو نقطې یې معلومې وي:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{matrix}\right\|$$

❖ د مثلث د ثقل مرکز: $P\left(x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

مخروطي مقاطع (Conic Sections)



د مخروطي مقاطعو د ستندرد د حالت معادلې

❖ پارابول: $y^2 = 4Px \;,\; e = 1$ (eعن المرکزيت)

❖ دايره: $x^2 + y^2 = 1 \;,\; e = 0$

❖ بيضوي: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;,\; 0 < e < 1$

❖ هايپربولا: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;,\; e > 1$

❖ د مخروطي مقاطعو عمومي معادله:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

پورتنۍ معادله کې:

که $A \cdot B = 0$ شي، د پارابولا معادله لاسته راځي.

که $A = B$ شي، د دايرې معادله لاسته راځي.

که $A \neq B > 0$ شي، د بيضوي معادله لاسته راځي.

که $A \cdot C < 0$ شي، د هايپرابولا معادله لاسته راځي.

❖ د مخروطي مقاطعو معادلې په قطبي مختصاتو کې: په عمومي صورت که چيرې هادي د قطبي محور سره موازي وي، د مخروطي مقاطعو معادله په قطبي مختصاتو کې عبارت ده له:

$$r = \frac{e \cdot P}{1 \pm e \cdot \cos\theta}$$

پدې ځای کې د عن المرکزيت لپاره درې حالتونه شتون لري:

1- $e = 1$ د پارابول حالت دی.

2- $e < 1$ د بيضوي حالت دی.

3- $e > 1$ د هايپربول حالت دی.

دايره (Circle)

❖ د هغې دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو مبدا وي:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

❖ د هغې دايرې معادله چې مرکز يې $c(h,k)$ وي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

د دايرې د معادلو خصوصي حالتونه

❖ مرکز يې د (x) په محور: $(x-h)^2 + y^2 = R^2; k = 0$

❖ مرکز يې د (y) په محور: $x^2 + (y-k)^2 = R^2; h = 0$

❖ د (x) په محور مماس:

$$(x-h)^2 + (y-R)^2 = R^2 \;;\; |k| = R$$

❖ د (y) په محور مماس:

$$(x-R)^2+(y-k)^2=R^2\ ;\ |h|=R$$

❖ دواړو محورو سره مماس:

$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2\ ;\ |h|=|k|=R$$

❖ د وضعيه کمياتو له مبدا څخه د يوې دايرې د تيريدو شرط:

$$h^2+k^2=R^2$$

❖ د دايرې عمومي يا انکشاف يافته معادله:

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

❖ پورتنۍ معادله کې د دايرې مرکز: $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

❖ پورتنۍ معادله کې شعاع: $R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

- دايره حقيقي ده: $D^2+E^2-4F>0$
- دايره نقطوي ده: $D^2+E^2-4F=0$
- دايره مجازي ده: $D^2+E^2-4F<0$

❖ د دايرې د مماس معادله په $p(x_1,y_1)$ ټکي کې:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

❖ د دايرې د مماس ميل په $p(x_1,y_1)$ کې: $m=-\frac{h-x_1}{k-y_1}$

❖ د مماس د تماس په ټکي $p(x_1,y_1)$ کې د شعاع ميل:

$$m_r=\frac{k-y_1}{h-x_1}$$

❖ د $x^2+y^2=R^2$ دايرې د مماس معادله په $p(x_1,y_1)$ کې:

$$x\cdot x_1+y\cdot y_1={x_1}^2+{y_1}^2=R^2$$

❖ د دايرې د مماس اوږدوالی له $p(x_1,y_1)$ ټکي څخه:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-R^2}$$

د دوو دايرو د جذري محور معادله

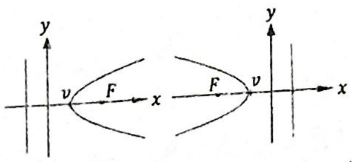
❖ د دواړو دايرو د معادلو حاصل تفريق څخه لاسته راځي:

$$\begin{array}{r} x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \\ -\quad x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \\ \hline \end{array}$$

پارابولا (Parabola)

رأس يې په $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ ټکي کې او د تناظر محور (x) وي:

❖ معادله: $y^2=4px$



p>0 د پارابول خوله ښی خواته خلاصه ده (مقعر).

p<0 د پارابول خوله چپې خواته خلاصه ده (محدب).

❖ د رأس مختصات: $V(0,0)$

❖ د محراق مختصات(P محراقي فاصله): $F(p,0)$

❖ مؤجه خط(هادي): $x=-p$

❖ محراقي یا د تناظر محور: $y=0\ ;(x-axis)$

❖ غیرمحراقي محور: $x=0\ ;(y-axis)$

❖ عمودي وتر: $\overline{AB}=4p$

❖ د عمودي وتر نقطې: $AB(x,\pm y)$

رأس يې په (h,k) تکي کې او د تناظر محور د (x) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $(y-k)^2=4p(x-h)$

❖ د رأس مختصات: $V(h,k)$

❖ د محراق مختصات: $F(h+p,k)$

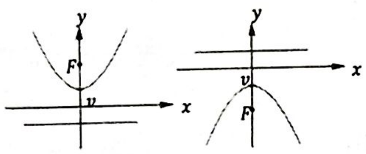
❖ مؤجه خط(هادي): $x=h-p$

❖ محراقي یا د تناظر محور: $y=k$

❖ غیرمحراقي محور: $x=h$

رأس يې په $(0,0)$ تکي کې او د تناظر محور (y) وي:

❖ معادله: $x^2=4py$



p>0 د پارابول خوله پورته خواته خلاصه ده (مقعر).

p<0 د پارابول خوله ښکته خواته خلاصه ده (محدب).

❖ د رأس مختصات: $V(0,0)$

❖ د محراق مختصات(P محراقي فاصله): $F(0,p)$

❖ مؤجه خط(هادي): $y=-p$

❖ محراقي یا د تناظر محور: $x=0\ ;(y-axis)$

❖ غیرمحراقي محور: $y=0\ ;\ (x-axis)$

❖ عمودي وتر: $AB=4p$

❖ د عمودي وتر نقطې: $AB(\pm x,y)$

رأس يې په (h,k) تکي کې او د تناظر محور د (y) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $(x-h)^2=4p(y-k)$

❖ د رأس مختصات: $V(h,k)$

❖ د محراق مختصات: $F(h,k+p)$

❖ مؤجه خط(هادي): $y = k - p$

❖ محراقي یا د تناظر محور: $x = h$

❖ غیرمحراقي محور: $y = k$

بیضوي (Ellipse)

عمومي ځانګړتیاوې:

❖ لوی قطر: طول $AA' = 2a$

❖ کوچنی قطر: طول $BB' = 2b$

❖ د محراقونو تر منځ فاصله: طول $F_1F_2 = 2c$

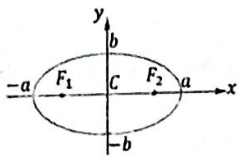
❖ محراقي فاصله: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

❖ عن المرکزیت: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\ ; 0 < e < 1$

❖ عمودي وتر(لتس ریکتم): $\overline{MM'} = \frac{2b^2}{a}$

مرکز یې په $(0,0)$ ټکي کې او لوی قطر یې د (x) په محور وي:

❖ معادله: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$0 < b < a$ وي بیضوي افقي ده.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(\pm c, 0)$

❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات: $AA'(\pm a, 0)$

❖ د کوچني قطر د رأ سونو مختصات: $BB'(0, \pm b)$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$

❖ محراقي محور: $y = 0$

❖ غیر محراقي محور: $x = 0$

مرکز یې په (h,k) ټکي کې او لوی قطر یې د (x) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h,k)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(h \pm c, k)$

❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات: $AA'(h \pm a, k)$

❖ د کوچني قطر د رأ سونو مختصات: $BB'(h, k \pm b)$

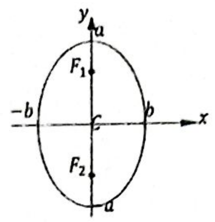
❖ مؤجه خطونه(هادي): $x = h \pm \frac{a}{e} = h \pm \frac{a^2}{c}$

❖ محراقي محور: $y = k$

❖ غیر محراقي محور: $x = h$

مرکز یې په $(0,0)$ ټکي کې او لوی قطر یې د (y) په محور وي:

❖ معادله: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$



$a > b > 0$ وي بیضوي عمودي ده.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(0, \pm c)$

❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات: $AA'(0, \pm a)$

❖ د کوچني قطر د رأ سونو مختصات: $BB'(\pm b, 0)$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $y = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$

❖ محراقي محور: $x = 0$

❖ غیر محراقي محور: $y = 0$

مرکز یې په (h,k) ټکي کې او لوی قطر یې د (y) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h,k)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(h, k \pm c)$

❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات: $AA'(h, k \pm a)$

❖ د کوچني قطر د رأ سونو مختصات: $BB'(h \pm b, k)$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $y = k \pm \frac{a}{e} = k \pm \frac{a^2}{c}$

❖ محراقي محور: $x = h$

❖ غیر محراقي محور: $y = k$

هایپربولا (Hyperbola)

عمومي ځانګړتیاوې:

❖ د هایپربولا اړیکه: $c^2 = a^2 + b^2$

❖ د حقیقي رأسونو ترمنځ فاصله: $AA' = 2a$

❖ د مجازي رأسونو ترمنځ فاصله: $BB' = 2b$

❖ د محراقونو ترمنځ فاصله: $F_1F_1 = 2c$

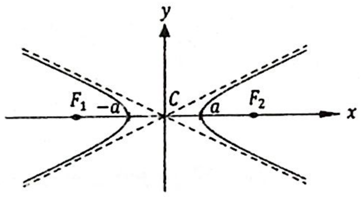
❖ محراقي فاصله: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

❖ عن المرکزیت: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \;\; ; e > 1$

❖ عمودي وتر(لتس ریکتم): $\overline{MM'} = \frac{2b^2}{c}$

مرکز یې په $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ټکي کې او محراقي محور یې د $(\boldsymbol{x})$ په محور وي:

❖ معادله: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



د هایپربولا خولې ښي او چپ لور ته خلاصې دي.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د حقیقي رأسونو مختصات: $AA'(\pm a, 0)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(0, \pm b)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(\pm c, 0)$

❖ مجانبونه: $y = \pm\frac{b}{a}x$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $x = \pm\frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $y = 0$

❖ غیرمحراقي محور: $x = 0$

مرکز یې په $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ ټکي کې او محراقي محور یې د $(\boldsymbol{x})$ محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h, k)$

❖ د حقیقي رأسونو مختصات: $AA'(h \pm a, k)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(h, k \pm b)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(h \pm c, k)$

❖ مجانبونه: $(y - k) = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

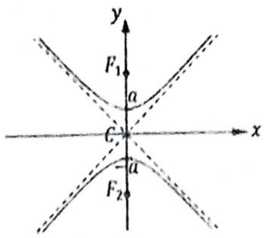
❖ مؤجه خطونه(هادي): $x = h \pm \frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $y = k$

❖ غیرمحراقي محور: $x = h$

مرکز یې په $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ټکي کې او محراقي محور یې د $(\boldsymbol{y})$ په محور وي:

❖ معادله: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



د هایپربولا خولې پورته او ښکته خواته خلاصې دي.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د حقیقي رأسونو مختصات: $AA'(0,\pm a)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(\pm b,0)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(0,\pm c)$

❖ مجانبونه: $y=\pm\frac{a}{b}x$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $y=\pm\frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $x=0$

❖ غیرمحراقي محور: $y=0$

مرکز یې په (h,k) ټکي کې او محراقي محور یې د (y) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h,k)$

❖ د حقیقي رأسونو مختصات: $AA'(h,k\pm a)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(h\pm b,k)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(h,k\pm c)$

❖ مجانبونه: $(y-k)=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $y=k\pm\frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $x=h$

❖ غیرمحراقي محور: $y=k$

د یوې نقطې موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

له نقطې څخه د (x) او (y) قیمتونه رااخلو او د منحني یا اړونده مخروطي مقطع په معادله کې یې وضع کوو نو درې حالتونه به ولرو:

❖ که ښي او کیڼ(چپ) لوري سره مساوي شول، نو نقطه د منحني په محیط پرته ده.

❖ که ښي لوری زیات شي، نو نقطه د دایرې، بیضوي او پارابول په داخل کې او د هایپربولا په خارج کې واقع ده.

❖ که چپ لوری زیات شي، نو نقطه د دایرې، بیضوي او پارابول په خارج کې او هایپربولا په داخل کې واقع ده.

د یوې کرښې موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته د (x) او (y) قیمتونه د مستقیمې کرښې له معادلې څخه لاسته راوړو او د منحني په معادله کې یې وضع کوو، دوهمه درجه یو مجهوله معادله لاسته راځي، (Δ) یې تشکیلوو $(\Delta = b^2 - 4ac)$:

- ❖ که $(0 < \Delta)$ شو، مستقیمه کرښه منحني په دوو نقطو کې قطع کوي.
- ❖ که $(0 = \Delta)$ شو، مستقیمه کرښه له منحني سره مماس ده.
- ❖ که $(0 > \Delta)$ شو، مستقیمه کرښه منحني نه قطع کوي.

احصائیه Statistics

❖ ډیټا $(Data)$: لومړنیو راټولو شویو معلوماتو ته وايي.

❖ [illegible] $(mean\ or\ average)$: که (n) [illegible] عددونه ولرونو او [illegible] ټولو عددونو مجموعه [illegible] کې:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + [illegible] x_n}{n}$$

❖ [illegible] $(mode)$: په راټول شویو [illegible] کې هغه عدد یا [illegible] زیاته فریکونسي ولري [illegible] وي [illegible] عددونو کې (5) مود [illegible]

[illegible] امکان لري چې یوه سلسله [illegible] معلومات [illegible] له یوه څخه زیات مودونه ولري [illegible] وته وايي.

❖ د نسبي کثرت فیصدي:

$$[illegible] = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولې ډیټا کثرت}} \times 100\%$$

❖ غیر متصلې ډیټا اوسط:

$$\overline{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

❖ (x) یوه ډیټا او f د هغې کثرت دی.

❖ وزني اوسط:

$$\overline{X} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

❖ میانه $(median)$: کله چې راکړل شوي معلومات منظم (صعودي یا نزولي ډول) کړونو منځنی عدد یې میانه ده او که د عددونو شمیر جفت وه نو د دوو منځینو عددونو اوسط یې میانه ده مثلاً په لاندې معلوماتو کې (7) میانه ده:

1,2,3,7,10,13,17

❖ د تحول ساحه $(Range)$:

$Range =$ ترټولو زیات قیمت - ترټولو کم قیمت

❖ دانحراف اوسط:

$$\text{دانحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

$x_1, x_2, \cdots x_n$ ډیټا ګانې، $\overline{X}$ د ډیټاګانو اوسط او n د ډیټاګانو شمیر ده.

❖ د P- ام څلورمې (ربعي) موقعیت:

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2} \quad (\text{د ډیټاګانو شمیره } n \,,\ p = 1,2,3)$$

❖ ربعي (دڅلورمو) انحراف:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا لومړی څلورمه (ربعه) او دریمه څلورمه ده.

❖ واریانس $(Variance)$:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

❖ ځینې وخت لدې فورمول څخه هم واریانس په لاس راوړي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

❖ واریانس په هغه صورت کې چې ډیټا په کلاسونو کې ترتیب شوې وي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=2}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

- x د کلاس مرکز، f یې فریکونسي وي او $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

وي

❖ معیاری انحراف:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\right)^2}$$

❖ معیاری انحراف د فریکونسیوله جدول څخه:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

❖ د بدلونونو ضریب:

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\text{معیاری انحراف}}{\text{اوسط}}$$

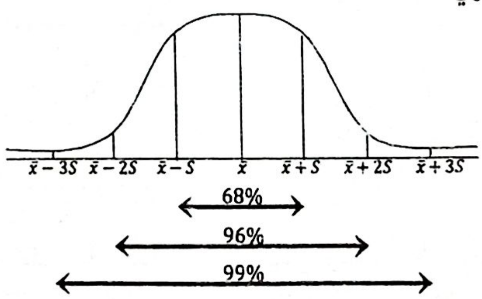
❖ د تحول ضریب: $C\cdot V\%=100\cdot\frac{S}{x}$

❖ په نورمال منحنی کې پراګنده ګي (تیتوالی):

– کـه چیرې $(\bar{x})$ اوسط او (S) معیـاري انحراف وي، نو 68% د پلټنې موارد د $(\bar{x}-S,\bar{x}+S)$ په فاصله کې یعنې د اوسط په شاا و خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.

– 96% دپلټنې موارد د $(\bar{x}-2S,\bar{x}+2S)$ پـه فاصـله کې ځای لري

– 99% د پلټنې موارد د $(\bar{x}-3S,\bar{x}+3S)$ پـه فـاصـلـه کې ځای لري



❖ د نورمال توزیع د ډول شا خطونه:

1– د خمیدلو (Skewness) شاخص: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي خمیدل نومیږي، چې په دوو لاندې ضریبونو بنودل کیږي

الف: د خمیدلو ضریب:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

- که $\alpha_3 = 0$ وي، نو توزیع متناظره ده.
- که $\alpha_3 > 0$ وي، نو د توزیع خمیدل مثبت دي، یعنې ښي لورې ته خمیده ګي لري.
- که $\alpha_3 < 0$ وي، نو د توزیع خمیدل منفي دی، یعنې کیڼ لوري ته خمیده ګي لري.

ب: د پیرسون د خمیدلو ضریب: $K_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$

- که $SK_{(p)} = 0$ وي، نو توزیع متناظره ده.
- که $SK_{(p)} > 0$ وي، نو توزیع منحني مثبت خمیدل لري.
- که $SK_{(p)} < 0$ وي، نو توزیع منحنی منفي خمیدل لري.

2- د پړسوب $(kurtosis)$ شاخص: د اشاخص دا ښیي چې د توزیع یوه منحني څه وخت جکوالی او څه وخت ټیټوالی لري:

$$\alpha_4 \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

یا د کثرت د جدول په شتون کې د پړسوب شاخص:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

❖ د پیوستون ضریب:

$$r = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}xy}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y}$$

❖ د خطي میلان معادله (دریګریشن کرښه): $y = ax + b$

❖ د خطي میلان معادله کې د (a) قیمت: $a = r\cdot\frac{S_y}{S_x}$

❖ د خطی میلان معادله کې د (b) قیمت: $b = \bar{y} - a\bar{x}$

❖ د تعجیل او پیوسته احتمال تابع: $F(x) = P(X \le x)$

❖ که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي، نو ددې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

❖ که چیرې x پیوسته ناڅاپي متحول او $k_1 < k_2$ ثخه وي نو:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

❖ د x ناڅاپي مجزا متحول اوسط: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$

❖ د x ناڅاپي مجزا (گسته) احتمال واریانس:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

❖ د نا بریالیتوب احتمال: (P د بریالیتوب احتمال)

$$q = 1 - P$$

❖ د n ځلې آزمایښت څخه د m ځلې بریالیتوب احتمال:

$$P(X \le m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \; ; \quad 0 \le m \le n$$

❖ د پورتني دوه جمله یي د توزیع اوسط: $\overline{X} = nP$

❖ د پورتني دوه جمله یي د توزیع معیاري انحراف:

$$S = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

❖ د پواسن د احتمال توزیع فورمول:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!} \, , \; e = 2.71828$$

❖ د پواسن په توزیع کې اوسط = ویانس: $\lambda = n \cdot P$

❖ په ټاکلي وخت د احتمال و مماسې لپاره د پواسن فورمول:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

– t د ټاکلي وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط ورکړل شوی وي، m د ور تللو شمیر د t په واحد وخت کې او د ورتگ شمیر اوس په واحد کې دی.

❖ د نورمال توزیع احتمال:

$$f(x)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right)^2},\quad \begin{cases}\pi = 3.14189\\ e = 2.71828\end{cases}$$

❖ د نورمال د توزیع احتمال بل فورمول: $f(x)=N(x,\bar{x},S)$

x – پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی رانبي

❖ د x پیوسته تصادفي متحول د نورمال احتمال توزیع په یوه انټروال کې:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right)^2}$$

❖ سټنډرډ نورمال متحول: $Z=\frac{x-\bar{x}}{S}$

❖ نمونه یي اوسط:

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

❖ دټولنې اوسط: $\mu=E(\bar{x}_n)$

❖ د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، δ^2 دټولنې وریانس:

$$V(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta^2$$

❖ د نمونې وریانس: $S_n^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

❖ د نمونه یي وریانس اوسط: $E(S^2)=\delta^2$

❖ د لویې ټولنې د حجم ښودنه: $\frac{S}{\sqrt{n}}$ = د لویې ټولنې حجم

❖ د کوچنۍ ټولنې د حجم ښودنه:

(N د ټولنې عناصرو شمیر) $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-m}{N-1}}$ د کوچنې ټولنې حجم

❖ د تقریبي نورمال توزیع د اوسط $(\mu_{\bar{x}}=\mu)$ وریانس:

$$\delta_{\bar{x}}^2=\frac{\delta^2}{n}$$

❖ د نورمال سټنډرډ توزیع ناڅاپه متحول: $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

❖ د نمونې د نسب آماره: $\hat{P} = \dfrac{x}{n}$

❖ د x نا ثابتې متحول اوسط: $E(x) = np$

❖ د x نا ثابتې متحول وريانس: $V(x) = npq$

❖ د دوه جمله يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع:

$$f(n\,\hat{p}) = \binom{n}{n\,\hat{p}} p^{n\,\hat{p}} (1-p)^{n(1-\hat{p})} \quad ; \quad \hat{p} = 0\,, \frac{1}{n}, \cdots, 1$$

❖ د نورمال ستنډرډ توزيع: $Z = \dfrac{x - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p\,q}{n}}}$

❖ د $\hat{p}$ وريانس: $V(\hat{p}) = \dfrac{p \cdot q}{n}$

❖ د $\hat{p}$ اوسط: $E(\hat{p}) = p$

احتمالات Probability

❖ د يوې پيښـې چانس بيانول په عدد (رقم) سـره د احتمال په نوم ياديږي

❖ د A ناڅاپي پيښې احتمال:

$$P(A)=\frac{T}{S}=\frac{\text{د ناڅاپي پيښې د مساعدو حالتونو شمير}}{\text{د تجربې د ټولو پايلو د حالتونو شمير (د نمونې فضا)}}$$

❖ د E پيښې احتمال: (n د نمونې د فضا غړي) $P(E)=\frac{1}{n}$

❖ د B ناممکنې پيښې احتمال: $P(B)=0$

❖ د B خامخا پيښيدونکې پيښې احتمال: $P(B)=1$

❖ د اتفاقي (ناڅاپي) پيښو شمير:

2^n (n د نمونې د فضا د غړو شمير)

❖ اتفاقي پيښـه (E): د S د نمونې فضـا هر فرعي سـټ يوه اتفاقي پيښه ده.

❖ د E اتفاقي پيښې احتمال تل د (0) او (1) ترمنځ وي:

$0\le P(E)\le 1$

❖ د A ناڅاپي پيښې مکمله: $P(\overline{A})=1-P(A)$

❖ د مستقلو پېښو لپاره د جمعې اصل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

❖ د مستقلو پېښو لپاره د ضرب اصل:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

❖ د جمعې عمومي اصل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

❖ مشروط (Conditional) احتمال:

$$P_B(A)=(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ P(B)\neq 0$$

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

❖ $n-$ ام فکتوريل: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\ ;\ n\in IN_0$

❖ $0!=1$

❖ $1!=1$

❖ د ستيرلينګ فورمول د $n-$ ام فکتوريل لپاره:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \quad , \quad \begin{cases}\pi = 3.14\cdots \\ e = 2.71\cdots\end{cases}$$

❖ د (n) عنصرونو د ترتیب ډولونه چې (n) غړو د $(permutation)$ پرموتیشن په نامه هم یادیږي په (P_n) سره ښودل کیږي.

❖ د (P_n) ترتیب، چې تکرار نا شونی وي: $\qquad P_n = n!$

❖ د (P_n) ترتیب، چې تکرار (K_n) ځلې شوني وي:

$$P_n^{K_1, k_2, \cdots, k_n} = \frac{n!}{K_1!\cdot K_2!\cdot K_3!\cdot \ldots \cdot K_n!}$$

❖ ترکیب Combination:

$$C_K^n = \binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} \quad , \quad 0 \le K \le n$$

د ترکیبونو ځانګړتیاوې

❖ که $k = 0$ شي یا $(n = k)$ شي د ترکیب قیمت (1) دی:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

❖ که $(n = k + 1)$ شي د ترکیب قیمت (n) کیږي:

$$\binom{n}{k} = n$$

❖ $\binom{n}{k_1} = \binom{n}{k_2} \quad ; \quad k_1 + k_2 = n$

❖ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

❖ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

❖ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

❖ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

❖ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{2} = 0$

❖ $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

❖ $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$

❖ $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$

❖ $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

❖ $\binom{m}{0}\binom{n}{P}+\binom{m}{1}\binom{n}{P-1}+\cdots+\binom{m}{P}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{P}$

❖ $(1)\binom{n}{1}+(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}+\cdots+(n)\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$

❖ $(1)\binom{n}{1}-(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}-\cdots(-1)^{n+1}\cdot(n)\binom{n}{n}=0$

❖ تبديل $(Variation)$ پرته له تکراره:

$$V_k^n=k!\cdot C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}$$

❖ تبديل، سره له تکراره:

$$V_k^n=n^k$$

❖ د خط د را تلو احتمال په $k-$ ام مرتبه کې:

$$P_{(\text{خط راتګ})}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

❖ د بينوم قضيه (دبرنولي د پرابلم احتمال):

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

❖ د $(a+b)^n$ دوه جمله يي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

❖ د بائيز $(Bayex)$ فرمول:

$$P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}\quad;\quad i=1,\cdots,n\quad;\quad \begin{cases}P(B_i)\neq 0\\ P(A)\neq 0\end{cases}$$

فزيک Physic

د کميتونو د اندازه کولو، واحداتو او د مادي د فزيکي حالتونو جدولونه

اجزاء			اضعاف		
د 10^n شکل	سمبول	د مختاړي نوم	د 10^n شکل	سمبول	د مختاړي نوم
10^{-1}	d	ديسي	10^1	D	ديکا
10^{-2}	c	سانتي	10^2	H	هکتو
10^{-3}	m	ملي	10^3	K	کيلو
10^{-6}	μ	مايکرو	10^6	M	ميگا
10^{-9}	n	نانو	10^9	G	گيگا
10^{-12}	p	پيکو	10^{12}	T	تيرا
10^{-15}	f	فمتو	10^{15}	P	پيتا
10^{-18}	a	اتو	10^{18}	E	اگزا
10^{-21}	z	زپتو	10^{21}	Z	زيتا
10^{-24}	y	يوکتو	10^{24}	Y	يوتا

دايمنشن	F.P.S	M.T.S	C.G.S	M.K.S	کميتونه
$[M.L^0.T^0]$	slug	ton	gr	kg	کتله
$[M^0.L.T^0]$	ft	m	cm	m	اوږدوالی
$[M^0.L^0.T]$	sec	sec	sec	sec	وخت
$[M^0.L.T^{-1}]$	ft/sec	m/sec	cm/sec	m/sec	سرعت
$[M.L.T^{-2}]$	lb	stene	dyne	N	قوه
$[M.L^2.T^{-2}]$	ft·lb	Kjoul	erg	Joul	کار
$[M.L^2.T^{-3}]$	HP	Kwatt	erg/sec	Watt	توان
$[M^0.L.T^{-2}]$	$ft/inch^2$	m/sec^2	cm/sec^2	m/sec^2	تعجيل
$[M^0.L.T^{-2}]$	lb/ft^2	Piz	Bary	Pascal	فشار
$[M.L^{-3}T^0]$	$slug/ft^3$	ton/m^3	g/cm^3	kg/m^3	کثافت
$[M.L^2T^{-2}]$	ft·lb	Kjoul	erg	Joul	انرژي
$[M.L^2T^{-2}]$		Termi	calory	Kcalory	دحرارت مقدار

په (SI) يا نړيوال سيستم کې د اساسي کميتونو واحدات			
گڼه	کميت	نوم	واحد
۱	کتله	کيلوگرام	Kg
۲	اوږدوالی	متر	M
۳	وخت	ثانيه	sec

۴	د مادې مقدار	مول	mol
۵	د نور شدت	کانډيلا	candela
۶	دحرارت درجه	کالوین	°K
۷	د برق جریان	امپیر	Amp
په (SI) یا نړیوال سیستم کې د بشپړونکي کمیتونو واحدات			
۱	مسطحه زاویه	رادیان	rad
۲	فضایي(جامده)زاویه	ستې رادیان	st-rad

ځانګړتیا	جامد	مایع	غاز
کتله	ثابت	ثابت	ثابت
وزن	ثابت	ثابت	ثابت
حجم	ثابت	ثابت	متغیر
شکل	ثابت	د لوښي	متغیر
تراکم	نه لري	ډېر کم	ډېر
د جذب قوه	زياته	کمه	نه لري(دفعې قوه)
ماليکولي حرکت	نه لري(اهتزازي)	بطي(بروني)	تيز
ماليکولي فاصله	نه لري	کمه	ډېره

۱: سکالري کمیت: هغه کمیت چې یوازې مقدار یې په نظر کې نیول کیږي. لکه: اوږدوالي، کتله، وخت....

۲: وکتوري کمیت: هغه کمیت چې په مقدار سربېره لوري(جهت) یې هم په نظر کې نیول کیږي. لکه: قوه، سرعت....

وکتور

- د وکتوربښودل په یوه سطحه کې:

$\vec{a}\begin{pmatrix} X_i \\ Y_j \end{pmatrix}$ (د وکتور مبداء د قایمو وضعیه کمیاتو مبداء ده)

- د وکتور مقدارچې مختصات یې راکړي وي:

$a = \sqrt{X_i^2 + Y_j^2}$

- د دوو وکتورونو محصله چې تر منځ یې د(α) زاویه وي:

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot cos\alpha}$

- د یوه وکتور عمودي مرکبه: $R_y = R \cdot sin\alpha$
- دیوه وکتور افقي مرکبه $R_x = R \cdot cos\alpha$
- هغه زاویه چې یو وکتور یې د (x) محور سره جوړوي:

$\alpha = arctan(\frac{R_y}{R_x})$

قوه

- ❖ قوه: $\vec{f} = m \cdot \vec{a}$
- ❖ تعجيل: $\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$
- ❖ د دوو قوو محصله: $R = \sqrt{{f_1}^2 + {f_2}^2 + 2f_1f_2 \cdot cos\alpha}$
- ❖ د دوو قوو تفريق: $R = \sqrt{{f_1}^2 + {f_2}^2 + 2f_1f_2 \cdot cos\alpha}$
- ❖ د دوو موازي قوو محصله ($\alpha=0°$): $R = f_1 + f_2$
- ❖ د دوو عمودي قوو محصله ($\alpha=90°$): $R = \sqrt{{f_1}^2 + {f_2}^2}$
- ❖ د دوو مخالفو قوو محصله ($\alpha=180°$): $R = f_1 - f_2$
- ❖ د يوې قوې عمودي مركبه: $f_y = f \cdot sin\alpha$
- ❖ د يوې قوې افقي مركبه: $f_x = f \cdot cos\alpha$
- ❖ د قوو د مركبو څخه په ګټه اخيستنې سره د هغوی محصله قوه او هغه زاويه چې محصله قوه يې د (x) محور سره جوړوي:

$$R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2},\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{F_y}{F_x})$$

- ❖ د يو جسم وزن: $N = m \cdot g$
- ❖ د وزن او کتلې تر منځ اړيکه: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{m_1}{m_2}$
- ❖ د قوې مومنت: $M = f \cdot l$
- ❖ يا: $M = f \cdot d \cdot \sin\alpha$
- ❖ د تعادل شرطونه:

1- د (x) په محور د ټولو قواوو مجموعه بايد مساوي له صفر سره وي:

$$f_{1x} + f_{2x} + \ldots + f_{nx} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0$$

2- د (y) په محور د ټولو قواوو مجموعه بايد مساوي له صفر سره وي:

$$f_{1y} + f_{2y} + \ldots + f_{ny} = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0$$

3- د دوران د مومنتونو مجموعه بايد مساوي له صفر سره وي:

$$f_1 \cdot l_1 + f_2 \cdot l_2 + \ldots + f_n \cdot l_n = 0 \Rightarrow \sum M = 0$$

- ❖ که چيرې $\sum F = 0$ خو $\sum M \neq 0$ وي، جسم د انتقالي تعادل په حالت کې دی، يعنې جسم تعجيل نه اخلي، بلکې په دوران پيل کوي.
- ❖ که چيرې $\sum F \neq 0$ خو $\sum M = 0$ وي، جسم د دوراني تعادل په حالت کې دی، يعنې دا چې جسم په دوران پيل نه کوي، خو تعجيل لري.

❖ د مومنټ قانون: $f_1 \cdot d_1 = f_2 \cdot d_2$

❖ د جسم وزن د لفت د پورته تلو پر وخت: $N = m(g + a)$

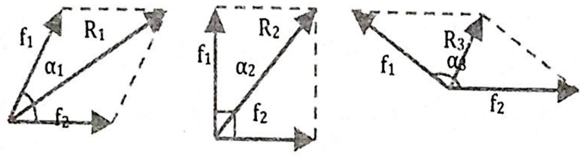
❖ د جسم وزن د لفت د ښکته تلو پر وخت: $N = m(g - a)$

❖ د کپل (زوج) یا جوړه یي قوې د دوران مومنټ: $M = f \cdot l$

❖ د څو قوو الجبري محاسبه: $R = \sqrt{(\sum f_x)^2 + (\sum f_y)^2}$

❖ په متلاقي قوو کې:

$R_3 < R_2 < R_1$; $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$



اصطکاک

❖ د اصطکاک قوه: $f_f = \mu \cdot N$

- د ستاتیکي اصطکاک قوه: $f_s = \mu_s \cdot N$
- د ډینامیکي اصطکاک قوه: $f_k = \mu_k \cdot N$
- د دوراني اصطکاک قوه: $f_r = \mu_r \cdot N \cdot \cos\alpha$

μ_s د ستاتیکي اصطکاک، μ_k د ډینامیکي اصطکاک او $\mu_r = r \cdot \tan\alpha$ د دوراني اصطکاک ضریبونه دي.

د پورته دری اصطکاکونو د قوو ترمنځ توپیر: $f_r < f_k < f_s$

❖ داخلي اصطکاک(لزجیت): هغه اصطکاک دی چې په د مایعاتو په داخل کې د حرکت پر وخت رامنځته کیږي:

$$R_i = \eta \cdot \frac{A \cdot v}{d}$$

η د مایع د اصطکاک ضریب، v د مایع سرعت، A د مقطع مساحت او d پنډوالی.

کار

❖ کار: (Vحجم، Pفشار) $W = F \cdot d$

❖ که کار په یوه زاویه ترسره شي: $W = F \cdot d \cdot \cos\theta$

ځانګړي حالتونه

1- که $0° \leq \theta < 90°$ شي، ترسره شوی کار مثبت دی او محرک کار یې بولي.

2- که $90° < \theta \leq 180°$ شي، ترسره شوی کار منفي دی او مقاوم کار یې بولي

3- که $\theta = 90°$ شي، کار صفر دی.

❖ د اصطکاک قوې کار:

$$W_f = f_f \cdot d = \mu \cdot N \cdot d = \mu \cdot mgd \cdot \cos\alpha$$

❖ د ثقل قوې کار: $W = m \cdot g \cdot h$

❖ تعجيل لرونکی کار: $W = m \cdot a \cdot d$

❖ ارتجاعي کار(د فنر پر مټ ترسره شوی کار): $W = \frac{1}{2}k \cdot x^2$

يا: $W = \frac{1}{2}k({x_1}^2 - {x_2}^2)$

❖ هغه کار چې د گاز په مرسته له ثابت فشار سره پر پستون تر سره کيږي:

$$W = P \cdot (V_2 - V_1) = P \cdot \Delta V$$

انرژي

❖ ميخانيکي انرژي: $E_M = E_K + E_P = m\left(g \cdot h + \frac{v^2}{2}\right)$

❖ پوتانشيلي(ذخيروي) انرژي: $E_P = m \cdot g \cdot h$

❖ پوتانشيلي انرژي او کار: $W = \Delta E_P = mgh_2 - mgh_2$

❖ په الاستيکي جسم کې پوتانشيلي انرژي: $E_P = \frac{1}{2}k \cdot x^2$

❖ حرکي انرژي: $E_K = \frac{1}{2}m \cdot v^2$

❖ حرکي انرژي او کار: $W = \Delta E_K = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$

❖ د انستاين فرمول(د مادې بدلېدل په انرژي): $E = m \cdot c^2$

توان

❖ توان(v سرعت) $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \frac{m \cdot a \cdot d}{t} = m \cdot a \cdot v = F \cdot v$

❖ توان د ثقل قوې په کار کې: $P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$

❖ توان د اصطکاک قوې په کار کې: $P = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot d}{t}$

ساده ماشينونه

❖ د رافعې قانون او ميخانيکي گټه يې:

$$R \cdot a = F \cdot b \; ; \; MA = \frac{R}{F} = \frac{b}{a}$$

❖ د رافعې قانون چې د رافعې وزن په نظر کې ونيسو:

$$R \cdot a = x \cdot N + F \cdot b$$

x له اتکاء ټکي څخه د رافعې تر نيمايي فاصله، N د رافعې وزن

❖ ثابت څرخونه او ميخانيکي گټه يې:

$$R \cdot r = F \cdot r \; ; \; MA = \frac{R}{F} = \frac{r}{r} = 1$$

❖ متحرک څرخونه او ميخانيکي گټه يې:

$$R \cdot r = F \cdot 2r ; MA = \frac{R}{F} = \frac{R}{R/2} = 2$$

❖ د يو پړي مرکب څرخونه او ميخانيکي گټه يې:

$$F = \frac{R}{n} ; \; MA = \frac{R}{F} = \frac{R}{R/n} = n$$

❖ د څو پړو مرکب څرخونه او ميخانيکي گټه يې:

$$F = \frac{R}{2^n} ; MA = \frac{R}{F} = \frac{R}{R/2^n} = 2^n$$

❖ مايله سطحه او ميخانيکي ګټه يې:

$$F \cdot l = R \cdot h \;\; ; \;\; MA = \frac{R}{F} = \frac{l}{h}$$

❖ د پانې(فانې) ميخانيکي ګټه:

$$MA = \frac{L}{S} = \frac{\text{د پانې اوږدوالی}}{\text{د پانې څوکه يا کوچنۍ سطحه}}$$

❖ پيچ او ميخانيکي ګټه يې:

$$F \cdot 2\pi r = R \cdot l \;\; ; \;\; MA = \frac{R}{F} = \frac{2\pi r}{l}$$

❖ د کوهي څرخ او ميخانيکي ګټه يې:

$$F \cdot R = N \cdot r \;\; ; \;\; MA = \frac{R}{r} = \frac{N}{F}$$

د ثقل مرکز

❖ د يوې ميلې د ثقل مرکز په افقي محور: $X_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$

❖ د ثقل مرکز په دوه بُعدي سطحه کې د کتلې له مخې:

$$P(X_C, Y_C)$$

د (X) مختصه: $X_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$

د (Y) مختصه: $Y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$

❖ د جسم (درې بُعدي) د ثقل مرکز د کتلې له مخې: د پورته X_C او Y_C تر څنګ يې: $Z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$

❖ د جسم (درې بُعدي) د ثقل مرکز د وزن له مخې:

$$X_C = \frac{\sum N_i x_i}{N} \;, Y_C = \frac{\sum N_i y_i}{N} \;, Z_C = \frac{\sum N_i z_i}{N}$$

❖ د جسم (درې بُعدي) د ثقل مرکز د حجم له مخې:

$$X_C = \frac{\sum V_i x_i}{V} \;, Y_C = \frac{\sum V_i y_i}{V} \;, Z_C = \frac{\sum V_i z_i}{V}$$

فشار، جريان او کثافت

❖ فشار: (F قوه، S سطحه) $P = \frac{F}{S}$

❖ فشار په مايعاتو کې:

$P = \rho \cdot g \cdot h$ (ρ کثافت، g د ځمکې تعجيل، h ارتفاع)

❖ د پاسکال قانون: (S د پستون مساحت) $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$

❖ د متماديت معادله: (A د عرضي مقطع مساحت، v د جريان سرعت)

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

❖ د برنولي قانون: $P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = constant$

❖ د برنولي په قانون کې د فشار توپير:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2}({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

❖ د ارشميدس قوه: (V حجم) $F = \rho \cdot V \cdot g$

❖ تراکمي فشار ($stress$): $\delta = \frac{F}{A} = \frac{\text{قوه}}{\text{د سيم د مقطع مساحت}}$

❖ اوږدوالي او فشار:

$P = E\frac{\Delta L}{L}$ (E د یونګ د ارتجاعیت موډول)

❖ د بُلک موډول: $B = \frac{stress}{strain} = \frac{\Delta P}{\Delta V/V_1} = V_1 \cdot \frac{\Delta P}{\Delta V}$

❖ د شیر $stress$: $\delta_s = \frac{F}{A} = \frac{\text{مماسي قوه}}{\text{د شیر د کتاب سطحه}}$

❖ د شیر $strain$: $\varepsilon_s = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\text{غوڅ شوی واټن}}{\text{د کتاب ترمنځ فاصله}}$

❖ د شیر موډول: $S = \frac{\delta_s}{\varepsilon_s} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{F\cdot L_0}{A\cdot\Delta L}$

❖ د دالتن قانون(دڅو مخلوطو ګازونو فشار): $p = \frac{P_1V_1+P_2V_2}{V}$

❖ پورتنۍ رابطه کې د (V) قیمت: $V = V_1 + V_2$

❖ کتلوي کثافت: $\rho = \frac{m}{V}$

❖ وزني کثافت: $\gamma = \frac{N}{V}$

❖ د کتلوي او وزني کثافت ترمنځ اړیکه: $\gamma = \rho \cdot g$

❖ مخصوصه وزن: $Sp \cdot g = \frac{\text{د جسم کثافت}}{\text{د سټنډرډ مادي کثافت}}$

سټنډرډ ماده د مایعاتو او جامداتو لپاره اوبه او د ګازاتو لپاره هوا ده.

❖ په مایع کې د جسم وزن: $\acute{N} = N - V \cdot \rho$

تودوخه (حرارت)

❖ د °C، °K، °R رومر، °F ترمنځ رابطه:

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F-32}{9} = \frac{°R}{4} = \frac{°K-273}{5}$$

❖ د °C او °F ترمنځ رابطه: $°C = \frac{9}{5}(°F - 32)$

❖ د °C او °K ترمنځ رابطه: $°C = °K - 273$

❖ د °C او °R ترمنځ رابطه: $°C = \frac{5}{4}°R$

❖ تودوخیز ظرفیت: $A = \frac{Q}{\Delta T} = c \cdot m$

❖ مخصوصه تودوخه(حرارت): $c = \frac{Q}{m\cdot\Delta T} = \frac{A}{m}$

❖ د تودوخې مقدار: $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$

❖ د تودوخې خپرېدل د هدایت په وسیله: $Q = K \cdot S \cdot T \cdot \frac{\Delta T}{L}$

❖ د دوو جسمونو ترمنځ تودوخیز تعادل:

$$m_1 \cdot c_1(\theta - T_1) = m_2 \cdot c_2(T_2 - \theta)$$

θ د تعادل د تودوخې درجه، 2 انډکس لرونکي کمیتونه د ګرم جسم او 1 انډکس لرونکي کمیتونه د سوړ جسم لپاره دي

❖ طولي انبساط: $L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$

❖ د طولي انبساط ضریب او واحد یې: $\alpha = \frac{\Delta L}{L_0\cdot\Delta T} = °K^{-1}$

❖ سطحي انبساط: $S = S_0(1 + \beta \cdot \Delta T)$

❖ حجمي انبساط: $V = V_0(1 + \gamma \cdot \Delta T)$

$T_F^\circ = \frac{9}{5}(T_C + 32)$

$T_C^\circ = \frac{5}{9}(T_F - 32)$ $T_K = T_C^\circ + 273$

❖ یادونه: $\beta = 2\alpha \quad , \quad \gamma = 3\alpha$

❖ د تودوخې جریان او واحد یې: $H = \frac{dQ}{dt} = \frac{K \cdot S \cdot \Delta T}{L} = \frac{Joul}{sec}$

❖ دتودوخې درجې ګرادینت: $\frac{\Delta T}{L}$ = د تودوخې درجې ګرادینت

❖ د جسم د تودوخېزهدایت د تناسب ضریب: $K = \frac{dQ \cdot L}{dt \cdot S \cdot \Delta T}$

❖ په (SI) سیستم کې د (K) واحدات:

$$\frac{watt}{m \cdot {}^\circ K}, \frac{\text{Joul}}{m \cdot {}^\circ K \cdot sec}, \frac{Cal}{m \cdot {}^\circ \text{C} \cdot sec}$$

د K قیمتونه د مختلفو توکو لپاره			
توکي	K په $\frac{watt}{m \cdot {}^\circ K}$	توکي	K په $\frac{watt}{m \cdot {}^\circ K}$
المونیم	205,0	کنګریټ	0,8
برونز	109,1	لرګی	0,2-0,4
مس	385,5	وړی(نمد)	0,04
سرپ	34,7	هوا	0,024
سپین زر	406,0	ارګون	0,016
پولاد	50,2	هیلیوم	0,14
شیښه	0,8	هایدروجن	0,14
کنګل	1,6	اکسیجن	0,023

❖ د جذب قابلیت: $\varepsilon = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\text{جذب شوې انرژي}}{\text{ټوله وارده شوې انرژي}}$

❖ د تشعشع قانون: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{O_1}{O_2}$

(S) فې واحد د سطحې باندې د خپرې شوې انرژي اندازه او (O) جذب شوې انرژي

❖ د وین قانون:(m·K متر·کالوین): $\lambda_{max} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3} m \cdot k}{T}$

❖ د وین ثابت: $2{,}9 \cdot 10^{-3} m \cdot k$

❖ د ستيفن بولتزمن قانون: $R_B = \delta \cdot T^4$

❖ د ستيفن بولتزمن ثابت: $\delta = 5{,}67 \cdot 10^{-8} J/m^2 \cdot K^4 \cdot s$

❖ د خپورشوې تشعشعي انرژي مقدار چې د جسم له سطحې څخه د وخت په واحد کې خپریږي:

$R = \varepsilon \cdot \delta \cdot A\left(T_1{}^4 - T_1{}^4\right)$

د ε قیمت: د مکمل تور جسم لپاره (1) او د صاف او روښانه جسم لپاره (0) دی.

سنيماتيک (علم الحرکت)

1) يو بُعدي حرکتونه

❖ د مستقيم الخط حرکت معادله يا وهل شوې فاصله:

$$x = v \cdot t$$

❖ پورتنۍ معادله د لومړنۍ فاصلې په شتون کې:

$$x = x_0 + v \cdot t$$

❖ متوسط سرعت: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}$

❖ لحظوي سرعت: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

❖ تعجيل: $a = \frac{v}{t} = \frac{x}{t^2}$

تعجيل

❖ متوسط تعجيل: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

❖ لحظوي تعجيل: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d(v)}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

❖ د فاصلې لومړی مشتق نظر وخت ته سرعت دی: $v = \frac{dx}{dt}$

❖ د فاصلې دوهم مشتق او د سرعت اول مشتق نظر وخت ته تعجيل دی:

$$a = \frac{d(v)}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

تعجيلي غير منظم مستقيم الخط حرکت $(a > 0)$

❖ د حرکت معادله: $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

❖ د سرعت معادله: $v = a \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه: $v^2 = 2a \cdot x$

که لومړنۍ سرعت هم شتون ولري:

❖ د حرکت معادله: $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

❖ د سرعت معادله: $v = v_0 + a \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a \cdot (x - x_0)$$

❖ وخت (زمان): $t = \frac{v - v_0}{a}$

❖ په n-ام لحظه کې وهل شوې فاصله:

$$x_n = v_0 + \frac{1}{2} a (2t - 1)$$

تأجيلي يا تأخيري غير منظم مستقيم الخط حرکت $(a < 0)$

❖ د حرکت معادله: $x = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$

❖ د سرعت معادله: $v = v_0 - a \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه: $v^2 = {v_0}^2 - 2a \cdot x$

❖ د ودرېدو (توقف) وخت: $t = \frac{v_0}{a}$

❖ د ودرېدو (توقف) فاصله: $x = \frac{{v_0}^2}{2a}$

آزاد سقوط

❖ د حرکت معادله: $h = \frac{1}{2}gt^2$

❖ د سرعت معادله: $v = g \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت تر منځ رابطه: $v^2 = 2gh$

❖ ځمکې ته د رسیدو وخت: $v = g \cdot t$

❖ د ځمکې جاذبوي تعجیل: $g = 32\frac{ft}{sec^2} = 9{,}81\frac{m}{sec^2}$

❖ په n-ام لحظه کې وهل شوې ارتفاع: $x_n = \frac{1}{2}a(2t-1)$

پورته خواته عمودي غورځوونه (پرتاب)

❖ د حرکت معادله: $h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$

❖ د سرعت معادله: $v = v_0 - g \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت تر منځ رابطه: $v^2 = {v_0}^2 - 2g \cdot x$

❖ آعظمي ارتفاع: $h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g}$

❖ آعظمي یا د اوج نقطې ته د رسېدو وخت: $t_{max} = \frac{v_0}{g}$

❖ د تګ او راتګ وخت: $T = 2t_{max} = \frac{2v_0}{g}$

ښکته خواته عمودي غورځوونه

❖ د حرکت معادله: $h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$

❖ د سرعت معادله: $v = v_0 + g \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت تر منځ رابطه: $v^2 = {v_0}^2 + 2g \cdot x$

2) دوه بُعدي حرکتونه:

❖ منځنی (متوسط) سرعت: $v_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

❖ لحظوي سرعت: $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

❖ منځنی تعجیل: $a_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)^2}$

❖ لحظوي تعجیل: $a = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$

افقي غورځول

❖ د حرکت معادله په افقي لوري (جهت): $x = v_0 \cdot t$

❖ د حرکت معادله په عمودي لوري: $y = \frac{1}{2}g \cdot t^2$

❖ آعظمي افقي فاصله: $x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

❖ په عمودي یا د Y د محور په لوري سرعت: $v = g \cdot t$

❖ د حرکت د مسیر رابطه: $Y = \frac{g}{2{v_0}^2} \cdot x^2$

❖ نهایي (اخیرنی) سرعت: $v^2 = {v_0}^2 + g^2 \cdot t^2$

❖ هدف ته د جسم د رسېدو وخت: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه: $v^2 = {v_0}^2 + 2g \cdot h$

مایل غورځول

❖ د ځمکې د جاذبوي تعجیل په شتون کې د حرکت معادلې:

$x = v_0 t \cdot \cos\theta \quad , \quad y = v_0 t \cdot \sin\theta - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

❖ د سرعت معادلې: $v_x = v_0 \cdot \cos\theta$

$v_y = v_0 \cdot \sin\theta - g \cdot t$

❖ د حرکت د مسیر رابطه: $Y = x \cdot \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2{v_0}^2 \cdot \cos^2\theta}$

❖ د اوج نقطې ته د رسېدو وخت: $t_{max} = \frac{v_0 \cdot \sin\theta}{g}$

❖ هدف ته د جسم د رسېدو وخت: $T = 2t_{max} = \frac{2v_0 \cdot \sin\theta}{g}$

❖ د اوج نقطې لوړوالی (ارتفاع): $y = h_{max} = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2\theta}{2g}$

❖ د پرتاب اعظمي افقي فاصله: $x = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$

❖ د اوج تر نقطې افقي فاصله: $x = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin 2\theta}{2g}$

❖ د اوج نقطې مختصات:

$$P(x, y) \Rightarrow P\left(\frac{{v_0}^2 \cdot \sin 2\theta}{2g}, \frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2\theta}{2g}\right)$$

❖ د حرکت او سرعت معادله: $v^2 = {v_0}^2 - 2g \cdot h$

ډینامیک (علم القوه)

دایروي یا منحني الخط حرکتونه

❖ زاویوي سرعت او واحد يې: $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{Rad}{sec}$

❖ منځنی زاویوي سرعت: $\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

❖ لحظوي زاویوي سرعت: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

❖ فریکونسي: (n د دورانونو شمیر، t وخت) $f = \frac{n}{t}$

❖ پریود (د یوه مکمل دور وخت): $T = \frac{1}{f}$

پریود او فریکوینسي یو له بل سره معکوسې اړیکې لري.

❖ خطي سرعت: (s قوس) $v = \frac{S}{t}$

❖ د خطي او زاویوي سرعت تر منځ اړیکه: $v = \omega \cdot R$

❖ خطي سرعت د یوه مکمل دوران لپاره: $v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$

❖ زاویوي سرعت د یوه مکمل دوران لپاره: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

❖ د حرکت معادله: $S = v \cdot t = \omega \cdot R \cdot t$

❖ تعجیل: $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = v \cdot \omega$

❖ زاویوي تعجیل: $\alpha = \frac{\omega}{t}$

❖ د خطي او زاویوي تعجیل اړیکه: $a = R \cdot \alpha$

د دايروي حرکتونو معادلې

❖ د حرکت معادله: $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

❖ د سرعت معادله: $\omega = \omega_0 + \alpha t$

❖ د حرکت او سرعت اړيکه: $\omega^2 = \omega_0 + 2\alpha\theta$

❖ په n-ام لحظه کې وهل شوې زاويه:

$$\theta_n = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha(2t-1)$$

❖ جذب المرکز قوه: $F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot R \cdot \omega^2$

❖ فرارالمرکز قوه: $F_{cg} = -\frac{m \cdot v^2}{R} = -m \cdot R \cdot \omega^2$

ځانګړي حالتونه:

1- که $F_{cp} > F_{cg}$ وي نو جسم مرکز ته لويږي.

2- که $F_{cp} < F_{cg}$ وي نو جسم د دايرې له سطحې څخه بهر وځي.

3- که $F_{cp} = F_{cg}$ وي نو جسم د دايرې په سطحه حرکت کوي.

❖ حرکي انرژي: $E_k = \frac{1}{2}m \cdot R^2 \cdot \omega^2$

❖ د دوران ټُرک: $\tau = F \cdot R$

د نيوټن قوانين او ځينې نور فورمولونه

۱- عطالت (انرشيا): هر جسم خپل د حرکت او سکون حالت تر هغه ساتي تر څو چې يو بهرنی عامل پرې عمل ونه کړي.

۲- قوه د تعجيل سره مستقيماً متناسبه ده: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

۳- عمل او عکس العمل قوې سره مساوي او مخالف الجهت دي: $F_a = -F_r$

❖ د جاذبې جهاني قوه (د نيوټن د جاذبې قانون): $F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$

❖ د جاذبې جهاني ثابت: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{N \cdot m^2}{Kg}$

❖ د ځمکې تعجيل په (h) ارتفاع کې:

$$g' = g\left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 = G\frac{M_e}{(R_e + h)^2}$$

❖ د ځمکې شعاع: $R_e = 6.4 \cdot 10^6 m$

❖ د ځمکې د کتلې فرمول: $M_e = \frac{R^2 \cdot g}{G}$

❖ د لمر د کتلې فرمول: $M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2}$

T يو کال په ثانيو، د R قيمت: $R = 1.5 \cdot 10^{11} m$

❖ د مدار سرعت: $V_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$

❖ د فرار سرعت: $V_{esc} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}$

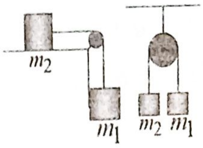
❖ د لمر د جاذبې قوې فرمول: $F_{cp} = \frac{4\pi^2 R \cdot M}{T^2}$

❖ د هوا مقاومت: $R = K \cdot S \cdot v^2 \rho \cdot \sin\theta$

K د هوا د مقاومت ضریب، v سرعت، s د جسم سطحه

کشش په تار کې (Tension)

❖ د موازي کتلو: $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad , \quad T = \frac{2m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$



❖ د عمودي او افقي کتلو:

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \quad , \quad T = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

امپولس، مومنتم او ټکر (تصادم)

❖ امپولس (ضربه): $I = F \cdot t$

❖ مومنتم: $M = m \cdot v$

❖ د امپولس او مومنتم اړیکه: $I = M \Rightarrow F \cdot t = m \cdot v$

❖ ارتجاعي ټکر: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1\acute{v}_1 + m_2\acute{v}_2$

❖ غیر ارتجاعي ټکر: $m_1v_1 + m_2v_2 = \acute{v}(m_1 + m_2)$

v مخکې له ټکره سرعت، $\acute{v}$ وروسته له ټکره سرعت

مایله سطحه

❖ قوه: $F = mg \cdot \sin\theta$

❖ که مایله سطحه اصطکاک ولري، نو قوه:

$$F = mg \cdot \sin\theta - R$$

❖ تعجیل: $a = g \cdot \sin\theta$

❖ د اصطکاک په شتون کې تعجیل: $a = g \cdot \sin\theta - \frac{R}{m}$

❖ د حرکت معادله: $x = v_0t + g\sin\theta \cdot t^2$

❖ د سرعت معادله: $v = v_0 + g\sin\theta \cdot t$

❖ د حرکت او سرعت اړیکه: $v^2 = {v_0}^2 + 2g\sin\theta \cdot x$

اهتزازي (هارمونیکي) حرکتونه

❖ پریود د فنر-کتلې په سیستم: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

❖ فریکونسي د فنر-کتلې په سیستم کې: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

❖ زاویوي فریکونسي د فنر-کتلې په سیستم کې: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

❖ د رقاصې پریود: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

❖ د رقاصې فریکونسي: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

❖ زاویوي فریکونسي په رقاصه کې: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

- ❖ د فنر ثابت: $K = m \cdot \omega^2 = \frac{F}{x}$
- ❖ د فنر په اهتزاز کې د حرکت معادله: $x = x_0 \cdot \cos\omega \cdot t$
- ❖ د فنر په اهتزاز کې د سرعت معادله: $v = \frac{2\pi}{T}\sqrt{{x_0}^2 - x^2}$
- ❖ تعجیل په فنر کې: $a = -\frac{k}{m} \cdot x$
- ❖ د هارمونیکي حرکت معادله: $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
- ❖ د سرعت معادله: $v = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
- ❖ د تعجیل معادله: $a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
- ❖ قوه: $F = -m \cdot x \cdot \omega^2$
- ❖ حرکي انرژي: $E_k = \frac{1}{2}k({x_0}^2 - x^2)$
- ❖ ذخیروي انرژي: $E_p = \frac{1}{2}k \cdot x^2$
- ❖ میخانیکي انرژي: $E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2}k \cdot {x_0}^2$

څپې(موجونه)

- ❖ د څپې اوږدوالې: $\lambda = \frac{v}{f} = v \cdot T$
- ❖ د څپې زاویوي فریکوینسي: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- ❖ د څپې سرعت: $v = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$
- ❖ د پړي په اوږدو کې د څپې د خپریدو سرعت: $v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}$
- ❖ د میخانیکي څپې انکسار: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
- ❖ د ساده څپې تابع: $y = a \cdot sin\varphi$
- ❖ د څپې تابع: $y = a \cdot \sin\omega t$
- ❖ د یوه مکمل دور لپاره د څپې تابع: $y = a \cdot \sin\frac{2\pi}{T}t$
- ❖ د څپې د خپریدو تابع: $y_M = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$
- ❖ د څپې انرژي: $E = m \cdot c^2$ یا $E = f \cdot h$
- ❖ h د پلانک ثابت: $h = 6.62 \cdot 10^{-34} Joul \cdot sec$
- ❖ د هم فازه اهتزازي ذرو ترمنځ دلارې توپیر: $d_2 - d_1 = k\lambda$
- ❖ د k قیمت پورتنۍ رابطه کې: $k = 0,1,2,3, \ldots$
- ❖ د متقابل فازه اهتزازي ذرو ترمنځ د لارې توپیر:

$$d_2 - d_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

- ❖ د k قیمت پورتنۍ رابطه کې: $k = 0,1,2,3, \ldots$

غږ(صوت) او نوري وړانګې

- ❖ د غږ سرعت په ګازاتو کې(د لاپلاس فرمول): $v = \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}}$
- ❖ γ د ځانګړو تودوخیزو ظرفیتونو نسبت په C_P ثابت فشار او C_v ثابت حجم کې دی: $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

❖ د ګازاتو د عمومي قانون په نظر کې نیولو سره د غږ سرعت:

$v = \sqrt{\gamma \frac{R \cdot T}{M}}$

❖ د ګازاتو ثابت: $R = 8.314 \frac{Joul}{mol \cdot {}^{\circ}K}$

❖ د غږ انعکاس:

(v د غږ سرعت، $\acute{v}$ د منعکس شوي غږ سرعت) $\acute{v} < v$ $v > \acute{v}$

❖ د ریزونانس پواسطه د غږ سرعت: $v = 2f(L_2 - L_1)$

❖ د غږ د شدت واحد: $\frac{Joul}{cm^2 \cdot sec} = \frac{Watt}{cm^2}$

❖ د نوري څپې د چټکتیا (شدت) تابع: $I = 4a^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}$

❖ د رڼا نوار واټن (فاصله): $x = \frac{m \cdot \lambda \cdot D}{d}$; $m = 0,1,2, \ldots$

❖ د تیاره نوار واټن: $x = \frac{(2m+1) \cdot \lambda \cdot D}{2d}$; $m = 0,1,2, \ldots$

❖ د نوري لارو توپیر: تفاوت $= \frac{x \cdot d}{D} = m\lambda$; $m = 0,1,2, \ldots$

اتومي فزیک

❖ د یوه جسم د جذب ضریب:

$$a\lambda = \frac{\text{جذب شوي تشعشعي انرژي د } \lambda \text{ څپې له اوږدوالي سره}}{\text{تشعشعي وارده شوي انرژي د } \lambda \text{ څپې له اوږدوالي سره}}$$

❖ د تور جسم لپاره د جذب ضریب قیمت: $a\lambda = 1$

❖ د الکترومقناطیسي څپې انرژي (د ماکس پلانک نظریې پر اساس): $E = nh\nu$

h د پلانک ثابت $h = 6.63 \cdot 10^{-34} Joul \cdot sec$، ν فریکونسي او n کوانتمي عدد دی.

❖ د یو الکترون د برقي چارج مقدار:

$1e = 1.602 \cdot 10^{-19} coul$

❖ یو الکترون ولټ انرژي: $1ev = 1.602 \cdot 10^{-19} Joul$

❖ د الکترون پوتانشیلي انرژي: $U = \frac{-ke^2}{r}$

❖ د الکترون حرکي انرژي: $k_E = \frac{1}{2}mv^2$

❖ د الکترون مجموعي انرژي د r په شعاع په یو ثابت مدار باندې: $E = \frac{k \cdot e^2}{2r}$

k د کولمب ثابت $9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{coul^2}$ ، e د اتوم چارج

❖ د یوه اتوم د مدار مجاز یا ممکنه وړانګه:

$r_n = a_0 \cdot n^2$, $\begin{cases} n = 1,2,3, \ldots \\ r = 2,3, \ldots \end{cases}$

❖ د بور اتوم وړانګه (شعاع): $a_0 = \frac{h^2}{m \cdot k \cdot e^2 \cdot 4\pi^2}$

❖ د سویو تر منځ د انرژي اختلاف: $h\nu = E_{n1} - E_{n2}$

❖ د جسم کتله (m) د حرکت په وخت کې(د انشتاین د کتلې نسبیت): $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

❖ د یو کوانتم نور مومنتم(د حرکت اندازه): $p = \frac{hf}{c}$

❖ د فوتون د څپې اوږدوالی:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{h \cdot c}{\text{د فوتون انرژي}} = \frac{h}{\text{د فوتون مومنتم}}$$

❖ د فوتون انرژي: $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ یا $E = m_{ph}c^2$

m_{ph} د فوتون د انرژي معادل کتله ده.

❖ د ډي بروګلي د څپې اوږدوالی: $\lambda = \frac{h}{\text{د ذرې مومنتم}} = \frac{h}{mv}$

❖ د ډي بروګلي د څپې سرعت: $v = \frac{h}{\lambda \cdot m}$

❖ د دوو عدم قطعیتونو حاصل ضرب: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$

Δx عدم قطعیت په مکان کې او Δp عدم قطعیت په مومنتم کې دی.

❖ د نور سرعت: $c = 3 \cdot 10^5 \frac{Km}{sec} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$

هستوي فزیک

❖ د هستې د شعاع د اوږدوالي واحد فمتومتر(fm) دی چې فرمي (Fermi) هم ورته وايي: $fm = Fermi = 10^{-15}m$

❖ اتومي کتله(اتومي وزن): $A = Z + N$

Z د پروتونونو شمیر، N د نیوترونونو شمیر

❖ د اتوم هسته: (X د یو اتوم کیمیاوي علامه) $x \cong {}_Z^AX^N$

❖ د هایدروجن د اتوم هسته $\cong {}_1^1H$ یا ${}_1^1H^0$

❖ د هلیوم د اتوم هسته $\cong {}_2^4He$ یا ${}_2^4He^2$

د ذرې نوم	د کولن(کولمب) چارج	کتله(Kg)	وړانګه په (fm)
الکترون	$-1.6 \cdot 10^{-19}$=-e	$9.1 \cdot 10^{-13}$	په موجود وسایلو د اندازې وړ نه دی
پروتون	$+1.6 \cdot 10^{-19}$=+e	$1.67 \cdot 10^{-27}$	1/2
نیوترون	صفر	$1.68 \cdot 10^{-27}$	1/2

د (α)، (β) او (γ) دوړانګو وتل (خارجیدل)

❖ د (α) وړانګې وتل: ${}_Z^AX^N \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y^{N-2} + {}_2^4\alpha^2$

❖ د (β) وړانګې وتل: ${}_Z^AX^N \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y^{N-1} + {}_{-1}^{0}\beta$

❖ د (γ) وړانګې وتل: ${}_Z^AX^N \rightarrow {}_Z^AX^N + \gamma$

د الفا(α)، بیتا(β) او گاما(γ) د تشعشعاتو جدول				
ذره	سمبول	ترکیب	چارج	په مور(اصلي) هستې باندې تاثیر
الفا	$\alpha\left({}_{2}^{4}He\right)$	2پروتون 2نیوترون	$+2$	د کتلې کموالی، د نوي عنصر تولید
بیتا	$\beta\left({}_{-1}^{0}e\right)$	الکترون پوزیترون	-1 $+$	کتله یې عدد ثابت، د نوي عنصر تولید
گاما	γ	فوتون	0	د انرژي له منځه تلل

د نور فزیک

❖ نوري سیلان:(ω د نور انرژي، t وخت) $\Phi = \frac{\omega}{t}$

❖ د نور شدت یا نوري قوه:(Ω فضایي زاویه) $I = \frac{\Phi}{\Omega}$

❖ د روښنایي مقدار:(S سطحه) $E = \frac{\Phi}{S}$

یا:(I د نورشدت، R د سرچینې څخه عمودي فاصله) $E = \frac{I}{R^2}$

یا:(α هغه زاویه چې سرچینه یې د سطحې سره جوړوي) $E = \frac{I\cos\alpha}{R^2}$

انعکاس

❖ د انعکاس قوانین:

1- وارده وړانگه، منعکسه وړانگه او نارمل خط په یوه مستوي کې واقع دي.

2- وارده زاویه او منعکسه زاویه سره مساوي دي: $i = r$

متلاقي هنداري

❖ په دوو متلاقي هندارو کې د تصویرونو شمېر:

$$n = \frac{360}{\alpha} - 1$$

❖ د دوو متلاقي هندارو تر منځ زاویه: $\alpha = \frac{360}{n+1}$

- که د دوو متلاقي هندارو تر منځ زاویه صفر یا موازي هنداربوي نو د تصویرونو شمیر لایتناهي دی.

- که جسم ثابت وساتل شي او هنداره په موازي ډول د (L) په اندازه انتقال شي نو تصویر به د ($2L$) په اندازه تغیر وکړي نسبت اول تصویر ته.

- که وارده شعاع ثابته وي او هنداره د خپل محور په چاپېره د (α) زاوېې په اندازه دوران وکړي نو منعکسه شعاع به د (2α) په اندازه دوران وکړي.

- په مستوي هندارو کې تصویر مجازي دی.

کروي هنداري

په کُروي هندارو کې د حقیقي او مجازي تصویرونو توپیرونه:

حقیقي تصویر	مجازي تصویر
د منعکسه شعاعوو د تقاطع څخه تشکیلیږي	د منعکسه شعاعوو د امتداد تقاطع څخه تشکیلیږي
د پردې پر مخ نیول کیږي	د پردې پر مخ نه نیول کیږي
معمولاً سرچپه تشکیلیږي	معمولاً راسته تشکیلیږي
د هندارې مخ ته تشکیلیږي	د هندارې شاته تشکیلیږي

مقعرې کروي هندارې		
د حقیقي جسم موقعیت	د تصویر موقعیت	د تصویر خصوصیات
انحنا مرکز-لایتناهي	انحنا مرکز-محراق	حقیقي، کوچنی $\gamma < 1$، سرچپه
انحنا مرکز	انحنا مرکز	حقیقي، مساوي $\gamma = 1$، سرچپه
انحنا مرکز-محراق	انحنا مرکز-لایتناهي	حقیقي، لوی $\gamma > 1$، سرچپه
محراق	لایتناهي	
محراقي فاصله	د هندارې شاته	مجازي، لوی $\gamma > 1$، راسته
لایتناهي	محراق	حقیقي، نقطوي $\gamma < 1$

محدبې کروي هندارې			
د جسم حالت	د جسم موقعیت	د تصویر موقعیت	د تصویر خصوصیات
حقیقي	لایتناهي	محراق	مجازي، نقطوي $\gamma < 1$
حقیقي	رأس-لایتناهي	محراقي فاصله	مجازي، کوچنی $\gamma < 1$، راسته
مجازي	انحنا مرکز-لایتناهي	انحنا مرکز-محراق	مجازي، کوچنی $\gamma < 1$، سرچپه
مجازي	انحنا مرکز	انحنا مرکز	مجازي، مساوي $\gamma = 1$، سرچپه
مجازي	انحنا مرکز-محراق	انحنا مرکز-لایتناهي	مجازي، لوی $\gamma > 1$، سرچپه
مجازي	محراق	لایتناهي	
مجازي	محراقي فاصله	د هندارې مخ ته	حقیقي، لوی $\gamma > 1$، راسته
مجازي	لایتناهي	محراق	مجازي، نقطوي $\gamma < 1$

❖ محراقي فاصله: $f = \frac{R}{2}$

❖ د ګروي هنداري د انحنا شعاع: $R = 2f$

❖ د مقعرو هندارو فرمول(د ګاووس فرمول):

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}=\frac{2}{R}$$

p' د تصویر فاصله له هنداري نه، p د جسم فاصله له هنداري نه.
که بعد له محاسبې د p' قیمت (-) شو تصویر مجازي او که
(+) شو تصویر حقیقي دی.

❖ د نیوټن فرمول د ګروپ هندارو لپاره: $f^2 = x \cdot x'$

x' د تصویر او x د جسم فاصله د هنداري له محراق څخه ده.

$$p = x + f \qquad , \qquad p' = x' + f$$

❖ لوی ښودنه: $\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{I}{O}$

I د تصویر اوږدوالي، O د جسم اوږدوالي

د نور انکسار

❖ د انحراف زاویه:(r منکسره زاویه) $\theta = i - r$

❖ د محیط د انکسار مطلقه ضریب: $n = \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}}$

❖ د دوو محیطونو ترمنځ د انکسار نسبي ضریب(د سنیل قانون):

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{c_1}{c_2}=n$$

❖ د انکسار مطلق ضریب: $N = \frac{\text{په خلا کې د نور سرعت}}{\text{د نظر وړ محیط کې د نور سرعت}}$

❖ د یوه جسم ظاهري ژوروالي په مایع کې: $d' = \frac{d}{n}$

❖ د جسم د حقیقي او ظاهري موقعیت ترمنځ فاصله:

$$AA' = d\left(1-\frac{1}{n}\right) = d - d'$$

❖ د جسم د حقیقي او ظاهري موقعیت ترمنځ فاصله له
متوازي السطوح تېغې څخه:

$$AA' = e\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \text{(e د تېغې ضخامت)}$$

❖ په متوازي السطوح تېغه کې د انحراف مقدار:

$$d = e\frac{\sin(i-r)}{\cos r}$$

❖ بحراني زاویه: $\sin \theta_c = \frac{n_r}{n_i} = \frac{1}{n}$

❖ د اوبو بحراني زاویه 48° او د ښیښې 42° ده.

❖ منشور ته ورودي زاویه: $\sin i_1 = n \cdot \sin r_1$

❖ له منشور نه خروجي زاویه: $\sin i_2 = n \cdot \sin r_2$

❖ د منشور د رأس زاویه: $A = r_1 + r_2$

❖ د منشور د انحراف زاویه: $D = i_1 + i_2 - A = A(n-1)$

❖ د منشور د انکسار ضریب اصغري انحراف په حالت کې:

$$n = \frac{\sin\frac{D_{min} + A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

د اجسامو د نور د انکسار ضریب:	
مواد	د انکسار ضریب(n)
الماس	2.42
اوبه	1.33
کوارتز	1.54
الکول	1.36
ښیښه	1.5

عدسیې

❖ (↕) د محدبې عدسیې او (⩙) د مقعرو عدسیو سمبول دی.

د عدسیو لپاره ویلی شو چې ټول هغه قوانین چې په کروي هندارو کې د محدبو هندارو لپاره وه د مقعرو عدسیو لپاره او کوم چې د مقعرو هندارو لپاره وه د محدبو عدسیو لپاره د تطبیق وړ دي.

❖ اوپتیکي قوه یا د عدسیو قدرت (f محراقي فاصله):

$$C = \frac{1}{f}$$

❖ د مرکبو عدسیو قدرت: $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

❖ د محدب الطرفین عدسیې قدرت:

$$C = \frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

❖ د مقعر الطرفین عدسیې قدرت:

$$C = \frac{1}{f} = (n-1)(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

نوري وسیلې او آلې

❖ د تطابق لمنه: $a = \frac{1}{d} - \frac{1}{D}$

D حد اکثر او d حد اقل د لید لو فاصله.

❖ د ذره بین توان (قدرت): $P = \frac{1}{f}$

❖ د ذره بین لوی ښودنه: $M = \left|-\frac{p}{f} - 1\right|$

یا: $M = p \cdot d = \frac{1}{f} \cdot d$

❖ د مایکروسکوپ توان: $P = \gamma_{Ob} \cdot P_{Oc}$

❖ د مایکروسکوپ لوی ښودنه: $\gamma = \gamma_{Ob} \cdot \gamma_{Oc} = \frac{A"B"}{AB}$

❖ د دوربين لوی ښودنه: $\gamma = \frac{f_{Ob}}{f_{Oc}}$

❖ د ټولو نوري وسايلو لوی ښودنه: $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{I}{O}$

د نور واحدات		
کميتونه	نوم	واحد
نوري سيلان Φ	لومين	Lumen
د روښنايي مقدار E	لکس	Lux
د نور شدت I	کنډل	Candle
د نور د منبع شدت	ويول	Violle
د عدسېو قدرت C	ديوپټري	Dioptri

د برېښنا (برق) فزيک

❖ د کولمب قانون(د جذب او دفعي قوه): $F = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$

❖ د کولمب ثابت يا د تناسب ضريب: $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$MKS: K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{coul^2} \quad , CGS: K = 1 \cdot \frac{dyne \cdot cm^2}{st - coul^2}$$

❖ د برقي ساحې شدت: $E = \frac{F}{q} = K \cdot \frac{q}{d^2}$

❖ پوتانشيل توپير يا ولتاژ: $V = \frac{W}{q} = \frac{F \cdot d}{q} = E \cdot d$

❖ د پوتنشيل توپير او برقي ساحې ترمنځ اړيکه:

$$\Delta V = E \cdot \Delta S$$

ΔS د A او B ترمنځ فاصله ده

❖ کار په برق کې: $W = F \cdot d = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d}$

❖ برېښنايي پوتنشيل انرژي: $E_p = q \cdot E \cdot d$

کاندنسر (خازن)

❖ د خازن ظرفيت: $C = \frac{q}{V}$

❖ د موازي لوحو لرونکي خازن ظرفيت: $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$

S د لوحو مساحت، d د لوحو ترمنځ فاصله او

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ په خلا کې د برقي نفوذ ضريب دی.

❖ په خازن کې ذخيره شوې انرژي: $E = \frac{1}{2} V \cdot q$

د خازنونو تړل په مسلسل ډول

❖ چارج: $q = q_1 = q_2 = \cdots = q_n$

❖ ولتيج(پوتنشيل تفاوت): $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

❖ معادل ظرفيت: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$

د خازنونو تړل په موازي ډول

❖ چارج: $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$

- ولتيج(پوتنشيل تفاوت): $V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$
- معادل ظرفيت: $C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

د مستقيم جريان برقي دورې(سرکټونه)

- د برېښنا جريان:(t وخت) $I = \frac{q}{t}$
- د چارج مقدار: $q = I \cdot t$
- برقي کار: $W = V \cdot q = V \cdot t \cdot I = R \cdot I^2 \cdot t$
- برقي توان: $P = \frac{W}{t} = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R} = \varepsilon \cdot I$
- د برېښنايي سرکټ معادله:(r داخلي مقاومت) $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$
- برقي محرکه(الکتروموتيف) قوه: $\varepsilon = (R + r) \cdot I$
- د هادي مقاومت: $R = \rho \cdot \frac{L}{A}$
- مخصوصه مقاومت: $\rho = \frac{R \cdot A}{L}$
- برېښنايي هدايت: $g = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot L}$
- برېښنايي مقاومت: اوم قانون $R = \frac{V}{I} \rightarrow$
- په برقي مقاومت د حرارت تاثير: $R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$
- مخصوصه هدايت: $\sigma = \frac{1}{\rho}$
- که په سرکټ کې ډېر مقاومتونه وي: $I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + \sum r}$

د مقاومتونو ترل په مسلسل ډول

- جريان: $I = I_1 = I_2 = \cdots = I_n$
- ولتيج(پوتنشيل تفاوت): $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
- معادل مقاومت: $R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

د مقاومتونو ترل په موازي ډول

- جريان: $I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$
- ولتيج(پوتنشيل تفاوت): $V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$
- معادل مقاومت: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$
- د ويستون په پُل کې مجهول مقاومت: $R_X = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3$
- د ترانسفرمر رابطه: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2}$

قوانين

- د کرشوف لومړی قانون: $\sum I = 0$
- د کرشوف دوهم قانون: $\sum V = \sum R \cdot I$
- د اوم لومړی قانون: $V = R \cdot I$

V د پوتنشيل توپير د مقاومت په دوو انجامونو کې

- د اوم دوهم قانون: $V = E - r \cdot I$

V د پوتنشيل توپير د برېښنايي مؤلد په دوو انجامونو کې

- د ژول قانون يا د برق د جريان حرارتي اثر: $H = 0.24RI^2 \cdot t$

په مقناطيس او برق کې د جذب او دفعې قوه	F	N	dyne
د خازن ظرفيت	C	Farad	
د برق جريان	I	Amp	
د هادي مقاومت او برقي مقاومت	R	(ohm)Ω	
مخصوصه مقاومت	ρ	Ω·m	Ω·cm
د مؤلد محرکه قوه	ε	Volt	
برقي انرژي او کار	W	Joul	erg
داخلي مقاومت	r	(ohm)Ω	
د مقناطيسي ساحې شدت	H	Teslla	Gauss
مقناطيسي سيلان	Φ	Weber	Maxwell

په فزيک کې ځينې ثابت قيمتونه:

- د نور سرعت په خلا کې: $C = 2.9979 \cdot 10^8\, {}^{m}/_{sec}$
- د نور سرعت په هوا کې: $C = 2.99709 \cdot 10^8\, {}^{m}/_{sec}$
- د ځمکې جاذبوي تعجيل: $g = 9.81\, {}^{m}/_{sec^2}$
- د جاذبې جهاني ثابت: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, {}^{N \cdot m^2}/_{Kg^2}$
- په خلا کې د برقي نفوذ ضريب: $\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$
- د الکترومقناطيسي څپو د خپرېدو سرعت: $3 \cdot 10^8\, {}^{m}/_{sec}$ ← لنور سرعت
- د مقنايسي هدايت ثابت: $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6}\, H/m$
- د اوګدرو عدد: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
- د ګازاتو عمومي ثابت: $R = 8.314 \frac{Joul}{mol \cdot K}$
- د فارادې عدد: 96 500 ← $F = 9.65 \cdot 10^4 coul$
- د ژول د قانون ثابت په برق کې: $K = \frac{1}{4.18} = 0.24$
- د پلانک ثابت: $h = 6.625 \cdot 10^{-34} Joul \cdot sec$
- د چارج واحد: $\bar{e} = 1.602 \cdot 10^{-19} coul$
- د بولتزمن ثابت: $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{Joul}{K}$
- د ستيفن بولتزمن ثابت: $\delta = 5.67 \cdot 10^{-8}\, {}^{Joul}/_{m^2 \cdot K \cdot sec}$
- د وين ثابت: $2.9 \cdot 10^{-3} m \cdot K$
- د بورون شعاع: $a = 5.292 \cdot 10^{-11} m$
- د بورون مګنيتون: $\mu_b = 9.274 \cdot 10^{-24}\, {}^{Joul}/_{T}$
- د ريډبرګ ثابت: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$

د ځينې جسمونو كثافت

Kg/m^3	gr/cm^3	اجسام	گڼه
$19.3 \cdot 10^3$	19.3	سره زر Au	1
$10.5 \cdot 10^3$	10.5	سپين زر Ag	2
$13.6 \cdot 10^3$	13.6	سيماب Hg	3
$7.86 \cdot 10^3$	7.86	اوسپنه Fe	4
$1 \cdot 10^3$	1	خالصې اوبه په 4°C كې H_2O	5
$1.025 \cdot 10^3$	1.025	د سمندر اوبه په 15°C كې	6
$0.917 \cdot 10^3$	0.917	يخ	7
$0.806 \cdot 10^3$	0.806	الكول R-OH	8
1.29	$1.29 \cdot 10^{-3}$	هوا Air	9
0.598	$0.598 \cdot 10^{-3}$	د اوبو بخار 100°C	10
0.0899	$8.99 \cdot 10^{-5}$	د هايدروجن گاز H	11
1.251	$1.251 \cdot 10^{-3}$	نايتروجن N	12
1.429	$1.429 \cdot 10^{-3}$	اكسيجن O	13
$0.75 \cdot 10^3$	0.75	لرگى Wood	14
$0.80 \cdot 10^3$	0.8	پطرول	15
$2.5 \cdot 10^3$	2.5	ښيښه Glass	16
$2.7 \cdot 10^3$	2.7	المونيم Al	17
$21.5 \cdot 10^3$	21.5	پلاتين Pt	18
$3.5 \cdot 10^3$	3.5	الماس C	19
$8.9 \cdot 10^3$	8.9	مس Cu	20
$1.98 \cdot 10^3$	1.98	كاربن داى اكسايد CO_2	21
$5.5 \cdot 10^3$	5.5	د ځمكې اوسط كثافت	22
$1.4 \cdot 10^3$	1.4	د لمر اوسط كثافت	23
$2.8 \cdot 10^3$	2.8	د ځمكې قشر	24
$9.5 \cdot 10^3$	9.5	د ځمكې هسته	25
$1.6 \cdot 10^5$	160	د لمر هسته	26

د غږ سرعت په ځينو موادو كې

سرعت په m/sec	د اجسامو فزيكي حالت او نوم
331	هوا په 0°C كې
228	كاربن داى اكسايد CO_2 په 0°C كې
337	كاربن مونو اكسايد CO په 0°C كې

8

1435	اوبه H_2O
11065	بنزين C_6H_6
5106	المونيم Al
5120	اوسپنه Fe

د ځینې سماوي جسمونو فزیکي مشخصات

- د لمر کتله: $1.97 \cdot 10^{30} Kg$
- د لمر د کرې اوسط شعاع: $6.95 \cdot 10^{8} m$
- د لمر او ځمکې تر منځ اوسط فاصله: $1.5 \cdot 10^{11} m$
- د ځمکې کتله: $5.96 \cdot 10^{24} Kg$
- د ځمکې اوسط شعاع: $6.37 \cdot 10^{6} m$
- د ځمکې حجم که چېرې کروي فرض شي: $11 \cdot 10^{20} m^3$
- د ځمکې د فرار سرعت: $11.2\, Km/sec$
- د ځمکې سرعت د لمر په چاپېره: $28.5976\, Km/sec$
- د ځمکې او سپوږمۍ تر منځ اوسط فاصله: $3.84 \cdot 10^{8} m$
- د سپوږمۍ کتله: $7.3 \cdot 10^{22} Kg$
- د سپوږمۍ اوسط شعاع: $1.74 \cdot 10^{6} m$
- د سپوږمۍ دوراني تعجيل د ځمکې په چاپېره:

$a = 0.272\, cm/sec^2$

- د سپوږمۍ په سطح تعجيل: $g = 1.635\, m/sec^2$
- د سپوږمۍ د دوران وخت د ځمکې په چاپېره:

27 ورځې، 7 ساعته، او 43 دقيقې

- يو نوري کال: $9.461 \cdot 10^{15} m$

د طولي انبساط ضريب (α)	مواد
$29 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	سرپ
$24 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	المونيم
$19 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	برنج
$17 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	مس
$12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	اوسپنه(فولاد)
$12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	کانکريټ
$11 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	معمولي ښيښه
$3.3 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	پايرکس ښيښه
$0.5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	کوارتز
$1.2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	الماس

مواد	د حجمي انبساط ضريب (γ)
ايتر	$1.51 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
كاربن تيتراكلورايد	$1.18 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
الكول	$1.01 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
بنزين	$0.95 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
د زيتون تيل	$0.68 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
اوبه	$0.21 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
سيماب	$0.18 \cdot 10^{-3} K^{-1}$

يوناني الفبا

تلفظ	كوچني حروف	لوی حروف	Pronunciation
الفا	α	A	Alpha
بيتا	β	B	Beta
گاما	γ	Γ	Gamma
دلتا	δ	Δ	Delta
اپسيلون	ε, ϵ	E	Epsilon
زيتا	ζ	Z	Zeta
ايتا	η	H	Eta
تيتا	θ, ϑ	Θ	Theta
يوتا	ι	I	Iota
كپه	κ	K	Kappa
لمدا	λ	Λ	Lambda
ميو	μ	M	Mu
نيو	ν	N	Nu
كسي	ξ	Ξ	Xi
اومايكرون	o	O	Omicron
پای	π, ϖ	Π	Pi
رو	ρ	P	Rho
سيگما	σ, ς	Σ	Sigma
تاو	τ	T	Tau
اِيپسيلون	υ	Υ	Upsilon
في	ϕ, φ	Φ	Phi

Chi	Χ	χ	چي
Psi	Ψ	ψ	سي
Omega	Ω	ω	اومیګا

له لمر څخه د شمسي نظام د سیارو واټن		
$5.79 \cdot 10^{10} m$	عطارد	1
$1.082 \cdot 10^{11} m$	زهره	2
$1.496 \cdot 10^{11} m$	ځمکه	3
$2.279 \cdot 10^{11} m$	مریخ	4
$7.783 \cdot 10^{11} m$	مشتري	5
$1.427 \cdot 10^{12} m$	زحل	6
$2.87 \cdot 10^{12} m$	اورانوس	7
$4.497 \cdot 10^{12} m$	نپتون	8
$5.9 \cdot 10^{12} m$	پلوتو	9

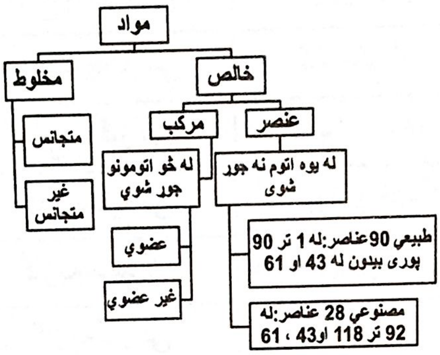
د ځمکې د سیارې تشکیلوونکي عنصرونه		
دځمکې په کتله کې:	سمبول	عنصر
46.6%	O	اکسیجن
27.7%	Si	سلیکان
8.1%	Al	المونیم
5.0%	Fe	اوسپنه
3.6%	Ca	کلسیم
2.8%	Na	سودیم
2.6%	K	پوتاشیم
2.1%	Mg	مګنیزیم
0.4%	Ti	تیتانیم
0.1%	H	هایدروجن

د رومي اعدادو جدول

عدد	رومي
1	I
2	II
3	III
4	IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	IX
10	X
20	XX
30	XXX
40	XL
50	L
60	LX
70	LXX
80	LXXX
90	XC
100	C
500	D
1000	M
5000	
10000	
50000	$\overline{L}$
100000	$\overline{C}$
500000	$\overline{D}$
1000000	$\overline{M}$

کیمیا (Chemistery)

- ❖ د عناصرو دوراني جدول په طاقو پریودونو کې د عنصرونو تعداد: $\frac{(n+1)^2}{2}$
- ❖ د عناصرو دوراني جدول په جفتو پریودونو کې د عنصرونو تعداد: $\frac{(n+2)^2}{2}$



د فلزاتو او غیر فلزاتو تر منځ توپیرونه	
فلزات	غیر فلزات
الکترون له لاسه ورکوي	الکترون اخلي
تحمض کیږي	ارجاع کیږي
د اکسیډیشن نمبر (+) دی	د اکسیډیشن نمبر(-) دی
رنګ لري	اکثراً بې رنګه دي
اتومي شعاع يې لویه ده	[illegible] بې کوچنۍ ده
ایوني شعاع يې کوچنۍ ده	[illegible]
د جدول په چپ او ښکته خوا کې قرار لري	د جدول [illegible] او پورته خوا کې قرار لري
د برېښنا او تودوخې تیروونکي دي	د برېښنا او تودوخې تیرول يې ډیر ضعیفه یا عایق دي
ځلا لرونکي دي	ځلا نه لري
د لوړ کثافت لرونکي دي	د ټیټ کثافت لرونکي دي

د مخلوطونو بېلګې	
د مخلوطونو ډولونه	بېلګې
جامد په جامد کې	الیاژونه
جامد په مایع کې	مالګه په اوبو کې
جامد په ګاز کې	کاربن په دود کې
مایع په مایع کې	الکول په اوبو کې
مایع په جامد کې	کرستالي اوبه
مایع په ګاز کې	د اوبو بړاس په هوا کې
ګاز په مایع کې	ګاز لرونکي څښاکونه
ګاز په جامد کې	په پلاتین کې هایدروجن
ګاز په ګاز کې	هوا

د بېلابېلو مرکباتو مالیکولي فرمولونه

- اوبه: H_2O
- اوزون: O_3
- کاربن دای اکساید: CO_2
- کاربن مونو اکساید: CO
- سلفر دای اکساید: SO_2
- امونیا: NH_3
- د مالګې تېزاب(هایدروکلوریک اسید): HCl
- مرکیوریک کلوراید(سوبلېمه): $HgCl_2$
- سلفوریک اسید(د ګوګړو تېزاب): H_2SO_4
- فاسفوریک اسید: H_3PO_4
- نایتریک اسید(د ښورې تیزاب): HNO_3
- کاربونیک اسید: H_2CO_3
- سلطاني تېزاب: $HNO_3 + 3HCl$
- سودیم هایدرواکساید(د کاستک سوډا): $NaOH$
- چونه چې اوبه وربه رسېدلې نه وي: CaO
- د چونې ډبره: $CaCO_3$
- چونه چې اوبه ورته رسېدلې وي: $Ca(OH)_2$
- پوتاشیم سیاناید: KCN
- د خوړو مالګه(سودیم کلوراید): $NaCl$
- باروت(سودیم نایتریت): $NaNO_3$

- ❖ پوتاشیم کاربونیټ: K_2CO_3
- ❖ پوتاشیم سلېکېټ: K_2SiO_3
- ❖ د گلوبر مالگه: Na_2SO_4
- ❖ امونیم سلفاید: $(NH_4)_2S$
- ❖ مقناطیس (مگنیتایت): Fe_3O_4
- ❖ کلسیم هایدروکسي کلوراید: $CaOHCl$
- ❖ گچ: $CaSO_4 \cdot 2H_2O$
- ❖ نیل توتیا: $CuSO_4 \cdot 5H_2O$
- ❖ شنه توتیا: $FeSO_4 \cdot 7H_2O$
- ❖ د فوسیجن گاز: $COCl_2$

بېلابېل ایونونه

- ❖ سلفیټ: SO_4^{2-}
- ❖ سلفایټ: SO_3^{2-}
- ❖ تیو سلفیټ: $S_2O_3^{2-}$
- ❖ بای سلفیټ: HSO_4^{1-}
- ❖ فاسفیټ: PO_4^{3-}
- ❖ فاسفایټ: PO_3^{3-}
- ❖ بای فاسفیټ: HPO_4^{2-}
- ❖ نایتریټ: NO_3^{1-}
- ❖ نایترایټ: NO_2^{1-}
- ❖ امونیم: NH_4^{1+}
- ❖ کاربونیټ: CO_3^{2-}
- ❖ بای کاربونیټ: HCO_3^{1-}
- ❖ هایپو کلوریټ: ClO^{1-}
- ❖ کلورایټ: ClO_2^{1-}
- ❖ کلوریټ: ClO_3^{1-}
- ❖ پر کلوریټ: ClO_4^{1-}
- ❖ اسیتیټ: CH_3COO^{1-}
- ❖ کرومیټ: CrO_4^{2-}
- ❖ دای کرومیټ: $Cr_2O_7^{2-}$
- ❖ سیانایډ: CN^{1-}
- ❖ تیو سیانایډ: SCN^{1-}
- ❖ هایدرو اکساید: OH^{1-}
- ❖ اوکزالیټ: $C_2O_4^{2-}$
- ❖ پرمنگنیټ: MnO_4^{1-}

- ❖ ارسنیت: AsO_4^{3-}
- ❖ هایدرونیم: H_3O^{1+}
- ❖ پراکساید: O_2^{2-}
- ❖ برومیت: BrO_3^{1-}

د کیمیا ځینې فرمولونه

- ❖ کتلوي کثافت: $D_m = \frac{m}{V}$
- ❖ د ګاز مولي کثافت: $D_{mol} = \frac{m(mol)}{V_{STP}} = \frac{\text{مولي کتله}}{\text{د یو مول حجم}}$
- ❖ وزني کثافت: $D_w = \frac{W}{V}$
- ❖ مخصوصه وزن: $SG = \frac{\text{د مادي کثافت } D}{\text{د ستنډرډ مادي کثافت } D'}$
- ❖ د اتومونو کتله د $10^{-22} - 10^{-24}kg$

یا $10^{-25} - 10^{-27}kg$ کمیت تر منځ شتون لري.

- ❖ د اتومي کتلې واحد: $1amu = 1.661 \cdot 10^{-27}kg$
- ❖ اتومي وزن: $A = P^{+} + N^{0}$
- ❖ اتومي نمبر(د پروتونونو شمېر): P^{+}
- ❖ اصلي مدار کې د الکترونونو اعظمي تعداد: $Z = 2n^2$
- ❖ اصلي مدار کې د اوربتالونو اعظمي تعداد: $O = n^2$
- ❖ د مخالف العلامه ایوني ذرو تر منځ د جذب قوه:

$F = K\frac{q_1q_2}{\varepsilon^0 r^2}$ (ε^0 د محلل د ډای الکتریک ثابت)

- ❖ د مولونو تعداد: $n = \frac{m}{M} = \frac{\text{کتله}}{\text{مالیکولي کتله}}$
- ❖ د بایل قانون: $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$
- ❖ د چارلز قانون: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$
- ❖ د ګیلوسک قانون: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$
- ❖ د ګازاتو د ترکیب قانون: $\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$
- ❖ د اوګدرو اصل: $\frac{n}{V} = k$
- ❖ د ایډیال(خیالي)ګازاتو معادله: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$
- ❖ د ګازونو مالیکولي کتله: $M = \frac{mRT}{PV}$
- ❖ د ګازونو د مخلوط سیستم ټول فشار: $P_{Total} = \frac{n_{Total}RT}{V}$
- ❖ د ګراهام د مالیکولي خپرېدنې قانون د دوو ګازونو لپاره:

$$\frac{V_A(Diffusion)}{V_B(Diffusion)} = \frac{\sqrt{M_B}}{\sqrt{M_A}}$$

- ❖ د تیزابو معادل ګرام وزن: $EQ_{Acid} = \frac{M}{\text{د } H \text{ تعداد}}$
- ❖ د القلیو معادل ګرام وزن: $EQ_{Base} = \frac{M}{\text{د } OH \text{ تعداد}}$

❖ د مالګو معادل ګرام وزن: $EQ_{Salt} = \frac{M}{\text{د فلز تعداد} \times \text{د فلز ولانس}}$

❖ په مرکب کې د يوه عنصر فيصدي: $\frac{\text{اتومي وزن} \times \text{تعداد} \times 100}{\text{د مرکب ماليکولي وزن}}$

❖ وزني فيصدي: $W\% = \frac{\text{د منحله مادې مقدار}\, gr \times 100}{\text{د محلول مقدار په ګرام}}$

❖ حجمي فيصدي: $V\% = \frac{\text{د منحله مادې مقدار} \times 100}{\text{د محلول مقدار}}$

❖ مولي برخه: $N_1 = \frac{n_1}{n_1+n_2+\cdots+n_i}$

❖ کتلوي برخه: $W_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots+m_i}$

❖ د کتلوي فيصدي برخه: $W_1\% = \frac{m_1 \cdot 100}{m_1+m_2+\cdots+m_i}$

❖ مولريتي: $M = \frac{n}{V} = \frac{m}{M \cdot V}$

❖ د مولريتي غلظت: $C_M = \frac{m \cdot 1000ml \cdot Moler}{M \cdot V}$

❖ د نارمليتي غلظت: $C_N = \frac{m \cdot 1000ml \cdot Narmal}{EQ \cdot V}$

❖ د مولل غلظت: $C_m = \frac{m \cdot mol \cdot 1000gr \cdot molal}{M \cdot m'}$

M د حل کيدونکې مادې ماليکولي کتله، m' د محلل کتله

❖ مولر محلول= د منحله مادې مقدار+کافي اوبه=1Liter

❖ د تيتر غلظت: $C_T = \frac{\text{حل کيدونکې ماده په ګرام}}{\text{حل کيدونکې ماده په ملي ليتر}}$

❖ تيتريشن(خنثی کول): $C_1 \cdot V_1 = C_2 \cdot V_2$

❖ د الکتروليت محلولونو ازموتيک فشار: $P = iCRT$

i د وانت هوپ ضريب، R د ګازاتو ثابت: $R = 8.31 \frac{Joul}{mol \cdot K}$

❖ د هايدروجن د ايون غلظت: $PH = -\log[H^+]$

❖ د (OH) د ايون غلظت: $POH = -\log[OH^-]$

❖ په تيزابي محلول کې(محلول تيزابي دی):

$POH > 7, [H^+] > 10^{-7}M, PH < 7, [OH^-] < 10^{-7}M$

❖ په القلي محلول کې:

$POH < 7, [OH^-] > 10^{-7}M, PH > 7, [H^+] < 10^{-7}M$

❖ په خنثی محلول کې (محيط خنثی دی):

$PH = POH = 7, [H^+] = [OH^-] = 10^{-7}M$

❖ په هر محلول کې: $PH + POH = 14$

د کلچکوفسکي قاعده او په اصلي او فرعي مدارونو کې د الکترونونو دوېش قاعده

اصلي مدار	فـــرعـــي مـــدارونـــه يــې			
K	$1s^2$			
L	$2s^2$	$2p^6$		
M	$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
N	$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$
O	$5s^2$	$5p^6$	$5d^{10}$	$5f^{14}$
P	$6s^2$	$6p^6$	$6d^{10}$	
Q	$7s^2$	$7p^6$		

$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^6\ 5s^2\ 4d^{10}\ 5p^6\ 6s^2\ 4f^{14}$
$5d^{10}\ 6p^6\ 7s^2\ 5f^{14}\ 6d^{10}\ 7p^6$

فرعي مدار	د الکترونو شمېر	اوربيتالونه
s	2	[↑↓] 1
p	6	[↑↓] [↑↓] [↑↓] ~~2~~ 3
d	10	[↑↓] [↑↓] [↑↓] [↑↓] [↑↓] 5
f	14	[↑↓] [↑↓] [↑↓] [↑↓] [↑↓] [↑↓] [↑↓] → 7

عـضوي کـيـمـيـا

sp هـايـبـريـډيـزيـشـن:

❖ د s برخه او p برخه مساوي يعنې (1/2) ده.

❖ دا هايبريد په استلين کې موجود دی.

❖ د اړيکو ولانسي زاويه (180°) ده.

sp² هـايـبـريـډيـزيـشـن:

❖ د s برخه (1/3) او p برخه (2/3) ده.

❖ دا هايبريډيزيشن په غير مشبوع هايډروکاربنونو خصوصاً د اتلين په کورنۍ کې موجود دی.

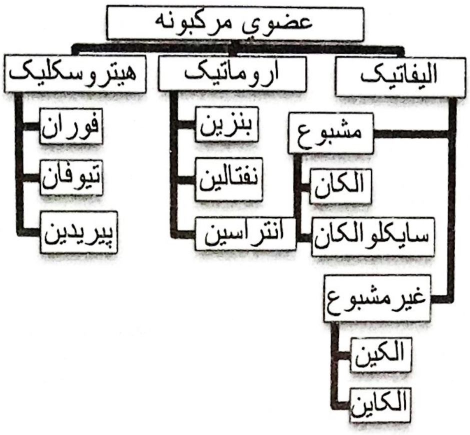
❖ د اړيکو ولانسي زاويه يې (120°) ده.

sp³ هـايـبـريـډيـزيـشـن:

❖ د s برخه (1/4) او p برخه (3/4) ده.

❖ دا هايبريديزيشن په مشبوع هايدروکاربنونو کې موجود دی

❖ د اړيکو ولانسي زاويه يې (°109.5) ده.



د ځينو الکانونو کيمياوي فرمولونه

❖ ميتان:	CH_4
❖ ايتان:	C_2H_6
❖ پروپان:	C_3H_8
❖ بيوتان:	C_4H_{10}
❖ پنتان:	C_5H_{12}
❖ هگزان:	C_6H_{14}
❖ هپتان:	C_7H_{16}
❖ اوکتان:	C_8H_{18}
❖ نونان:	C_9H_{20}
❖ ديکان:	$C_{10}H_{22}$
❖ ان ديکان:	$C_{11}H_{24}$
❖ دو ديکان:	$C_{12}H_{26}$
❖ ترای ديکان:	$C_{13}H_{28}$
❖ تيترا ديکان:	$C_{14}H_{30}$
❖ پنتا ديکان:	$C_{15}H_{32}$
❖ ايکوزان:	$C_{20}H_{42}$
❖ پنتاکونتان:	$C_{50}H_{102}$
❖ هکتان:	$C_{100}H_{202}$

د عضوي مرکباتو عمومي فرمولونه

❖ الکانونه:	C_nH_{2n+2}
❖ الکينونه:	C_nH_{2n}
❖ الکاينونه:	C_nH_{2n-2}

❖ سایکلو الکانونه:	C_nH_{2n}
❖ الکایل راډیکال:	C_nH_{2n+1}
❖ بنزین:	C_nH_{2n-6}
❖ نفتالین:	C_nH_{2n-12}
❖ انتراسین:	C_nH_{2n-18}
❖ ډاینونه:	C_nH_{2n-2}
❖ الدوز:	$C_nH_{2n}O_n$
❖ کاربوهایدریتونه:	$C_n(H_2O)_m$
❖ الکول:	$R-OH$
❖ هلاید (X=Br, Cl, F, I):	$R-X$
❖ الدیهاید:	$R-CO-H$
❖ کیتون:	$R-CO-R$
❖ عضوي تیزاب:	$R-COOH$
❖ ایتر:	$R-O-R$
❖ ایستر:	$R-COO-R$
❖ تیو ایتر:	$R-S-R$
❖ امین:	$R-NH_2$
❖ امایډ:	$R-CO-NH_2$
❖ مرکپتان(تایول):	$R-S-H$
❖ سلفو:	$R-SO_3H$
❖ نایترو:	$R-NO_2$
❖ سیاناید:	$R-CN$

د بیلابیلو عضوي مرکباتو کیمیاوي فرمولونه

❖ کلورو میتان(میتایل کلوراید):	CH_3Cl
❖ دای کلورو میتان:	CH_2Cl_2
❖ کلوروفارم(ترای کلورو میتان):	$CHCl_3$
❖ تترا کلورو میتان(کاربن تتراکلوراید):	CCl_4
❖ دای کلورو دای فلورو میتان:	CCl_2F_2
❖ ایتلین:	C_2H_4
❖ استلین:	C_2H_2
❖ میتانول:	CH_3OH
❖ ایتانول:	C_2H_5OH
❖ دای میتایل ایتر:	CH_3-O-CH_3
❖ دای ایتایل ایتر:	$C_2H_5-O-C_2H_5$
❖ دای میتایل کیتون:	$CH_3-CO-CH_3$

❖ فارمیک اسید:	$HCOOH$
❖ اسیتیک اسید:	CH_3-COOH
❖ کلورواسیتیک اسید:	$CH_2Cl-COOH$
❖ بنزوییک اسید:	C_6H_5-COOH
❖ اکزالیک اسید:	$(COOH)_2$
❖ مالوتیک اسید:	$HOOCCH_2COOH$
❖ پالمتیک اسید:	$C_{15}H_{31}-COOH$
❖ اولئیک اسید:	$C_{17}H_{33}-COOH$
❖ ستاریک اسید:	$C_{17}H_{35}-COOH$
❖ دای میتایل ایستر:	$CH_3-COO-CH_3$
❖ میتایل تایول	CH_3-S-H
❖ فارم‌الدیهاید:	CH_2O
❖ اسیت‌الدیهاید:	CH_3-CHO
❖ بنز الدیهاید:	C_6H_5-CHO
❖ بنزین:	C_6H_6
❖ نفتالین:	$C_{10}H_8$
❖ انتراسین:	$C_{14}H_{10}$
❖ فینول:	C_6H_5OH
❖ تولوین:	$C_6H_5CH_3$
❖ انیلین:	$C_6H_5NH_2$
❖ بنزالدیهاید:	C_6H_5CHO
❖ نشایسته(خو قیمته قندونه):	$(C_6H_{10}O_5)_n$
❖ گلوکوز او فرکتوز:	$C_6H_{12}O_6$
❖ سکروز(بوره):	$C_{12}H_{22}O_{11}$
❖ لکتیک اسید:	$C_3H_6O_3$
❖ ایتلین گلایکول:	CH_2OHCH_2OH
❖ پالمتیک اسید:	$C_{15}H_{31}-COOH$
❖ ستیاریک اسید:	$C_{17}H_{35}-COOH$
❖ فینول فتالین:	$C_{20}H_{14}O_4$
❖ صابون:	$C_{17}H_{35}COONa$
❖ اسکاربیک اسید:	$C_6H_8O_6$
❖ تروپین:	$C_{17}H_{35}NO_2$
❖ مورفین:	$(C_{17}H_{19}NO_3)H_2O$
❖ نیکوتین:	$C_{10}H_{14}N_2$
❖ کلسیم کارباید:	CaC_2

- سلفونیک اسید: $C_6H_5SO_3H$
- د ترپینونو بسیط فرمول: $C_{10}H_{16}$
- پایرایدین: C_5H_5N
- اسپرین: $C_9H_8O_4$

جيولوجي (Geology) .

د منرالونو ځانګړتیاوې کې دي

1- باید جامد وي.

2- باید طبیعي وي.

3- باید غېرعضوي وي.

4- باید کیمیاوي خالصه ماده وي کیدی شي عنصر یا مرکب واوسي.

5- باید کرستال وي.

منرالونه په لاندې ډلوویشل شوي دي چې لړ ګلیوو ټسلو شوې

1- خالص عناصر، لکه: سره زر، سلفر او الماس.

2- سلفایدونه، لکه: پایرایت (FeS_2) او ګالینیت (PbS).

3- اکسایدونه او هایدروکسایدونه، لکه: هیماتایت (Fe_2O_3).

4- کاربناتونه، لکه: کلسیت $(CaCO_3)$.

5- هالایدونه، لکه: هالیت $(NaCl)$.

6- سلفاتونه، لکه: ګچ $(CaSO_4 \cdot 2H_2O)$.

7- فاسفاتونه، لکه: اپاتیت .

8- سیلیکاتونه، لکه: فلدسپارونه $(KAlSi_3O_8)$.

کلکوالی (سختي)

د ماووس جدول پر بنسټ کلکوالی	
تالک	1
ګچ	2
کلسیت	3
فلوریت	4
اپاتیت	5
ارتوکلاز	6
کوارتز	7
توپاز	8
کوراندم	9
الماس	10
معیاري کلکوالی	
د ګوتې نوک	2.5
مسي سکه	3.5
د اوسپنې ټوټه	4.5
د ښیښې ټوټه	5.5
پولادي چاقو	6.5

د ځینو منرالونو کیمیاوي فرمولونه

❖ کوراندم:	Al_2O_3
❖ بوکسیت:	$Al_2O_3 \cdot H_2O$
❖ کیولایت:	$Al_3F_{14}O_5$
❖ مولایت:	$Al_6O_{13}Si_2$
❖ بریل:	$BeAl_2Si_6O_{18}$
❖ کلسیت:	$CaCO_3$
❖ فلورایت:	CaF_2
❖ دولومیت:	$CaMg(CO_3)_2$
❖ ګچ:	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$
❖ کادموسیلایت:	$CdSe$
❖ سیریانیت:	CeO_2
❖ سیزیم میتا تیتانیت:	Cs_2TiO_3
❖ اسکولایت:	Cr_2O_3
❖ ملخیت:	$Cu_2CO_3(OH)_2$
❖ کوویلایت:	CuS
❖ چالکوسایت:	Cu_2S
❖ دای جینایت:	Cu_9S_5
❖ چالکوپایرایت:	$CuFeS_2$
❖ کیوبانیت:	$CuFeS_3$
❖ ارسینوپایرایت:	$FeAsS$
❖ سیدیرایت:	$FeCO_3$
❖ لیمونایت:	$FeO_2H \cdot nH_2O$
❖ هیماتایت:	Fe_2O_3
❖ مګنیتایت:	Fe_3O_4
❖ پایرایت:	FeS_2
❖ فیالایت:	Fe_2SiO_4
❖ ارتوکلاز(فلدسپار):	$KAlSi_3O_8$
❖ کریولایت:	Na_3AlF_6
❖ البیت:	$NaAlSi_3O_8$
❖ هالیت:	$NaCl$
❖ ګالینیت:	PbS
❖ کوارتز:	SiO_2
❖ تالک:	ZnO
❖ سفالیرایت:	ZnS

بیولوژي (Biology)

د پروکاریوت او یوکاریوت حجرو توپیرونه			
ګڼه	ځانګړتیاوې	پروکاریوت	یوکاریوت
1	مایتوکاندریا	نه لري	لري
2	اندوپلازمیک ریتیکولم (ER)	نه لري	لري
3	کلوروپلاست	نه لري	لري
4	ګلجي اجسام	نه لري	لري
5	هستوي غشأ	نه لري	لري
6	ریبوزوم	لري خو کوچنی	غټ وي
7	میتوسیس	نه لري	لري
8	حجروي دیوال	نه لري	نباتي حجرې یې لري

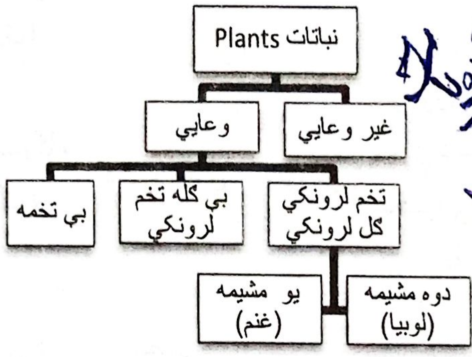
د حیواني او نباتي حجرو توپیرونه			
ګڼه	ځانګړتیاوې	حیواني حجره	نباتي حجره
1	حجروي دیوال	نه لري	لري
2	پلاستید	نه لري	لري
3	سنتروزوم	لري	نه لري
4	واکیول	کوچني او زیات	یو او لوی
5	هسته	د حجرې په منځ کې	د حجرې په یوې خوا کې
6	د تېلوفېز په پای کې حجروي ویش	د ژوروالي په واسطه ویشل کیږي	د حجرې په منځ کې سلولوزي دیوال منځ ته راځي

د حجرې بیلابیل پروتوپلازمیک او دندې یې		
ګڼه	د حجرې پروتوپلازمیک	فزیولوژیکي دندې یې
1	پلازمايي غشا	نیمه قابل نفوذ، د موادو جذب او کنترول
2	هسته	د DNA ترکیب، د جنیتیکي او ارثي

		خواصو لېږدونه، د حجرې د بیولوژیکي فعالیتونو کنترول
3	هسته ګی	د RNA ترکیب، د پروټین ترکیب
4	مایتوکاندریا	د حجرې تنفس، د انرژۍ تولید
5	رایبوزوم	د پروټین ترکیب
6	اندوپلازمیک ریټیکولم	د موادو لېږدونه، خوځښت، پروټین جوړول
7	لیزوزوم	هضمي انزایمونه لري، پروټینې مواد تجزیه کموي
8	سنتریول	د حیواني حجرو په ویشلو کې برخه اخلي
9	پلاستیدونه	په نباتي حجرو کې موجود دي، خوراکي توکي جوړوي، مختلف رنګونه تولیدوي او مواد زیرمه کوي
10	ګلجي اجسام	د حجرې ترشحي فعالیت، د قندونو ترکیب

د ژوندیو موجوداتو د طبقه بندۍ اووه پوړونه		
1	عالم	Kingdom
2	فایلم	Phylum
3	ټولګی	Class
4	اوډر	Order
5	کورنۍ	Family
6	جینس	Genuse
7	نوعه	Species

کرویات 45%
پلازما 55%



د وينې کرويات (د ټولې وينې %45 دي)		
ډول	په يو ملي ليتر کې شمير	دندې
سره کرويات	5 تر 6 ميليونو	د اکسيجن او غذايي موادو ليږدول
سپين کرويات	7 تر 10 زرو	د ميکروبونو پر وړاندې د بدن دفاع
دمويه صفحات	150 تر 500 زرو	د وينې پړن کيدل

هغه ناروغۍ چې د بکتريا او ويروسونو په واسطه منځته راځي			
نوم	د بدن هغه برخې چې زيان ويني	د ناروغۍ عامل	د ناروغۍ نښې
ايډز	د وينې سپين کرويات	ويروس	ټوخی، د اشتها کموالی، ډنګریدل، تبه، د سينې درد او بلغمو کې وينه
توبرکلوز	سږي	بکتريا	د پوستکي ژيړوالی، تبه ، کانګې، سرخوږی او د ځيګر په برخه کې درد
هيپاټايټس	ځيګر	ويروس	د لاړو د غدو

(ویروسي ژیړی)			پړسیدل او تبه
بوغوټ(کله چرک)	د لاړو غدې	ویروس	سرخوږی، ملا او غاړې د عضلاتو سختوالی، د غړو فلج
گوزڼ(د ماشومانو فلج)	عصبي حجرې، مغز او نخاع	ویروس	سرخوږی، ملا او غاړې د عضلاتو سختوالی، د غړو فلج
سینه بغل	سږي	بکتریا، ویروس او آن ځینې محرک گازونه	تبه، د ملا په برخه کې درد، ټوخي او بلغم
تیتانوس	تپ	بکتریا	فلج، خو په زیات حالت کې د مړینې لامل کیږي

A-E-D-K

A-E-d-K ویټامینونه

په شحمو (غوړو) کې منحل ویټامینونه

ویټامین	سرچینه(منبع)	په بدن کې یې دندې	په بدن کې یې د کموالي زیان	په بدن کې یې د زیاتوالي اغېزې
A	لبنیات، ځیگر، هگۍ، گازرې او سره بانجان	د سترگو په لید او د پوستکي په سلامتیا کې مرسته کوي	شبکورې، د پوستکي وچېدل او د بدن مقاومت کمیدل	پښتورگو، هډوکو او ځیگر ته زیان رسېدل، سرخوږی، کانگې او د لید خرابوالی
D	لبنیات، د هگۍ ژیړ او د کب غوړي	له بدن سره د کلسیم او فاسفورس په جذب او مصرف او د بدن په وده کې مرسته کوي	د هډوکو کږېدل په تېره بیا په ماشومانو کې او په لویانو کې د هډوکي نرمي (پوکي)	بې خوبي، د زړه سستوالی، په معده، کولمو، او اعصابو کې ناراحتي
E	نباتي غوړي، وچې مېوې	د حجرو د غشأ ساتنه او ځېنې نورې	د وینې د سرطان شونتیا(امکان)	پوره معلوم نه دی

	لکه:بادام، پسته، غوزان...	دندې.		
K	سابه، چاې او غوښې	د وینې د پرن کېدو په وخت کې د پروټین په جوړونه کې عمده رول لري	د ټپي کېدو په وخت کې د زیاتې وینې بهېدل	ځیګر ته زیان رسېدل او د وینې کموالی
په اوبو کې منحل ویټامینونه				
B_1 (Thiamin)	موم پلي، دانې او سابه	د کاربوهایدریت په میتابولیزم کې برخه اخلي او د زړه او اعصابو د دندو په سرته رسولو کې مرسته کوي	د برې برې ناروغی لامل کیږي پدې حالت کې ناروغ په عصبي ناراحتیو اخته کیږي او د زړه د سکتې خطر پېدا کیږي	معلوم نه دی
B_2 (Ribo Flavin)	لبنیات، غوښه، هګۍ سابه	د پوستکي صحت او د انساجو په ترمیم کې مرسته او د میتابولیزم په تعاملاتو کې برخه اخلي	د پوستکي د ناروغیو سبب کیږي	معلوم نه دی
B_3 (Niacin)	غوزان، غوښه، کچالو، سره بانجان او نور...	پوستکی سالم ساتي او د کاربوهایدریتونو په میتابولیزم کې اساسي رول لري	د پېلاګرا د Pellagra ناروغی لامل کیږي	د بدن، پښو او لاسونو پړسېدل او ځیګر ته زیان رسوي
B_6 (Pyridoxin)	غوښه، کېله او سابه	د امینو اسیدونو په میتابولیزمي تعاملاتو کې مرسته کوي	عضلاتي او عصبي ناراحتي	د پښو بې حسي، د لاسونو نه همغږي او د مغزي اعمالو غېر طبیعي کېدل
B_{12} (Synaccobalamin)	غوښه، لبنیات شېدې	د وینې د سرو حجرو په جوړولو کې مرسته	د وینې کموالی او عصبي ناراحتي	معلوم نه دی
C (Ascorbic Acid)	د ستروس د کورنۍ مېوې، ګلپي، سره بانجان او کچالو	د اوریو ساتنه او د بدن د مقاومت د زیاتوالي لامل کیږي	سکروي ناروغی	د معدې او کولمو ناروغي، د بدن د معافیت سیستم کمزوري

د جین تخنیک په مرسته جوړ شوي درمل د امریکا په متحده ایالاتو کې			
ګڼه	مواد	د تولید کال	کارول یې
1	انسولین	1982 م	شکرې ناروغی
2	د وینې د ختې کیدو فکتور	1983 م	هیموفیلي ناروغی
3	ایکومبیواکس HB	1986 م	د هیپاټایټس B واکسین
4	سوماتو تروپین	1987 م	د ودې د هورمون کمښت
5	اکتیوازي انزایم	1987 م	د زړه ودریدل
6	ارترویونین	1988 م	د وینې کموالی

ضیایي ترکیب (Photosynthesis):

$$CO_2 + 6H_2O + \text{د لمر رڼا} \xrightarrow{\text{کلوروفیل}} C_6H_{12}O_6 + 6O_2$$

د نخامیه غدې هورمونونه			
ګڼه	هورمون	د هدف انساج	اغیزې یې
1	ACTH (Acreno Cortico Tropic H.	ادرینال غدې	د کورټیزول د هورمون ترشح یا نور سترویید هورمونونه د ادرینال د کارټکس څخه
2	FSH (Follicle Stimulating H.	تخمدانونه او خصیې	د نارینه او ښځینه ګمیټونو انکشاف او د جنسي غدو فعالیت تنظیموي
3	LH (luteinizing H.)	تخمدانونه او خصیې	د تخمې اچولو په وخت کې د تخمې ازادیدل له تخمدانونو او خصیو څخه د جنسي هورمونونو ترشح تحریکوي
4	Prolactin	د شیدو غدې	د شیدو غدو ته انکشاف ورکوي او په تیونو کې د شیدو تولید تحریکوي
5	GH (Growth H.)	د ټول انساج د تایرویید هورمونونو ازادیدل	د کرپندوکو، هډوکو او عضلاتو وده تحریکوي
6	TSH (Thyroid Stimulating H.)	تایرویید غده	د تایرویید غدې پواسطه، د تایرویید د هورمونونو ازادیدل تحریکوي

له پښتورګو څخه د اوبو بیا ځلې جذب او د وینې د رګونو انقباض تحریکوي	پښتورګي او د وینې رګونه	ADH (Anti-Diuretic H.)	7
د رحم انقباض او د شیدو ترشح کوي	د شیدو غدې او رحم	Oxytocin	8

د مونوهایبرید تزویج لپاره د پونیټ مربعګانې

که چېرې (2) نباتات د قد لپاره دوه مختلف الیلونه ولري (هیتروزایګوس وي) د پونیټ د مربعګانو له مخې بې د جینوټایپ تناسب (1:2:1) دی خو د فینوټایپ له نظره بې ¾ لوړقد او ¼ ټیټ قد دي.

نښځینه جینونه → / نارینه ↓	F	f
F	FF	Ff
f	Ff	ff

پای

د کیمیاوي عناصرو دوراني جدول

گروپ → IA
دوره ↓

1	اتومي نمبر
H	سمبول
1.0083	اتومي وزن
هایدروجن	نوم

C	Hg	H	Rf
جامد	مایع	ګاز	نامعلوم

فلزات — غیر فلزات

القلي فلزات | ځمکني القلي فلزات | لنتناید سلسله / اکتناید سلسله | انتقالي فلزات | ضعیف فلزات | غیر فلزات | نجیبه ګازات

	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA
1	1 H																	2 He 4.003
2	3 Li 6.941	4 Be 9.012											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne 20.18
3	11 Na 22.989	12 Mg 24.305											13 Al 26.892	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar 38.948
4	19 K 39.098	20 Ca 40.078	21 Sc 44.956	22 Ti 47.88	23 V 50.94	24 Cr 51.996	25 Mn 54.938	26 Fe 55.847	27 Co 58.933	28 Ni 58.69	29 Cu 63.546	30 Zn 65.39	31 Ga 69.72	32 Ge 72.61	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr 83.80
5	37 Rb 85.467	38 Sr 87.62	39 Y 1.0083	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.94	43 Tc (98)	44 Ru 101.91	45 Rh 102.91	46 Pd 106.42	47 Ag 107.87	48 Cd 112.41	49 In 114.82	50 Sn 118.71	51 Sb 121.75	52 Te	53 I	54 Xe 131.30
6	55 Cs 132.91	56 Ba 137.33	57 La 138.91	72 Hf 178.49	73 Ta 180.95	74 W 183.85	75 Re 186.21	76 Os 190.2	77 Ir 192.22	78 Pt 195.09	79 Au 196.97	80 Hg 200.59	81 Tl 204.38	82 Pb 207.2	83 Bi 208.98	84 Po (209)	85 At	86 Rn (222)
7	87 Fr 223.02	88 Ra 226.03	89 Ac (227)	104 Rf (261)	105 Db (262)	106 Sg 263.12	107 Bh 264.1	108 Hs (265.1)	109 Mt (266.1)	110 Ds (269)	111 Rg (272)	112 Cn (285)	113 Uut (284)	114 Fl (289)	115 Uup (288)	116 Lv (292)	117 Uus 291	118 Uuo 294

58 Ce 140.12	59 Pr 140.91	60 Nd 144.24	61 Pm (145)	62 Sm 150.4	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.93	66 Dy 162.50	67 Ho 164.93	68 Er 167.26	69 Tm 168.93	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97
90 Th 232.04	91 Pa 231.04	92 U 238.03	93 Np 237.05	94 Pu (240)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (248)	98 Cf (251)	99 Es 25.08	100 Fm 257.1	101 Md (257)	102 No 259.1	103 Lr 262.11

ترتیب او دیزاین:
محمد اجمل
بهرام زوی

علمي خپرندویه ټولنه

پکتیا د ګردېز ښار غزني لین د حاجي عبدالحمید ګردېزي تجارتي مارکېټ

اړیکښمېرې: 0772936341 - 0772288190 - 0797174047

بریښنا لیک: ilmiketabtoon@gmail.com

خپرندویه ټولنه - ګردېز