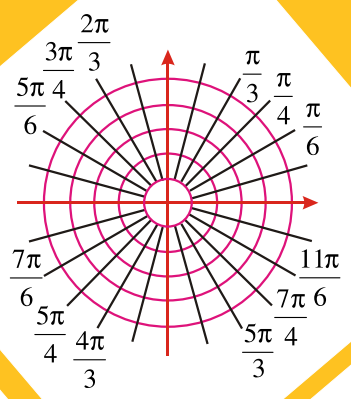
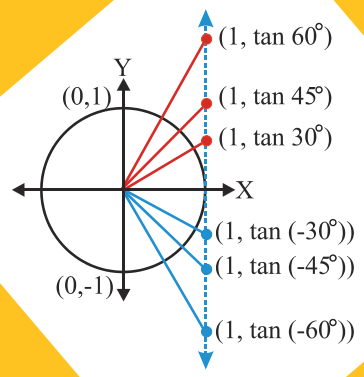
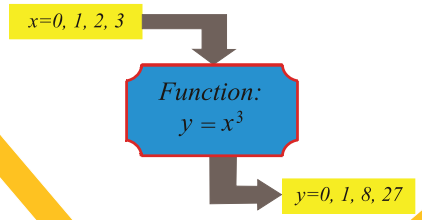
د پوهنې وزارت

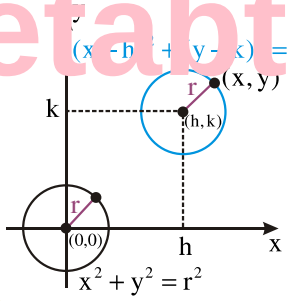
ریاضی

لسم تولگی









Ketabton.com

ریاضی لسم تولگی

۱۳۹۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضي لسم ټولګی

۱۳۹۸
هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو دیپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفین

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ دیپارتمنت غړي

ټولګی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان فهرست مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳
الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضریبونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلور گوني عملیې
د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
دویم څپرکی: رابطه ۵۳
مرتبې جوړې او کارتیز ینی مستوي، د کارتیزیني ضرب حاصل ا و گراف یې
رابطه او معکوسه رابطه.
معادله رابطه.
د څپر کي لنډیز او پوښتنې
دریم څپرکی : تابع ۶۹
د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیدا کول، د تابع د تعریف د ساحې پیدا کول، د یوې تابع گراف او د گراف له مخې
د یوې تابع پېژندنه، د گراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع گانې او گرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع گانې، جفتې او طاقې تابع گانې د گرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع گانو عملیې
د تابع گانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع گراف، پولینومي تابع گانې (لومړی او دویمه درجه تابعگاني) او گرافونه یې
ناطقی تابع گانې او گراف یې (عمودې، افقي او مایل مجانبونه)
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع گانې ۱۴۹
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت او کوټر مینل زاویې
مثلثاتي تابع گانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه
د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نستونه
د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې
د مثلثاتي تابع گانو گراف
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳
د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه
د αزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږ دوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې
د څپرکي لنډیز او پو ښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عملیې
د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې
د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس
د مختلطو عددونو وېش
د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل
د څپرکی لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی تحلیلي هندسه **۳۰۵**

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله
د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي
د یوه مستقیم خط میل
د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)
د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.
د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله
دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی
د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعیه کمیات یې معلوم وي.
د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائیه **۳۵۹**

د فریکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،
د څپرکي لنډیز او پوښتنې

نهم څپرکی د ریاضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

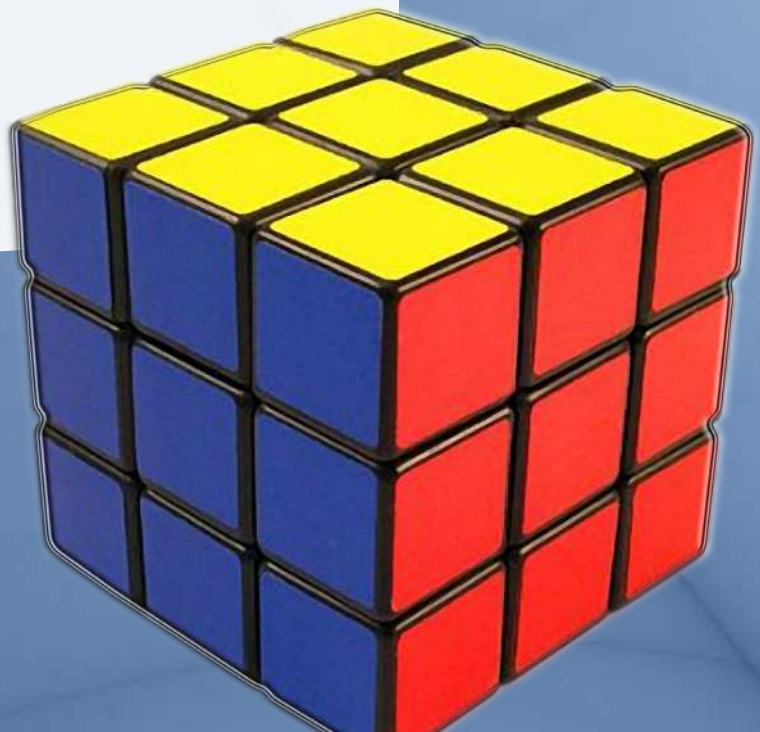
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادې
(Algebraic Expressions)

ایـــا ویـــلای شـئ چـې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري افادو کې کومـه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي ستې د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو تورې چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A = \{x / x \in IN$ او $x \leq 10\}$ وي.

نو د A په ستې کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: z, y, x او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a, b c...$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وايي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$ ، $x-1$ ، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$ ، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو یې پولینوم نه دي؟

$$e)x^{-3}+x^2 \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad a)\sqrt{2}x$$

$$i)6a^2-4a \quad , \quad h)88 \quad , \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad f)8p^2+p^{2.2}$$

حل: h,a او i پولینومونه دي، خو f,e,d,c,b او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $-8x^2, \sqrt{8}x^3, \frac{1}{x}, x, \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6, 2x^3 - x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_2 = 1$، $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولینوم کې، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې یوې الجبري افادې ته چې د دوو پولینومونو د خارج قسمت په بڼه یې نه شو لیکلای، غیر ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غیر ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

یوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غیر ناطقه او یا پولینومي الجبري افاده وي. پولینوم هغه یو یا خو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه، غیر ناطقه او پولینومي الجبري افاده ده؟

$\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, $\frac{3x^2}{2}$, $\frac{m+3}{6}$, $x+\frac{1}{x}$, $3x^2+\frac{xy}{2}$ او 13

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې یو پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

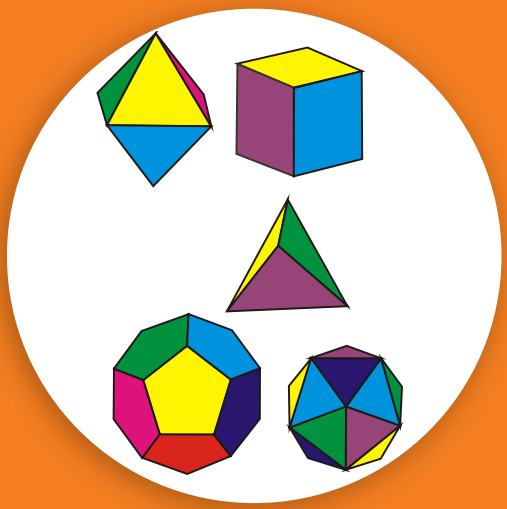
$3x^2+\frac{xy}{2}$, $-20a^3b+28ab^4$, $\frac{1}{7}x^3-x$

$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}$, $8\sqrt{x}$, $8x^{-8}$, $3x$, -0.03

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولینوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښیاست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولینوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3 - 12x^3 - x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده)الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3-x-1$ الجبري افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادې ته مولټینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3-3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2+3y$	$3x^2+2x-4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2-4y^3$	$6x^2+5x-3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b+4c$	$3a^2b^2+6c^2-z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، $(1+5=6)$ او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$2m-4=0 \qquad 5-n=0$$
$$2m=4 \qquad n=5$$
$$m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولينومونه
:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتیب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته یې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,\ 2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,\ 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

حل

$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولینومونه سره معادل وي، د n,m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې:

$$m = 1$$
$$-2m + n = 3 \qquad \Rightarrow n = 5$$
$$m - n + p = 2 \qquad \Rightarrow p = 6$$

متجانس پولینومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2 + y^2 - z^2$ یو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^m z - 7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$m + 1 = 2 + 1 \qquad n - 3 + 2 = m + 1$$
$$m = 2 \qquad n - 1 = m + 1$$
$$n - 1 = 2 + 1$$
$$n = 4$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2-y+4 \quad , \quad x-1$$
$$x-x^2-x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$$

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

$$x \quad , \quad x+1 \quad , \quad x^2-1 \quad ,$$
$$2x^2-2x-2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3+x-1$$

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

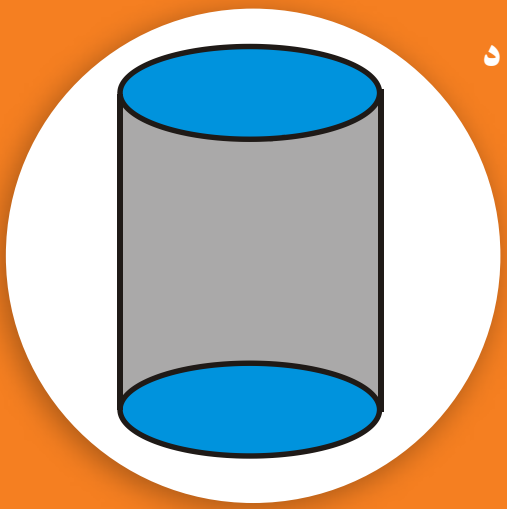
$$4x-5+6x^2+8x^3$$
$$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$$
$$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قیمتونه پیدا کړئ.

5- د b, a او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یو متجانس پولینوم وي، د m او p قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د $P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت څو دی؟ یا $P(-1)=?$

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد ددې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت $P(2)=3\cdot 2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot 5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د $C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \frac{22}{7}$ او د دایرې شعاع $r = 3\frac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې $p = \frac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $a = 9cm$, $b = 12cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 2cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot 1^3+5\cdot 1^2-3\cdot 1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot 1^3\cdot 1+6\cdot 1^2\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیداکړئ.

حل:

$$(1-3\cdot 1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot 1^2-5\cdot 1-1)^{600}(2\cdot 1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیداکړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیدا کړئ.

3. که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیدا کړئ.

4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

5. د $A=x^2-4x+4$ □ $B=-4x^3+10x^2$ □ $C=-x+3x^4-6x^3$ او

$D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) x^2-2x+6

b) $3x^4+6x+12$

c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$، $p(0)$، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

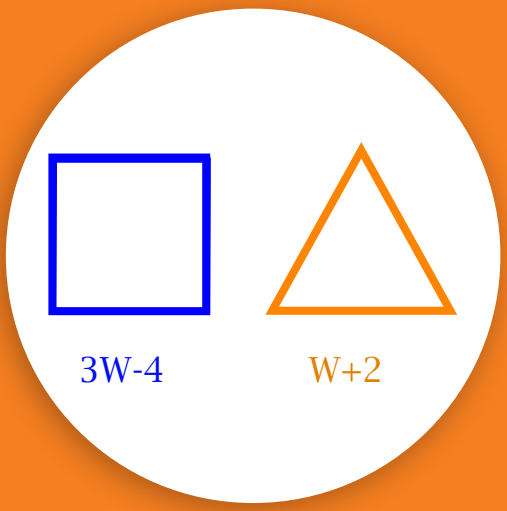
8. د $x=2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم څلورګوني عملیې

که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پیدا کړئ.



1 **د جمعي عملیه**: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیدا کړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولینومونو د جمعي حاصل پیدا کړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او هم که $C=x^2-5x+4$ او

$A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} a^4b & -2\,a^3b^2 & -3a^2b^3 & & -4c & -2b \\ & a^3b^2 & -2a^2b^3 & & & +4b-4 \\ a^4b & +\ a^3b^2 & & & -2c & \\ \hline 2a^4b & & -5a^2b^3 & & -6c & +2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{r} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B= \qquad -3x-10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\ \mp 3c^2\ \mp 3d^2\ \mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$ $\qquad$ $-t+5t^2-6t^2+6t-3$

$2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$ $\qquad$ $3p-4p^2+6p+10p^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$8-10+x-7+x=2x-9$ $\qquad$ $20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$

$ab+a-b-a=ab-b$ $\qquad$ $y^2-1+y^2-1=2y^2-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$

$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q,P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت)..... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت)..... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې)..... $P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.

3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.

4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$, $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. ($A+B+C=?$)

5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

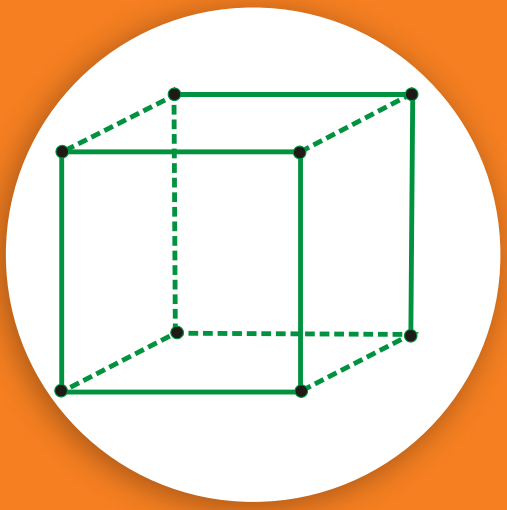
a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوایي ډګر څخه یو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي او دبلې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینومونو ضرب

د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع یې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل یې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کېږي.

فعالیت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$, $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$

$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$

$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$

$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$

$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$

$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$

$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$

$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$

$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$

$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$

$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

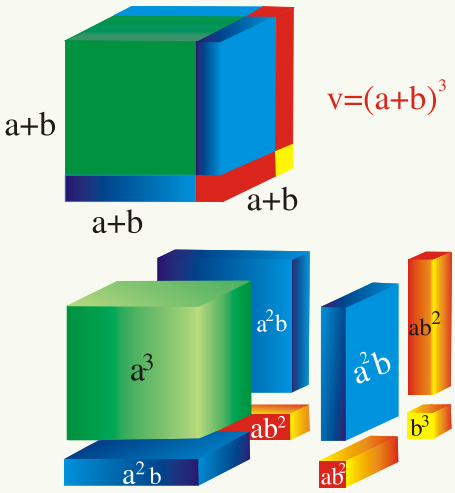
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

دریم مثال: a: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$$

$$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$$

$$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$$

په یاد ولرئ چې که Q,P او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلی خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادی خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه په کې وڅېړئ.

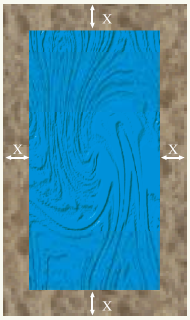
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

مساحت	راکړ شوی اوږدوالی	هندسي شکلونه
n^2+n-20	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	مستطیل
$6y^2+3y-3$	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	مستطیل
$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	مثلث
$m^2+26m+169$	هره ضلع یې $m+13$، ده	مربع
$4g^2-16g+16$	هره ضلع یې $2g-4$ ده	مربع
$(9c^2+12c+4)\pi$	شعاع یې $3c+2$ ده	دایره

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض څلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوي لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}\ ,\ \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\ ,\ \frac{3mn^2}{-mn}\ ,\ \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ د وېش حاصل په لاس $\frac{14x^5}{2x^2}$

راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3}=3ab^4c^4\ ,\ \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2}=\frac{3}{2}x^3y\ ,\ \frac{-a^2}{-a^x}=a^{2-x}\ ,\ \frac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4+5x^3-7x^2)\div x^2$$

$$\frac{x^4+5x^3-7x^2}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{7x^2}{x^2}=x^2+5x-7 \qquad (x^2\neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2-x^4y^6-4x^3y^9}{x^3y}=x^5y-xy^5-4y^8 \qquad (x^3y\neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2-r^5s-4r^3s^4}{r^2s}=r^4s-r^3-4rs^3 \qquad (r^2s\neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a:\frac{27x^6y^{13}-18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b:\frac{x^2}{y^2-1}\div\frac{x^2}{y-1} \qquad c:\frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2 & 2x^2+7x+4 \\ \cline{1-1}
\quad 7x^3-10x^2+13x & \\
\quad \pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x & \\ \cline{1-1}
\qquad 4x^2-8x+12 & \\
\qquad \pm 4x^2 \mp 8x \pm 12 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل یې پیدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \quad -19x-30 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 \pm 3x^2} & x^2-3x-10 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^2-19x & \\
\quad \mp 3x^2 \mp 9x & \\ \cline{1-1}
\qquad -10x-30 & \\
\qquad \mp 10x \mp 30 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\
\underline{-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\
\quad -12x^2+12x & \\
\quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\
\qquad 18x+6 & \\
\qquad \underline{-18x \pm 9} & \\
\qquad\quad -3 &
\end{array}
$$

په نتیجه کې که له پورتني پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\
\underline{-12x^4 \quad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\
\quad 3x^3-9x^2+\quad x & \\
\quad \underline{-3x^3 \quad \mp \quad x} & \\
\qquad -9x^2+2x+5 & \\
\qquad \underline{\mp 9x^2 \quad \pm 3} & \\
\qquad\qquad 2x+2 &
\end{array}
$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ پولینوم پر $x - 13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$$

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$$

$$(x^5 - y^5) \div (x - y)$$

$$\frac{j^5k^2 - 3j^8k^4}{2j^4k}$$

$$\frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13} - 18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

$$(x^3 - a^3) \div (x^2 - ax + a^2)$$

$$(9x^4 + 2x^2 + 7x + 2) \div (3x + 2)$$

$$(8x^3 + 27y^3) \div (2x + 3y)$$

$$(7x - 12 + 2x^4 - 8x^3 - x^2) \div (2x^2 + 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده قضیه
(Remainder Theorem)

آیا د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته ویلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولینوم په $x-4$ ووېشو پاتې(باقي) به څو وي؟

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad +1 \\
\hline
x-3 & 2x^2 \quad -5x \quad -1 \\
 & -(2x^2-6x) \\
\hline
 & 0 \quad +1x \quad -1 \\
 & -(x \quad -3) \\
\hline
 & 0+2 \text{ پاتې}
\end{array}
$$

که د $P(x)$ پولینوم په $x-a$ ووېشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. یا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولینوم پر $(x+3)$ ووېشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس یې ازمایو او د وېش عملیه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+3x+4 & x+3 \\
\hline
\underline{-\,2x^2\pm 6x} & 2x-3 \\
-3x+4 & \\
\underline{\mp 3x\mp 9} & \\
13 &
\end{array}
$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو، نو باقي یا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$، ووېشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دویم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولینوم پر $(x-2)$ ووېشل شي، پاتې به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 7 = 16 - 4 - 7 = 5$$
$$R = 5$$

فعالیت

د پورتنۍ قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3 - x^2 - 226x + 1410$ پر $(x+17)$ووېشل شي.
- که $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ پر $(x-4)$ ووېشل شي.
- که $x^3 + 18x^2 + 164x + 199$ پر $(x+8)$ ووېشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2 + x - 9$ پولینوم پر $(x+\frac{1}{2})$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 5(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 9$$
$$= 5(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5-2-36}{4} = -\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y) = 10y^3 + 7y^2 - y - 11$ پولینوم پر $(2y+1)$ ووېشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{2})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 11$$
$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{8}) + 7(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - 11$$
$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5+7+2-44}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$
$$R = -10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي یې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي یې پیدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline
-4x^4\pm16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \hline
\quad -4x^3-13x^2 & \\
\quad \mp4x^3\mp16x^2 & \\ \hline
\qquad 3x^2-33x & \\
\qquad \pm3x^2\pm12x & \\ \hline
\qquad\quad -45x+18 & \\
\qquad\quad \mp45x\mp180 & \\ \hline
\qquad\qquad 198 &
\end{array}$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $P(x-a)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته یې د باقي مانده قضیې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پیدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1.د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$, $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$, $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته وواياست چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر ($x + 2$) ووېشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکتور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$$P(-1)=[(-1)^5+1]$$
$$=-1+1=0$$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$

که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل

$P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ $\qquad$ $x-2=0$

$P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$ $\qquad$ $x=2$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکتور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکټور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکټور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکټور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولینوم یو فکټور دی.

فعالیت

د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کینې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکټورونه دي او که نه؟

$(y+5) : (y^3 + 125)$ $\qquad$ $(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$

$(x - \frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$ $\qquad$ $(x + \frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$

$(x+2) : (x^5 + 32)$ $\qquad$ $(x - 0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$

د فکټور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکټور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښیاست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولینوم یو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دویم مثال: که -2 د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دریم مثال: وښیاست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې یوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قیمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x–a) د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شی نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی.

پوښتنې

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3 - د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4 - د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

6 - د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

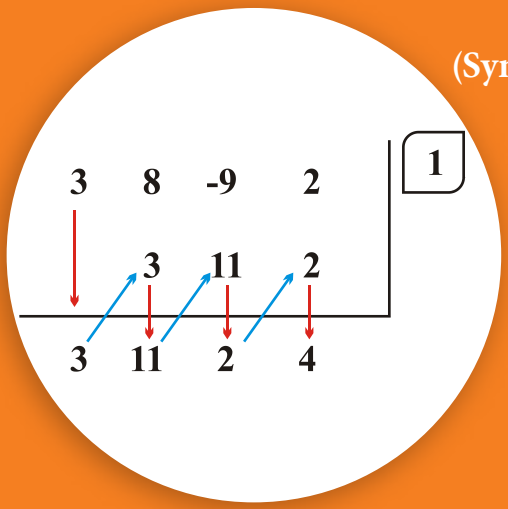
7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 - د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیبي وېش
(Synthetic Division)



آیا د وېش عملیې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پیدا کولای شئ.
که د $P(x) = 2x + 3x^3 - x^2 - 5$ پولینوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکیبي وېش (Horner's Method) یوه لنډه طریقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخیستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قیمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قیمت پیدا کول.

2 – د $P(x) = 0$ معادلې د ناطق جذر د پیدا کولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزیې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x) = 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولینوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبي وېش (تقسیم) په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او باقی مانده (Remainder) پیدا کړئ.

حل:

لومړی کرښه	4	12	−13	−33	18	−4	$x+4=0$
دویمه کرښه		−16	16	−12	180		$x=-4$
دریمه کرښه	4	−4	3	−45	198		

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) یې $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ او پاتې یا باقي مانده یې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x) = (x+4)(4x^3 - 4x^2 + 3x - 45) + 198$

پورتنۍ عملیه په لاندې پړاوونو کې ښودلای شو.

د لومړی کرښې عددونه د مقسوم ضریبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتیب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه دریمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4–) کې ضرب شوی دی چې (16–) کېږي او (16–) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16–) د جمعې حاصل چې (4–) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4–) عدد په (4–) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 –) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5. د16 او (13–) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4–)د ضرب حاصل چې (12–) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33–) او (12–) د جمعې حاصل چې (45 –) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45–) او (4–) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقی مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل)x (مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنی پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	–5	2	–3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عملیه سرته رسوو:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 \qquad\qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \hline
-4x^4 \mp 8x^3 & 4x^3+8x^2+11x+24 \\ \hline
\quad 8x^3 - \ 5x^2 & \\
\quad -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline
\qquad 11x^2 + \ 2x & \\
\qquad -11x^2 \mp 22x & \\ \hline
\qquad\quad 24x-3 & \\
\qquad\quad -24x \mp 48 & \\ \hline
\qquad\qquad 45 &
\end{array}
$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$ او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28=x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\
 & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline
1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 &
\end{array}
$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\
 & 3 & -6 & -12 & \\ \hline
2 & -4 & -8 & 2 &
\end{array}
$$

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش(Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل(quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	
	20	90	450	5
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\qquad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\qquad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او د پولینوم د قیمت پیدا کول

آیا د ترکیبي وېش په مرسته ویلای شئ چې

$(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$

پولینوم یو فکتور دی؟

1	+ 2	− 5	− 6		−1
	− 1	− 1	+ 6		
1	1	− 6	0		

لومړی مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولینوم یو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

څرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکتور دی. یا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

یا د باقي مانده قضیې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot 1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم یو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

څرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq 0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم فکتور نه دی.

دریم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وی، د $x=2$ لپاره د ترکیبي وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x)=3x^3-12x^2+5x+25$$

3	−12	5	25	2
	6	−12	−14	
3	−6	−7	11	

نو: $P(2)=11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x)=x^3-x^2+10x+5$ پولینوم قیمت د $x=1$ او $x=3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د r^4-256 یو فکتور دی.

$$r^4-256=r^4+0\cdot r^3+0\cdot r^2+0\cdot r-256$$

حل:

$$r-4=0$$
$$r=4$$

1	0	0	0	−256	
	4	16	64	256	4
1	4	16	64	0	

$$Q(x)=r^3+4r^2+16r+64$$
$$R=0$$

نو $(r-4)$ د r^4-256 یو فکتور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3+4x^2+x-6=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$(x+3)(x+2)=0$$

$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 ا و -3 دي.

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم فکتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلې جذر پيدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولينوم يو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولينوم يوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولينوم يو فکتور دی.

2- آيا $(x-0,1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولينوم يو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکيبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولينوم قيمت د $y=6$ لپاره پيدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکټور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.
- د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

• د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

• د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

• په همدې ډول کولای شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضیې په اساس پاتې(باقي) له $\mathrm{P(a)}$ سره مساوي ده.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقی صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور دی.

• د فکټور د معکوسې قضیې په اساس که $(\mathrm{x-c})$ د $\mathrm{M(x)}$ پولینوم یو فکټور وي، نو $\mathrm{P(c)=0}$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

• د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.

• د ترکیبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.

• د باقي مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 –د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 –د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $\quad$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $\quad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11 – د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 ووېشو، باقي صفر شي.

12 – د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ پولینوم پر (x^2+2x-1) ووېشو او باقي صفر شي.

13 – که $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پیدا کړئ.

14 – د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 – د P د کوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 – که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وبلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 $\quad$ b) $-\frac{3}{2}$ $\quad$ c) 3 $\quad$ d) $\frac{7}{2}$

17 – د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ ووېشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 $\quad$ b) $\frac{-4}{5}$ $\quad$ c) -4 $\quad$ d) a او b سم دي

18 – که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته وواياست چې باقي څومره ده؟

a) صفر $\quad$ b) 13 $\quad$ c) -23 $\quad$ d) 7

19 - که چېرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (−1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (−1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (−1) دی.

22 - که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) −1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) −3 $\qquad$ d) −1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1})(a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 – د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 –لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم ووایاست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 – د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 –که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 -لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 – په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 – د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 *b*) صفر *c*) -1 *d*) 2

34 – د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 - د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $\qquad$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $\qquad$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\dfrac{x^{a-2}}{x}$ $\qquad$ $\dfrac{-m^a}{m^b}$

36 - ضرب یې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\qquad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\qquad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\qquad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\qquad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\qquad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\qquad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

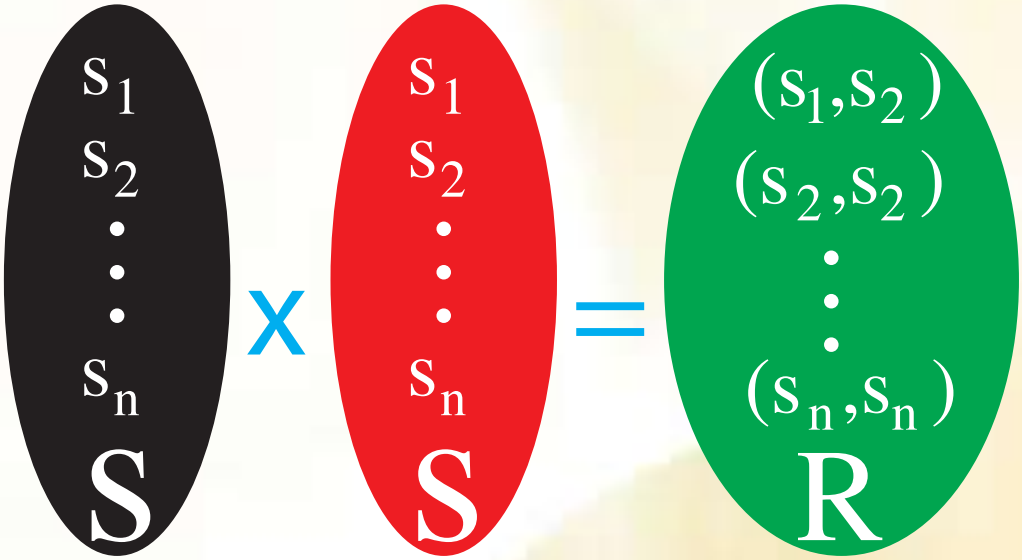
38 - د کومې لاندینې راکړل شوې یو حده درجه صفر ده؟

a) x $\qquad$ b) $\sqrt{2}\,x$ $\qquad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

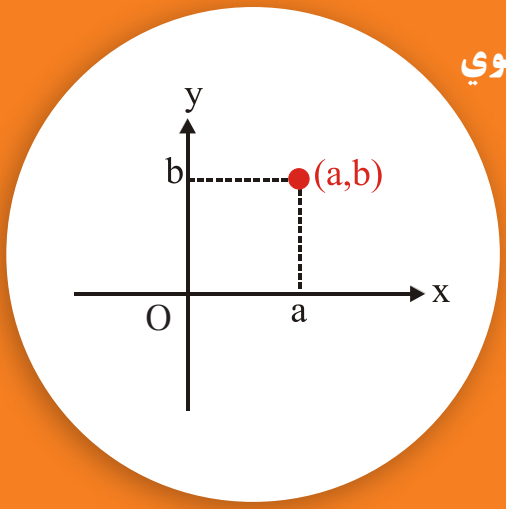
دویم څپرکی
رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

مرتبې جوړې او کارتیزیني مستوي



- د (a,b) مرتبــه جوړه پــه کوم حالت کې د (c,d) لــه مرتبې جوړې ســره مســاوي کېدای شي؟
- آیــا د (a,b) مرتبه جــوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a او b د یوه سټ او یا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دویم عنصر ووایو، نو (a,b) ته مرتبه جوړه وایي او (b,a) هم یو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad \boxed{x=3}$$

$$y+1=3 \qquad \boxed{y=2}$$

فعالیت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

کارتیزیني مستوي (Cartesian Plane)

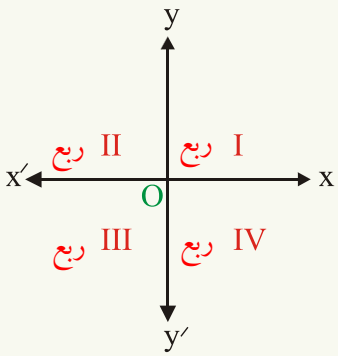
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تـقاطع ټکي ته یې مبدأ (Origin) وایي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وایي.

د X محورپه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښیئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتیزیني مستوي په نامه یادېږي.

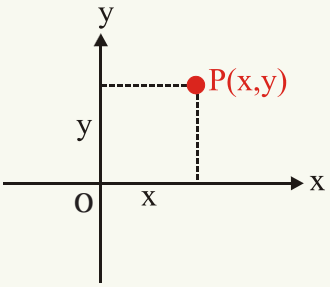
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته یې ربع (ناحیه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

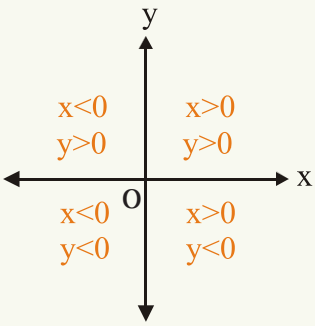
وايي، د ساعت د عقربي د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنۍ دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.



په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه داسې ښودل کېږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محورښي خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کيڼي خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

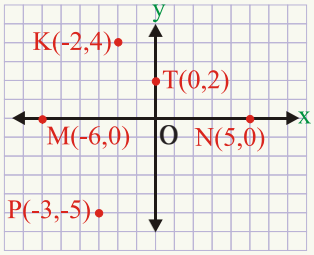


همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي

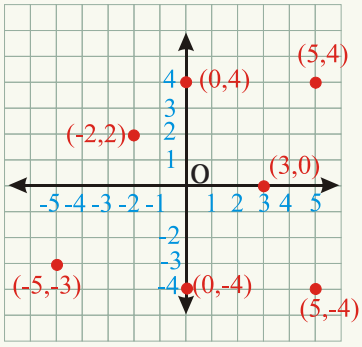
(c) ketabton.com: The Digital Library

چې x او y ته کارتیزیني مختصات(Cartesion Coordinates) وايي چې په P(x, y) کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دویم عنصر y ته ترتیب(Ordinate)وايي چې د مختصاتو مبدا (0,0) ده، څرګنده ده چې د حقیقي عددونو (x, y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې یوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقیقي عددونو یوه جوړه شته دی.

دویم مثال: د $P(-3,-5), K(-2,4), T(0,2)$ $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه ولیکئ.



فعالیت

د $(2,-1), (-1,2), (-2,-1), (2,1), (2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که د P د نقطي فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 -که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او وواياست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - وواياست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(-5,1)$, $(1,5)$

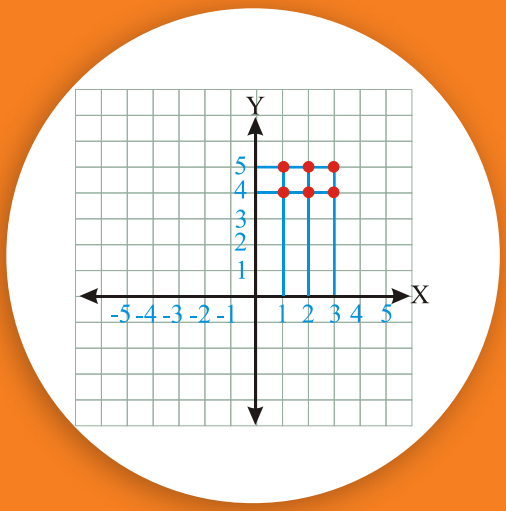
$(4,-5)$, $(-4,-6)$

$(-\frac{1}{2},2)$, $(-\frac{1}{2},-2)$

$(2,0)$, $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتیزني ضرب حاصل او گراف یې

آیا په مخامخ شکل کې $A \times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A \times B$ پیدا کړئ.
- د $A \times B$ د عناصرو شمېر پیدا کړئ.
- آیا $A \times B = B \times A$ دی؟
- آیا $A \times A$ او $B \times B$ پیدا کولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي سټونه وي، $(A \times B)$ په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A \neq B$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$ دي که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A \times B$ د عناصرو شمېر له $(m \times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A = \{0,1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$, $B \times A$ او $A \times A$ پیدا کړئ.

حل

$$A \times B = \{0,1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B \times A = \{3,4\} \times \{0,1,2\} = \{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A \times A = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A = \{-4,-1,0\}$ او $B = \{1,4\}$ وي $A \times A, A \times B$ او $B \times B$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $IN = \{1,2,3...\}$ او $L = \{0\}$ وي، نو $IN \times L$ پیدا کړئ.

حل:

$$IN \times L = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\} = \{(x,0) / x \in IN\}$$

دریم مثال: که $IN = \{1,2,3...\}$ او $W = \{0,1,2,3...\}$ وي $W \times N$ پیدا کړئ.

حل

$$W \times IN = \{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$= \{(x,y) / x \in w \wedge y \in IN\}$$

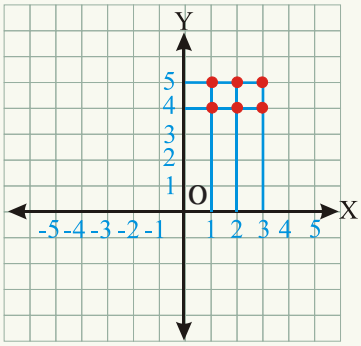
د کارتیزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{4,5\}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$



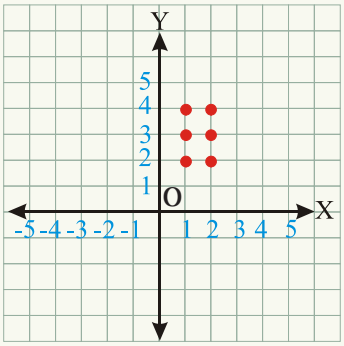
د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A \times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

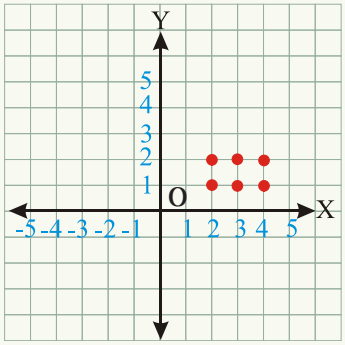
پنځم مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3,4\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پیدا کړئ او په شکل کې پې وښیاست.

$$A \times B = \{1,2\} \times \{2,3,4\} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B \times A = \{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A \times B$

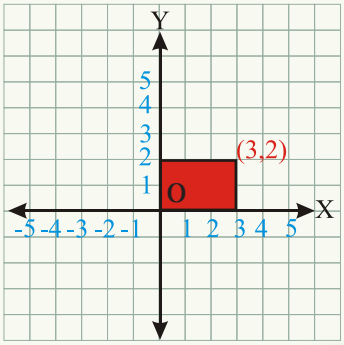


$B \times A$

شپږم مثال: که $A = \{x / x \in IR, 0 \le x \le 3 = [0,3]\}$ او $B = \{y / y \in IR, 0 \le y \le 2 = [0,2]\}$ وي $A \times B$ په شکل کې پې وښیاست.

حل

$$A \times B = \{(x, y) / 0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 2\}$$



فعالیت

که چېرې $A = \{1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې پې وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که:

i) $B = \{2,4\}$ $\qquad$ $A = \{-1,1,3\}$

ii) $B = \{2,3\}$ $\qquad$ $A = \{-1,1\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیداکړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B, B \times A, A \times A$ او $B \times B$ پیداکړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی
(عطا الله R عزت الله)
وروروڼي هم يوه رابطه ده.

يوسټ چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. يا که A او B دوه غير خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A \times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که $(a,b) \in R$ وي، ويل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل ليکل کېږي.

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subset A \times B$ ده او که R د $A \times A$ يو فرعي سټ وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A = \{x, y\}$ او $B = (1,2)$ وي، $A \times B$ پيدا کړئ، او له A څخه په B کې څلور رابطې وليکئ.

حل

$$A \times B = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1 = \{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2 = \{(y,1)\}$$
$$R_3 = \{(y,2)\}$$
$$R_4 = \{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A \times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A \times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4 = 16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دي.

دويم مثال: که $A = \{1,3,5,...19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B = \{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A \times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$10\times3=30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام مووي چې: ϕ او $A\times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دریم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې ولیکئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $R=\{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

څلورم مثال: که $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) **او د قیمتونو ساحه** (Range) **یې**:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R\subseteq A\times B$ ده، په دې معنا چې R یو سټ دی چې عناصر یې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x\in A$ او $y\in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر ولیکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه (Dom_R) او د قیمتونو ساحه ($Range_R$) یې ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$R = \{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

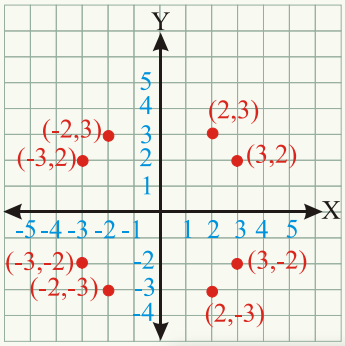
$Dom_R = \{1,2\}$ $\quad Range_R = \{x,y\}$

دویم مثال: که د $R = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پیدا کړئ او بیا یې گراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

که $R = \{(x,y)/y = 2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کېږي او له $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه یا R^{-1} پیدا کړئ.

حل:

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندنې خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتیجه کې x=z دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.

په A کې څلور رابطې ولیکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$ ، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y + 1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه پې ټول طبیعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅپرکې لنډيز

- (a,b) : چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنۍ مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوي دی: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A ست د عناصرو شمېر په m او د B د ست د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي ست له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.

$R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.

$$(x\ ,\ y)\in R \Leftrightarrow x\,R\,y$$

- که د A ست د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي ستونو شمېر 2^n دی.
- که د A ست د عناصرو شمېر په m او د B دست د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو ست او د قيمتونو ساحه (Range_R) يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو ست دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په ست کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅپرکې پوښتنې

1- که $A = \{1,3,5\}$ او $B = \{2,4,6\}$ وي $B \times A, A \times B$ او $A \times A$ پیدا کړئ.

2- که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{0,1\}$ وي $A \times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(x-2y, 2x+y) = (3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A = \{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A = \{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R = \{(x,y) | y = x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې گراف رسم کړئ.

7- که $R = \{(x,y) | y^2 = x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطې گراف رسم کړئ.

8- که $R = \{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي د R او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A = \{3,6,12\}$ او $B = \{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې درابطو شمېر پیدا کړئ.

11- که د $(4a+1, 2b+a)$ او $(5, 3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

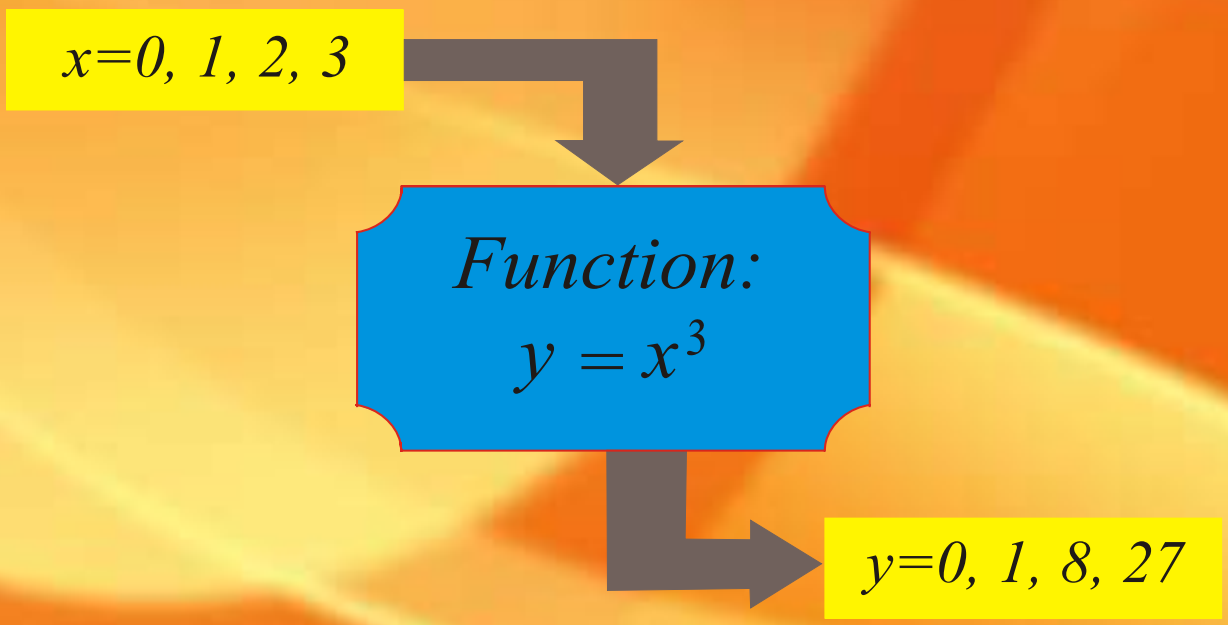
12- که $A = \{a,b,c\}$ او $B = \{x,y\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

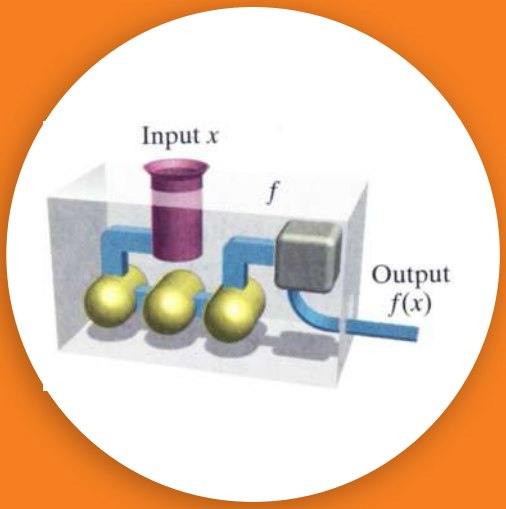
دریم څپرکی

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (function)

آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني رياضي پوه ليبنز (Leibniz)، (1646 – 1716) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري($A = \pi r^2$)

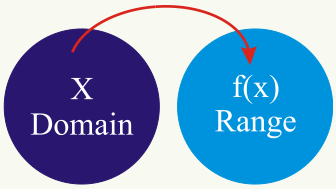
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کېږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمېرې جوازسپر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8 \quad , \quad 3^3 = 27)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو سټونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړنی سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادېږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکي ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

Domain(s) = {1,2,3,4,5}

Range(s) = {2,3,4}

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $T = \{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښیي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول I)

Domain (عدد)	Range د عدد مکعب
-2	8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

(جدول II)

Domain (عدد)	Range د عدد مربع
-2	4
-1	1
0	0
1	
2	

(جدول III)

Domain (د عدد مربع جذر) (عدد)	Range
0	0
1	1, -1
4	2, -2
9	3, -3

I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنۍ سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :

$(9,-3),(9,3),(0,0),(4,-2),(4,2),(1,-1),(1,1)$ دي او یا دا چې د لومړنۍ سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د څېرکې په لومړۍ مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي.

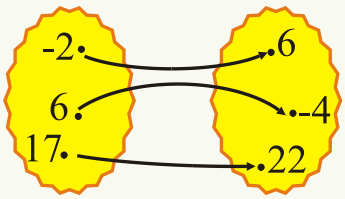
که A او B د حقیقي عددونو سټونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f = \{(-5,3m),(-5,2m-10),(1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکي وي، د m قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5 = -5$ دي، نو باید $3m = 2m - 10$ سره وي، په نتیجه کې $m = -10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.

دریم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښیي؟

(a)



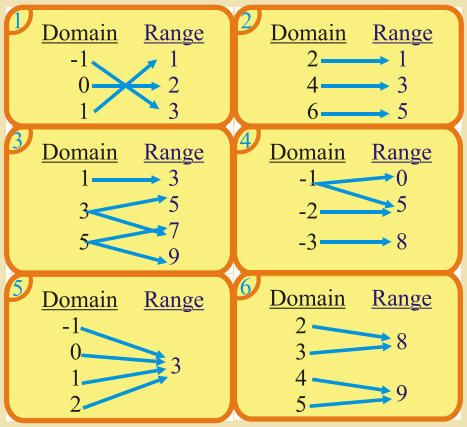
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښیي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وایي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتنې

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړئ.

1 – $\{(2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$

2 – $\{(-1,4), (0,3), (1,2), (2,1)\}$

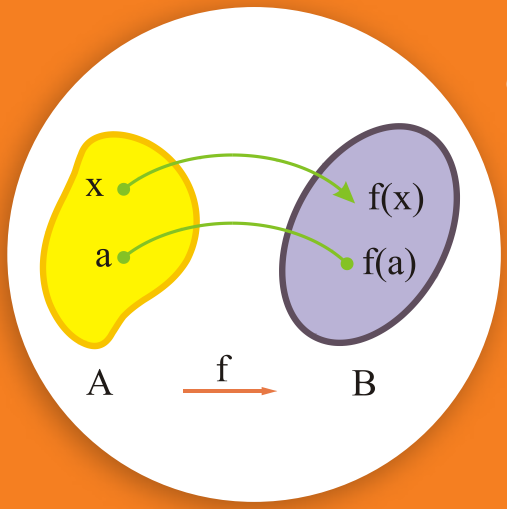
3 – $\{(10,-10), (5,-5), (0,0), (5,5), (10,10)\}$

4 – $\{(-10,10), (-5,5), (0,0), (5,5), (10,10)\}$

5 – $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6 – $\{(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول

- څه وخت یوه معادله د یوې تابع ښکارندویه ده؟
- یوه رابطه څه وخت یوه تابع ښیي؟
- یو جدول څه وخت یوه تابع ښیي؟

د لومړی ځل لپاره سویسي ریاضي پوه اویولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې f (x) د x لپاره د y یا f(x) د تابع قیمت دی.

که f له A څخه B ته یوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f : A \rightarrow B$

یا $y = f(x)$

په شکل کې x له (input) او f(x) له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f,g,h او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طریقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د یوه جدول په واسطه یا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د یو واضح فورمول یا معادلې په واسطه یا په الجبري ډول (Algebraically)

فعالیت

که f(x) او g(x) په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قیمتونو کې ددې تابع ګانو قیمت پیدا کړئ. یا په بل عبارت د تابع د تعریف ساحه (Domain) درکړل شوي ده، د تابع اړونده قیمتونه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot 2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot 0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(a)=a^2+3a-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(0)=-2$ ، $f(2)=8$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$f(2)=2^2+3\cdot 2+5=4+6+5=15$

$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$

$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$ ، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1)=2(-1)+6=-2+6=4$$
$$h(6)=3-2\cdot 6=3-12=-9$$
$$f(-1)+f(3)=4+2\cdot 3+6=4+12=16$$

څلورم مثال: که $f(x)=ax^2-bx+1$ او $f(3)=10, f(1)=0$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10=9a-3b+1 \quad , \quad 0=a-b+1$$

$$10=9a-3b+1$$
$$0=_3a\mp 3b\pm 3$$

$$10=6a-2 \qquad\qquad 10=18-3b+1$$
$$12=6a \qquad\qquad 3b=19-10$$
$$a=2 \qquad\qquad 3b=9$$
$$b=3$$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a:\quad x^2+y=4 \qquad\qquad b: x^2+y^2=4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a:\quad x^2+y=4 \Rightarrow y=4-x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=4-1^2=3$، نو $y=4-x^2$ یوه تابع ده.

$b:\quad x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=\pm\sqrt{3}$ یا $(1,\sqrt{3})(1,-\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y - x^2 = 1$ او د $x^3 - y = 2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $x^2 + y^2 = 4$ معادله د یوې تابع ښودونکي نه ده.

یوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x) = x^2 + x - 2$ او $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ وی $g(2) - g(-3)$, $g(-2), f(-3)$ او $\frac{f(0) \cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 - که $f(x) = x^2 - x$ او $g(x) = \sqrt{x+4}$ وي. $g(0)$, $f(-2)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

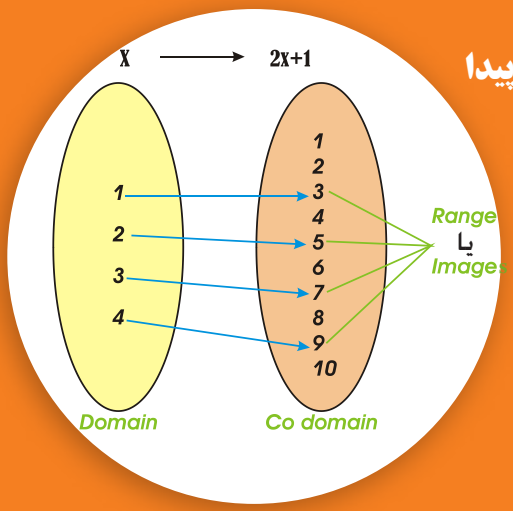
3- که $g(x) = 3\sqrt{x}$ او $h(x) = 1 + 4x$ وي $h(16)$, $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

4 - $f(x) = \frac{15}{x-3}$, $g(x) = 16 + 3x - x^2$ او $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي $g(-7), f(6)$ او $f(0) + g(4) - h(-3)$ پیدا کړئ.

5 - که $g(x) = \sqrt{x+40} - 2$ وي $g(12)$, $g(5)$, $g(4)$, $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 - آیا د $x^2 + xy = 1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

آیا کېدای شي چې د هرې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه وي؟

فعالیت

- د x کوم قیمتونه دتابع د تعریف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعریف ساحه وټاکئ.
- آیا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د یوې تابع د تعریف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قیمتونه شامل وي چې تابع په هغه قیمتونو کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعریف شوي نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي یا د $x=3$ لپاره د تابع قیمت یو حقیقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}\, f=\{x\in IR / x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قیمت یو حقیقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $\text{dom}\, g = [0\ ,\ \infty)$

• $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $\text{Dom } h = \text{IR} = (-\infty\ ,\ \infty)$

• د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR / \quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

• د $R(x) = \sqrt{3x+12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x-3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Dom } y = \{x \in \text{IR} / \ x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x-2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f = \{x / \quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$ $\qquad$ $dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

یا د سټ په شکل: $\qquad$ $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

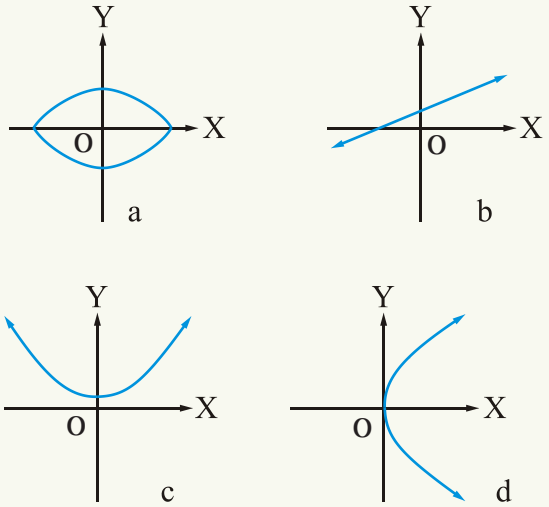
$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$\text{Dom } h = \{x / \ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پیژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

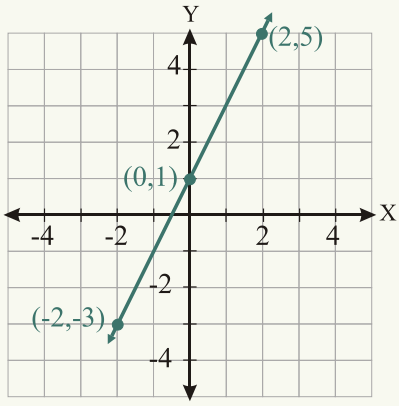
که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x , f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x , y) / y = f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\ f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع گراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	(0,1)
2	$2(2)+1$	5	(2,5)
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دویم مثال: د $f(x) = x^2+1$ او $y=-1$ تابع گانو گراف رسم کړئ.

د تعریف او د قیمتونو ساحې یې هم پیدا کړئ.

حل:

$f(x) = x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1,2)$, $(-2,5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نیولو سره د تابع گراف رسم کړئ:

$f(-3) = (-3)^2+1 = 9+1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2+1 = 4+1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2$

$f(0) = 0^2+1 = 0+1 = 1$

$f(1) = 1^2+1 = 2$

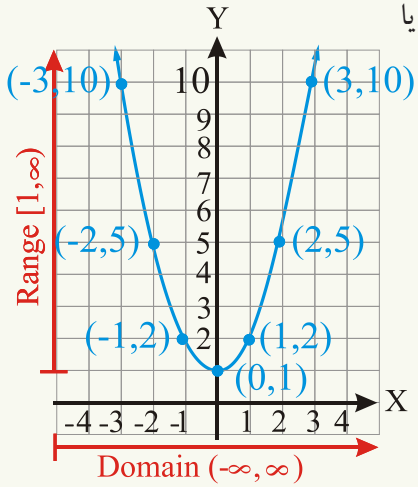
$f(2) = 2^2+1 = 5$

$f(3) = 3^2+1 = 10$

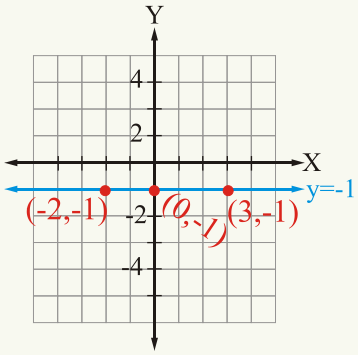
$\text{Dom} f = (-\infty,\infty)$

$\text{Range} f = (1,\infty)$

یا



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

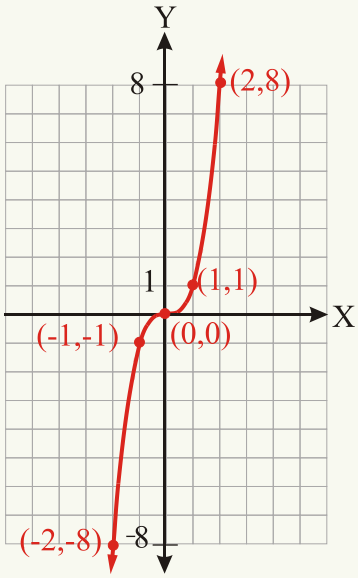
Dom y = IR

Range y = −1

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع گراف رسم کړئ.



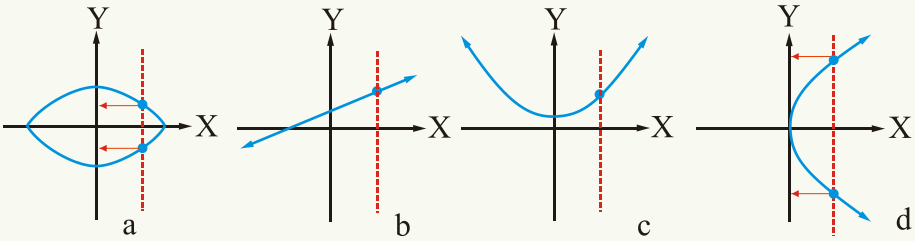
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	−1	−2
y = f(x)	8	1	0	−1	−8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو گراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا گراف د یوې تابع گراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا گراف د یوې تابع گراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط یې ګرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه x لپاره د y یا $f(x)$ دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$ $\quad g(x)=2x-5$ $\quad h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad g(x)=|x-3|$ $\quad h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$ $\quad g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$ $\quad h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$

$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

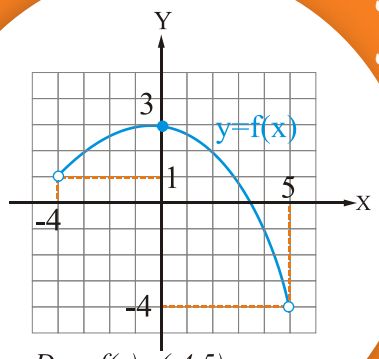
2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x=-3\,,-2\,,-1\,,0,1,2,3,$ وي.

4 - د $x=y^2-2$ ګراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

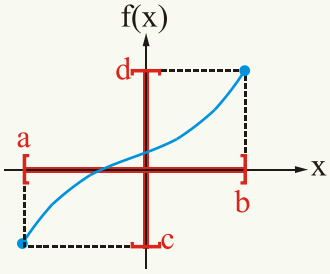
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع د قیمتونو پیدا کول:

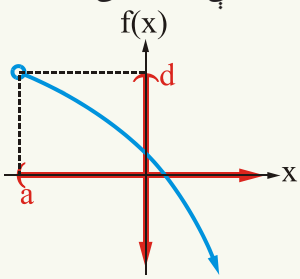


Dom f(x)=(-4,5)
Range f(x)=(-4,3]

آیا د توابعو په لاندېنیو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې ټاکلای شئ؟



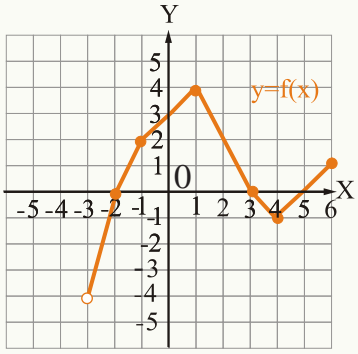
Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]



Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞ ,d)

فعالیت

شکل وګورئ لاندېنیو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

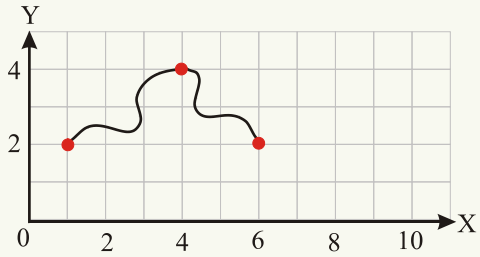


- د شکل له مخې د f تابع د تعریف او قیمتونو ساحه پیدا کړئ.
- آیا د 4 – عدد د f د تابع د قیمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آیا د 3 – عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آیا د 6 عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟

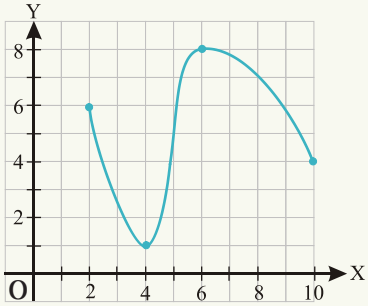
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin dom\ f$ او $6 \in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4\ ,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

حل:

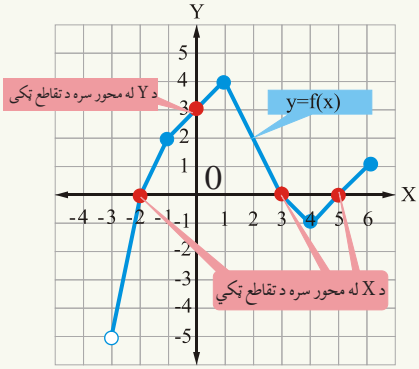
د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1 \le x \le 6$ او $2 \le y \le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2 \le x \le 10$ یا $\text{Dom}=[2\ ,10]$

$1 \le y \le 8$ یا $Range=[1\ ,8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.



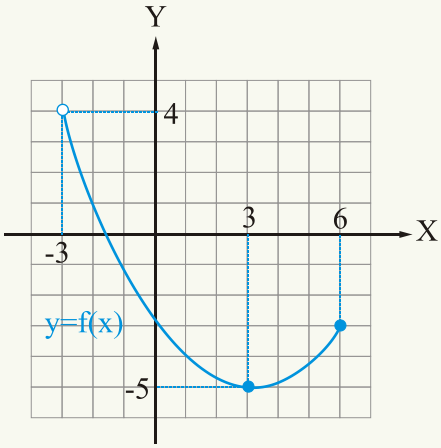
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2, 0)$, $(3,0)$ او $(5 , 0)$ په نقطو کې قطع کوي.

څرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x = 0$ دی $f(0) = 3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دریم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: لیدل کېږي چې د تعریف ساحه یې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

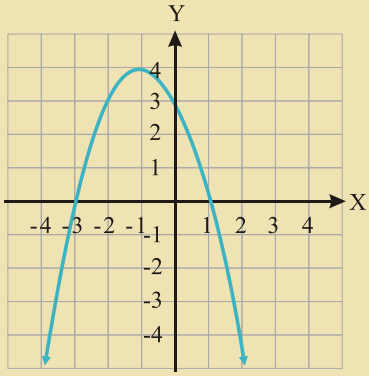
$Domain\, f(x) = -3 < x \le 6$ یا $(-3 ,6]$

او د قیمتونو ساحه یې: $\text{Range}\, f(x) = -5 \le y < 4$ یا $[-5 , 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

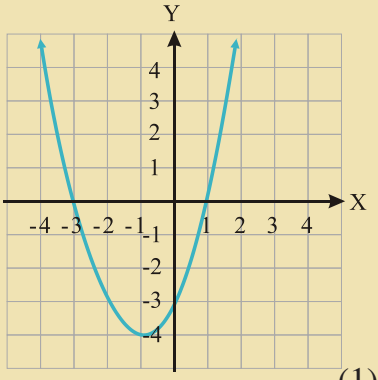
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

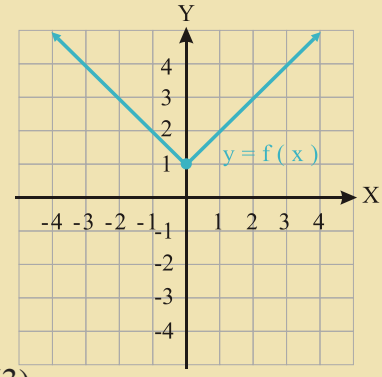
په راکړل شوو شکلونو کې:



(2)



(1)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

b- د تابع د قیمتونو ساحه

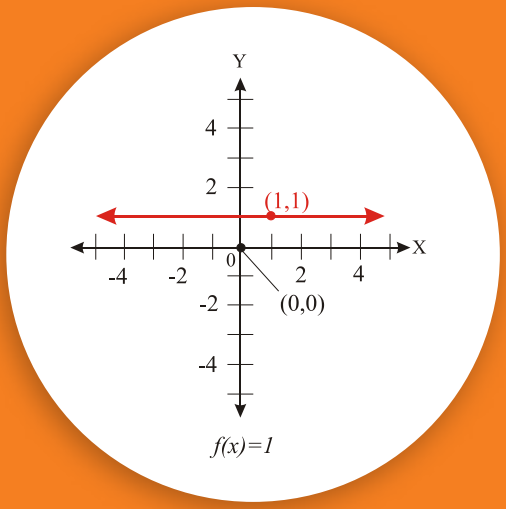
c- د X له محور سره د گراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځینې خاصې تابع ګانې او ګرافونه یې

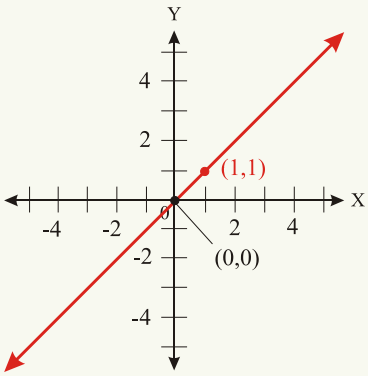
د هغو تابع ګانو نومونه واخلی چې ګرافونه یې راکړل شوي دي



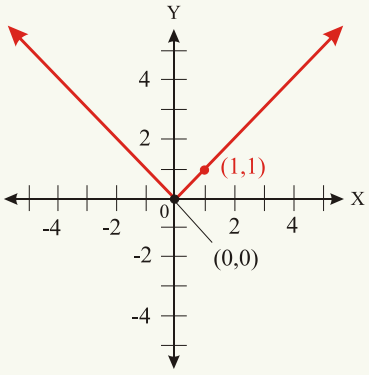
$f(x)=1$

توابع ډېر ډولونه لري چې ځینې خاصې تابع ګانې ترڅېړنې لاندې نیسو:

ثابته تابع، د عینیت تابع، د مطلقه قیمت تابع، څو معادله یې تابع او د علامې تابع



$f(x)=x$



$f(x)=|x|$

فعالیت

- ثابتې تابع ته ولې ثابته تابع وایي؟
- آیا د عینیت تابع د تعریف او د قیمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آیا د مطلقه قیمت د تابع د قمیتونو ساحه منفي قیمتونه اخېستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو سټونه وي، د $f : x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې که y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو y د ثابتې تابع په نوم یادېږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

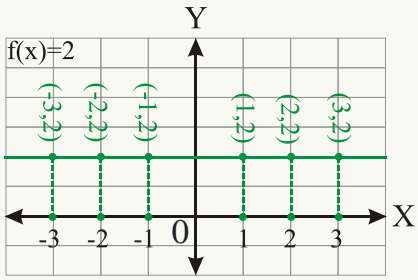
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

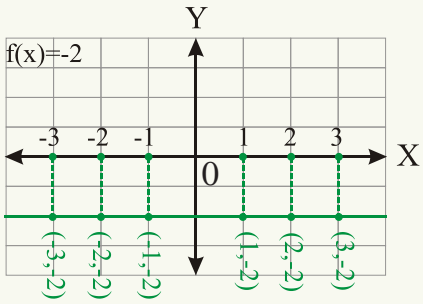
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

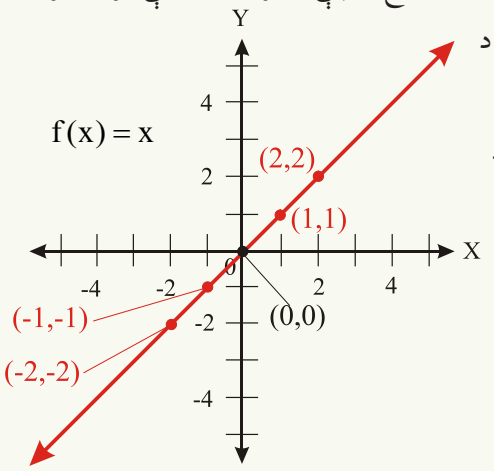




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادېږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

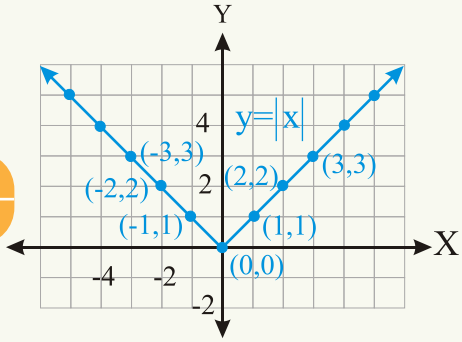
د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع گراف رسم کړئ.

$f(x)=|x|$

x =	0	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کېږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یې تابع (Piecewise function) او گراف یې

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوي وي؟

لومړي مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$, $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنگه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $(-\infty , 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases} -\frac{11}{60}x+15 & : \ 0\le x<60 \\ \frac{1}{5}x-8 & : \ 60\le x\le 90 \end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دی.

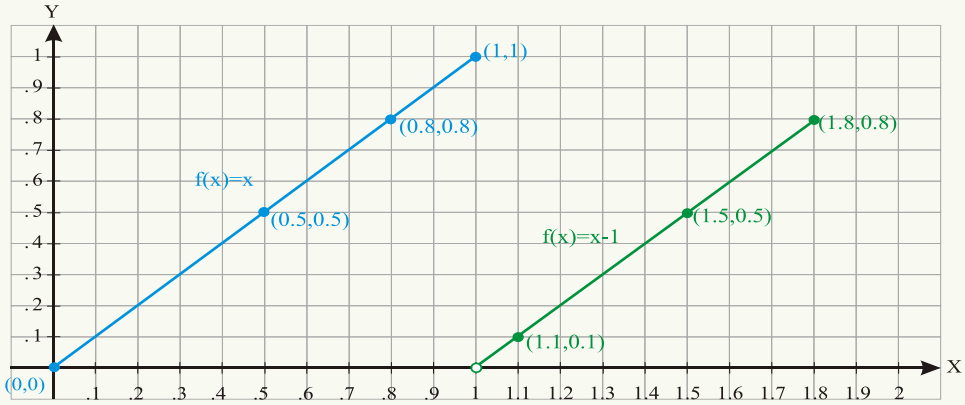
د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases} x : 0\le x\le 1 \\ x-1 : 1<x\le 2 \end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

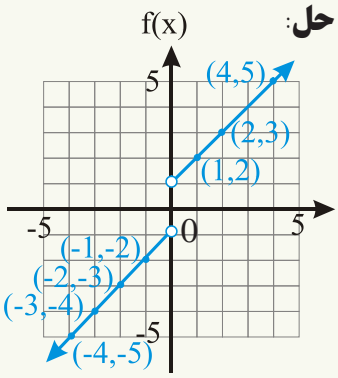
په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع گراف دی.

فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیدا کړئ او ددې تابع گراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع گراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:



x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
$f(x)$	2	3	5	-2	-3	-4	-5

لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \neq 0)$ یا

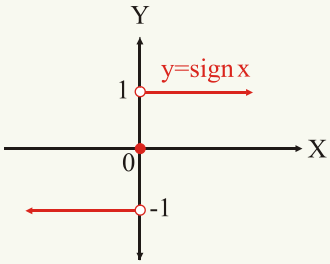
$Dom\ f(x) = (-\infty\ ,\ 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ یا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوي ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) یې $\{-1,0,1\}$ ده.



$Dom_{\text{sgn}}=IR \qquad Range_{\text{sgn}}=\{-1\,,\,0\,,1\}$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتنې

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

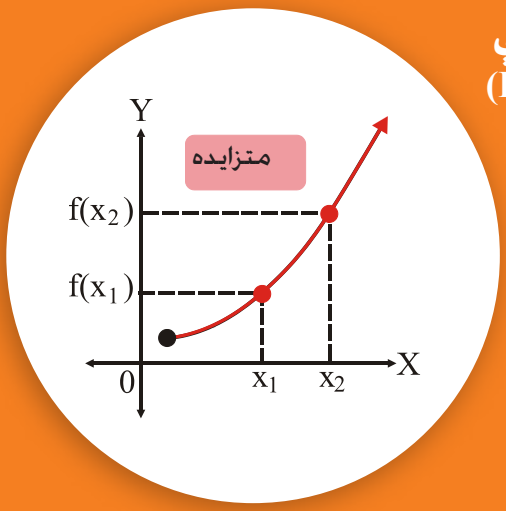
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیدا کړئ.

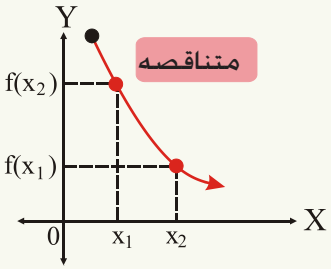
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

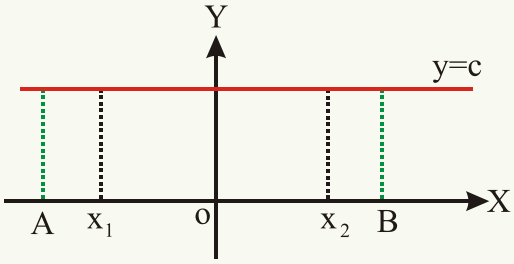
(c) ketabton.com: The Digital Library

متزایدې او متناقصې تابع ګانې
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزایدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزاید دی او نه متناقص؟





1 – یوه تابع په یوه انټروال کې متزایده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – یوه تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزایده.

لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي دا یوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

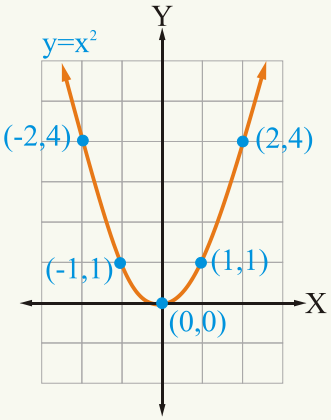
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-1 < 2$

$f(-1) < f(2)$

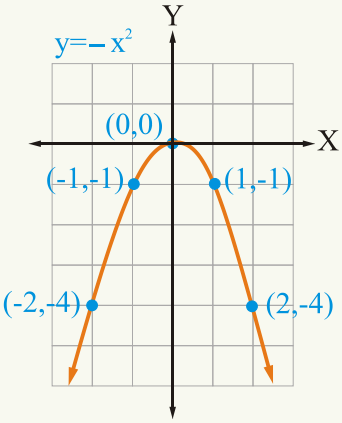
$1 < 4$



$-1 < 2$

$f(-1) > f(2)$

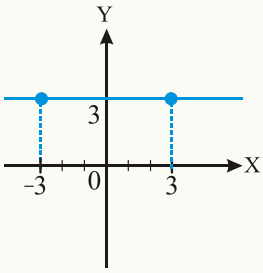
$-1 > -4$



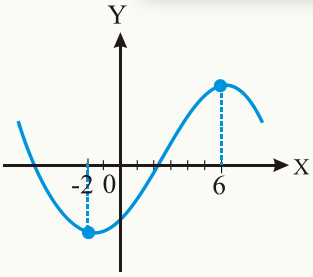
لیدل کېږي چې د $f(x) = x^2$ تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x) = -x^2$ تابع په $(-\infty, 0)$ انټروال کې متزایده او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(b)



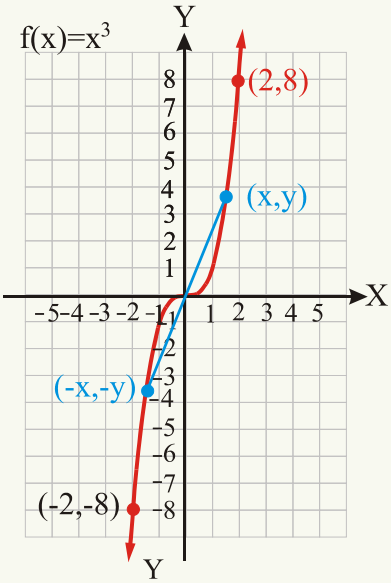
(a)

جفتي او طاقي تابع ګانې (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x) = f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x) = -f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده،

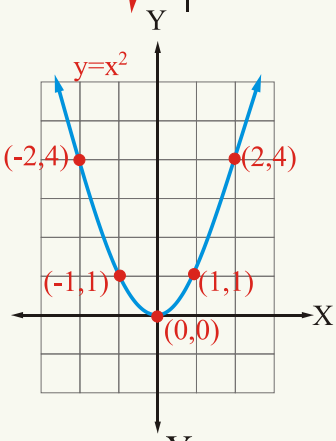
ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه:

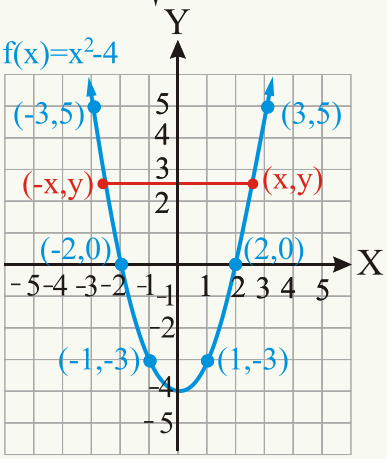
$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په تابع کې لرو چې:

$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې $f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د $(3,5)$ او $(-3,5)$ تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې د (5) عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2)=-f(2)$

$$k+5=-(2k+3)$$

$$k+5=-2k-3$$

$$3k=-8$$

$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

$$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$$

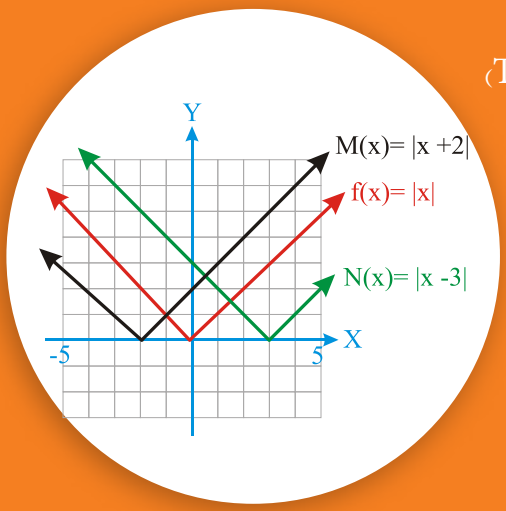
2- د لاندېنیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

$$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x|$$

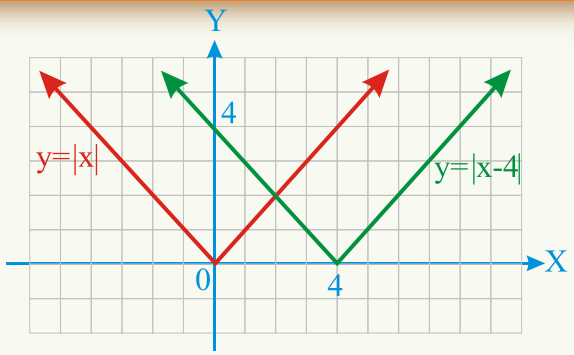
$$f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرافونو انتقال (Translation)



آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟



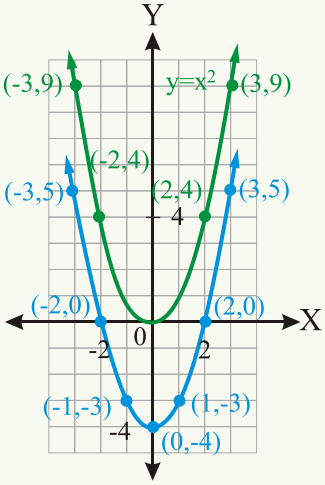
فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم یادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

که $c > 0$ وي:

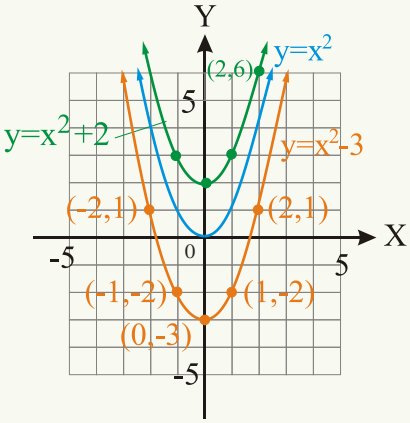
1: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ گراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ گراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع گانو گرافونه د $y = x^2$ تابع له گراف سره څرنگه اړیکه لري؟ درې واړه گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع گراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع گراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع گراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع گراف لاس ته راځي:

x =	0	1	2	−1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	−3	−2	1	−2



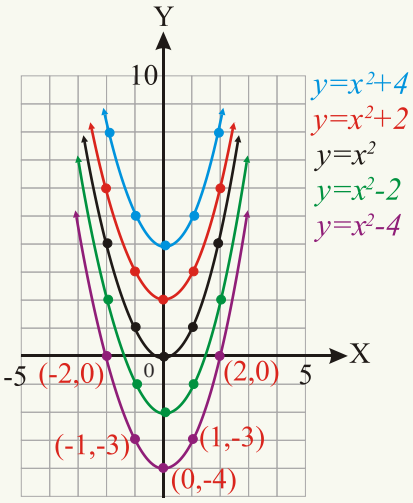
یا عمودي انتقال داسې هم تعریفولای شو:

که د تابع په گراف کې د y پر ځای y − a وضع کړو داسې چې a یو ثابت عدد دی، نو گراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي گراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = x^2$ تابع گراف له انتقاله څخه د $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$ ، $y = x^2 + 4$ او $y = x^2 - 4$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y = x^2$		$y = x^2 + 2$		$y = x^2 + 4$		$y = x^2 - 2$		$y = x^2 - 4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په گراف کې د x پر ځای $x - b$ وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع گراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي گراف ښي خواته او که $b < 0$ وي، گراف کینې خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y = x^2$ گرا ف له انتقال څخه د $y = (x+2)^2$ او $y = (x-3)^2$ گرافونه رسم کړئ.

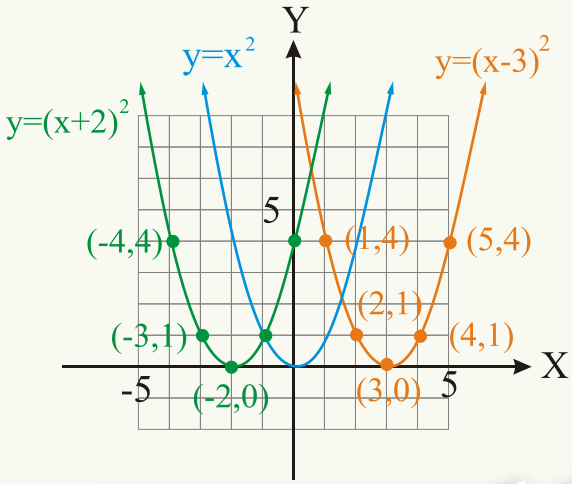
حل: لکه څنگه چې په شکل کې لیدل کېږي که د $y = x^2$ تابع گراف د 2 واحدو په اندازه کېنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ گراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ گراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع گراف لا س ته راځي، لکه: څنگه چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعالیت

د $f(x)=|x|$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع گراف رسموو چې د دویمې درجې تابع د معیاري گراف په نامه یادېږي لومړی د گراف پر مخ د $(0,0)$, $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع گراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ گراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع گراف د رسمولو لپاره د دویم شکل گراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې گراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

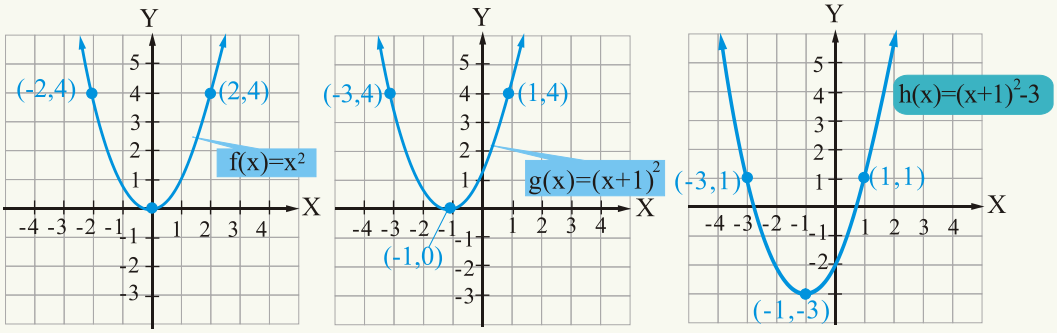
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

$g(x)=(x+1)^2$

x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

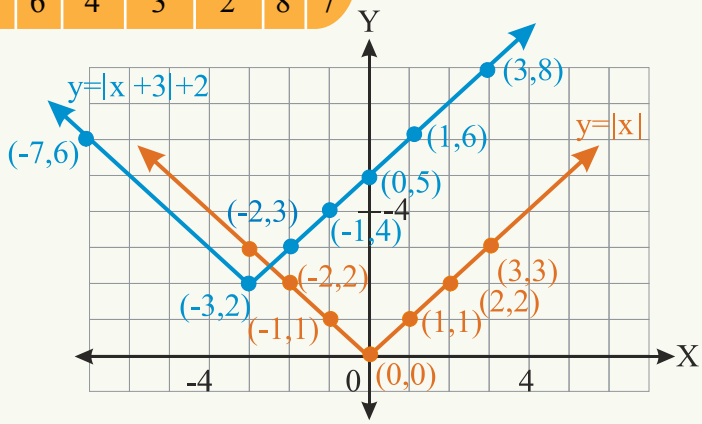
$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3



پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع گراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
y=|x|	0	1	1	2	3	3	2
y=|x+3|+2	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کيڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x + c)$ گراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x - c)$ د تابع گراف لاس ته راځي.

پوښتنې

1- د $y = x^2$ تابع گراف له انتقال څخه د لاندېنيو تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

$g(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x - 2)^2$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع گراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x + 2}$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع گراف رسم کړئ او ددې گراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x + 4|$ او $h(x) = |x - 4|$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x - 3)^3$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو عملیې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شی؟

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو څلورګونې عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom } f \cap \text{dom}\, g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom } f \cap \text{dom}\, g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom } f \cap \text{dom}\, g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom } f \cap \text{dom}\, g - \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ پیدا کړئ او هم د دې تابع د تعریف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

څرنګه چې $dom\, f=IR$ او $dom\, g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad (x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا $dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$

یا $dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$ او $f\cdot g$ $\frac{f}{g}$ پیدا کړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

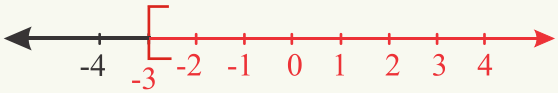
حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom\,f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$

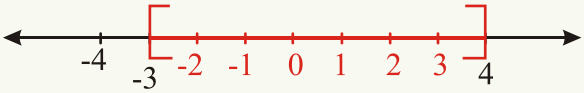
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0, x \geq -3\}$ یا $[-3, \infty)$

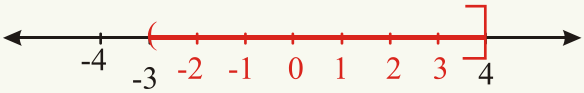


$(-\infty, 4] \cap [-3, \infty) = [-3, 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\frac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3) = 0$ دی، نو: $Dom\frac{f}{g} = (-3, 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$$(c\, f)(x) = c \cdot f(x)$$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$$

پوښتنې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

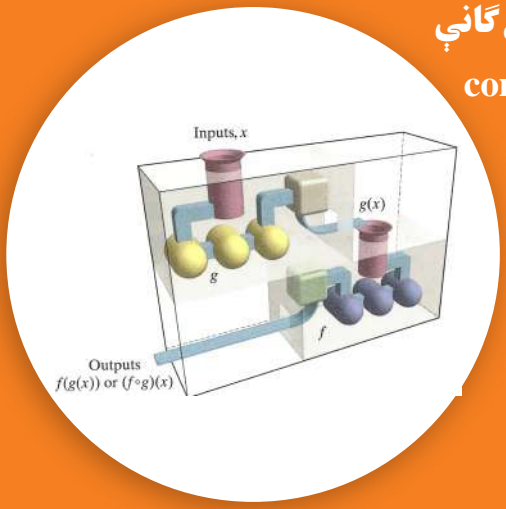
$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبې تابع ګانې
composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګانې وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کېږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د (f o g) تعریف ساحه: $\mathrm{Dom}(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \mathrm{dom}\,g, g(x)\in \mathrm{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوي ده چې په لومړی ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې(input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلیدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g\,o\,f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f\,o\,g)(x)\neq(g\,o\,f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f\,o\,g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g\,o\,f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f\,o\,g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0\,,\,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\mathrm{Domf}=[0,\infty)$ $\qquad$ $\mathrm{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\mathrm{Dom}(fog)=\{x\,/\,x\in \mathrm{domg}\,,\ g(x)\in \mathrm{dom}f\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

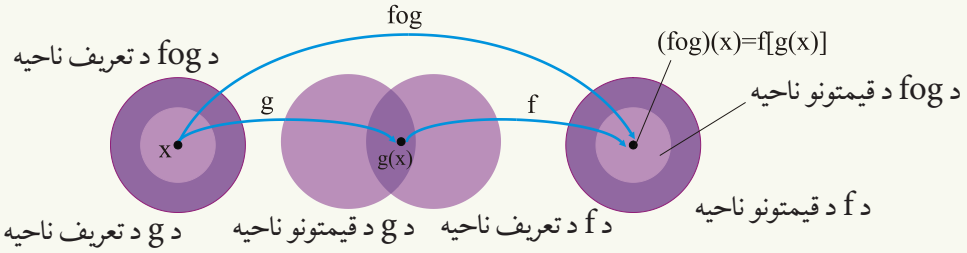
$$\mathrm{Dom}(fog)=\{x/x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,\ -x\geq -1\Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty,1]$$

$$\mathrm{Dom}\ (g\circ f)=\{x/x\in \mathrm{dom}\,f\,,f(x)\in \mathrm{dom}\,g\}=\{x/x\geq 0\ ,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$

$$(f\circ g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$

$$(g\circ f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



څلورم مثال: که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلي ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\circ f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\circ k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ $(f\circ f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\circ f)(x)=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+2}=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$, $(g\,o\,f)(x)$, $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیدا کړئ.

پوښتنې

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(g-f)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ.

4- که $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیدا کړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیدا کړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادېږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي ګریډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$domain f^{-1} = Range f$ او $Range f^{-1} = dom f$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)})$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$

$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$

$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکي نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکي ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکي دي که نه؟

$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x) = -4x+12$ او $g(x) = \sqrt{25-x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي:

$$f(2) = -4(2)+12 = -8+12 = 4$$

که $x=3$ وي:

$$f(3) = -4(3)+12 = -12+12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x) = \sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي.

$$g(3) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

که $x=-3$ وي.

$$g(-3) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

$f(3) = f(-3)$ لېکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

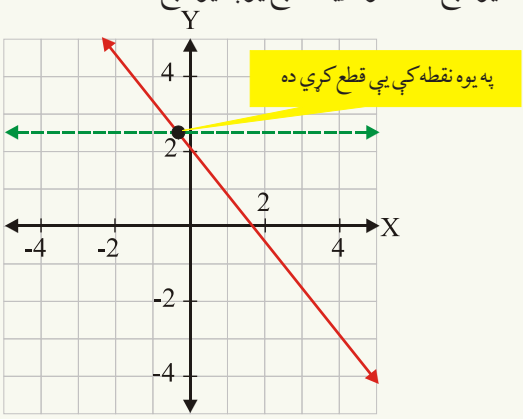
فعالیت

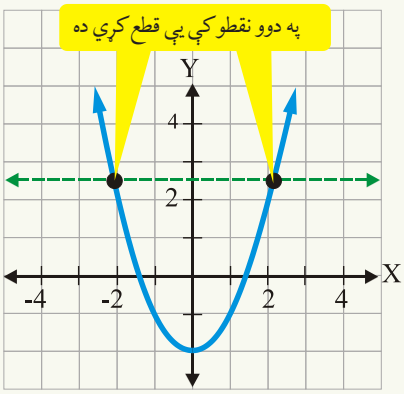
که $f(x) = 3x+8$ او $g(x) = x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د یو په یو تابع پیژندنه: که یو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یو په یو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې لیدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په یوه نقطه کې او د دویمي تابع ګراف یې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.





د معکوسي تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې x او د قیمتونو ساحه یې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه y او د قیمتونو ساحه یې x وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

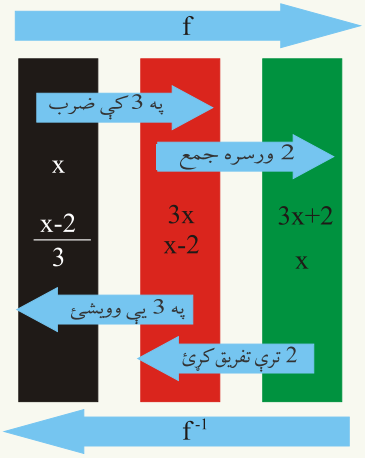
$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خوا که $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

یا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

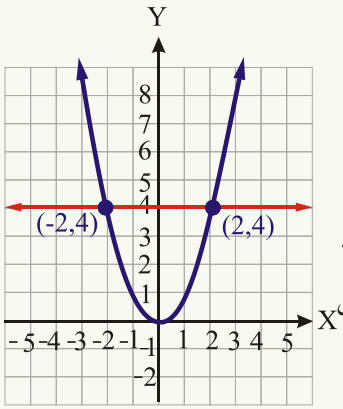
که y په $f^{-1}(x)$ سره وښیو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$$y=\pm\sqrt{x} \quad \text{یا} \quad g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$$

لیدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او یا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذیره نه ده.



(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x د کوم قمیت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس یې

$$x=5y-2 \Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow \quad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع ګانې دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې یو د بل معکوسي تابعګانې دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکیب د عینیت $(f(x)=x)$ تابع ده.

فعالیت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

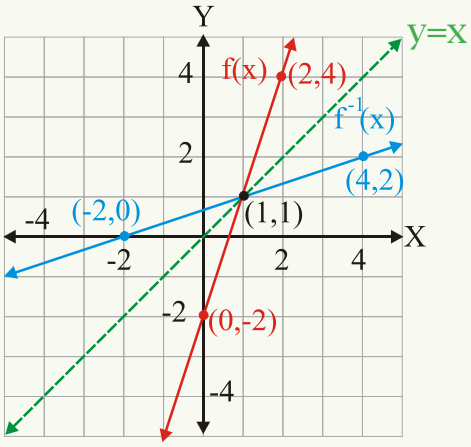
د تابع او دهغې د معکوسي تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده، ځکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ یوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

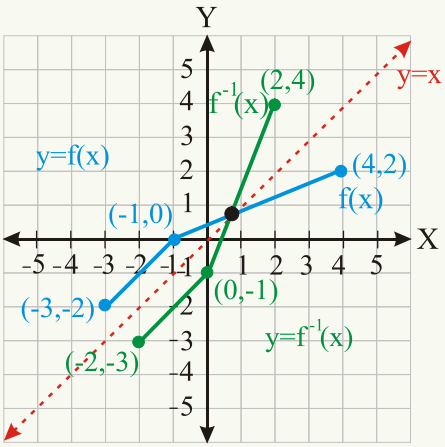
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-1,0),(-3,-2)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وښیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$f = \{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\}$ $\quad h = \{(1,4),(2,3),(4,1)\}$

$g = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ $\quad k = \{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$

2 – د لاندېنیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

$f(x) = x+3$ $\quad f(x) = 2x$ $\quad f(x) = 2x+3$

$f(x) = x^3+2$ $\quad f(x) = (x+2)^3$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

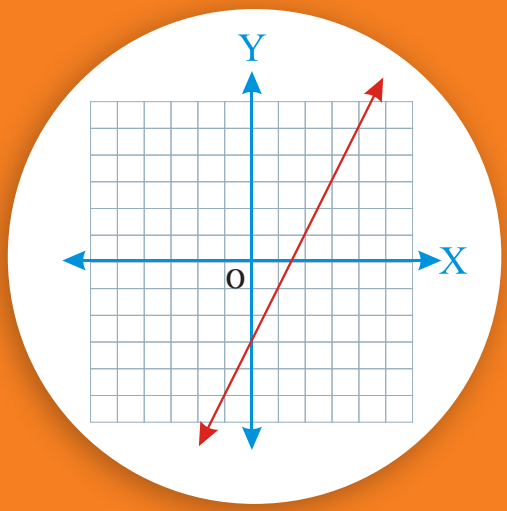
3 – د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$f(x) = 1-x^2$ $\quad g(x) = \frac{7-2x}{5}$

4 – له لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$y = 4x-5$ $\quad y = 6-x$ $\quad y = (x-2)^2$ $\quad y = 9$ $\quad y = \frac{1}{x+2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینومي تابع ګانې

- آیا پوهېږي چې لومړی درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
- آیا د لومړی درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونیول. هغه پولینوم چې له یوه تورې (متحول) څخه جوړ شوې وي د پولینومي تابع په نامه یادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړی درجه تابع

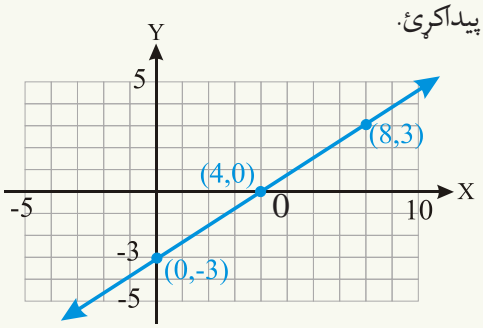
هغه پولینومي تابع ده چې درجه یې یوه وي، د لومړی درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a \neq 0$ او a , b حقیقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګانې دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$$f(x)=\frac{3}{4}x-3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره دګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره دګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع ټکي پیدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره یې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

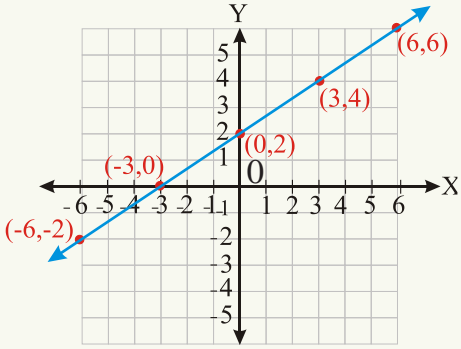
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y یا f (x) قیمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د $(0, 2)$ او $(-3, 0)$ نقطې یو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف یو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقیم خط باندې پرتې دي.

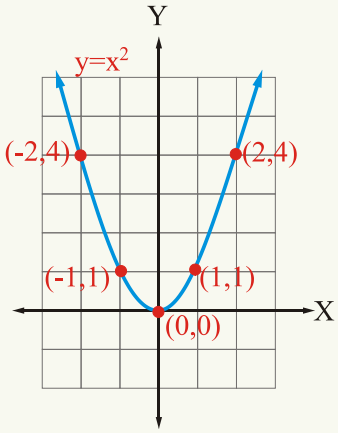
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

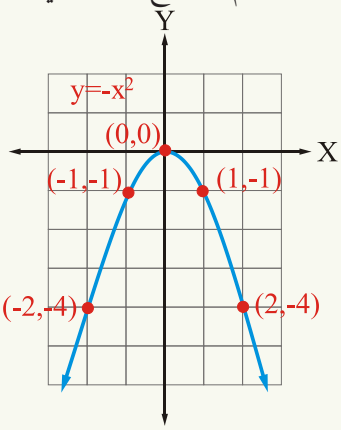


(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او گراف یې:

داگرافونه د کوم ډول تابع گرافونه دي؟





- دا دواړه گرافونه سره څه توپیر لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=x^2+3x$, $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه یوه یې دویمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولینومي تابع چې درجه یې یوه وي، لومړی درجه یا د خطي تابع (Liner Function) په نامه یادېږي او که د پولینومي تابع درجه (2) وي، د دویمي درجې تابع په نوم یادېږي.

فعالیت

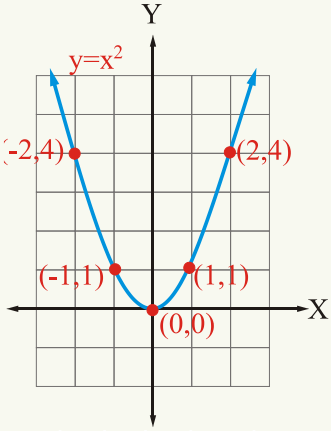
- د دویمې درجې تابع گراف په کوم نوم یادېږي؟
- د دویمې درجې تابع د گراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دویمې درجې تابع گراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دویمې درجې تابع د گراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دویمې درجې تابع گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دویمې درجې تابع گراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دویمې درجې تابع د گراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کولای شئ؟

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ دی چې a ، b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ دی.

د دویمې درجې تابع گراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x) = y = x^2$ تابع ده چې $a = 1$ او $b = c = 0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راوړلای شو، گراف یې رسم کېدای شي لکه: څنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

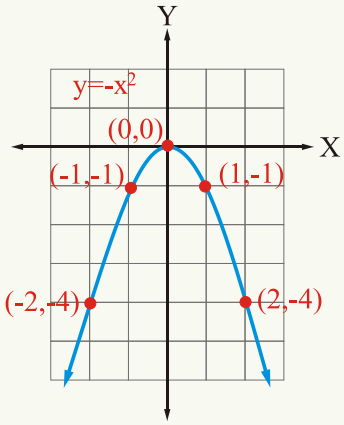
دویمې درجې تابع گراف د پارابولا (Parabola) په نوم یادېږي چې داگراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادېږي چې د y محور ددې تابع د گراف د تناظر محور دی.

هغه نقطه چې د تناظر محور په کې گراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادېږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د گراف د رأس ټکی اصغري دی د $y = x^2$ د تابع گراف د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0, \infty)$ په انټروال کې گراف متزاید دی.

لومړی مثال: د $y = -x^2$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a < 0$ دی، د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې گراف متزاید او د $(0, \infty)$ په انټروال کې گراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع گراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

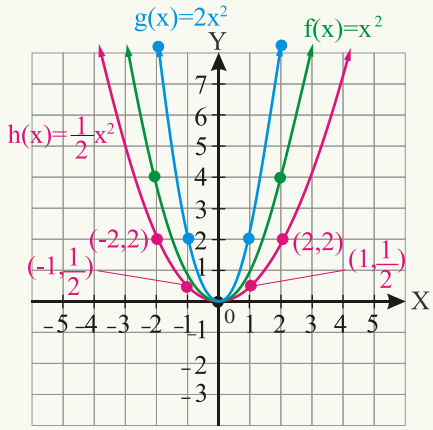
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

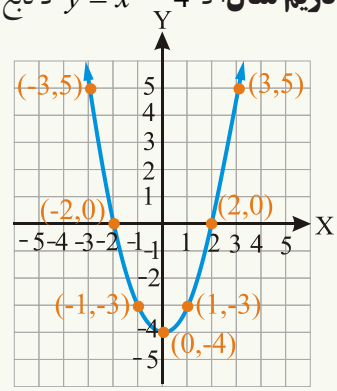
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	- 1	2	- 2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

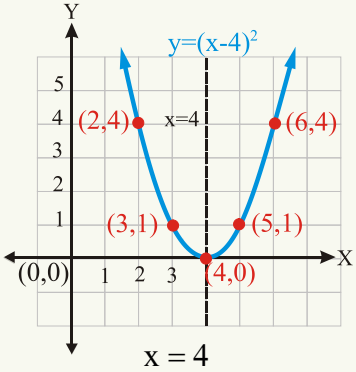


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع گراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع گراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع گراف رسمیدلای شي لکه:

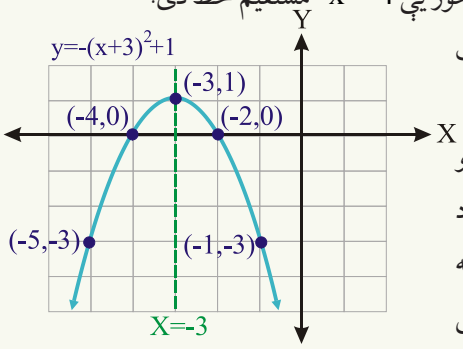
(c) ketabton.com: The Digital Library



x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې ګراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزاید دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y = x^2$ ګراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x = 4$ مستقیم خط دی.

پنځم مثال: د $y = -(x+3)^2 + 1$ تابع ګراف رسم کړئ.



د $y = x^2$ ګراف درې واحده کینې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د ګراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x = -3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

د $y = 3x^2$ او $y = -3x^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتیجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیدا کولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ یوه دویمه درجه معادله ده او جذرونه یې $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقیقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول یې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ تابع ګراف

a	د دویمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مربع په طریقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېرېږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

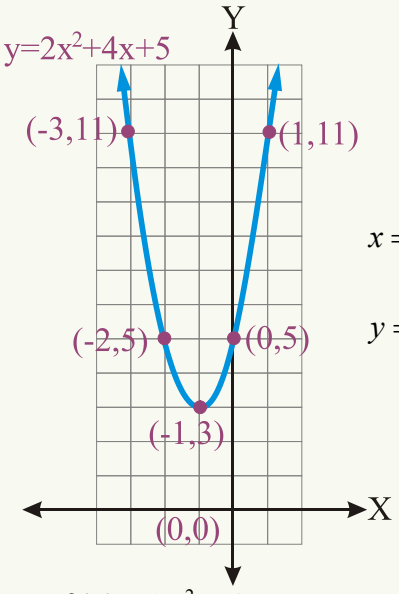
1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a=2$, $b=4$ او $c=5$ دی.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ دا چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نوري نقطې هم پیدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع گراف رسم کړئ.

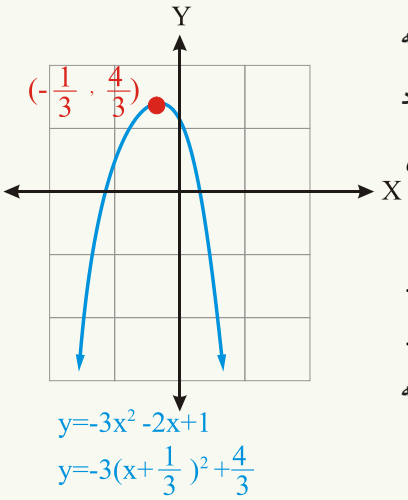
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمایي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمي درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمي درجې تابع گراف ته پارابول (Parabola) وایي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع گراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3– د $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع گانو د گراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x)=3x^2-2x+6$, $f(x)=x^2-12x+30$, $f(x)=x^2+8x+13$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ او وواياست چې د $f(x)=x^2$ له گراف سره څه اړیکه لري؟

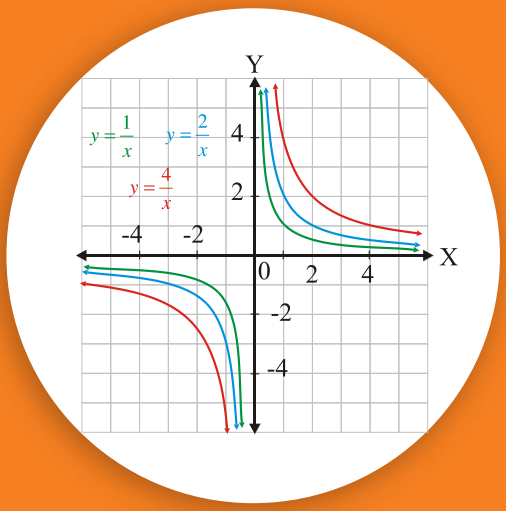
6 – د $y=-x^2-1$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي یا نسبتي تابع ګانې
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعالیت

- آیا د ناطقي تابع د عمودي مجانب معادله پیدا کولای شئ ؟
- آیا د هرې ناطقي تابع د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شاملیدلای شي؟
- آیا د یوې ناطقي تابع افقي مجانب پیدا کولای شئ؟
- آیا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعریف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولینومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوي وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولینومونه وي، نو $f(x)$ یوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته د x له هغو قیمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$

$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$, $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقي تابع ګانې دي.

فعالیت

آیا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ یوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنیوناطقو تابع گانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3 \ , \ x\neq -3\}$$

څرنگه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع گانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع گانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د f(x) تابع د تعریف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقیقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$dom\, g(x) = IR - \{-5\}$ یا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x - 3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1}$ $\qquad$ $Range\, g(x) = IR - \{1\}$ یا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $k(x) = \dfrac{x+1}{3}$, $r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x}$, $m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقې تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

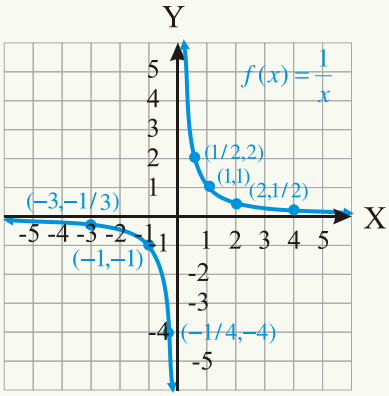
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:

څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کینې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کېږي $(f(x)\to -\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدی کېږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to \infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کینې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to +\infty$ یا $f(x)\to -\infty$، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a\Rightarrow |f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع ګراف د $x = a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ یا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ او $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د x هغه قیمت پیدا کوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x) = \{x / x \in IR \ , \ x \neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

د x=5 او $x = -5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\, g(x) = \{x / \in IR \ , \ x \neq -5 \ , \ x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x = 5$ او $x = -5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قیمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقی مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج وېشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$ ، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\frac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع گراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\frac{2\cdot 0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$

نو گراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع گراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د گراف افقي مجانب $\frac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

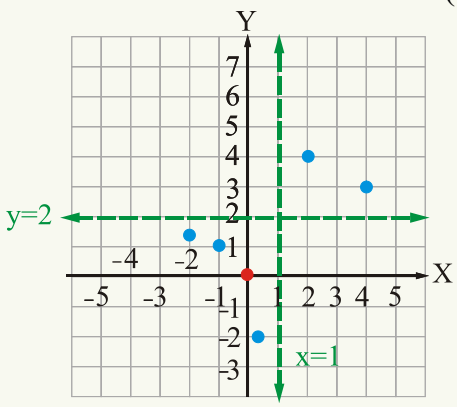
5 - د گراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

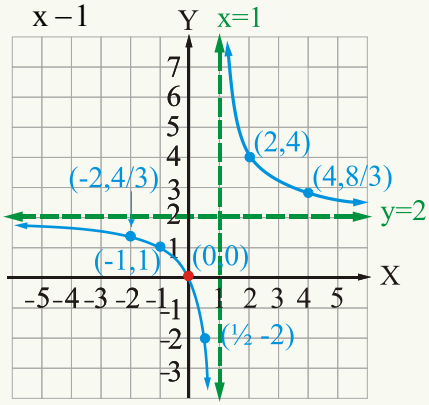
x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې گراف، لکه: څنگه چې په شکل کې لیدل کېږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$





فعالیت

د $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، گراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

$$x+2=0$$

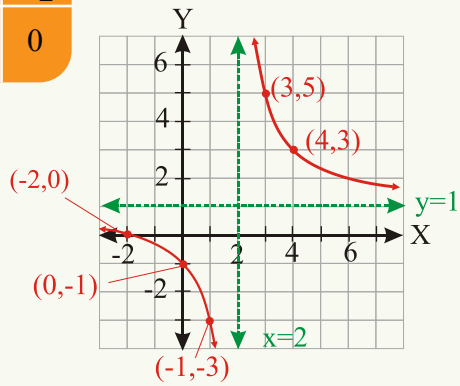
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې گراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې گراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د گراف د هرې څانگې قیمتونه وگورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج ووېشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع گراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $y=f(x)=1$ د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقې تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیدا کولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مایل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتیجه کې گراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

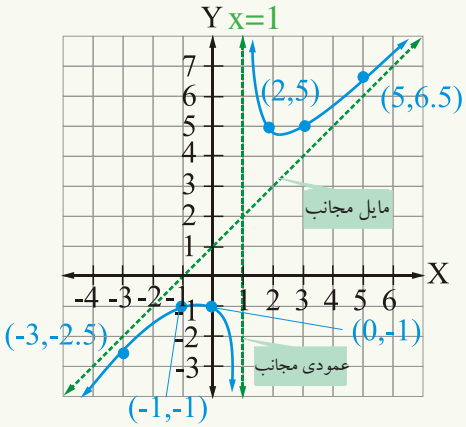
گراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې گراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب یې $x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - یو څو نورې نقطې پیدا کوو او د تابع گراف رسموو:



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

اتم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ وېشو لرو چې: $\frac{x^2+1}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع گراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي چې $y=x+2$ خط ددې تابع مایل مجانب دی.

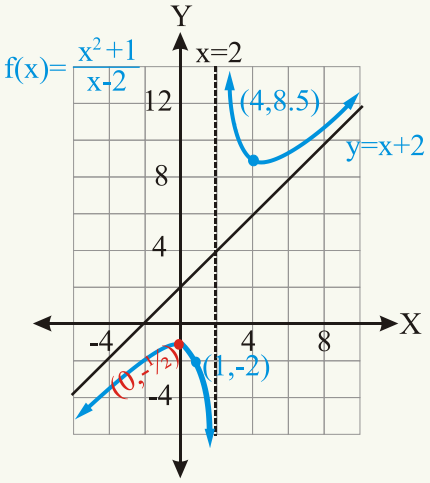
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\frac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$

4 – گراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\frac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(چې په حقيقي عددونو کې تعريف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او څو نورو قيمتونو په مرسته د تابع گراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتيب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضريبونو نسبت دی يا که چېرې $f(x)=\dfrac{a_n x^n+\ldots+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_0}$، $(b_n \neq 0)$ وي، نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو د تابع گراف مايل مجانب لري چې په بې نهايت کې له گراف سره موازي کېږي، يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې ولیکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا یې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2 \qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2 \qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

8 – د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي لنډيز

• تابع د دوو ستونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني ستې هر عنصر يوازې او يوازې د دويم ستې له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني ستې ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم ستې ته د قيمتونو ساحه(Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو ستې دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکی وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع گراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو ستې دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط گراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د يوې تابع گراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $f(x) = x\ ,(a \neq 0)$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوي ده:

$$f : IR \to IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمي درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ د ی او د دويمي درجې تابع گراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي.

• که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.

• انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)

• **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کینې خواته انتقال شي، د $y = f(x + c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x - c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

• د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\mathrm{dom}(f + g)(x) = \mathrm{dom}\, f \bigcap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f - g)(x) = \mathrm{dom}\, f \bigcap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f \cdot g)(x) = \mathrm{dom}\, f \bigcap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(\frac{f}{g})(x) = \mathrm{dom}\, f \bigcap \mathrm{dom}\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د مرکبو تابع ګانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

• د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 –که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

• یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - د لاندېنيو مرتبو جوړو له سټونو څخه کوم يو يې د يوې تابع ښودونکي دی؟ د تعريف او د قيمتونو ساحې يې پيدا کړئ.

1 – $\{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

2 – $\{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

3 – $\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

4 – $\{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x),g(-1)$ او $g(x+5)$ پيدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پيدا کړئ.

4 - د لاندېنيو تابع ګانو دتعريف ساحې پيدا کړئ.

$f(x)=2x$ $\qquad$ $f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\qquad$ $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0),f(3)$ او $f(-2)$ پيدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6),g(0)$ او $g(-3)$ پيدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0),h(3)$ او $h(5)$ پيدا کړئ.

8 - له لاندېنيو معادلو څخه کومه يوه يې تابع تعريفوي؟

$x+y=16$ $\qquad$ $x^2+y=16$ $\qquad$ $x^2+y^2=16$

$x=y^2$ $\qquad$ $y=\sqrt{x+4}$ $\qquad$ $x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنیو تابع ګانو کې کومه طاقه، کومه یوه جفته او کومه یوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$f(x)=x^4-2x^2+5$, $f(x)=x^2+2x-1$. $f(x)=\frac{2}{x-6}$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع ګانو ګرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره یې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنیو تابع ګانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې وټاکئ.

$f(x)=4x-1$ $g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5}$ $g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2$ $g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3)$ $(f+g)(-5)$ $(f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4)$ $(fog)(2)$ $(gof)(-5)$

پیدا کړئ.

13 - fog او gof پیدا کړئ که:

$f(x)=8x+12$ $g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3$ $g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2$ $g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x}$ $g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2}$ $g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د ګراف په پام کې نیولو سره وواياست چې د $y=f(x)-5$ تابع ګراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښي خواته انتقال شوي دی. d- کینې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعریف شوی وي ګراف یې رسم کړئ، د تعریف او قیمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4} \qquad g(x)=\frac{7x}{x-8} \qquad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$$

$$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64} \qquad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49} \qquad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$$

19 - د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1 \qquad b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\dfrac{1}{4} \qquad d)\quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو تابع گاتو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=x^2+6$ $\qquad$ $f(x)=8x-1$ $\qquad$ $f(x)=\frac{1}{8}x$

$f(x)=x^3-1$ $\qquad$ $f(x)=\frac{4x+6}{5}$

28 -آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع گانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د گراف سره یې پرتله کړئ.

34 – د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

a: $y=x$

b: $y=x-1$

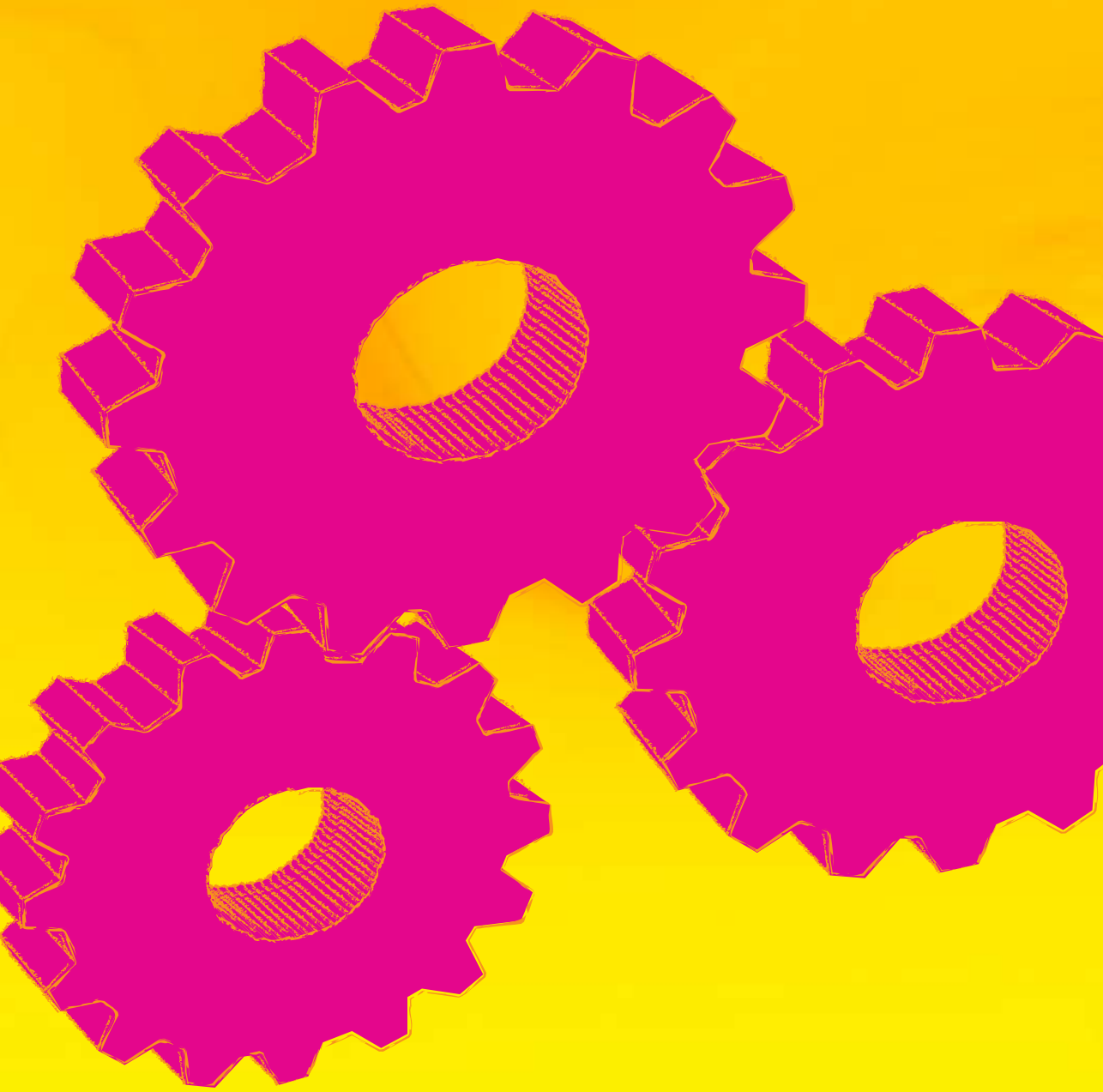
c: $y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع ګانې

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه او راډیان(Angle and Radian)
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟

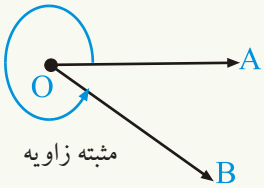
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

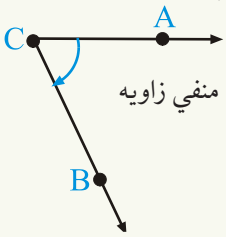
له هندسې څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کیدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له $1°$ څخه تر $360°$ پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

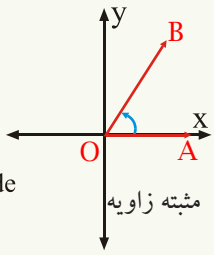
په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

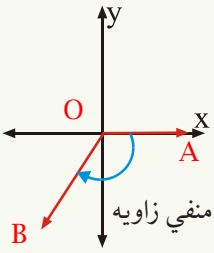
چې لومړی ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي.

لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



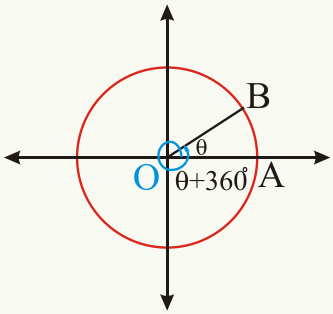






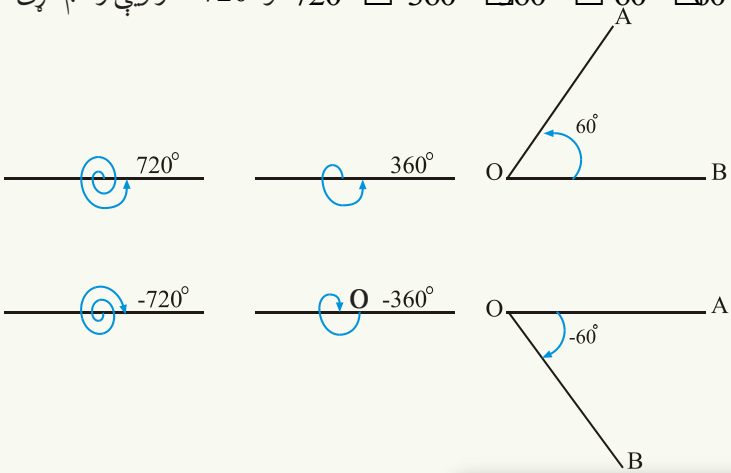
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^o$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوی زاویه به $\theta+720^o$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot 360^o$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لوېې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60° ، -60° ، 360° ، -360° ، 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^o = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^o = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^o = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^o = 1''$$

دویم مثال: $35^o\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48,3625)^o$ په درجه، دقیقه او ثانیه(DMS) واړوئ.

حل

$$35^o\ 15'\ 27'' = 35^o + (\frac{15}{60})^o + (\frac{27}{3600})^o = 35^o + 0,25^o + 0,0075^o = 35,2575^o$$

$$48,3625^o = 48^o + 0,3625^o = 48^o + (0,3625 \cdot 60)' = 48^o + (21,75)'$$

$$= 48^o + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^o \quad 21' \quad 45''$$

فعالیت

$36^o\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55,967663^o$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

گراد: گراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته گراد وایي. د گراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه گراد او د دقیقه گراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه گراد وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1`g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په گراد او د گراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په گراد او گراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45° درجې په گراد او 100g په درجه واړوئ.

حل: څرنگه چې یو مکمل دوران 360° یا 400g دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$360^{o} = 400g \qquad 400g = 360^{o}$$

$$1^{0} = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad 1g = (\frac{360}{400})^{o} = (\frac{9}{10})^{o}$$

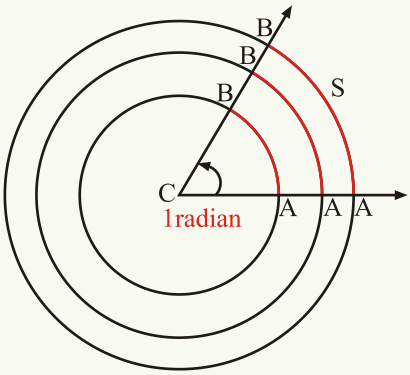
$$45^{o} = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^{o} = 90^{o}$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^{o}$$

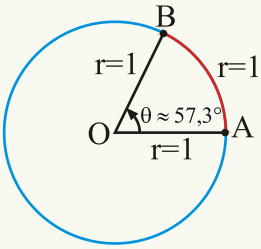
راډیان(Radian): د درجې او گراد سربېره د زاویې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوي مرکزي زاویې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی یې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډیان په عالي ریاضیاتو کې ډېر استعمالېږي. په شکل کې د $A\hat{C}B$ مرکزي زاویه چې شعاع یې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $A\hat{C}B$ زاویه 1Radian ده.



$$A\hat{C}B = 1\,\text{radian} = 1^{R}$$

که د AB قوس د دایرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډیان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او یا } s = r\theta$$



په مثلثاتي دایره یا واحده دایره(Unite Circle) کې چې شعاع یې د اوږدوالی واحد او مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي، د راډیان په حساب د مرکزي زاویې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ *radian* په دې معنا چې یو پوره دوارن 360° یا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17'45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \text{ Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ *radian* د مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې قطر 30m وي.

حل: څرنګه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi\ m \approx 15,7m$

فعالیت

د 1Rad مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟ که د دایرې شعاع 10cm وي.

د درجې او ګراد بدلول په راډیان او د راډیان بدلول په درجه او ګراد:

څرنګه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او یا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او یا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول څرنګه چې: $2\pi^R = 360^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75° , 220° , -400° , $-100g$ او $40°$ زاویې په راډیان واړوئ.

څرنګه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$75° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{radain} \qquad 220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{radain},$$

$$-400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain} \qquad 40° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian}$$

څرنګه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100 \cdot \frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د ګراد په حساب له یوې زاویې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې اندازه په درجه راکوي، دا زاویه څو راډیانه ده؟

حل

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{Radian} \qquad \frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270°$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ راډیانه ده.

شپږم مثال a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډیان په درجه واړوئ.

(b): د یو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډیانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{180}{\pi})^o \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

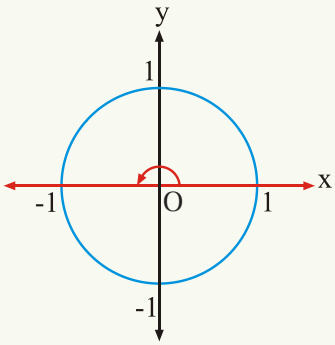
$$a: (\frac{5\pi}{6})\cdot(\frac{180}{\pi}) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

$$b: = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\text{radian}$$

لاندې شکلونه وګورئ.

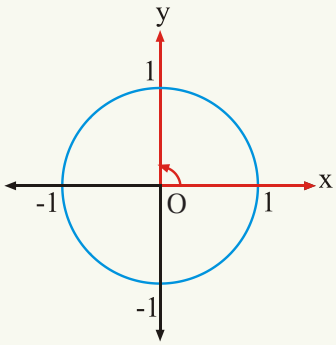
$\frac{1}{2}$ Re v

$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$



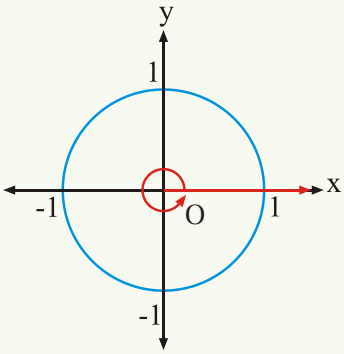
$\frac{1}{4}$ Re v

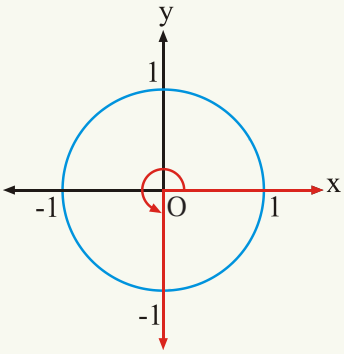
$\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ Radain



1 Re volution , $\frac{3}{4}$ Re volution

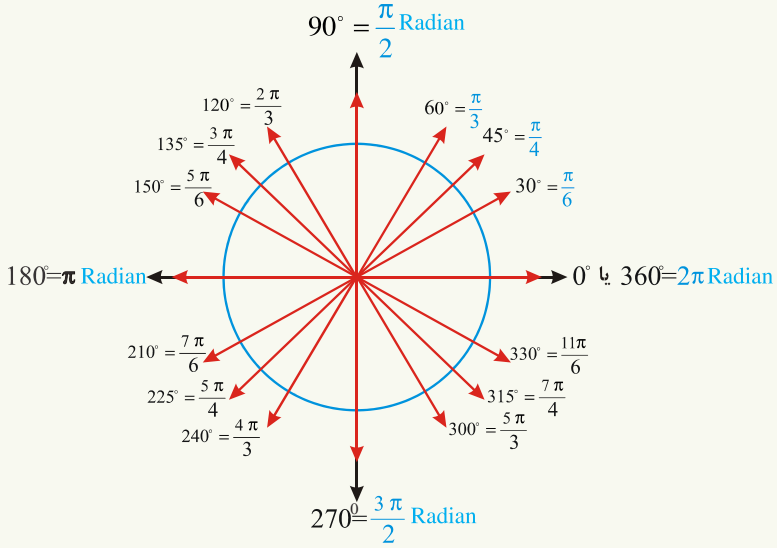
2 π Radians , $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجې او راډیان تر منځ د اړیکې د ښه څرګندېدو لپاره لاندې شکل هم وګورئ:



فعالیت

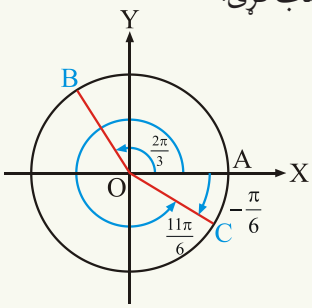
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $-\frac{5\pi}{4}$ راډیانه زاویې په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویې په شکل کې وښیاست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی څرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د راډیان په حساب وي، د θ_2 د زاویې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

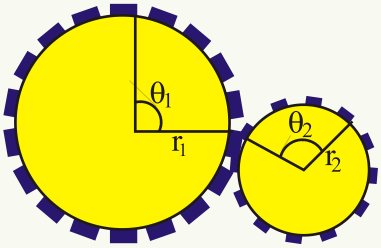
د (a) حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه لیدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانیې عقربې 40 ثانیې دوران کړی وي، د ثانیې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاویه په راډیان پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانیې یو پوره دوران یا 2π راډیان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}\,\mathrm{Rev}$ او څرنګه چې یو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3}\cdot 2\pi^{R} = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاویې د پیدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\,\min - 30\,\mathrm{hr}|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقیقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقیقه ګرد په منځ کې زاویه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^{o}$$

پوښتنې

1 - که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس 50cm او د دایرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاویه به څو راډیانه وي؟

2 - $32{,}4222^{o}$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوئ

3 - د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډیانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډیانه څو ګراده او $-7{,}5^{\circ}$ څو راډیانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^{o}, -315^{o}, 720^{o}$ او 45° زاویې په راډیان او ګراد واړوئ

6 - د یو دوران $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډیانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډیانه په درجو واړوئ

8 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانیو کې د ثانیې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دایرې شعاع 3cm او مرکزي زاویه $\frac{5}{3}$ راډیانه وي. د دې مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 35 ثانیې وي، نو د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړي وي؟

11 - د دوو زاویو مجموعه $152°$ ده، که د یوې زاویې اندازه د درجې په حساب له بلې زاویې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاویې اندازه د راډیان په حساب څومره ده؟

12- $1620°$ څو راډیانه کېږي؟

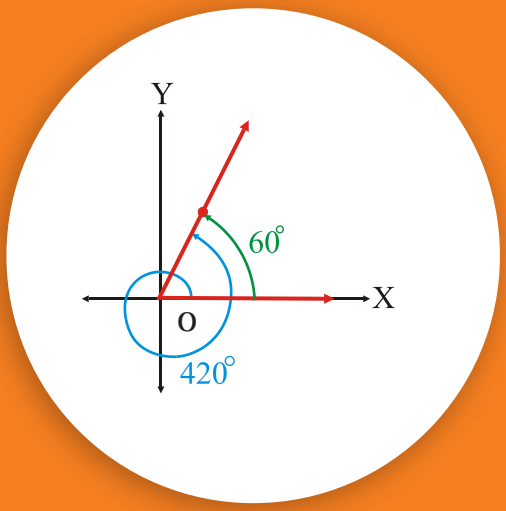
a) $4\pi^{R}$ b) $8\pi^{R}$ c) $9\pi^{R}$ d) $10\pi^{R}$

13 - څلور دورانونه څو راډیانه کېږي؟

a) $2\pi^{R}$ b) $4\pi^{R}$ c) $6\pi^{R}$ d) $8\pi^{R}$

14 - که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاویې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



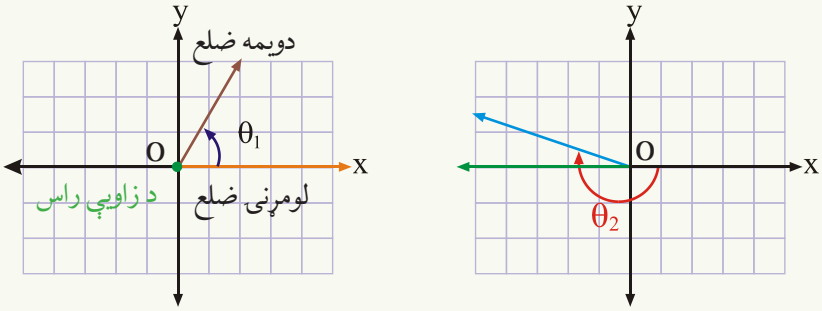
د یوې زاویې معیاري حالت او کوټرمینل زاویې

آیا ویلای شئ چې د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

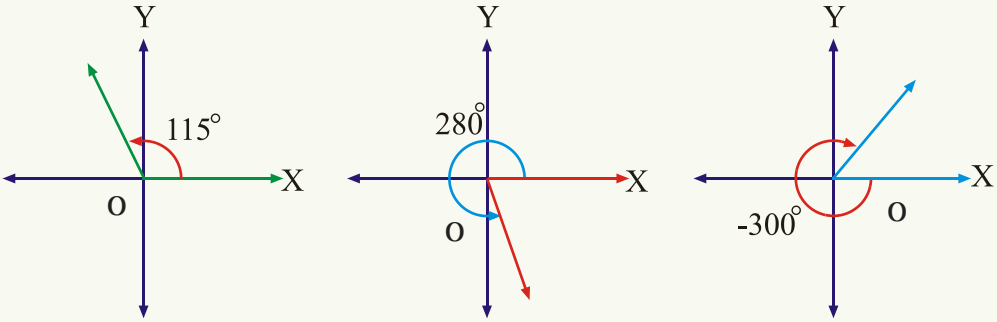
د یوې زاویې معیاري حالت (Standard position of an angle):

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده.

د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاویې په معیاري حالت کې ښودل شوي دي.



لومړی مثال: 115°، 280° او -300° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^o, 50^o, 500^o$ او -210° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

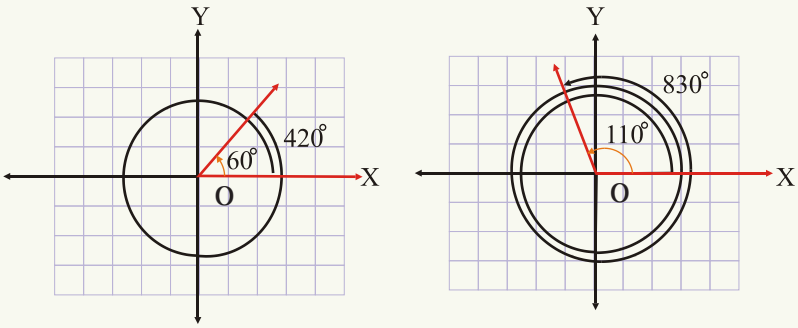
کوټرمینل زاویې: (Conterminal angles)

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادېږي.

دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420° زاویې او همدارنګه د 110° او 830° زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنی ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

همدرانګه د 110° او 830° زاویې هم سره کوټرمینل دي.

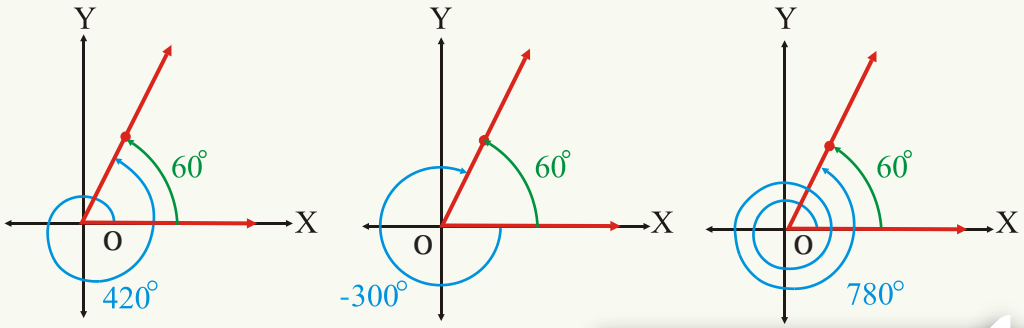


(a) (b)

دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^o + 360^o = 420^o$, $60^o - 360^o = -300^o$, $60^o + 2 \cdot 360^o = 780^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاویې سره کوترمینل دي؟ رسم یې کړئ.

څرنګه چې کوټرمینل زاویې یو له بله سره د یوه پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او یا $n\cdot 2\pi$ توپیر لري، نو د θ د زاویې سره کوټرمینل زاویې عبارت دي له:

$\theta+2\pi$	$\theta+360^\circ$
$\theta+2\cdot 2\pi$	$\theta+2\cdot 360^\circ$
$\theta+3\cdot 2\pi$	$\theta+3\cdot 360^\circ$
-----	-----
$\theta+2n\pi$	$\theta+n\cdot 360^\circ$

څلورم مثال:

(a) له 30° زاویې سره څلور کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

(b): له 90° زاویې سره دوه کوټرمینل زاویې پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

حل(a)

$30^\circ+360^\circ=390^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6}$ Radian

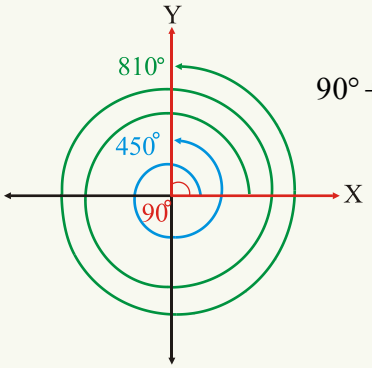
$30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6}$ Radian

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل(b)

$90^\circ + 2\cdot 360^\circ = 810^\circ$ $\qquad$ $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$



پنځم مثال: آیا $410^\circ, 50^\circ$ $\quad$ $800^\circ, 80^\circ$ $\quad$ $-680^\circ, 40^\circ$ او د 60° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي؟

حل: څرنګه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي او $800^0 = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاویې هم سره کوټرمینل دي. همدرانګه $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاویې هم سره کوټرمینل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$، نو د 410° او 60° زاویې سره کوټرمینل نه دي.

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده. که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق وي، داسې زاویې د کوټرمینل زاویو په نوم یادېږي.

پوښتنې

1 - د $90^\circ, 120^\circ, -270^\circ$ او 240° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنی مثبته زاویه پیدا کړئ چې له لاندېنیو زاویو سره کوټرمینل وي.

$135^\circ \quad 90^\circ \quad 60^\circ \quad 539^\circ \quad 450^\circ \quad -125^\circ \quad -40^\circ$

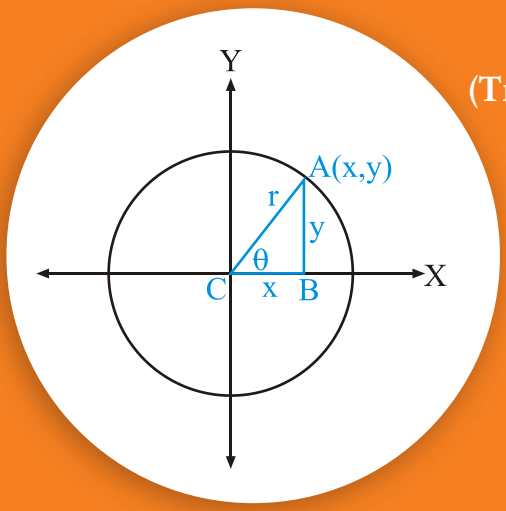
3 - آیا د (-80° ، 280°) او د (35° ، 395°) زاویې سره کوټرمینل دي؟

4 - له 40° زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

5 - آیا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاویې سره کوټرمینل دي، په شکل کې یې هم وښیاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي تابعگانې
(Trigonometric Functions)



آیا ویلای شئ چې د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاویې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

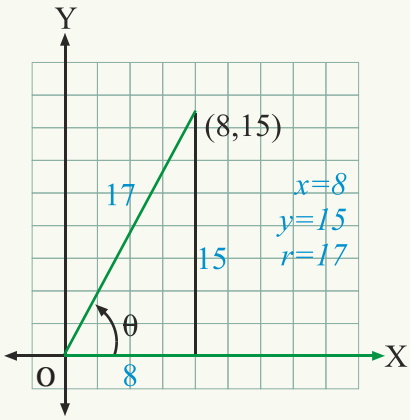
څرنګه چې پوهېږو چې د د یوې حادې زاویې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاویه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}\ ,\quad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}\ ,\quad \cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}\ ,\quad \csc\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کېږي چې: $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.



لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاویې دویمه ضلع د (8,15) له ټکي څخه تېره شي، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د فیثاغورث د قضیې په اساس لروچې:

$r^2 = x^2 + y^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \ , \ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \ , \ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

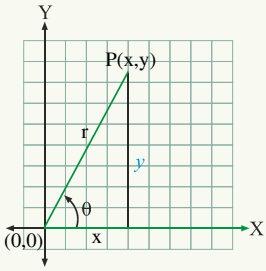
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \ , \ \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړیکې:

د فیثاغورث د قضیې په اساس د شکل له مخې لیکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 .....I$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې ځايه څخه نتيجه کېږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چې دا اړيکې د θ د هر قيمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعاليت

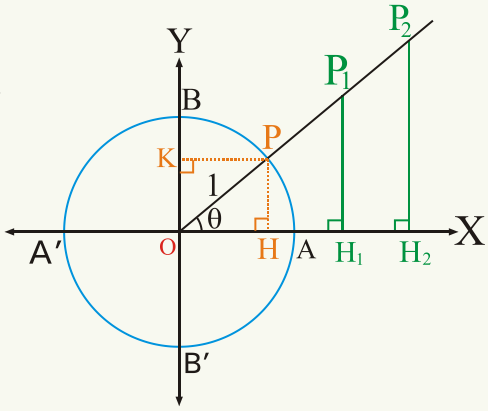
که په معياري حالت کې د θ دويمه ضلع د (12,5) له ټکي څخه تېره شي، د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د مثلثاتي تابع ګانو پورتني قيمتونه يوازې د θ زاويې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعيت پورې چې د θ پر دويمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقيقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس ليدل کېږي.

$$|OP|=1$$

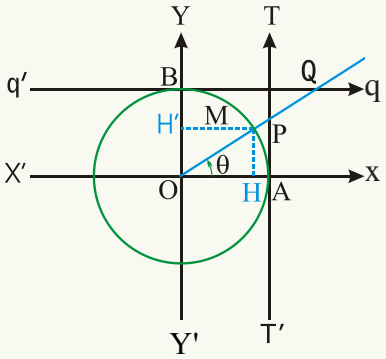
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د رادیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار یې د θ د ضلعو اوږدوالی پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري.



څرنګه چې مثلثاتي دایره (Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالی واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وایي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دایره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چېرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $\hat{MOA}$ زاویې ته θ ووایو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفېږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلع او یا دقوس پای په دویمه، دریمه یا څلورمه ناحیه(ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

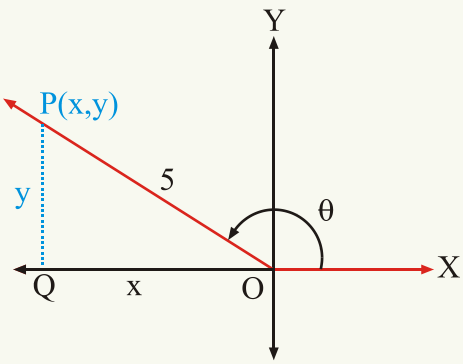
کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه یې پر لاس راوړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحیو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$	$\sin\theta > 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta < 0$	$\tan\theta > 0$
$\cot\theta < 0$	$\cot\theta > 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta > 0$	$\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$	$\sin\theta < 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$
$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta < 0$	$\csc\theta < 0$

ربع	$\sin\theta, \csc\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sec\theta, \cos\theta$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	+	−
IV	−	−	+

د ویم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع، په دویمه ناحیه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعیه کمیات پیدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دویمه ربع کې د x قیمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:



$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$

$$y^2 = 25 - 9 = 16$$

$$y = \pm\sqrt{16}$$

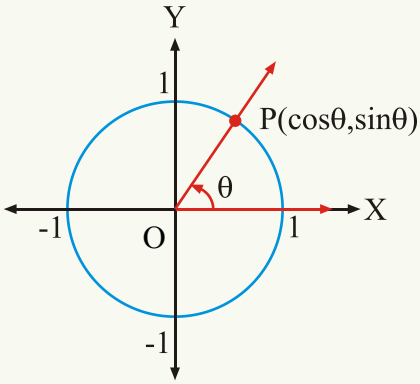
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \text{ ، } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} \text{ ، } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4} \text{ ، } \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} \text{ ، } \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



څرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دایره کې د P د ټکي وضعیه کمیات له $P(\cos\theta, \sin\theta)$ او یا $P(x, y)$ سره وښایو.

د θ د زاویې مثلثاتي توابع یوازې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقید متحولونه دي.

په لومړي ناحیه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دویمه ناحیه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دریمه ناحیه(ربع) کې $\tan\theta, \cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحیه(ربع) کې $\cos\theta, \sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

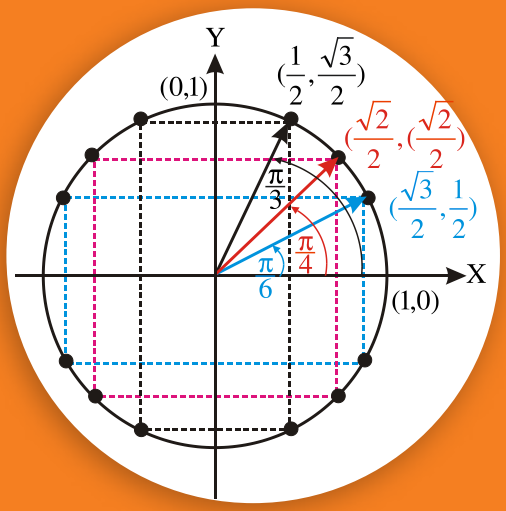
$\sin 120^\circ$ $\tan 170^\circ$ $\tan 60^\circ$ $\cos 330^\circ$ $\sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ$ $\csc 91^\circ$ $\sin 271^\circ$ $\csc 181^\circ$ $\csc 315^\circ$

2- که θ په معیاري حالت کې د راډیان په حساب وي او د θ دویمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پیدا کړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ , } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ , } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ , } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

آیا کولای شئ چې ووایئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په یوه قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې، دوې قایمې څنډې یې یو، یو واحد په پام کې ونیسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

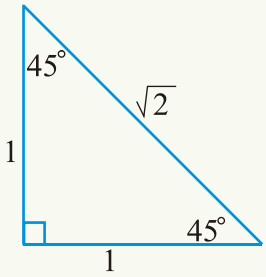
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

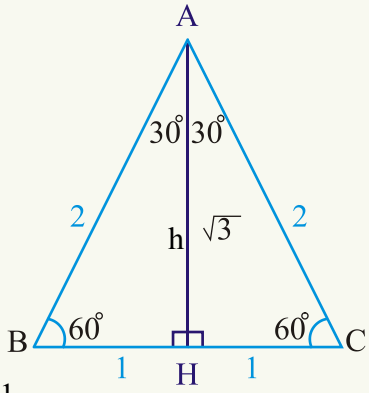
یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

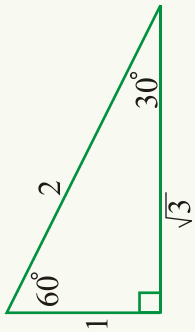
که د $A\overset{\triangle}{B}C$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

$$h^2 = 4 - 1 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$





$$\sin 30^{\circ} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^{\circ} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^{\circ} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^{\circ} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^{\circ} = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^{\circ} = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنگه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

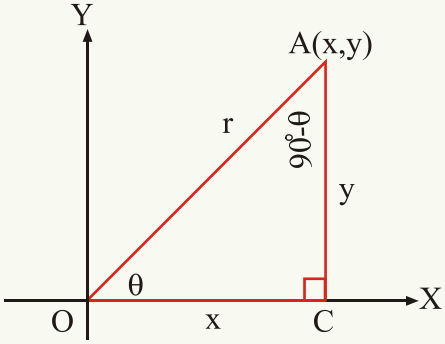
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \;,\; \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \;,\; \sec\theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39° زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^o = 0,6293$ $\tan 39^o = 0,8098$ $\sec 39^o = 1,287$

$\cos 39^o = ,7771$ $\cot 39^o = 1,235$ $\csc 39^o = 1,589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51^o = \cos 39^o = 0,7771$ $\cos 51^o = \sin 39 = 0,6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^o = 1,235$ $\cot 51^o = \tan 39^o = 0,8098$

$\sec 51^o = \csc 39 = 1,589$ $\csc 51^o = \sec 39^o = 1,287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^o = 0,2927$ $\cos 17^o = 0,9563$ $\sec 17^o = 1,046$ $\csc 17^o = 3,420$

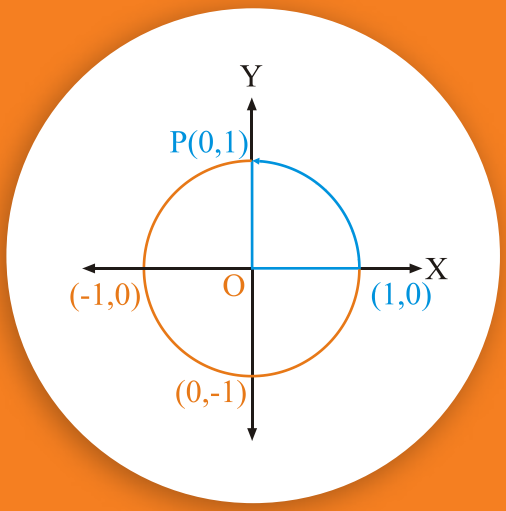
$\tan 17^o = 0,3057$ □ $\cot 17^o = 3,271$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\cos 12° \ 10' \ 20'' = \sin 77° \ 49' \ 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\tan 70° = \cot \ 20°$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $270^o, 180^o, 90^o, 0^o$ **او** 360° **زاویو مثلثاتي نسبتونه:**

آیا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $90^o = \frac{\pi}{2}$ **زاویې مثلثاتي نسبتونه:**

څرنګه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 90° زاویې په دویمه ضلع واقع دی، نو:

$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$

$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^o = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^o = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^o = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی) $\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^o = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

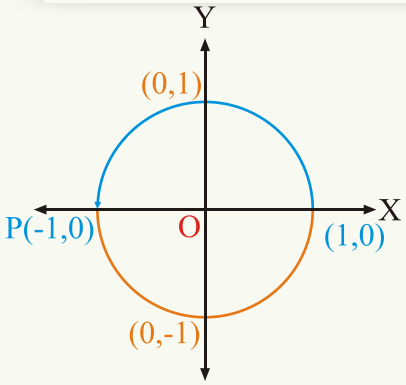
$\sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^o = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی) $\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^o = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

فعالیت

آیا کولای شئ، ووایئ چې $\cot 0^o$ او $\csc 0^o$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180° **زاویې مثلثاتي نسبتونه:** څرنګه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاویې په دویمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1 \qquad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

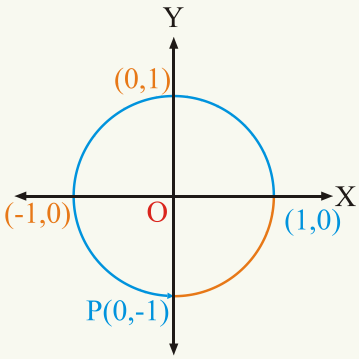
$$\tan 180^\circ = \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیدا کړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270° زاویې پر دویمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (تعریف نه دی)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360° = 2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

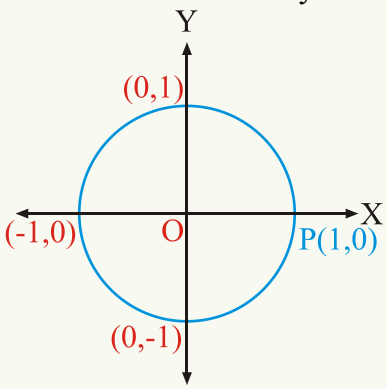
$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$$

$$\sin 2\pi = \sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^o = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 2\pi = \tan 360^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 2\pi = \cot 360^o = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوي نه دي)

$$\sec 2\pi = \sec 360^o = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1 \text{ ،} \csc 2\pi = \csc 360^o = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوي نه دي)



فعالیت

د 0° زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ او 360° زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوې نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270° = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوي نه دي

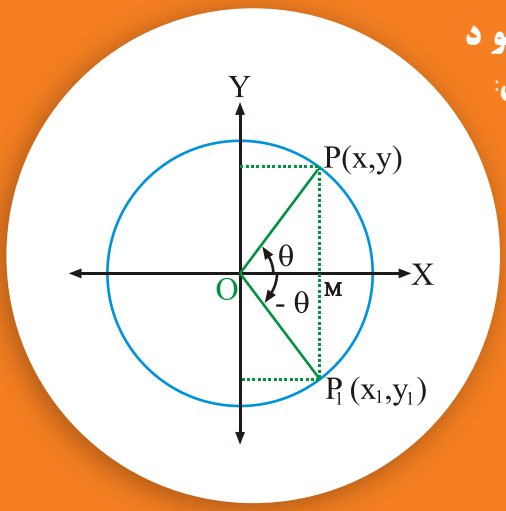
3- $\cos 90° = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوي نه دي

4- آیا $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاویې مثلثاتي نسبتونه را ښیي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاویو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پیدا کړای شو، نو باید ددې زاویو او د یوې حاده مثبتې زاویې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې پیدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې:

د θ حاده زاویه مثبت او له θ سره مساوي زاویه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاویه په معیاري حالت په مثلثاتي دایره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دویمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاویې پر دویمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه یو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \qquad \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\text{cec}\theta$, $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور څلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

پوښتنې

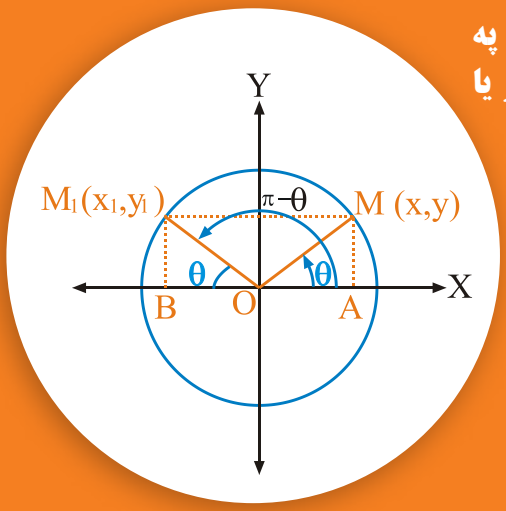
1 - د -360° یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د -45° یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 - د -90° یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې چې مجموعه او یا توپیر یې π یا 180° وي



- آیا د 150° او 135° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکولای شئ؟
- آیا $\sin 135°$ او $\sin 45°$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شئ چې $\sin 130°$ او $\sin 50°$ یو له بله سره څه اړیکه لري؟

دوې زاویې چې مجموعه یې π یا 180° وي، په پام کې نیسو. که θ یوه حاده مثبته زاویه وي بله زاویه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاویې په مثلثاتي دایره کې په معیاري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاویې په دویمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ یا $(180-\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

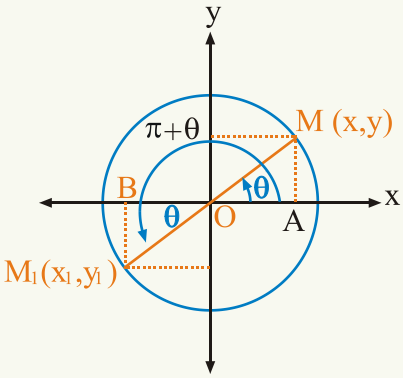
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

- د $(\pi-\theta)$ زاویې نور درې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

د هغو دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې توپیر یې 180° او یا π راډیان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کېږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.

څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $y_1=-y\ ,\ x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^o=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^{\circ} = \cos(180^{\circ} + 60^{\circ}) = -\cos 60^{\circ} = -\frac{1}{2}$$

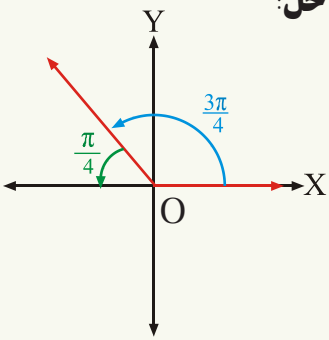
$$\tan 240^{\circ} = \tan(180^{\circ} + 60^{\circ}) = \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو sin ، cos او tan پیدا کړئ.

حل:

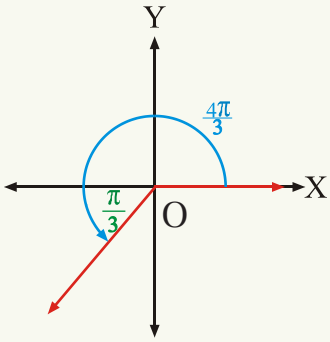


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

څرنګه چې $(180^{\circ} - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ربع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^{\circ} - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او څرنګه چې د $(180 + \theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاویې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180 + \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

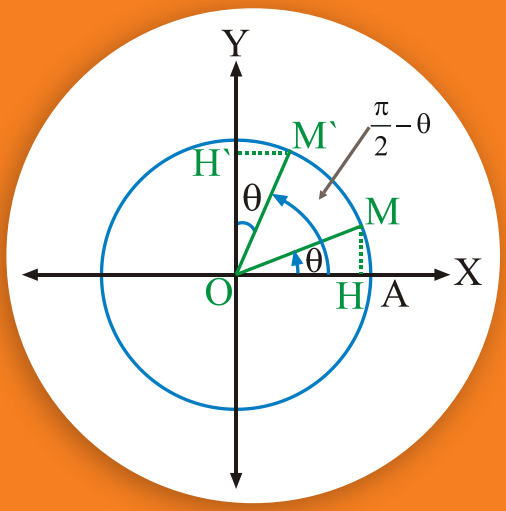
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^{\circ}) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې 90° یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د $150°$ او $60°$ زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ کېږي. څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ او $\csc(90-\theta) = \sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$\sin 23^{o} = 0{,}3907 \qquad \cos 23^{o} = 0{,}9205 \qquad \tan 23^{o} = 0{,}4245$

$\cot 23^{o} = 2{,}356 \qquad \sec 23^{o} = 1{,}086 \qquad \csc 23^{o} = 2{,}559$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\sin 67^{\circ} = \cos 23^{\circ} = 0.9205 \qquad \cot 67^{\circ} = \tan 23^{\circ} = 0.4245$

$\cos 67^{\circ} = \sin 23^{\circ} = 0.3907 \qquad \sec 67^{\circ} = \csc 23^{\circ} = 2.559$

$\tan 67^{\circ} = \cot 23^{\circ} = 2.356 \qquad \csc t67^{\circ} = \sec 23^{\circ} = 1.086$

فعاليت

که:

$\sin 8^{o}\ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^{o}\ 10' = 0.9899$

$\tan 8^{o}\ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^{o}\ 10' = 6.968$

$\sec 8^{o}\ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^{o}\ 10' = 7.040$

وي، د $81^{o}\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

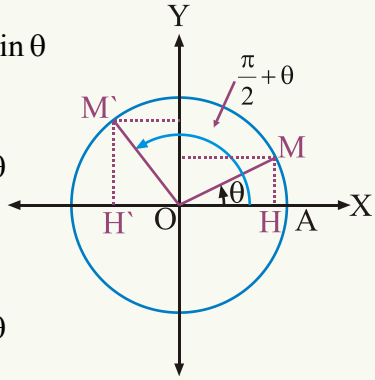
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دویم مثال: د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(90^o+30^o)=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(90^o+30^o)=-\sin 30^o=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(90^o+30^o)=-\cot 30^o=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^o=\cot(90^o+30^o)=-\tan 30^o=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^o=\sec(90^o+30^o)=-\csc 30^o=-2$$

$$\csc 120^o=\csc(90^o+30^o)=\sec 30^o=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 135° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 150° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

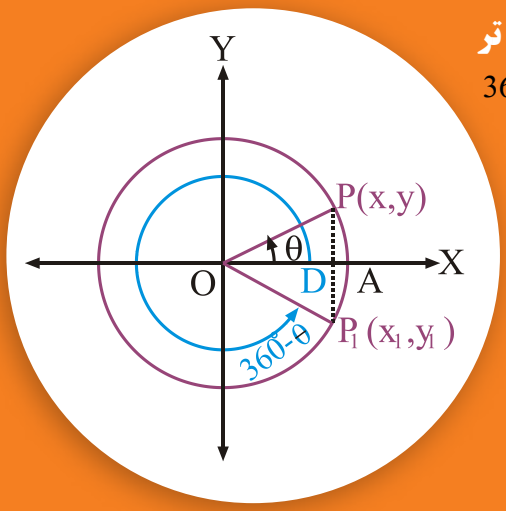
3- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = ?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = ?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې 360° یا 2π وي.

آیا ښودلای شئ چې

$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او

$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړیکې سمې دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والی څخه لرو چې:

$-y_1=y \Rightarrow y_1=-y$

$x_1=x \qquad |y_1|=|y|$

$\sin(360^\circ-\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$

$\cos(360^\circ-\theta)=x_1=x=\cos\theta$

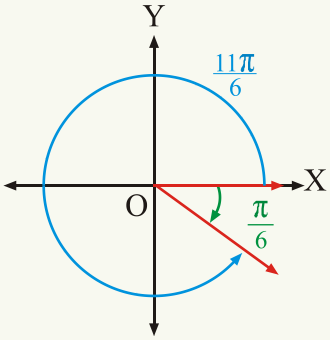
$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

په همدې ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاویو د $\sec,\cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې پیدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاویو مثلثاتي نسبتونو له اړیکو سره یې پرتله کړئ.

مثال: د 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ راډیانه زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^{o}=\sin(360^{o}-30^{0})=-\sin 30^{o}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^{o}=\cos(360^{o}-30^{o})=\cos 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^{o}=\tan(360^{o}-30^{o})=-\tan 30^{o}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^{o}=\cot(360^{o}-30^{o})=-\cot 30^{o}=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^{o}=\sec(360^{o}-30^{o})=\sec 30^{o}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

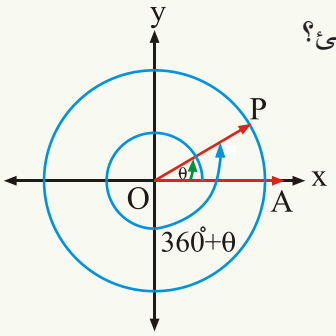
$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^{o}=\csc(360^{o}-30^{o})=-\csc 30^{o}=-2$$

فعالیت

د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:

- آیا $\sin 450^{o}$, $\tan 390^{o}$ او $\csc 450^{\circ}$ پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 90^{\circ}$، $\sin 450^{\circ}$ او $\sin 790^{\circ}$ سره برابر دي ؟ ولې؟



په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^{\circ}+\theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^{\circ}+\theta)=\sin\theta \qquad \cos(360^{\circ}+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(360^{\circ}+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(360^{\circ}+\theta)=\cot\theta$$

$$\csc(360^{\circ}+\theta)=\csc\theta \qquad \sec(360^{\circ}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 405^o = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^o + 45^o) = \sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^o = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^o + 45^o) = \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^o = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^o + 45^o) = \tan 45^o = 1$$

$$\cot 405^o = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^o + 45^o) = \cot 45^o = 1$$

$$\sec 405^o = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^o + 45^o) = \sec 45^o = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^o = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^o + 45^o) = \csc 45^o = \sqrt{2}$$

دویم مثال: د 1500° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^o = \sin(4 \cdot 360^o + 60^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^o = \cos(4 \cdot 360^o + 60^o) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^o = \tan(4 \cdot 360^o + 60^o) = \tan 60^o = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^o = \cot(4 \cdot 360^o + 60^o) = \cot 60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^o = \sec(4 \cdot 360^o + 60^o) = \sec 60^o = 2$$

$$\csc 1500^o = \csc(4 \cdot 360^o + 60^o) = \csc 60^o = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دریم مثال: د 900° او -930° زاویو sin ، cos او tan پیدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

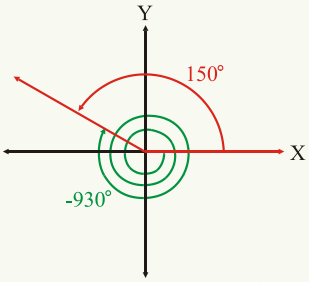
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

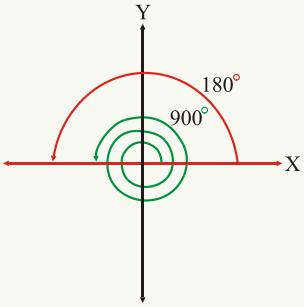
$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$



$900^\circ = (2\cdot 360^\circ + 180^\circ)$

څلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

حل:

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \qquad \sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0} \qquad \tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^{o}-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^{o}-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^{o}-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^{o}-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^{o}-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^{o}-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^{\circ}+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^{\circ}+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^{\circ}+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^{\circ}+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^{\circ}+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^{\circ}+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 480° او 390° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600° او 300° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830° او د $(1095^{\circ}\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د $780^{o}, -300^{o}$ او 420° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

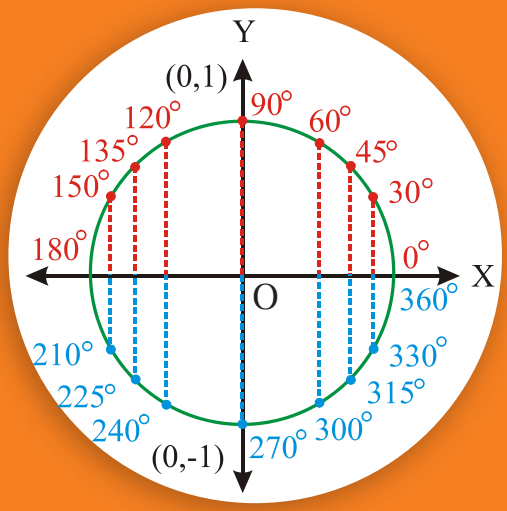
9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^{\circ}) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثلثاتي تابع ګانو ګراف

- آیا کولای شئ ووایاست چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x) = \sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x) = \sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهېږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوی وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x) = y = \sin x$ او $f(x) = y = \cos x$ د تابع ګانو Range د (1) او (−1) تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y = \sin\theta$ او $y = \cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعالیت

وښیاست چې $-1 \le \sin\theta, \cos\theta \le 1$ دی.

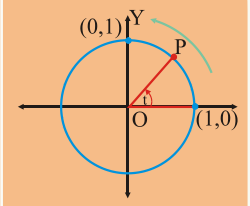
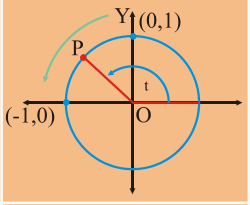
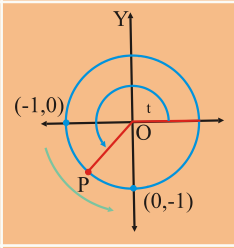
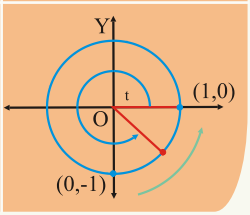
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چېرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x \in D_F$ وي $x + t$ او $x - t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t) = f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t) = f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

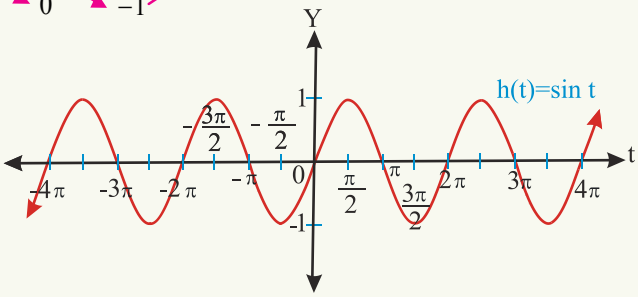
اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر (−1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر -1 پورې تناقص کوي	له (−1,0) څخه تر (0,−1)	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.

لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0

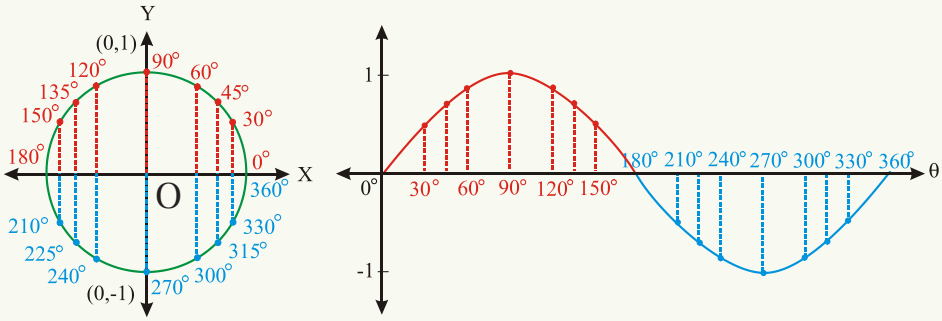


او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقریبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50
180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library



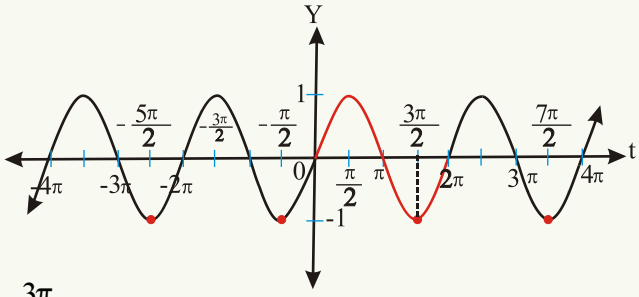
دې ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالو کې یو شان دی.

فعالیت

په $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 4\pi$ او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنګه چې د sint قیمت د (1) او (1-) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنګ په شکل کې ښودل شوي دي.

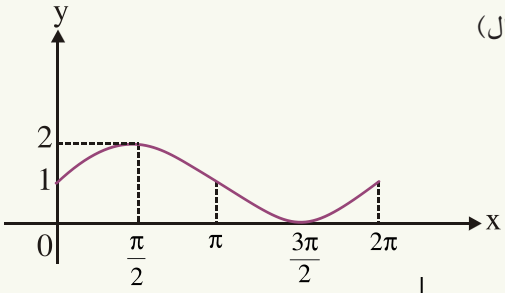


د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنګ ښودلی شوي دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ څخه عبارت دي چې k یو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع گراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ اوRange یې $[0,2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1 ↗	2 ↘	1 ↘	0 ↗	1

د sine او cosine د تابع گانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2} t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ دی او د $y = a \sin bt$ او $y = a \cos bt$ د تابعگانو لمن د $|a|$ دی($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2 \sin 4t$ لمن $|a| = |-2| = 2$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ دی.

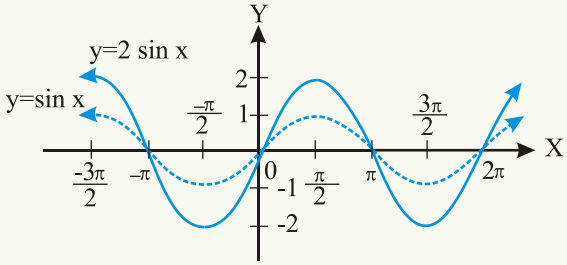
دریم مثال: د $y = 2 \sin x$ تابع گراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع گراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2 \leq y \leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وایي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پریود هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

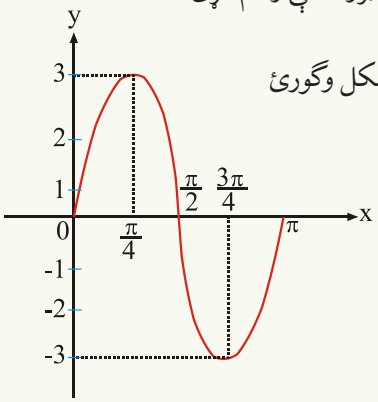
دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



څلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

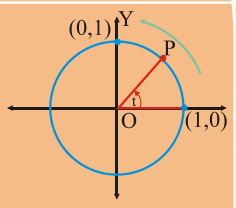
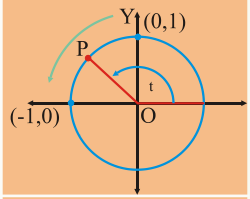
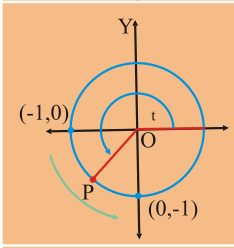
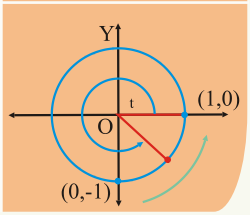
کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

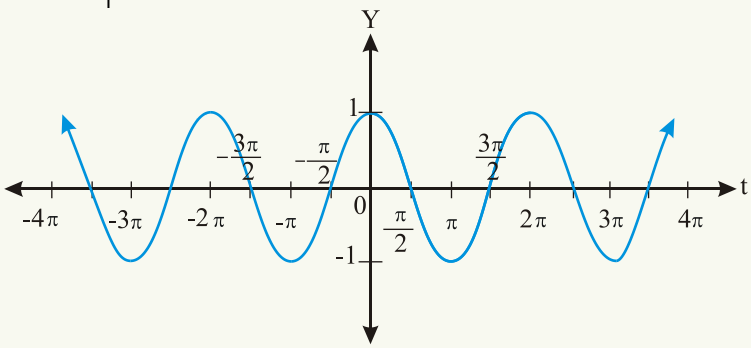
دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$ د تابع گراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وگورئ.

اړونده شکل	cost یا د p ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر (−1,0) پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له (−1,0) څخه تر (0,−1) پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

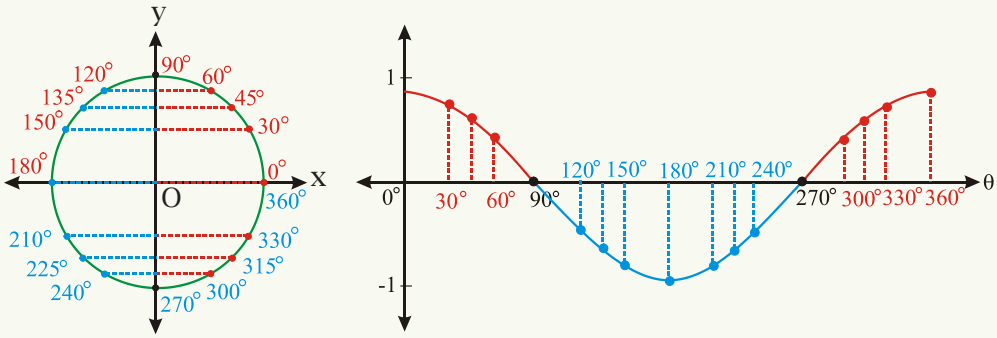
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل و ګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:



د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه چې د cost د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د cost د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د cost د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t) = \cos t$

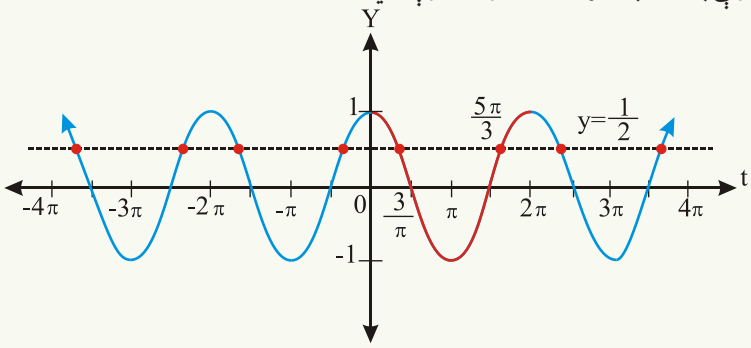
t	واقعي	تقريبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t) = \cos t$ تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوی وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاویې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y = \cos t = \frac{1}{2}$ دي، په شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t=\frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t=\frac{1}{2}$ وي، له $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y=\cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y=\sin t$ او $y=\cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$, $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t$ دی.

د $f(t)=\sin t$ تابع طاقه او $f(t)=\cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t)=-\sin t$ او $\cos(-t)=\cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

$g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$ $\qquad$ $f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$

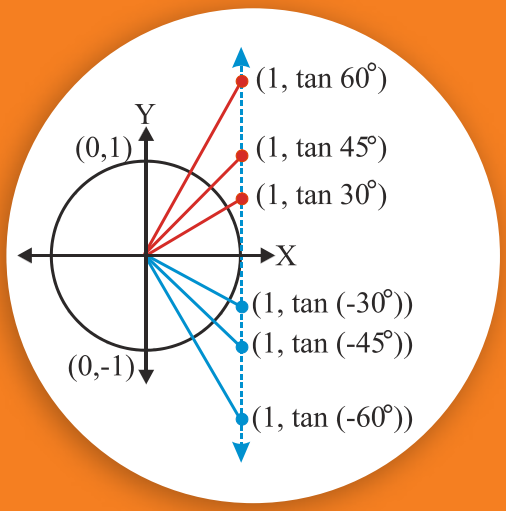
2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t=1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\cos t=0$ دی؟

4- د $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi,6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهېږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

څرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

څرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د (0,1) ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\ldots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د (0,−1) ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دي، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\ldots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع Range د

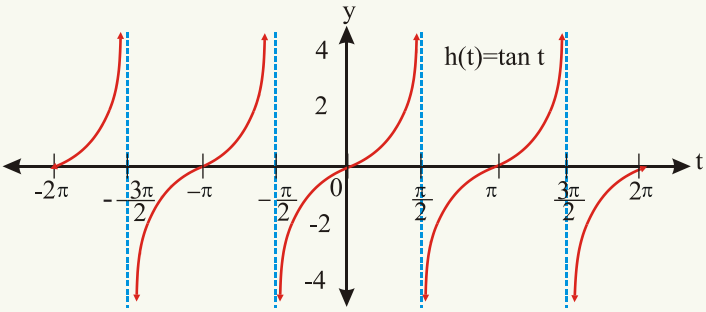
(c) ketabton.com: The Digital Library

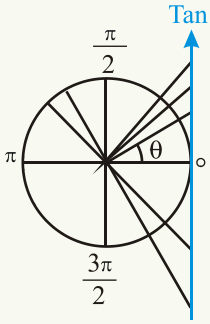
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t \pm \pi) = \tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړئ، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په د ویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

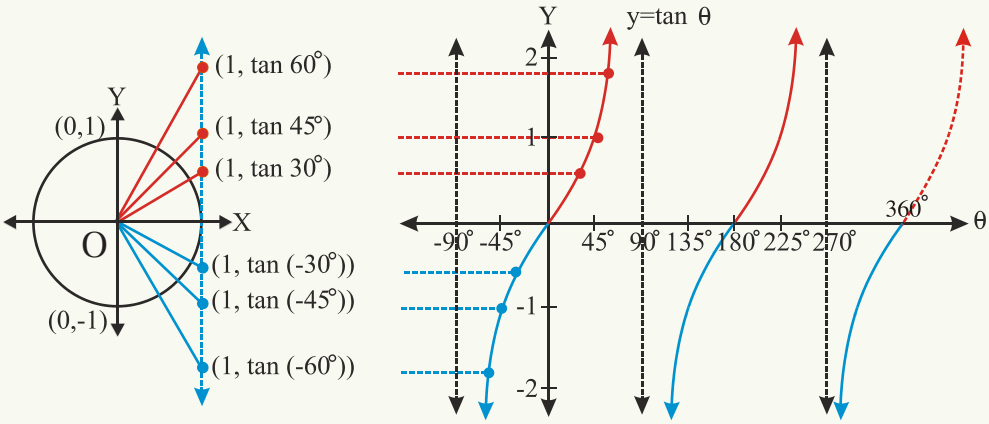




که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقیقی	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبی	تعریف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

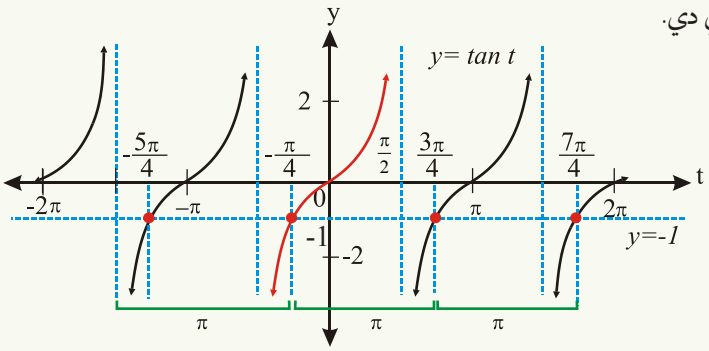
(c) ketabton.com: The Digital Library



څرنګه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د tan تابع پریود π دی او د tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خوا که $b > 0$ وي، د $f(t) = \tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t) = \tan 2t$ پریود $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیدا کړئ چې $\tan t = -1$ وي.

حل: څرنګه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکراریږي، نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y = \tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



څرنګه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه چې $\tan t = -1$ دي مساوي دی په: $t = -\frac{\pi}{4} + K\pi$ (K یو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي محانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډیز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه / جفته
sine	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقیقي عددونو سټ	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
cosine	$f(t) = \cos t$	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
tangent	$f(t) = \tan t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاقه

یا په بل عبارت:

$$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$

$$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$$

پوښتنې

1 - د t د زاویې په کوم قیمت د tan t د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 - د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

3 - د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

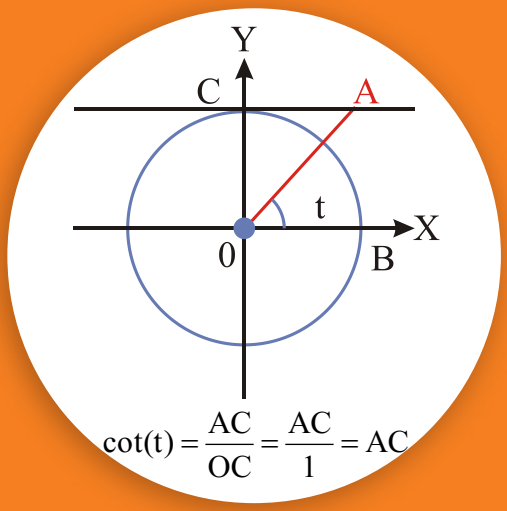
a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 - که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1-څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ له $-\infty$ څخه تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوټانجانټ د تابع ګراف



- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

څرنګه چې $\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

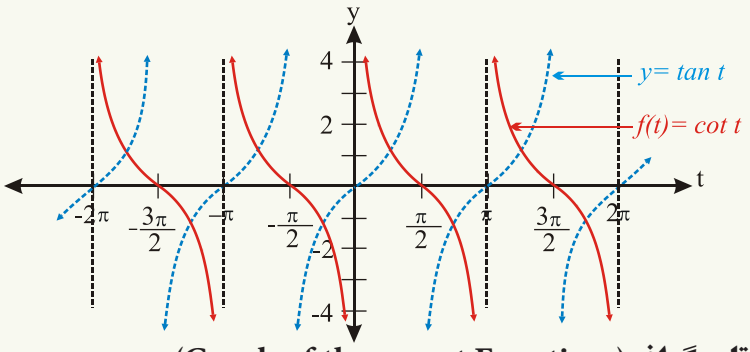
د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi, k \in z\}$ یا $dom_{cot} = \{t \in IR / \sin t \neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t) = \cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t = k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي (cot $0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړی او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع گراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) گرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړیکه لري، ځکه چې $\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\dfrac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاویې قیمت له صفر څه تر $\dfrac{\pi}{2}$ یا $90°$ پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې کېږي، د $\dfrac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعریف شوی نه دی ، که t له $90°$ لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، نو د $\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

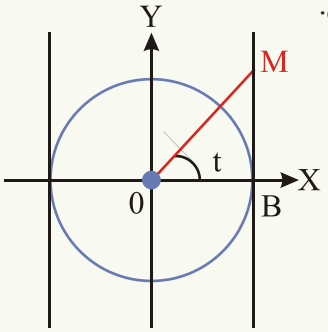
په $t=\dfrac{3\pi}{2}=270°$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t قیمت له $270°$ څخه تر $360°$ زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = IR - \{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$$

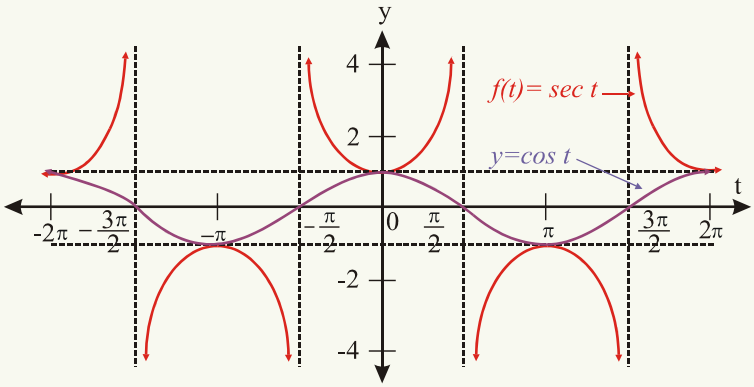
او $\text{Range } \sec(t) = IR - \{t \mid -1 \le t \le 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال څخه یا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعریف ساحه (*Domain*) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی پرته د $\dfrac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: څنګه چې لیدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

sec(t) تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{OB}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ -1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 1

فعالیت

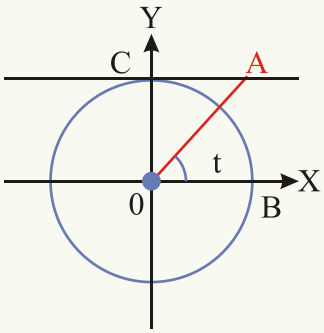
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع گراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع گراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

څرنګه چې $\csc t=\frac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتېږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي.

په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي(تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي(تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $O\overset{\Delta}{C}A$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

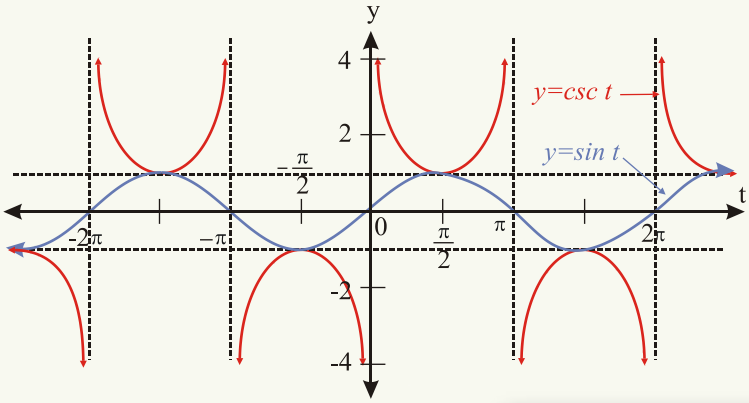
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا csc(t) تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t) \le -1$ او یا $\csc(t) \ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t) = -3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

طاقه یا جفته	پریود	Range	Domain	سمبول
جفته	2π	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په، -1 لوی یا مساوي په (1)	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	$f(t) = \sec t$

(c) ketabton.com: The Digital Library

طاقه	2π	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\csc(t)$
طاقه	π	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\cot(t)$

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ يا (t) د زاويې په زياتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کمېږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)$ -1 $c)$ نه دی تعريف شوی

4 – د sec او csc تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقيقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) درې واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزايده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزايده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

- د $\frac{R}{\pi}=\frac{g}{200}=\frac{d}{180}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاويه له يوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
- يو راډيان هغه مرکزي زاويه ده چې د مقابل قوس اوږدالی يې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.
- θ د راډيان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاويې مقابل قوس او r د دايرې شعاع ده.
- که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاويه په معياري حالت کې ده.
- که په معياري حالت کې د دوو يا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې وي، دا زاويې کوټرمينل زاويې نومېږي.
- مثلثاتي دايره هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالی يې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ددې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د cos تابع گراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع گانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع گانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع گانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع گانې طاقې دي.

• که د يوې تابع گراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = -f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع \ θ	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$+\infty$ / $-\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

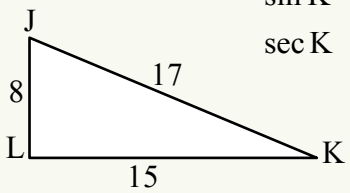
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 – $42,6033°$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 – که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړي وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



$\sin K$ $\sin J$ $\cos J$ $\cos K$ $\tan K$ $\tan J$

$\sec K$ $\sec J$ $\cot J$ $\cot K$ $\csc J$ $\csc K$

4 – که د یوې دایرې شعاع $20cm$ او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\quad -7\pi\ ,\quad -\frac{11\pi}{2}\ ,\quad -500°\ ,\quad 900°\ ,\quad -\pi$$

7 – لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\quad \frac{\pi}{15}\ ,\quad \frac{\pi}{4}\ ,\quad \frac{\pi}{3}\ ,\quad \frac{\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{6}\ ,\quad \frac{17\pi}{45}$$

8 – په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

9 – که د یوه ټراکټور د کوچنې ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر $120cm$ وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د $70°$ درجو په اندازه وخرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

10 – یو خرخ په یو ساعت کې $300\,Re\,V$ دورانونه کوي، دا خرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه گرځي؟

11 – د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ گراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعي زاویې دي، که $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^{R}$ وي: د دې څلور ضلعي زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^{\circ}$ b) $\frac{\pi}{6}$ radian c) $\frac{100}{3}$ g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاویو مجموعه $17°$ او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 -لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47°\ 15'\ 36''$ $15°\ 24'\ 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

$23.16°$ $4.2075°$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 - د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. *b*) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. *d*) درې واړه سمې دې.

e) هېڅ یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 -داسې زاویه پیدا کړئ چې که د ګراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240 ګراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 ګراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 - د $4185°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 - د $(-3660°)$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 - د $y = \cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

هم متزایده او هم متناقصه ده $c)$ متناقصه ده $b)$ متزایده ده $a)$

28 - د $y = \tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 - د $f(t) = \cos(t)$ تابع:

نه جفته او نه طاقه ده c) طاقه ده b) جفته ده a)

30 - هغه تابع چې ګراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

نه جفته او نه طاقه ده c) طاقه ده b) جفته ده a)

31 - د $y = \cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 - $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 -کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$
d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 – کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$
c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 – $\cot 0° = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

36 – $\cos 9\pi = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)\frac{1}{2}$

37 – $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

38 – د $2430°$ – له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 – $\sin(270° - \theta) = ?$

$a)\sin\theta$ $b)-\sin\theta$ $c)\cos\theta$ $d)-\cos\theta$

40 – $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

41 – $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

42 – $\tan(-15\pi) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

43 – $\sec(-1530°) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 - $\cot(-2430°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 - $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 - $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

47 - $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)-\cot\theta$ $c)-\tan\theta$ $d)\tan\theta$

48 - $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)-\tan\theta$

49 - $\sin(-1980°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\frac{1}{2}$

50 - $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\frac{1}{2}$

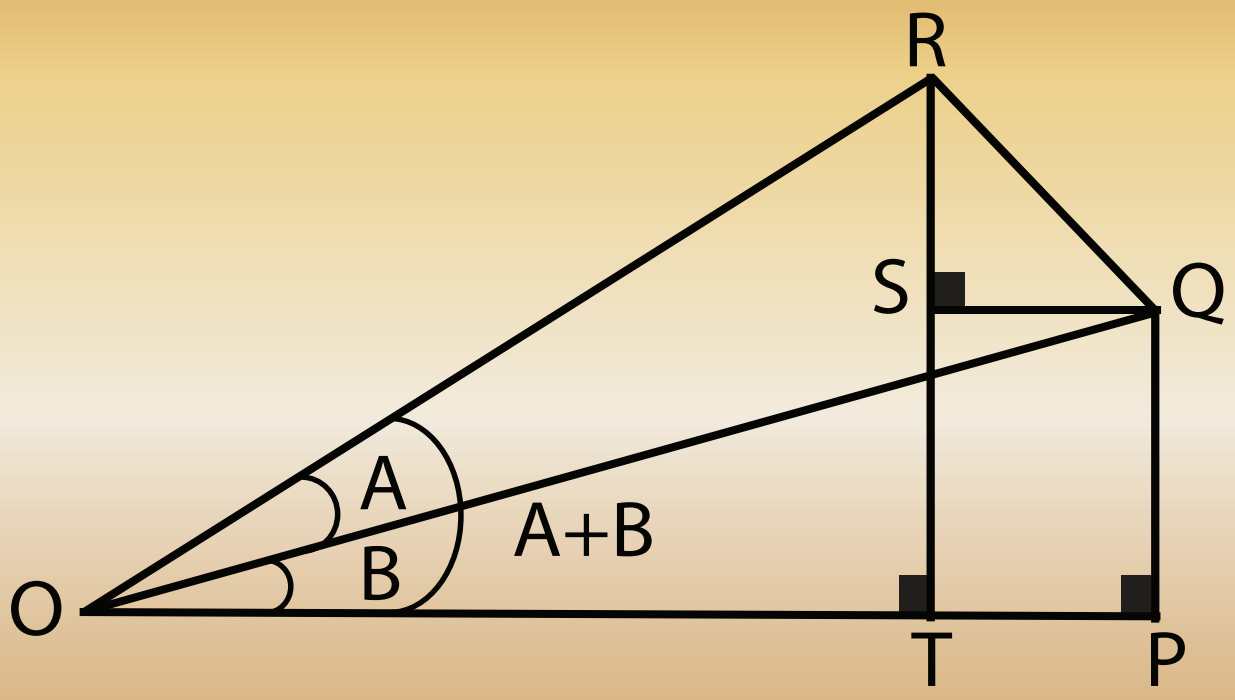
51 - له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

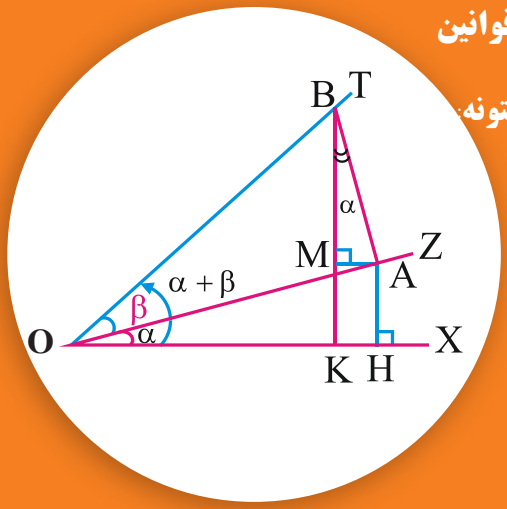
پنځم څپرکی
د مثلثاتو تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\cos\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلا کوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلا کوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\mathrm{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\mathrm{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطیل دی، په نتیجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاویه د α له زاویې سره مساوي ده (ددې دواړو زاویو ضلعي یو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A)=\cos\alpha=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{MB}{\sin\beta}\Rightarrow\overline{MB}=\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A)=\sin\alpha=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{MA}{\sin\beta}=\frac{\overline{KH}}{\sin\beta}\Rightarrow\overline{KH}=\sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB}=\overline{KM}+\overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM=AH=\sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول** : په همدې ډول که د $\overline{OK}=\overline{OH}-\overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ وېشو:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$ ، $\sin 120°$ ، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پیدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ$$

$$\sin 120^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos 90^\circ\cos 30^\circ-\sin 90^\circ\sin 30^\circ$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاویو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعي په فورمولونو کې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$

$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta}$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270^\circ-\theta)=\cos 270^\circ\cos\theta+\sin 270^\circ\sin\theta$$
$$\cos(270^\circ-\theta)=0\cdot\cos\theta+(-1)\sin\theta=-\sin\theta$$

څلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=\frac{\tan 180^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 180^\circ\cdot\tan 60^\circ}=\frac{0-\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$=-\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211^\circ\cos 59^\circ+\cos 211^\circ\sin 59^\circ=-1$ او
$\cos 211^\circ\cos 149^\circ-\sin 211^\circ\sin 149^\circ=1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعي د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیدا کړئ.

5- د جمعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعي د فورمولونو په مرسته د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پیدا کړئ $105^\circ=(60^\circ+45^\circ)$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیدا کړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتـی نسـبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

څرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

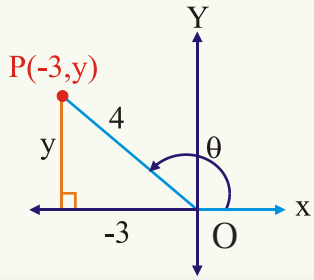
حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

$$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$$

$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$

فعالیت

که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړي.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهېږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ وېشو:)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنګه کولای شو چې د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\qquad\text{یا}\qquad\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$

$$-2\sin^2\theta \quad =-1+\cos 2\theta$$

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{يا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قیمت په دویمه ربع کې منفي دی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $180° < \theta < 270°$ ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفی ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: که $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: وښیاست چې $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=2$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $120°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $240°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنۍ ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پیدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پیدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پیدا کړئ.

6 - د $15°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه د $30°$ زاویې له جنسه پیدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قیمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \quad (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$
$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos 180°$ د $\cos 60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

د $\tan 3\propto$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\dfrac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan 135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan 135° = \frac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1-3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: وښیاست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ **مثلثاتي نسبتونه**:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\square + \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta - \tan\beta\tan\square + \tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135°$ د $\sin(30° + 45° + 60°)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل:

$$\sin 135° = \sin(30° + 45° + 60°) = \sin 30° \cos 45° \cos 60°$$
$$- \sin 30° \sin 45° \sin 60° + \sin 45° \cos 30° \text{co}60° + \sin 60° \cos 30° \cos 45°$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90°$ ، $\cos 90°$ او $\tan 90°$ په ترتیب سره د $\sin 30°$ ، $\cos 30°$ او $\tan 30°$ له جنسه پیدا کړئ.

2- $\cos 135°$ او $\tan 135°$ پیدا کړئ. $135° = (30° + 45° + 60°)$

3- $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = ?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\text{Cos}(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

5- وښیاست چې:

$$4\cos x \cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$
$$\tan x \tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعي او تفاضل بدلول د ضرب د حاصل په شکل

$$\sin 30° + \sin 60° = ?$$
$$\tan 45° + \tan 60° = ?$$

آیا د $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ قیمت پیدا کولای شئ؟

څرنګه چې پوهېږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \ldots(I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \ldots(II)$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{_A \mp B = -q} \\ 2B = P-q \\ B = \dfrac{P-q}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{A-B=q} \\ 2A = P+q \\ A = \dfrac{P+q}{2} \end{array}$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې: $\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښیاست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

څرنګه چې: $A+B=P$, $A-B=q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

یا

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

څرنګه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

نو:

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

نو:

$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

$$a:\qquad \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

$$b:\qquad \cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin\frac{75°+15°}{2}\sin\frac{75°-15°}{2} = -2\sin 45°\sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعې یا تفاضل شکل ته یې واړوئ.

$$2\cos 95°\sin 13° = \sin(95°+13°) - \sin(95°-13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38°\cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38°+61°) + \cos(38°-61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34°\sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34°+28°) - \sin(34°-28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2\cos 45°\cos 15° = \cos(45°+15°) + \cos(45°-15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta\cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta+4\theta) + \sin(10\theta-4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \cos x\cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y - \sin x\sin y)$$

$$+ (\cos x\cos y + \sin x\sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y + \cos x\cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x\cos y) = \cos x\cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\mathrm{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\sin 5x \cos 8x$ $\quad$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad$ $\cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$ $\quad$ $\cos 5x \sin 8x$ $\quad$ $\cos 7\theta \sin 5\theta$

$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$ $\quad$ $2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $\quad$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad$ $\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad$ $\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$

$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad$ $\sin 8\theta + \sin 4\theta$

$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\quad$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$

$\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad$ $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (دیو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښیاست چې: $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$

7- $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

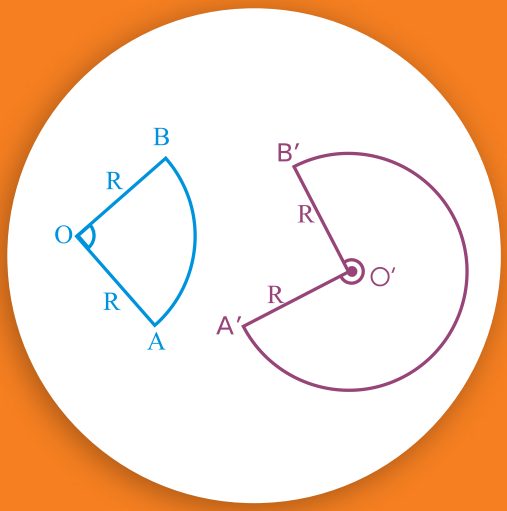
8- د جمعي یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{mAB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\overset{\frown}{AB}$ او $m\,A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي.

که د یو قوس مقدار θ° او شعاع یې R وي، د θ° د زاویې د مقابل اوږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L=\frac{45^\circ}{180^\circ}\cdot\pi\cdot 14cm=\frac{14}{4}\pi cm\approx\frac{14}{4}\cdot\frac{22}{7}cm=11cm$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شـعاع 14cm وي.

$$L=R\theta$$

$$L=14cm\frac{\pi}{4}\approx 14cm\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4}=11cm$$

دریـم مثال: که په یوه دایره کې، د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې: $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L=R\theta$$

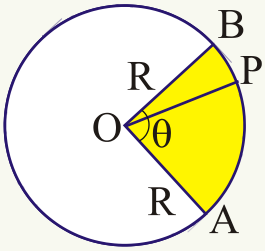
$$R=\frac{L}{\theta}=\frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}}=3\pi\cdot\frac{4}{\pi}=12cm$$

د یـوې دایرې قطاع(Sector of a circle): د یوې دایرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دایرې مرکز O او شعاع یې R ده، په پام کې نیسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس یوه نقطه ده، قطاع ویل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډیان وي، θ ته د قطاع زاویه وایي.

یا قطاع په دې ډول هم تعریفولای شو:

د یوې دایرې د سطحې هغه برخه چې د دایرې د دوو شعاع ګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\left.\begin{array}{ll} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\left.\begin{array}{ll} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{array}\right\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې Radian $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\,cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

د قوس طول $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5 \cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې 7cm شعاع لري، ددې دایرې محیط، مساحت او د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی یې پیدا کړئ او هم ددې دایرې د قطاع مساحت پیدا کړئ چې $\theta = 60^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7\,cm = 44\,cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7} \cdot 49\,cm^2 = 154\,cm^2$$

$$L = R\theta = 7 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \;,\; A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 49\,cm^2 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 25.6\,cm^2$$

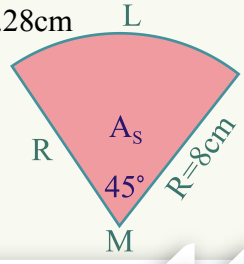
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع 8cm او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14) \cdot \frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R \frac{\theta}{360°} = 2 \cdot 8cm \cdot 3.14 \cdot \frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R \frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2 \cdot 8cm \approx 22.28cm$



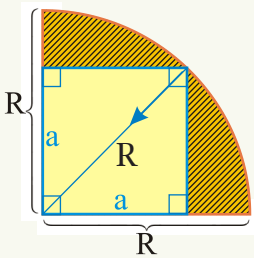
فعالیت

که د دایرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پیدا کړئ چې د قوس اندازه یې $180°$ ، $216°$ او $324°$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوي ده، د خط شوي برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده،د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$ دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$ دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.

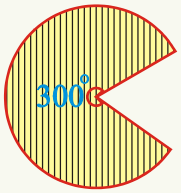


نود خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې 1cm او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360°$ $2\pi R$

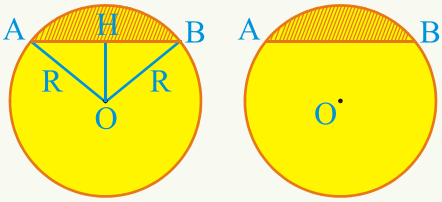
$300°$ x $x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3}$ cm



د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)$cm

د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډیان وایي.

د قطعي مساحت: د θ راډیان د قطعي مساحت چې ددایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

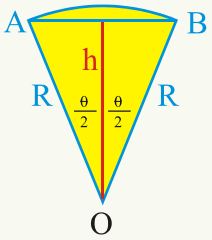
ځکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-$ S_{OAB} د قطاع مساحت $=S$ د قطعي مساحت

په لاندې شکل کې لیدل کېږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقین دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$\text{د } A\overset{\Delta}{O}B \text{ مثلث مساحت}=\frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتیجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $S_{OAB}=\frac{R^2\sin\theta}{2}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعي مساحت } S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دایرې د یوې قطاع زاویه $\theta=71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دایرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعې مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6{,}8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

د قطعې مساحت $= 28{,}64cm^2 - 21{,}96cm^2 = 6{,}68cm^2$

دویم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

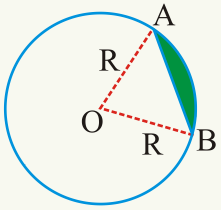
$\overset{\frown}{AB} = 60°$, $R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi cm^2 - 36\sqrt{3}cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

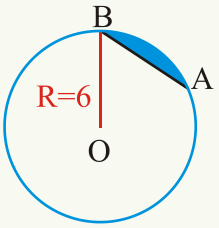


فعالیت

د هغې دایرې د قطعې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې 6cm او $\overset{\frown}{AB} = 120°$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعې مساحت پیدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډیانه دی:



$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$

$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$

پوښتنې

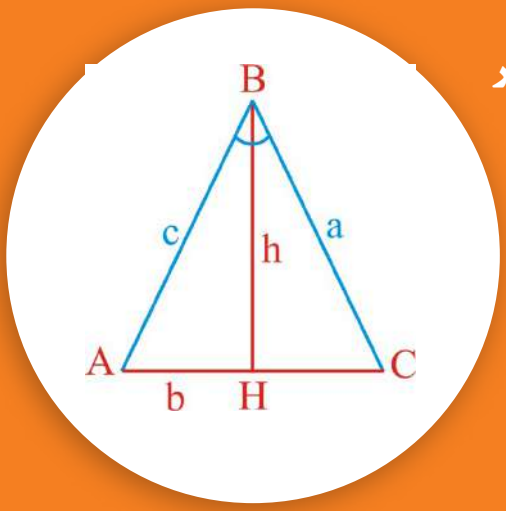
1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع 12cm وي.

3- که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د 3,8 راډیان او 27 راډیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له جنسه:



که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی 4cm او 8cm وي او ددې ضلعو تر منځ زاویه 30° وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c\sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو چې د یوه مثلث مساحت ($S = \frac{\text{قاعده} \cdot \text{ارتفاع}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3{,}5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاویه یې $B = 47{,}5°$ وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

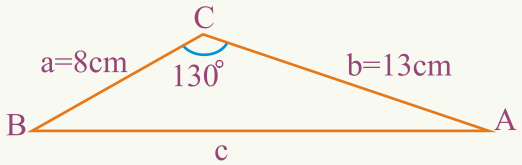
$$\sin 47.5^{\circ} = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5cm \cdot 6cm \cdot \sin 47{,}5^{\circ} \approx 7{,}74cm^2$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیدا کړئ.

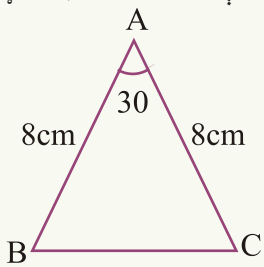
حل:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^{\circ} \approx 39.83\,cm^2$$



$(\sin 130^{\circ} = 0.7660)$

دریم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقین مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC} = 8cm$ او $A = 30^{\circ}$ ده، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^{\circ}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16cm^2$$

د مثلث د مساحت پیدا کول د دریو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاویې د نیمایي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:
د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a, b, c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمایي ده $(p = \frac{a+b+c}{2})$ په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \square \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} \quad \square \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{\frac{2bc}{2}}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

څرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \square \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \square \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: څرنګه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

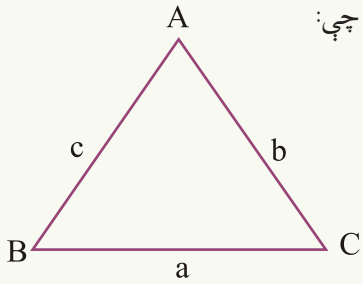
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

څرنګه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهېږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

څرنګه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a = 5cm \qquad b = 4cm \qquad c = 3cm$

حل:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5cm+4cm+3cm}{2} = 6cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$

$$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $b = 5cm$, $c = 6cm$ او $a = 4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یوه مثلث ضلعې $a = 18cm$، $b = 24cm$ او $c = 30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29,7ft$ ، $b = 42,3ft$ او $c = 38,4ft$ وی.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55,2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

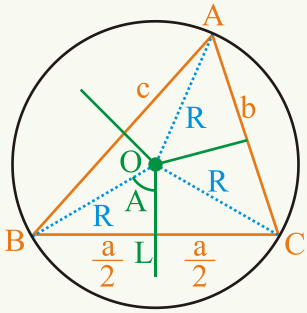
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي. په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

ځکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad (\sin A = \frac{2S}{bc})$$



او د $R = \frac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6{,}98cm \quad , \quad p=\frac{11+12+13}{2}=18cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 18cm ، 24cm او 30cm وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

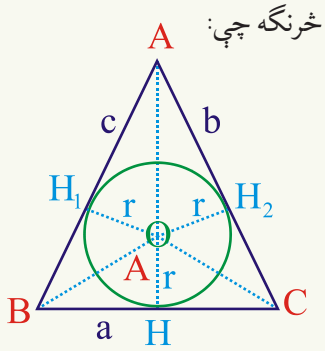
د $O\overset{\Delta}{A}B$ + د $O\overset{\Delta}{C}A$ + د $O\overset{\Delta}{B}C$ مثلثونو مساحت = د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع او د محاطي دایرې مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دایرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د یو قایم الزاویه مثلث دوه قایمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شاع ګانې یې پیدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

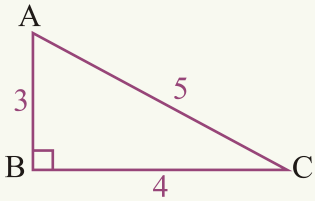
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې که قایمې ضلعې یې m او n راکړ شـوي وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایرې شعاع یې پیدا کړئ.

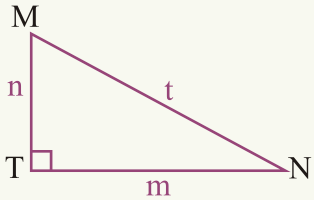
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محیطی دایری شعاع $R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعالیت

د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی یې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطي او محاطي دایرو د شعاع ګانو پیدا کول:

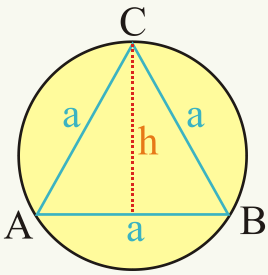
$$\sin A = \sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ABC مثلث مساحت $S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د یو متساوي الاضلاع مثلث محیط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې پیدا کړئ.

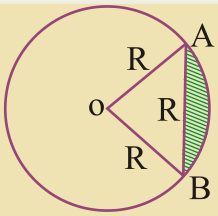
حل: د دې مثلث یوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع یې R ده. د O په مرکز دایره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تیرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$ ، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- د جمعې او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \text{ ، } \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \text{ ، } \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$
$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta$$
$$+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاویې(θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دایرې مرکزي زاویې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي:
- د قطاع مساحت د($A_{sec\,tor}=\frac{1}{2}R^2\theta$ د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پیدا کېږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاویې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\ S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

• د یوې زاویې د نیمایي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د یوه مثلث د محیطي دایرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

یا $R = \frac{abc}{4S}$

• د یوه مثلث د محاطي دایرې شعاع د $r = \frac{s}{p}$ یا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\qquad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\qquad \cos(150°-45°)$ $\qquad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\qquad \sin(135°-180°)$ $\qquad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\qquad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$, $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$

$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$, $2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c)-\sin\theta \qquad d)\cos\theta$

12- د جمعی او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$, $\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta \qquad b)2\cos\alpha\cos\beta \qquad c)-2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتی نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

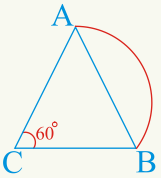
$\cos 100^\circ \sin 50^\circ$, $\cos 40^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 8\theta \cos 10\theta$, $\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$

16- لاندې د مثلثاتی نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\sin 80^\circ-\sin 72^\circ$. $\sin 12\theta+\sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د 80° قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = ?$

$a)\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $b)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $c)\ \sqrt{3}$ $d)\ -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45^\circ+\theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ درې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ$ مساوي دی په:

$a)\cos 74^\circ$ $b)\cos 46^\circ$ $c)\sin 74^\circ$ $d)\sin 46^\circ$

-25 $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ$ مساوي دی په:

$a)\cos 17^\circ$ $b)\cos 45^\circ$ $c)\sin 17^\circ$ $d)-\sin 17^\circ$

-26 $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$ مساوي دی په:

$a)\cos 115^\circ$ $b)\sin 115^\circ$ $c)\cos 45^\circ$ $d)\sin 45^\circ$

-27 که $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha-\beta)$ پیدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$، $\cos\square = -\dfrac{3}{5}$ وي او د θ او $\square$ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta-\square)$ پیدا کړئ؟

-29 وښیاست چې: $\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)} = \tan x \cdot \tan y$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

30- $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t$ $b)\cos t$ $c)-\sin t$ $d)-\cos t$

31- وښیاست چې: $\frac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \sin\theta$ دی؟

32- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

33- $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

34- $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع یې $2m$ او مرکزي زاویه یې $0,5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2$ $b)\ 2m^2$ $c)\ 1m^2$ $d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د یوې دایرې د یوې قطاع مساحت $200cm^2$ او مرکزي زاویه یې 2 radian وي، د دې دایرې شعاع مساوي ده په:

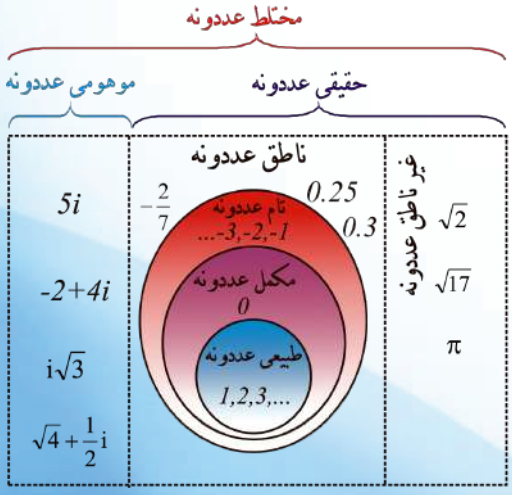
a) 14.14cm b) −14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.

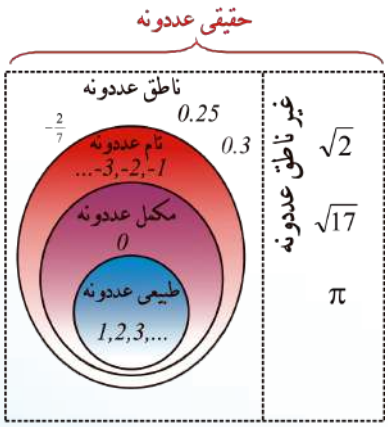
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مختلط عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلط عددونه
(Complex Numbers)

$z = \sqrt{3} - 2i$

Real Part of $z = ?$

Imaginary Part of $z = ?$

آیا ویلای شئ چې د $x^2 + 9 = 0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهېږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$\sqrt{-1} = i$ یا $i^2 = -1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $\sqrt{-1} = i$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)\cdot 16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = i\sqrt{16} = \pm 4i$

دویم مثال: د $x^2 + a^2 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2 + a^2 = 0$$
$$x^2 = -a^2$$
$$x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)} = \pm a\sqrt{-1} = \pm ai$$

ai او $-ai$ موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کېږي چې د $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot(i) = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = [(\sqrt{-1}^2)]^2 = (-1)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(i) = i \qquad i^6 = (i)^4 \cdot (i)^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځايه نتيجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان n= 4 يا يوداسې عددوي چې پر ځلورو د وېش وړوي، نو له يوه (1) سره مساوي دی.

دريم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعاليت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قيمت پيدا کړئ.

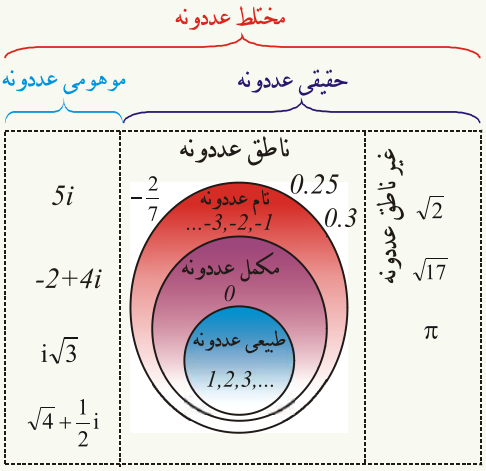
ځلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پيدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) يې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم يادېږي. د i طبيعي توانونه يو له i، 1، -i او 1- عددونو څخه دي. د حقيقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سټونه د تاریخ په اوږدوکې د اړتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یا ګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقی عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په بل عبارت منفي عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه ګوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندی کړ. که یو مختلط عدد په z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د z عدد حقیقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کېږي.

$C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ i^2 = -1\}$ د z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وایي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a یو خالص حقیقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقیقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(b = 0 \quad a = 0)$ ، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

حل: په $1 - i$ کې حقیقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په 5i کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې 5i ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل ښودل شوي دي.

معیاری شکل $(z=a+bi)$	مختلط عددونه
$0+6i$	$6i$
$-9+0i$	-9
$0+0i$	0
$9-i$	$9-i$
$-1+i$	$i-1$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

3- $-3i$, $5+3i$, $7-i$ $\quad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) −1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ±4 , b) −4 , c) ±4i , d) ±2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګونې عملیې

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

$$4i+3i=7i$$
$$4i-3i=i$$
$$4i-(-3i)=7i$$

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$
$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$
$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عملیه کې د تبدیلۍ خاصیت (Commutative Property)

صدق کوي یعنې: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعالیت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عملیه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل یو حقیقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ یو حقیقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ یو حقیقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعالیت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعي او ضرب په عملیو کې د تبدیلۍ خاصیت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل یو حقیقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع یې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفریق یې کړئ. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسیم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$ $\qquad \frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

$$(1+2i)+(-1-2i)=0$$

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي.

دویم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وی، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعې معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې: $(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$

فعالیت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه په لاس راغلي وي یعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دویم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوې وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعی څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفريق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$, $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$, $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفريق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 - که $(x,y\in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عملیې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

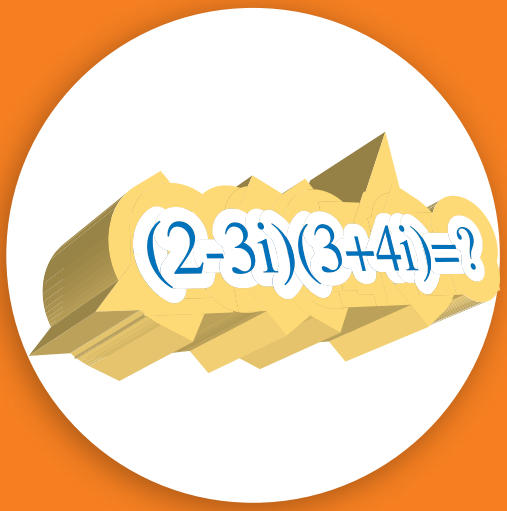
$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندې مختلطو عددونو جمعې معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب



آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:

$z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=ac+(ad+bc)i+bd(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$(5-4i)(7-2i)=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2$$
$$=35-38i+8(-1)$$
$$=35-38i-8$$
$$=27-38i$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه:

$$(3+5i)(1+0i)=3+5i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi\,\mathrm{Im}(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$ (6 یو حقیقي عدد دی)

$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}\,i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې ومولیدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

عدد	مزدوج یې
-i	i
1-i	1+i
-4+2i	-4-2i
5i-6	-5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهېږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیدا کولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot 4=x^2-(i)^2\cdot 4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

که چېرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ دریم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو وېش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویا کول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ ووېشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2} i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} i - \frac{1}{2} i - \frac{5}{2} i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15 + 3i + 10i + 2i^2}{25 - i^2} = \frac{15 + 13i - 2}{25 + 1} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2} i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$

6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 - 10 + (8 - 15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیدا کړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $Z + \overline{Z}$, $\overline{\overline{Z}}$ او $Z - \overline{Z}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د وېش حاصل يې پيداکړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{1+i}{1-1}$$

2- که $z_1 = -a-3bi$ او $z_2 = 2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$a: \frac{2}{5-i} \qquad b: \frac{3-i}{2+i} \qquad c: \frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$$a:1 \qquad b:2 \qquad c:3i \qquad d:-2$$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$\frac{3+4i}{4i} \qquad \frac{-5}{2-3i} \qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \qquad \frac{-4+8i}{2-4i} \qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

$x^2+x+4=0$

$x_1=?$

$x_2=?$

آیا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پیدا کولای شئ؟

د یوې دویمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقیقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوی جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دی.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعالیت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان یې کړئ.

دویم مثال: د $4x^2+4i\,x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$

$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2-4ac = (3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2+8 = -9+8 = -1$$

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$x_{1,2} = \frac{-3i\pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دویمه درجه معادله پیدا کړئ چې جذرونه یې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0 \;,\; x^2-6x+18=0 \;,\; -4x^2+3x-5=0$$

$$x^2+8x+41=0 \;,\; x^4-1=0 \;,\; 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دویمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

- منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.
- مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.
- د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

- داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.
- د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a, b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

- د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi} = \mathrm{Im\,g(z)}$
- د i د مختلفو توانونو د پيدا کولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوی دی، لکه:

$$i^{4k+r} = i^r \quad \text{يا} \quad (\mathrm{i})^{1379} = \mathrm{i}^{4\cdot 344} \cdot \mathrm{i}^3 = (1)(\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i}$$

- که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.
- هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $(\mathrm{a = 0, b = 0})$
- دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$
- د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

• که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z + \overline{z} = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$z - \overline{z} = 2yi \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښیاست چې:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ ,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پیدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

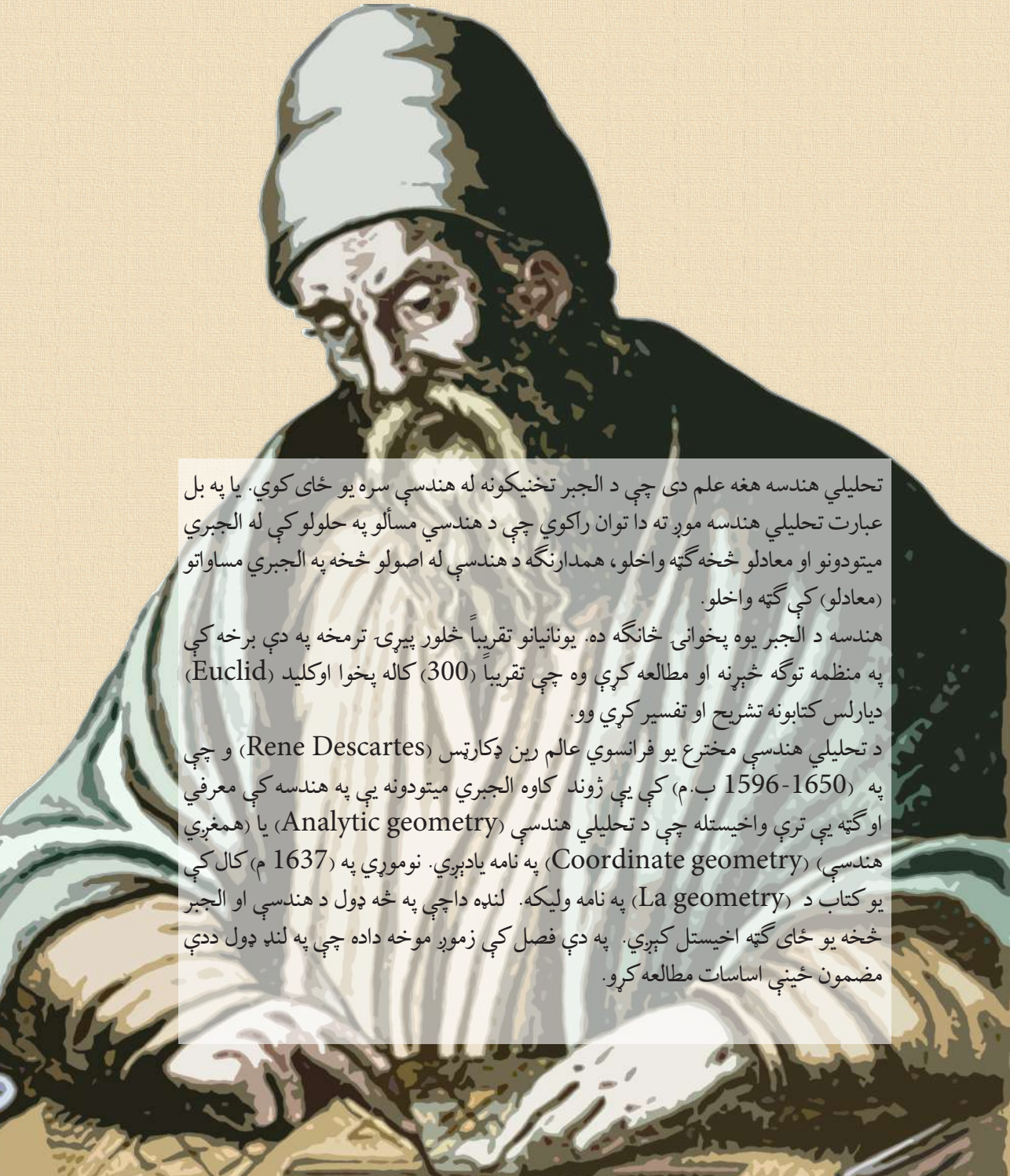
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحلیلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library



تحلیلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

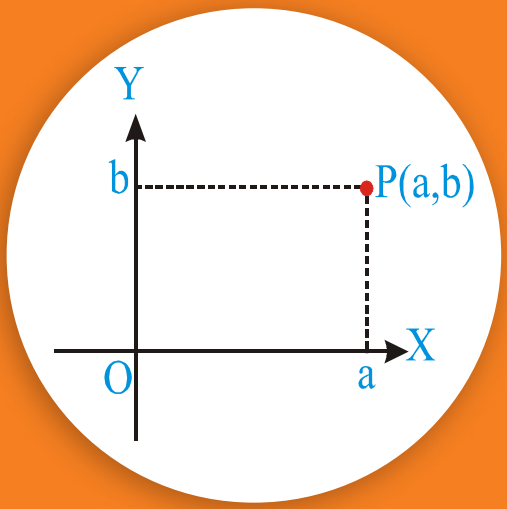
هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم

(Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

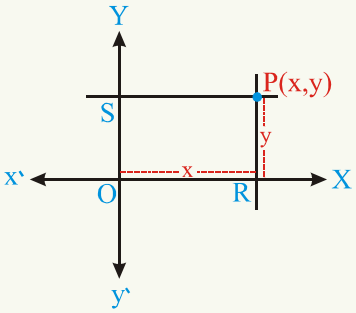
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایې چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. ښکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کینې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X ا و Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR} = x$ او $\overline{OS} = y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x, y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x, y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

(c) ketabton.com: The Digital Library

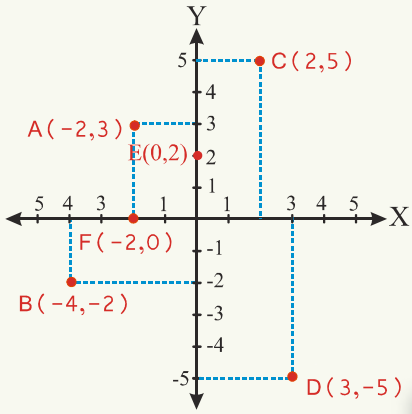


نقطې مستقیمې فاصلې دي چې دې سیستم ته کارتیزني یا کوارډنټ سیستم (Coordinate System) وایي.

د مرتبې جوړې لومړنۍ مرکبې ته د x مختصه او دویمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وایي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحیو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنۍ ناحیه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دویمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دریمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

حل:



فعالیت

- وښیاست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې یې صفر دي.
- وویاست چې د (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4) او (4,0) نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آیا کولای شئ چې و وایاست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

که $P_1\ (x_1, y_1)$ او $P_2\ (x_2, y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

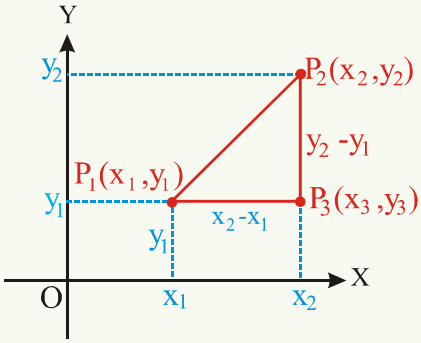
(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d = |P_1 P_2|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $\overset{\Delta}{P_1 P_3 P_2}$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیدا کړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (\overline{P_1 P_3})^2 + (\overline{P_2 P_3})^2$$

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

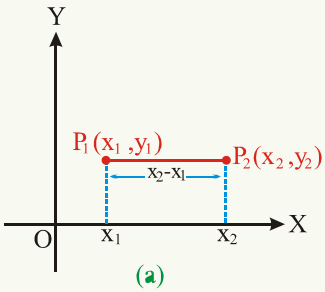


پام مو وي چې که د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

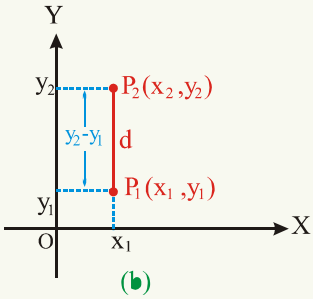
$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1(3, -2)$ او $P_2(-1, -5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

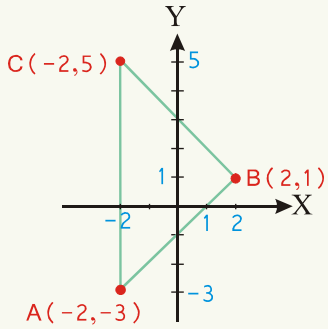
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

فعالیت

د $P_1(8,0)$ او $P_2(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث راسونه دي.

حل:



$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2 = 32+32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$

څرنګه چې: $|CA|^2 = |AB|^2+|BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

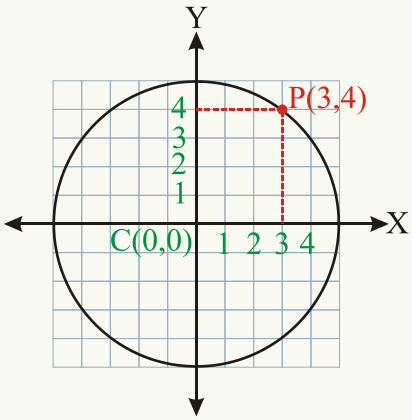
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې یې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

a : $(\sqrt{176},7)$

b : $(10,-10)$

C : $(1,15)$

d : $(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

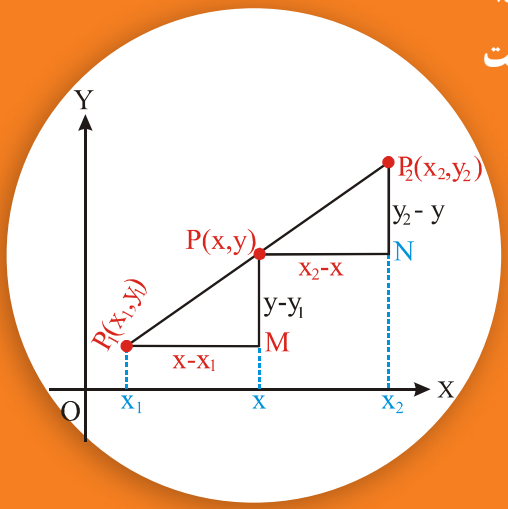
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تېرېږي؟ که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $\overset{\Delta}{P_1MP}$ او $\overset{\Delta}{PNP_2}$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$
$$y-y_1=ry_2-ry$$
$$y+ry=ry_2+y_1$$
$$(1+r)y=ry_2+y_1$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$
$$x-x_1=rx_2-rx$$
$$x+rx=rx_2+x_1$$
$$(1+r)x=rx_2+x_1$$
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

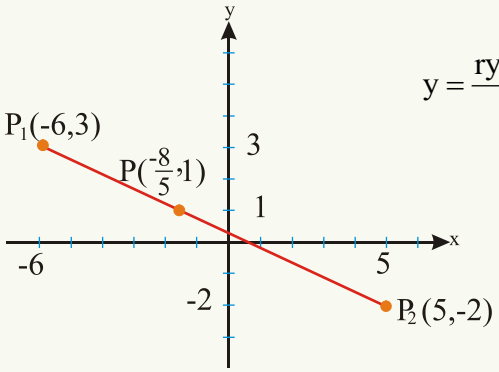
لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

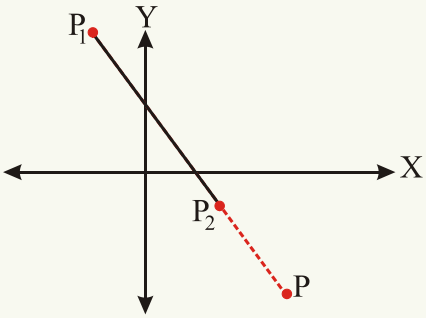
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه باید اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً یې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې لیدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي یا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي یا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې لیدل کېږي.

دویم مثال: د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a : داخلاً یې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً یې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\quad y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2 - 8}{1 - \frac{2}{3}} = -28 \quad , \quad y = \frac{(\frac{-2}{3})(-1) + 4}{1 - \frac{2}{3}} = 14$$

د p د نقطی وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

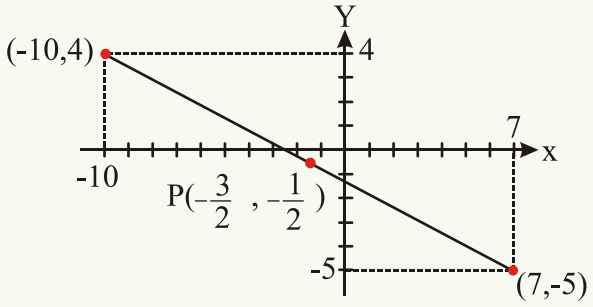
که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r = 1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ او $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10+7}{2} = -\frac{3}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$, $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او د $P_1 P_2$ قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ □ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً یې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

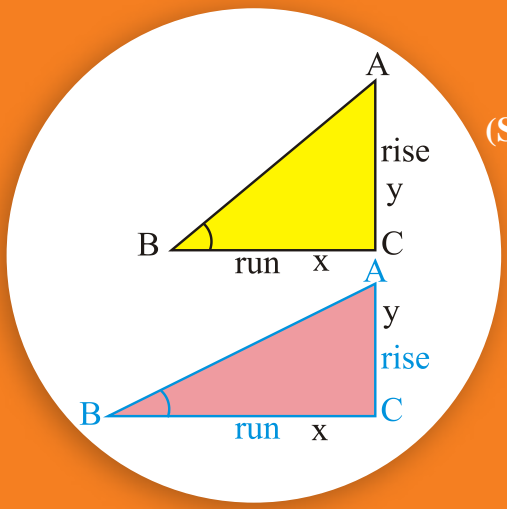
2 - د هغه قطعه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

b: خارجاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

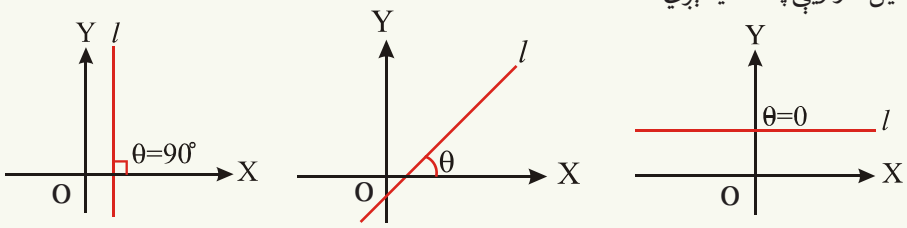


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کـولای شـئ چـې ووایـئ د کومـې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مســتقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت ســره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادېږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي □= 0 او که د Y له محور سره موازي وي، نو □= 90° ده.

څه وخت چې موږ پر مایله ســطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مســتقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وی، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan 90°$ تعریف شوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

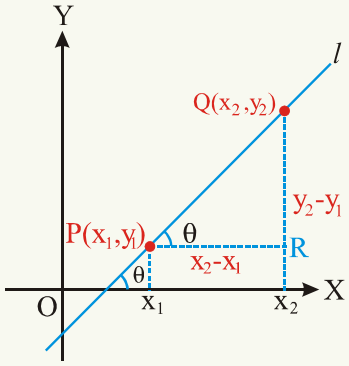
د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي.
$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ دی، ځکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$

$\overline{PR} = x_2 - x_1$

$\overline{QR} = y_2 - y_1$

$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $P_1(2,4)$ او $P_2(6,10)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

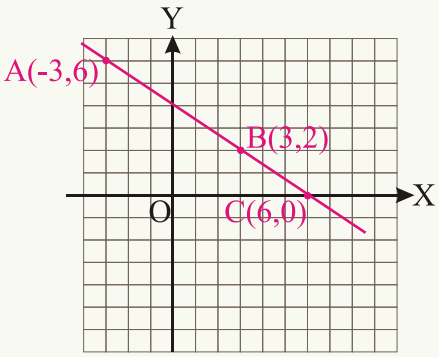
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

د $\overline{AB}$ مستقیم خط میل $= \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



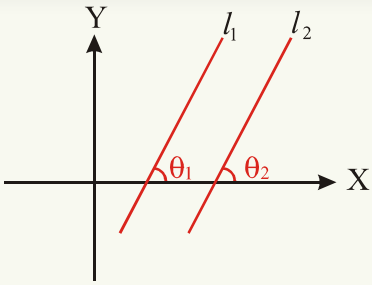
د مستقیم خط میل $\overline{BC}$ د $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



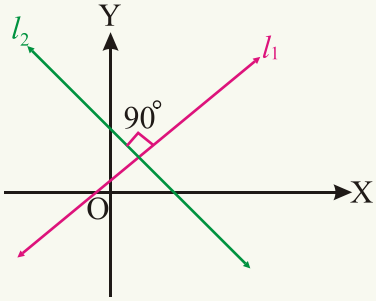
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

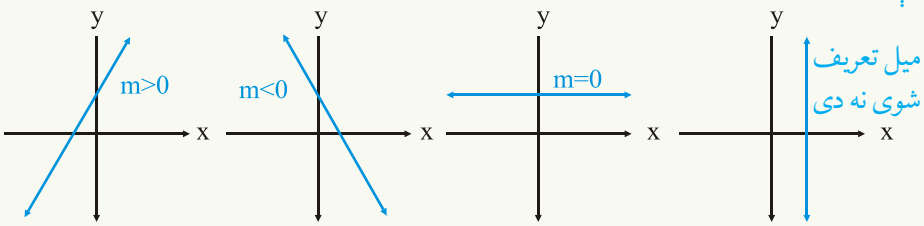
$m_1 \cdot m_2 = -1$ دي.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي، د

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتنې

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تېرېږي.

2 -که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ دیو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوي نه دی

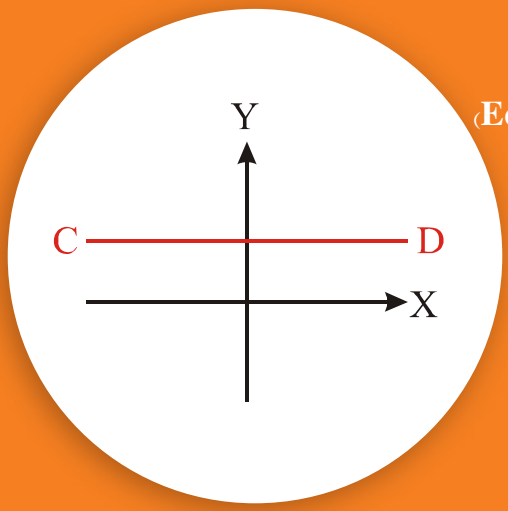
8 - د $x=0,03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

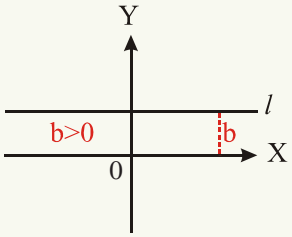
د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)



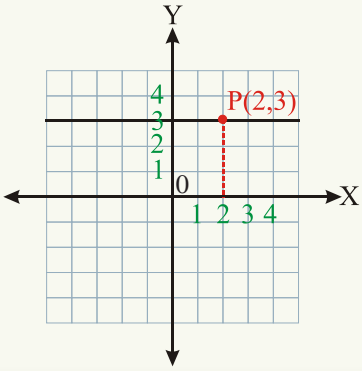
آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1-د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېرېږي او د X له محور سره موازي وي.

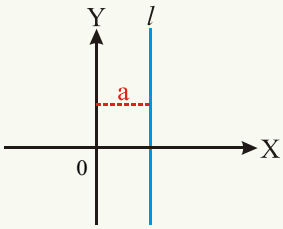
حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

د X د محور معادله پیداکړئ.

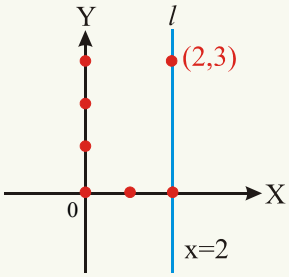
(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: ټولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې تـه a و وایو چې a ددې نقطو لومړنۍ مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کینې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

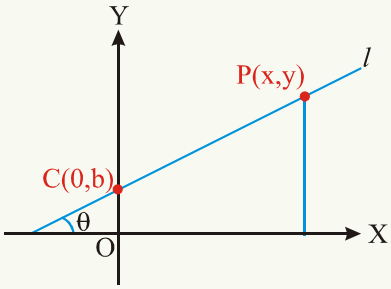
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعالیت

د Y د محور معادله ولیکئ.

3. د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله:

که $P(x, y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0,b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$y - b = mx$ یا $y = mx + b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b = 0$ وي، د مستقیم خط معادله $y = mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m = 2$ او $b = 5$

$$y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5$$

b: ددې خط میل $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$

$b = \frac{4}{3}$ او $m = \frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

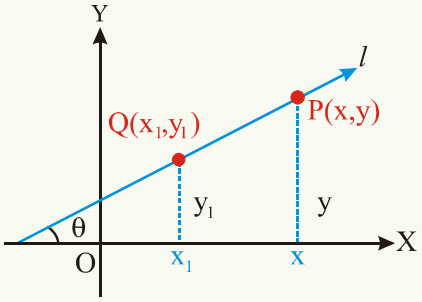
دا معادله کولای شو، د $6y = x + 8$ ، $6y - x = 8$ او یا $x - 6y + 8 = 0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مستقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

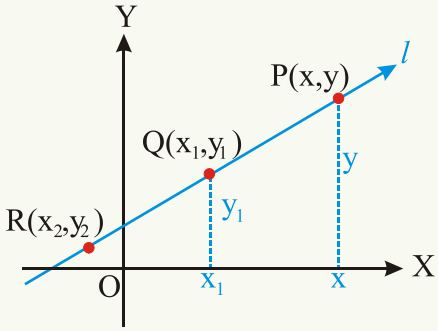
$$y - 1 = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 11$$

یا $2x + y - 11 = 0$

5: د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$y_1 = 1 \quad , \quad x_1 = -2$

$y_2 = -4 \quad , \quad x_2 = 6$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2)$ یا $5x + 8y + 2 = 0$

6: د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي:

که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یو ه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a \ , \ y_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ , y_2 = b$

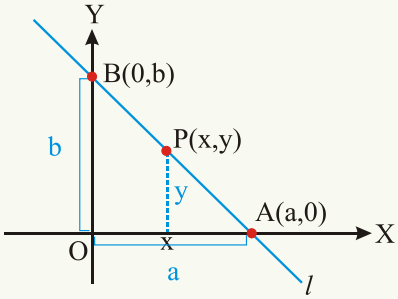
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow -ay = b(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab$$

دواړه خواوې پر ab وېشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د x محور په (2,0) او د Y محور په (0,−4) کې قطع کوي.

حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

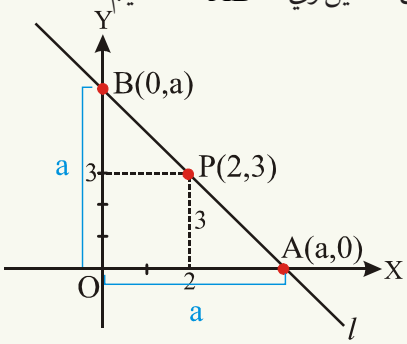
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

یا $2x - y - 4 = 0$

اووم مثال: په شکل کې که د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د P(2,3) له نقطې څخه تېرېږي.

حل: د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

د مستقیم خط میل $\overline{AB} = \frac{a - 0}{0 - a} = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$y-3=-1(x-2)$ یا $x+y-5=0$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له: $y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له: $y-y_1=m(x-x_1)$، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ او د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیدا کړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

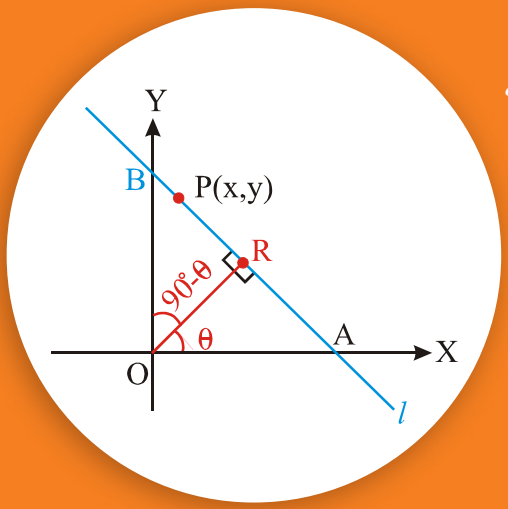
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیدا کړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\frac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازی وي چې میل یې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقیم خط نورمال معادله

آیا ویلای شـئ د یوه مسـتقیم خط نورمال خط کوم خط ته وایي؟

د l د مسـتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مسـتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مسـتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $O\overset{\Delta}{R}A$ او $O\overset{\Delta}{R}B$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \text{ یا } OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \text{ یا } OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهېږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مسـتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta+y\sin\theta=P$$

چې $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ یا $x\cos\theta+y\sin\theta-P=0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta=120°$ او $P=5$ دی.

$$x\cos120°+y\sin120°=5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos120°=-\frac{1}{2}\quad,\quad \sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیدا کولو لپاره د ا معادله د $y=mx+b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله:(General equation of a straight Line)

د $ax+by+c=0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي،د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چی میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$m=\tan\theta=\frac{-a}{b} \qquad y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلی په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو سره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ ده او عمومي معادله یې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ددې لپاره چې د p قیمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښې خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونیول شي:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دویمه ناحیه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ 40'$ ده، نو ددې مستقیم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40'+y\sin 123^\circ 40'-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعالیت

د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

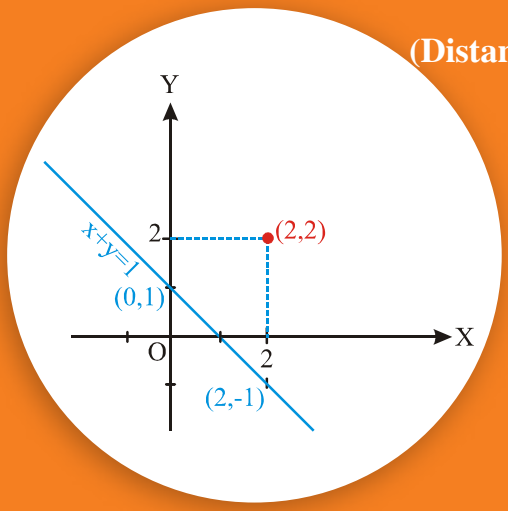
3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad$ $15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آیا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پیدا کولای شئ؟

کـه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شـکل کـې لیدل کېږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)

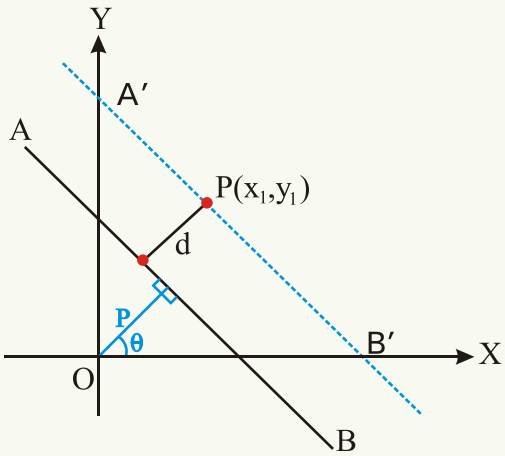
د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقیم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دی حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

څرنګـه چـې د $A'B'$ مسـتقیم خط د AB له خط سـره موازي دی، نـو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$d = x\cos\theta + y\sin\theta - p \quad \text{یا} \quad x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0$$

څرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقیم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتیب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چـې دا معادله د $\overline{AB}$ له خـط څخه د p د نقطې فاصله ښـیي، کـه چېرې د AB د خط معادله په نورمال شـکل راکړل شـوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې په معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د AB د خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمت منفي کېږي. او که د p نقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. څرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x+3y-11=0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a=4$ ، $b=3$ او $c=-11$ ده، څرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x-2y+7=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله پر یو ددې خطونو د یوې نقطې فاصله ده، له بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x-5y+13=0$ او $2x-5y+6=0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x-5y+13=0$$

په معادله کې $x=1$ وي، نو $y=3$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کېږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطی فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هـرو دوو جـوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کـړئ چې معادلې یې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+7=0$ او $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ او $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ او $x+2y-5=0$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مـوازي خطونـو ترمنځ فاصله مسـاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هیڅ یو

4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقیم خط څخه مساوي ده په:

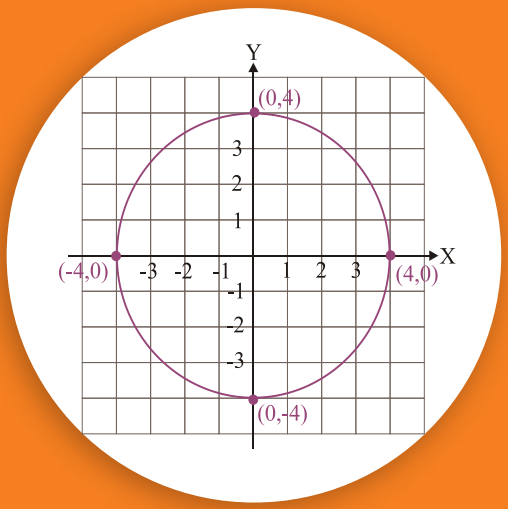
$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:0,04$ b: $\frac{1}{25}$ c: 4×10^{-2} d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

دایره (Circle)



آیـا د هغې دایرې معادله پیدا کولای شـئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شـعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو ستِ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وایي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شـعاع او $P(x,y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شـکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اسـاس لرو چې:

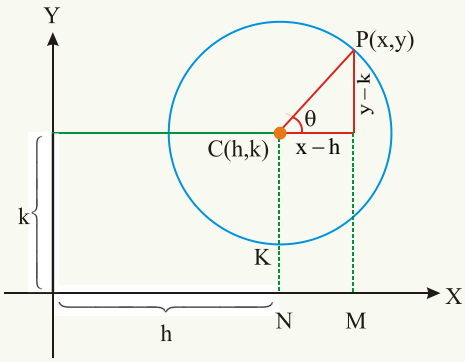
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وایي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې معادلـه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یـا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داسـې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وایي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی یې (7) واحده وي.

حل: $r = 7$, $k = 5$ او $h = -3$

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یې 3 واحده وي.

د یوې دایرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

یا:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

که $-k = f$ ، $-h = g$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c \quad \text{یا} \quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

چې دې معادلې ته د دایرې عمومي معادله وایي چې مرکز یې $(-g,-f)$ او شعاع یې $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ده.

که $g^2 + f^2 - c > 0$ وي دایره حقیقي ده.

که $g^2 + f^2 - c = 0$ دایره نقطوي ده.

که $g^2 + f^2 - c < 0$ دایره مجازي ده. (دایره وجود نه لري)

او یا که د $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

په معادله کې $-2h = a$ ، $-2k = b$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ عوض کړو لرو چې

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ چې دا هم د دایرې عمومي معادله ده، ځینې وختونه د دایرې عمومي معادله داسې هم ښودل کېږي.

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0$ په دې ډول چې $A = B$ او هم علامه وي، نو دا هم ددایرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1 -که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دایرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2 - او که $k=0$ وي، د دایرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3 -که $k=r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4 - اوکه $h=r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5 - یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6 -یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

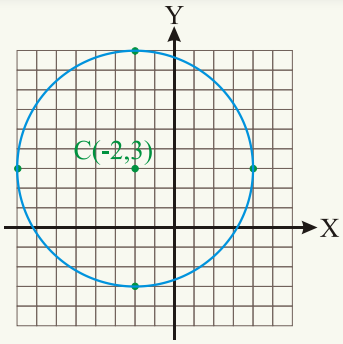
دویم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دایره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دایرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعالیت

په شکل کې وښیاست چې د دویم مثال، د لومړی دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د X له محور سره مماس ده او د دویمې دایرې مرکز د X پر محور واقع دی.



دریم مثال: د هغې دایرې عمومي او معیاري معادلې پیدا کړئ چې د مرکز وضعیه کمیات یې $(-2,3)$ او شعاع یې 6 واحده وي او هم دا دایره رسم کړئ.

(د دایرې معیاري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دایرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

څلورم مثال: وښیاست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ دیوې دایرې معادله ده او هم ددې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

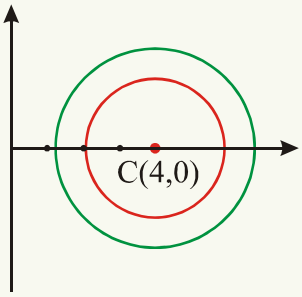
چې $g=\frac{12}{5}$، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دایرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دایرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دایرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دایرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1(4,0)$ نقطه د هغې دایرې مرکز هم دی چې غواړو معادله یې پیدا کړو، نو د C_1 وضعیه کمیات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددایرې شعاع پیدا کړو، نو څرنګه چې دایره د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقیم خط څخه د دایرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دایرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ یا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط پروت وي.

حل: که د ایرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنګه چې مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{او} \quad |AC|=|BC| \quad \text{او} \quad |AC|^2=|BC|^2$$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$

$$4h+8k=44$$

$$\underline{\pm 4h \pm k=\pm 16}$$

$$7k=28$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$

$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دایرې عمومي معادله ده.

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ چې معادله یې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$

$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$

$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 – د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

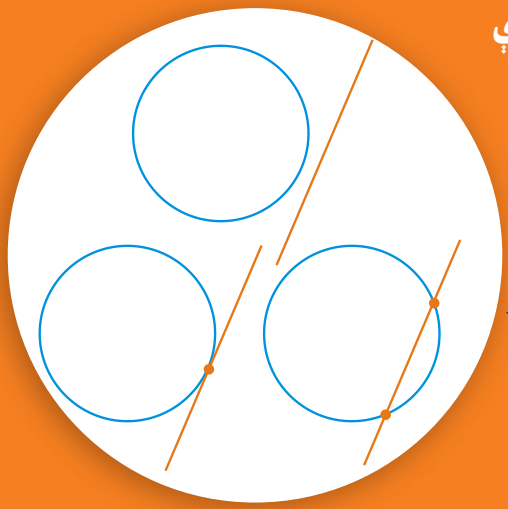
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې وو ایاست د $3x-4y+20=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2=25$ دایره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دایرې معادله په پام کې نیسو او غواړو چې د یو مستقیم خط حالت له دایرې سره وڅېړو چې آیا دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مستقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x=y+7$ مستقیم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

یا $x^2-8x+15=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \ , \ x_2 = 3$$

د y قیمت د پیدا کولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5-3y)^2 + y^2 - 2(5-3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

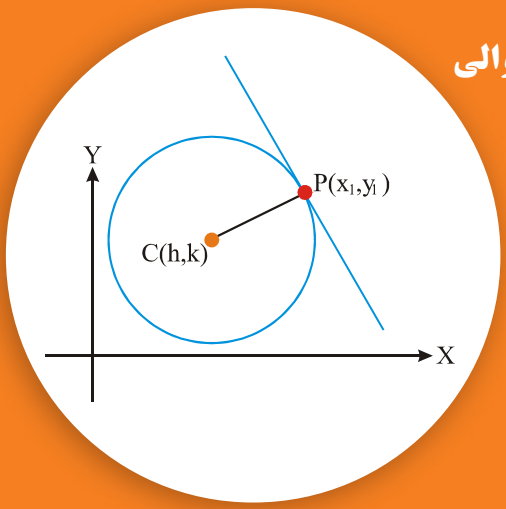
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیدا کولای شـی چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کـه یو مسـتقیم خط پر هغـه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پـه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1,y_1)$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

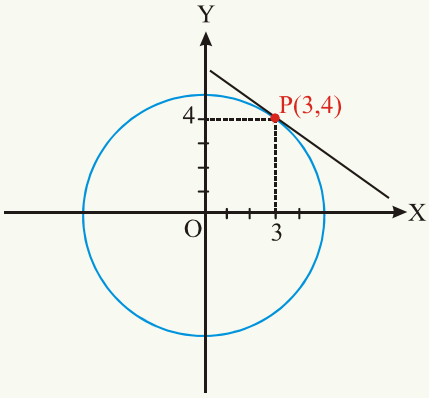
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1,y_1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کـه د دایـرې مرکـز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پـه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \quad \text{یا} \quad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

څرنګه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y\cdot 4+x\cdot 3=25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x+4y=25$

او یا $3x+4y-25=0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h=1 \qquad k=2$$

$$x_1=3 \qquad y_1=5$$

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$

$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$2x+3y=21$$

یا:

$$2x+3y-21=0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1(x_1,y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ پر دایره د P_1T . مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د P_1TC په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

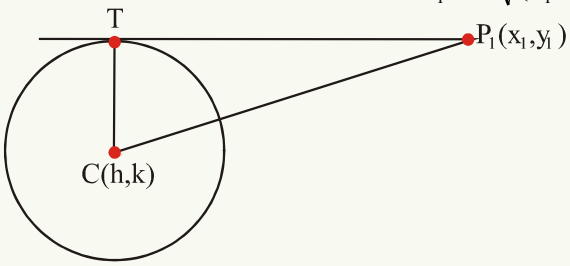
$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا $(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$

له بلې خوا: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$



پــه یاد ولرئ چــې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیــدا کولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

د مماس اوږدوالی $= \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایــرې پــه معادله کې د مســتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو ســره، یــوه دویمه درجه یو مجهولــه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطـو کـې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دایره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مسـتقیم خط دایره نه قطع کوي.

د هغـه مسـتقیم خط معادله چـې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کـې پر هغه دایره چـې مرکز یې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ یا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دایرې د باندې واقع ده او د دایرې مرکز (h,k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مسـتقیو خطونو حالتونه له دایرو سـره چې معادلې یې په لاندې ډول راکړل شـوي دي وڅېړئ.

د مستقیمو خطونو معادلې	د دایرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

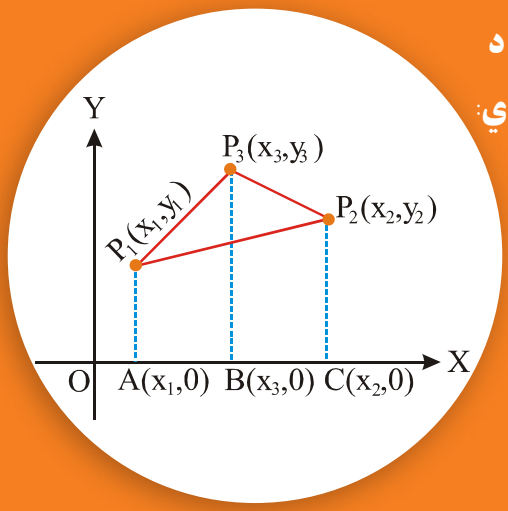
2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دایرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دایره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دایره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیدا کولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د مثلث مساحت $P_1P_2P_3$ = د ذوذنقې مساحت P_1ABP_3 + ذوذنقې مساحت P_3BCP_2 − د ذوذنقې مساحت P_1ACP_2

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمایي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د مثلث مساحت } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1 = 4 \quad , \quad y_1 = -5 \quad , \quad x_2 = 5 \quad , \quad y_2 = -6 \quad x_3 = 3 \quad y_3 = 1$

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث مساحت $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\left[4(-6-1) + 5(1+5) + 3(-5+6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-28+30+3) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5$$

که د $P_1 P_2 P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وی، نو د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - که د یوه مثلث رأسونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

3 - د هغه څلور ضلعي مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$ د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ او $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که د يوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y = mx + b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ اويا $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يــوه مســتقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مســتقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغــې دايــرې معادله چــې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبــدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخــه عبــارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو پــه مبدا کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادلــه په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقيم خــط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• که د يوه مثلث رأســونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1P_2P_3$ د مثلث مســاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4)$ $\qquad$ $A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ دیوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1$ $\qquad$ $b)\ 1$ $\qquad$ $c)\ 0$ $\qquad$ $d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمود وي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}$ $\qquad$ $b)\ -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $c)\ \frac{3}{2}$ $\qquad$ $d)\ \frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad$ $(2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad$ $(5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1(2,-5)$ او $P_2(6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0$ $\qquad$ $2x-3y+6=0$

15 - د هغه مستقیم خط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغې دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.

23 - د هغې دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

a) متساوی الاضلاع دی b) متساوی الساقین دی c) مختلف الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

a) متساوي الاضلاع دی b) متساوي الساقین دی c) مختلف الاضلاع دی

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

a) حقیقي ده b) نقطوي ده c) موهومي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 -کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغــه مســتقیمو خطونــو معادلې پیداکړئ چــې د لاندې هروجوړو لــه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغــه مســتقیم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخــه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y=-\frac{1}{3}x+9\frac{2}{3}$

$b: \quad y=-\frac{x}{3}+9\frac{2}{3}$

$c: \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}$

d: درې واړه سم دي

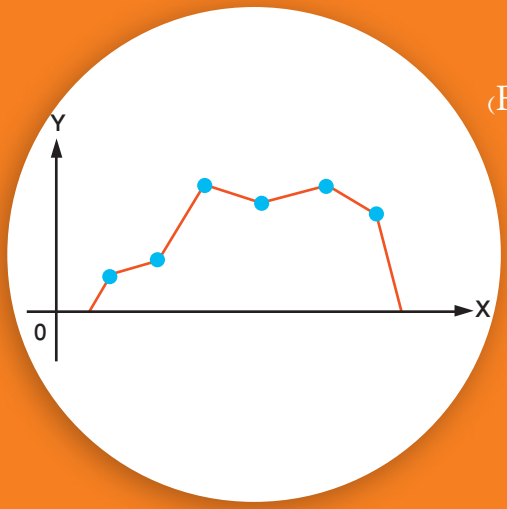
(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی
احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)



مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟ آیا ویلای شـئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف)مرکز	فریکونسی
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟

- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_1 - c\ ,\ 0)$, $(x_n + c\ ,\ 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

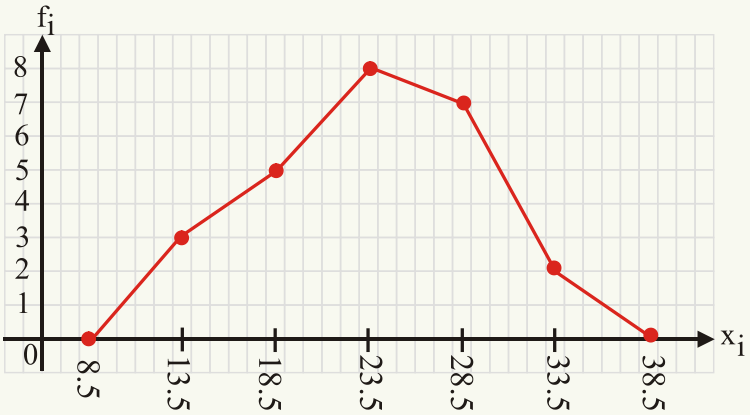
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

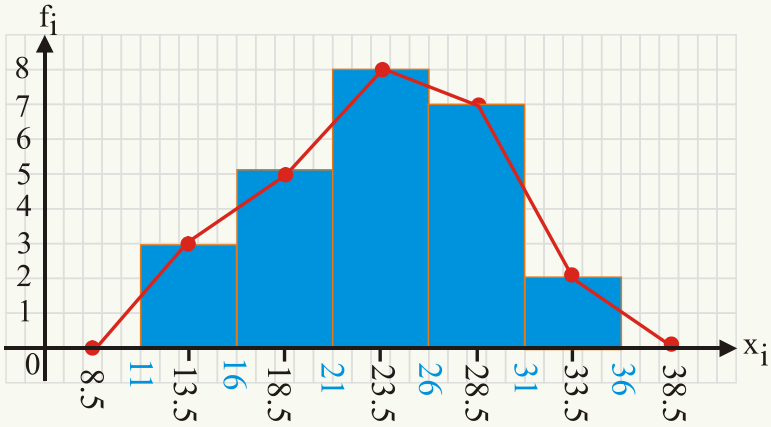
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطیلي گراف د فریکونسي څو ضلعي گراف سره:



له پورتني گراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي گراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي گراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي گراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي گرافونه زیات د متصلو ډیتاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنی ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ.ډیټا (Data) په شپږو طبقو ووېشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړی په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو واري تکرار شوی دی.

پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

(c) ketabton.com: The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کینې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول گراف سره مشابه دی؟

ډیتا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنگه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، گراف یې جوړ کړو چې دا گراف د ساقې او پاڼې د گراف په نامه یادېږي.

او که دې گراف ته د 90° زاویې په اندازه کینې خواته دوران ورکړو، میله یې گراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیتا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې گراف د هغو ډیتا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیتا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیتا (Data) د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: ښکاره ده چې د ډیتا (Data) د کینې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې څانگې اړونده ډیتا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې					
1	0	1	5			
2	3	7	8			
3	8	8	9	9		
4	0	1	4	5	6	6
5	2	7	8			
6	5					

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خواکې د 90° زاویې په اندازه دوران ورکړو. داگراف د میله یي گراف په شکل بدلیږي چې په لاندې ډول یې لیکلای شو.

فریکوانسی						
6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دویم مثال: د ریاضي په یوه امتحان کې لاندې نتیجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډیتا لپاره د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسیزو رقمونو او د پاڼې د ترسیم لپاره له یوویزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې										
2	5										
3											
4	5	6									
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7						
7	2										

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

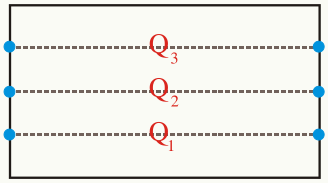
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمې)

په مخامخ شکل کې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وایي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړی ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمایي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیدا کولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

•د ربعي د موقعیت په اساس، د ربعي مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدي) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړی او دریمې ربعي ځایونه وټاکئ.

د لومړی او دریمې ربعي مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډیټا شمېره:	1	2	3	4	5	6
ډیټا :	80	85	90	100	120	140

د لومړۍ او دریمې ربعي ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=2$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=5$$

نو د لومړۍ او دریمې، ربعي مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1=85$ $Q_3=120$

پوښتنې

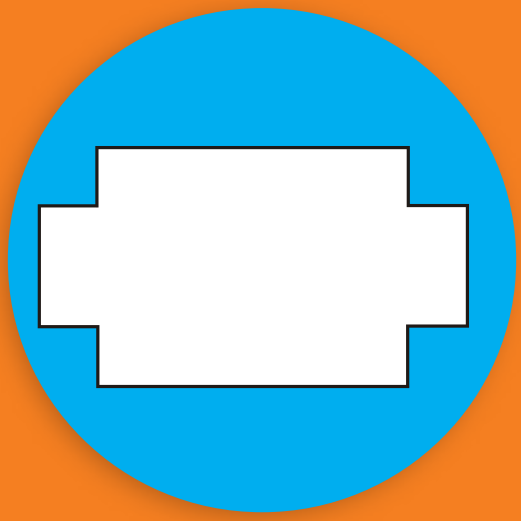
فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړۍ او دریمه ربعي (څلورمې) پیدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه یې گراف



د یوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع یې $5cm$ وي، جلا کړئ، بیا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.
کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعالیت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې یوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11	10	15	23	14	27	16	17	24
28	13	31	31	18	25	26	19	

- میانه یې پیدا کړئ.
- هغه عددونه ولیکي چې د میانې تر مخې نیمایي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره میانه پیدا کړئ.
- هغه عددونه ولیکئ چې د میانې په وروسته نیمایي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره میانه پیدا کړئ.
- دویمه ربع (څلورمه) یا Q_2 کوم عدد دی؟

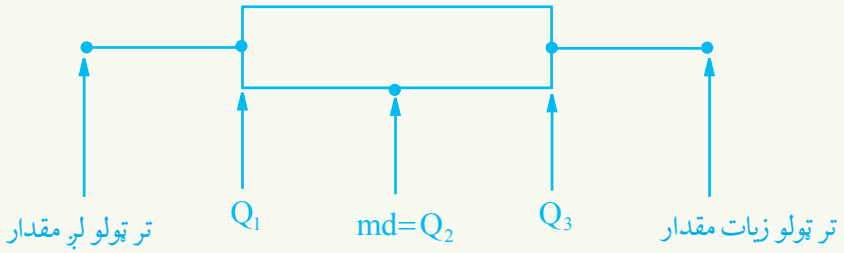
صندوقچه یې یا جعبه یې گراف: دا یو داسې تصویري گراف دی چې د ډیټا (Data) تیت والی د نورو گرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د اگراف د لاندېنیو اندازو پر بنیاد د ډیټا (Data) گراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنۍ ډیټا　　ب) لومړنۍ ربع (څلورمه)　　ج) میانه

د) دریمه ربع　　هـ) تر ټولو لویه ډیټا

صندوقچه یې گراف د ربعو او له زیات نه زیات او کم تر کمه ډیټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه یې گراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول ولیکو:

الف) تر ټولو کوچنۍ ډیټا پیدا کړئ.　　ب) تر ټولو لویه ډیټا پیدا کړئ

ج) میانه پیدا کړئ　　د) لومړی ربع پیدا کړئ

هـ) دریمه ربع پیدا کړئ　　و) گراف رسم کړئ.

مثال: که په یو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافیکي پیښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه یې گراف یې رسم کړئ.

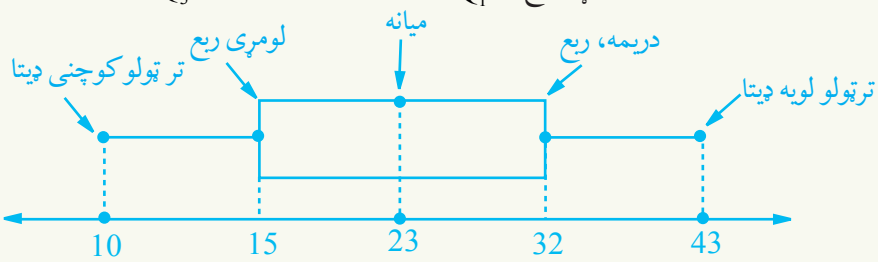
12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: پورتنی ډیټا په ترتیب لیکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډیټا = 10　　تر ټولو لویه ډیټا= 43

میانه = 23　　لومړی ربع = $Q_1 = 15$　　دریمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی گراف صندوقچه یې گراف دی چې 50% ډیټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دریمې او ربعي ترمنځ) پرتې دي، 25% یې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډیټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

$$\text{mod} = ?$$

$$\text{med} = ?$$

$$\overline{x} = ?$$

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

- آیا د اوسط، میانې او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعي پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړی، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمایي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

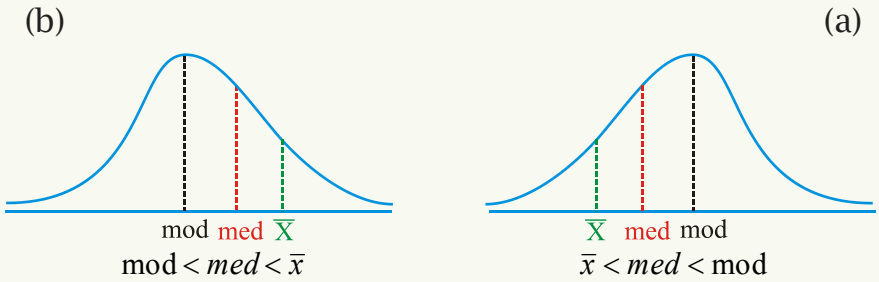
• که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

• که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میانې څخه تر مخه او له اوسط او میانې څخه وروسته ډیتاګانې سره مساوي دي.

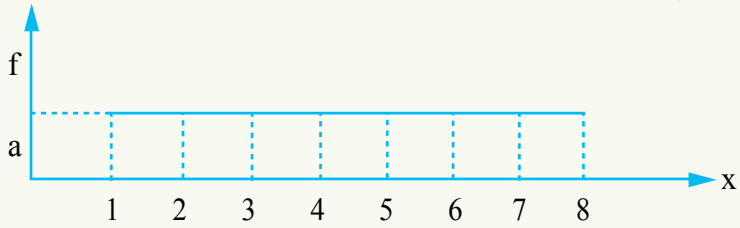
-که اوسط د میانې کینې خوا ته پروت وي، د هغو ډیتا شمېر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغو ډیتا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کینې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a به شکل کې.

-که اوسط د میانې ښې خواته پروت وي، د هغه ډیتا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډیتاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کینې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

میانه =

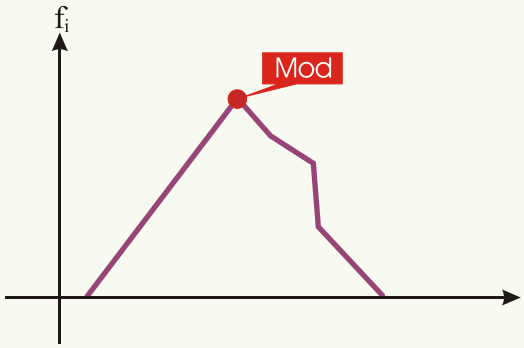
اوسط = $\text{med} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

$$\bar{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د مودِ تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

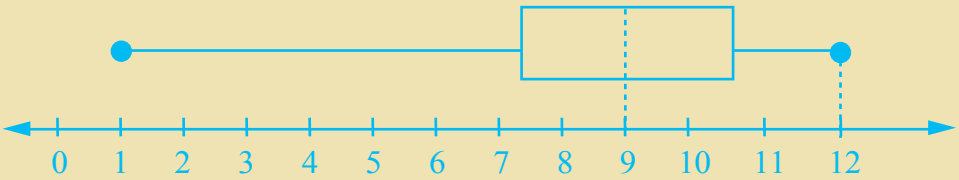
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- دلاندې صندوقچه يې گراف په نظر کې نيولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني گراف کې ميانه څومره ده؟
- په دې ډيتا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښيي؟
- دريمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې ميانه د صندوق کينې خواته ده، د څه شي ښکارندويه دی؟
- داچې د کينې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زيات دی دا زياتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

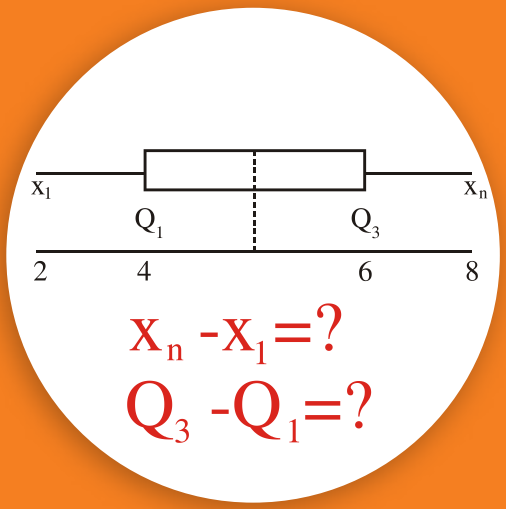
2- د يوه هېواد د فوټبال ملي ټيم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

26	25	22	23	18	31	19	26	24	25
	26	31	33	25	25	29	23	27	25

د لاندې نتيجو څخه کومه يوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له مياني څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه يې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربعي انحراف

که د یوې ټولنې د احصائیوي تغیراتو لمن لویه وي، آیا فکر کوئ چې د ډیټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پایله وړاندې کړي؟

فعالیت

له یو موزیم څخه د لیدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډیټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنۍ ډیټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تیت شوي دي؟
- یو په څلورمه برخه ډیټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بیا د پاتې ډیټا (Data) د تحول ساحه پیدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، یو له بله سره یې پرتله کړئ، کومه یو ه یې ډېر تیت والي ښیي؟
- په ځینو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنیو او یا ډېرو لویو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبیرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه یادېږي، ګټه اخیستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا د سټ، لومړۍ ربع او دریمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف یو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډیټا (Data) تیت والي ښکاره کوي.

داسې چې د لومړۍ او دریمې ربعې له تعریف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډیټا سره نژدې دي، یا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والې لږ دی.

ځېنې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمایې لمن وایي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

نوله دې ځایه: $Q_3 = 30.75$

همدارنګه: $C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$

نوله دې ځایه: $Q_1 = 22.25$

د لومړنی او دریمې، ربعې قیمتونه
په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوښتنې

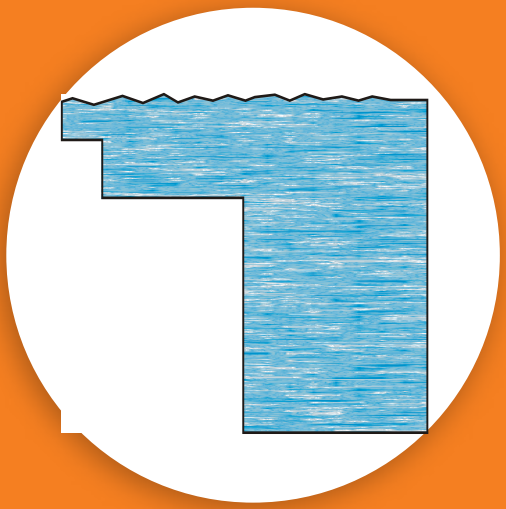
1 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او وواياست چې د ډیټا ګڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واریانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړی چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی یې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ.
- د پورتنیو ډیتاو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډیتا د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونیسئ.

- د ډیتا اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \quad \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 یې وښیي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.
پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیدا کولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2$$

$$= 38.4 - 31.36 = 7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځېنې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

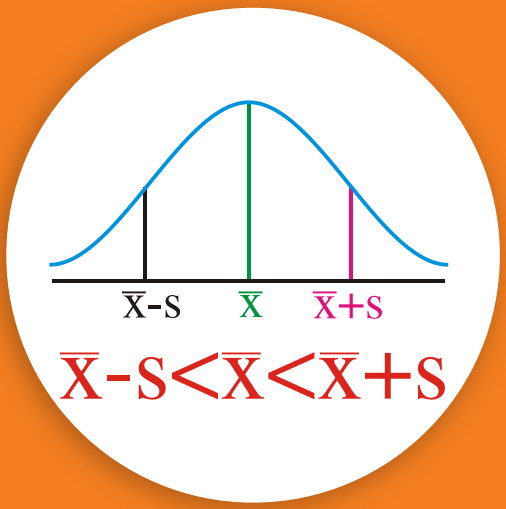
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معیاري انحراف



که S دوریانس جذر $\bar{x}$ دډیتا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضیح کوي؟

فعالیت

که S^2 د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډیټا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمۍ وخت له څېنو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i - \bar{x}$	دانحراف مطلقه قیمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د ډیټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پیدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قیمت اوسط یا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پیدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واریانس پیدا کړئ.
- د واریانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واریانس د مربع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واریانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان وړلو سره نه یوازې داچې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښیي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مینځه یوسو، په کار ده چې د وریانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واریانس جذر د ډیټا (Data) د تیت والي، یو بل ټاکوونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژني.

معیاری انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واریانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاری انحراف یا د مطلق تیت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2n\bar{x}^{\,2}+n\bar{x}^{\,2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\bar{x}^{\,2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معیاري انحراف یې پیدا کړئ

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - (\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیتا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښیي.

پوښتنې

د څلورو ټلویزوني سټیشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیتا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، یوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړۍ او اخیرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخیستل کېږي. احصائیوی ډیټا د عددونو په شکل راوړو، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو وویشي، د میانې په نوم یادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړۍ ربع، دویمه ربع او د دریمه ربع وایي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه یې یا جعبه یې ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډیټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډیټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډیټا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډیټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخیستل کېږي، داګراف یو تصویرې ګراف دی چې ترټولو لویې ډیټا، ترټولو کوچنی ډیټا، میانې، لومړی ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او موډ) له نارمل منحنې څخه په ګټه اخیستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کینې خواته قیمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا (Data)لومړی ربع او دریمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډیتا ګڼې دي او د ډیتا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیتا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د ټیټ والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیدا کول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښیي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیدا کول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

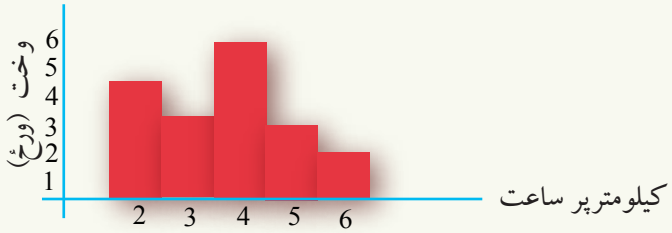
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چېرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې ..... په افقي محور او ..... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي
ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز
ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي
د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلي ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې				
1	0	3	3	4	
2	0	2	4	8	8
3	2				

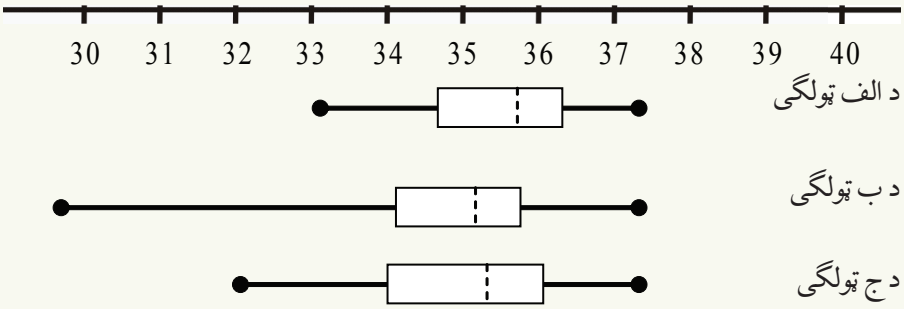
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یې ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې ګراف　　ب) مستطیلي ګراف

ج) د فریکونسي د څو ضلعي ګراف　　د) دایروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دریو ټولګیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دریو ټولګیو د ازموینې نمری له کمزوري څخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) میانه　　ب) اوسط　　ج) دریمه ربع　　د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 ګرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A:	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B:	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيتا د تحول ساحه صفر وي. د ډيتا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيتا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

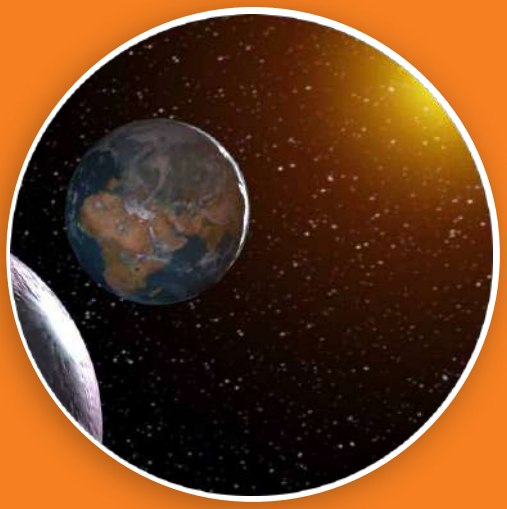
(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېـر و پیړیو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستوري د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.

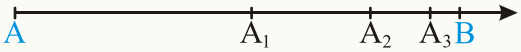
آیا پوهېږي چې ځمکه کروي ده؟

آیا لمر دځمکې پر شـاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کی نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.



یو سړی غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنی نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلي دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسېږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لری؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسېږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او یا له لارې بیرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسېږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي:

نتیجه: د شهودي درک نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خو کېدای شي چې د قضیو دحل لپاره یو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعالیت کې مو ترې استفاده وکړه او یاداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکی دی، بلکې بر عکس په زیاتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگیزې د پیداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړی مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانی سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه یو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار وړل شوی نه دی، په واقعیت یو احساس دی چې پر اساس یې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتیجه اخیستنه دشهودي درک په نامه یادوو.

دویم مثال: که یوه نقطه د داسې دایرې د باندې پرته وي چې قطر یې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زیاته ده، نه شو ویلای چې دا استدلال یو شهودي درک دی، ځکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دایرې د مرکز فاصله له محیط څخه 2 واحد ده. نقطه د دایرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دایرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لویه ده. یعنې پرته له استدلال څخه د طبیعي پوهې او یا غریزه یې احساس په واسطه نه شو کولای، مسئله درک او صحت یې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، آیا ددې مسئلې درک کول یو شهودي درک دی؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم یو یې د شهودي استدلال په طریقه د درک وړدی؟

a- دیوې متوازي الاضلاع مقابلې زاویې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معین) قطرونه یو پر بل عمود او یوبل نیمایي کوي.

c- په یوه قایم الزاویه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثیلي یا ګماني استدلال

ووایه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقریباً ګرد دی، رنګ یې سپین دی او دسپینو په منځ کې یو ژیړ شی دی؟

د منطق یوه ښوونکي غوښتل چې دخپل یوه زده کوونکي قیاسي استدلال وازمایي، خپل مخ یې هغه ته ورواړوه او ورته ویې ویل:

پوهېږئ چې ګمان او یا تمثیل حقیقت ته د رسیدو پل دی. د لوست په جریان کې مو زده کړل چې تمثیلي استدلال موږ حقیقت ته نژدې کوي، لیکن هر وخت سوچه حقیقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې یې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووایه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقریباً ګرد دی، رنګ یې سپین دی او دسپینو په منځ کې یو ژیړ شی دی.

زده کوونکی چې په همدې وخت کې له زراعتی فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته یې ښوونکی ته مخ ورواړوه او ویې ویل:

استاده فکر کوم چې دسپین شوي شلغم(ټیپر) په منځ کې ګازره ده.

تعریف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پیداکول او دهغوی په باره کې د یوشان نتیجې اخیستلوته تمثیلي یا قیاسي (ګماني) استدلال وایي.

فعالیت

یوه ښوونکی یو شوخ زده کوونکی چې لوست یې اخلالوه، له ټولګي څخه وویست. دټولګي د باندې یې د خپل ټولګي بل زده کوونکی ولیده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعریف په نظر کې نیولو سره له لاندې اړیکو څخه کوم یو یې یو تمثیلي یا قیاسي استدلال دی.

- دویم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفریح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسی په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لروچې:

لایق = دی = مثبت ، لایق = نه دی = منفي

(+) = (+) = + ، (+) = (-) = -

نالایق = دی = منفي ، نالایق = نه دی = مثبت

(-) = (+) = - ، (-) = (-) = +

پوښتنې

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي،) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموينه کې 100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموينه کې څه نتيجه اخيستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعاليت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددې کار لپاره له يو 1 له عدد څخه پيل وکړئ او تش ځايونه ډک کړئ.

$1+3= \square = (\quad)^2$

$1+3+5= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \square = (\quad)^2$

پورتنيو پوښتنو ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آيا کولای شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعاليت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راځي.

نتيجه: استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهد و پر بنسټ د عمومي نتيجې اخيستنې طريقه ده. په حقيقت کې يوې کوچنۍ نمونې ته په لويه نمونه عموميت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټی د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوي ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخیستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړي دي.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (گماني) ج: استقرایي استدلال د: هېڅ یو

حل: استقرایی استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډیټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنگه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

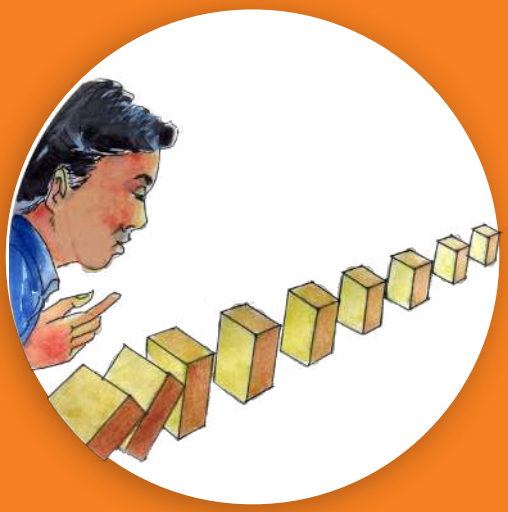
a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړي؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :

آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړی خښتې لویدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنی پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مځکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پریوزې، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لویدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلي شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهېږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟
- آیا کولای شئ د پورتنی پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه وواياست، د پورتنی پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبيعي عددونو معکبونه	د معکبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمايئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو يعنې که:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړ او کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=4^{2\cdot 1}-1=4^2-1=16-1=15$$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده يعنې: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.

څرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

غواړو وښایو چې د $n = k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n = k+1 \qquad , \qquad P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k} - 1) = 5r \cdot 4^2$$

$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5 \cdot (3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کېڼه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، څرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n = 1$ لپاره لرو چې:

$$n = 1 \qquad , \qquad P(1) = 1 \times 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

نود $n = 1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n = k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n = k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لروچې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لروچې:

$$P(k+1)=\left[1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+k(k+1)\right]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times 2+2\times 3+...+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لروچې:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې :

$$2+6+10+...+(4n-2)=2n^2 \qquad \text{(i)}$$
$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \qquad \text{(ii)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجی(نتیجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر ستې عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرستې د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پړاونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې ووېشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټی د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنی نمونه بې کیفیته وي.
آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه کتله ښه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایو نه ډک کړئ؟

15= ☐ +2 ☐ +4+5

☐ = ☐ + 5 + ☐ +7

☐ = 12 + ☐ + ☐ +14

74=17+ ☐ +19+ ☐

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې وویاست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوځخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکن ددوی د جمعې حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې یوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (گنگ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښیاست چې(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعي یې سره موازي وي، دا دوې زاویې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضِرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

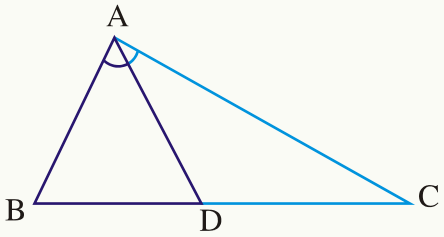
که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ ؟

$a^2 =$ جفت $\Rightarrow a = ?$ → جفت / طاق

$b^2 =$ طاق $\Rightarrow b = ?$ → جفت / طاق

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ و ي، خو $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یاد قبلولو په نتیجه کې د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پیژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړی پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k+1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتني مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسېږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریاضی منطق او دبیان استنتاج

له څنګ ملګری څخه د یو خبر اوریدل به څه نتیجه ولري؟

آیا خبر سم دی که ناسم؟

تعریف

یوې خبري جملې ته بیان وایي چې نتیجه یې په سموالي یا ناسم والي پای ته ورسېږي.

فعالیت

لاندې جملې په پام کې ونیسئ او وښیاست چې له هغو څخه کومه یوه یې بیان او کومه یوه یې بیان نه دی او منطقي نتیجه یې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.

ii) آیا نن ورځ باران نه اوري؟

iii) بارانه اووره..

iv) څه زیات باران اوري!

له پورتني فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه:

1 - هره جمله نه شی کېدای چې بیان وي. یوه جمله کیدای شي یوه حکمي، تعجبي پوښتنه او یا یو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه یا ناسمه ده.

یادونه: که یو بیان ته P ووایو، د سم بیان د لیکلو طریقه $P \equiv T$ او د ناسم بیان د لیکلو طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده =P) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابی لپاره پوهېږو چې نو موږ بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعنې : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکي نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 -د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د ''$\vee$'' علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازی که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	$p \wedge q$	pvq	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چېرې $P \equiv (2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $q \equiv$ بیانونه راکړل شوي وي د p، q، $\sim P$، $\sim q$، $p \vee q$، $p \wedge q$ ، $\sim(p \wedge q)$ او $\sim(p \vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د صحت د جدول په تر تیبولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او $\sim$ یوله بله مستقل نه دی.

2 - د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعنې:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادېږي.

شهودی درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پیښو تر منځ د ورته والی پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.

استقرایی استدلال:

هغه طریقه چې د یو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کېږي یعنې د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادېږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چېرې $P(n)$ د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره $P(1)$ سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او دریاضي د استقرا د استدلال په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجوي استدلال:
له هغه حقیقتونو څخه په ګټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادېږي.
یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.
غیر مسقیم ثبوت:
که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وایي.

بیان :
یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه اویا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:
که د p او q دوه بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p \wedge q$ ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي.
چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

2- د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادېږي، د ($\vee$) علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چېرې نو) او یا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.
4- که یوازې که یا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د (p که اویوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟
الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.
ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.
ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.
د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
استقرايي استدلال
الف- د رياضي له مسألو څخه يوه قوي طريقه ده.
ب- د مسألو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.
ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.
د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم (صحيح) دی؟
الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.
ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډاډ سره نه شوويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.
ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.
د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
الف: استقرايي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.
ب: استقرايي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.
ج: له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.
د: استقرايي استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلي ده.
ب: د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوتر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.
ج: که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دي.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د 2^n+3 افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسی حال کې که

($\alpha =$ باران اوري)) او ((وریځ ده $\beta =$)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library