کوش KUSCH

د فرنخیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

ژباړن:
ډاکټر ماخان (میړی) شینواری

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان (په اولني نوم مېړی) د اروابنادي پستو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شينوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه يې د ۱۳۲۴ هـ ل کال څخه يو يا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کليوالي ښوونځي وروسته، چې د لومړنيو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د يوه بورس له لارې اطريش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکترۍ بريالی شو.

د ۱۹۸۷ م کال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنيو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م کال د اپريل تر نيمايي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژدافير وو او د ۱۹۹۲ يوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شينواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطريش ته راغی) دی په نهم ټولگي کې يې کوژده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچيان وبخښل، څانگه او اباسين، چې د ۱۹۷۹کال د مۍ په شلم په اطريش کې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen Kultur e. V. Köln, Germany

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا
دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومی لوي تر یوې برخی د توپیري پوتنځونو سره لکه $x , y\ z^2 , a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغی رابیلدنی یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د یوه دیفرنځیالمساوات څخه غږیدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبی یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې ورې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو په تخنیك کې، دمهمو کاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته ځه نومونه چی راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تیرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمي وي اوکه شمیرپوهنیزې.که پوه شوم، چی کومی کلیمي ځما په تیرو کتابونوکی روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هڅیږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چی کوم شیان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمی

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ايريشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسڅندنت مساوات. $y = \sin x \,;\, y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په یواځنی یو $y \in R$ تنظیمیږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = < f \rightarrow f(x) >$$

$$y + 2x = y' . x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = < x \rightarrow f(x) , f'(x), f''(x) >$$

$$\Rightarrow y = f< x, y', y'' >$$

دفرنڅیالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y یواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابیلیدنی لکه

$$dy / dx = y' \,;\, d^2 y / dx^2 = y'', \ldots ,$$

رامنځ ته کیږي، بلد یا عادي دیفرنڅیالمساوات بلل کیږي.

د دیفرنڅیالمساوات ټولیزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د دیفرنڅیالمساوات ناپیژندونکی د ډیرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – یا ټوټه دیفرنڅیال مساواتوڅخه غږیږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي ټولیزه بڼه یا فورم

$$0 = f(x ; y ; z , \frac{\partial y}{\partial x} ; \frac{\partial y}{\partial z} ; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; \cdots ; \cdot)$$

د n، $1.,2.,\ldots,n$ (یعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم دیفر–نڅیالمساواتو ترمنځ توپیر کوو

د ۱ –ام نظم دیفرنڅیامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

۲. – ام نظم د.م $3x^2+ y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

. د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنشیالمساوات کی هغه لوړدیفرنشیالکوڅینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنشیالویش د دیفرنشیالمساوات نظم ورکوي .

د دفیرنشیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا ګراد Grad کی ورکړ شوي دي.د دفیرنشیالمساوات ګراد د دیفرنشیالمساوات د زیاتوونو له لاري ټاکل شوی دی، په کوم کی چی د بلواکو اوښتونکو یا واریابلو د ځګیو یا لوړیو یا اکسپوننتونو او د دیفرنشیالویش هغه زیاتون چی د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 +y = 0$

۲. . درجه $x^4 y' y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y.y''^3 + y''. x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنشیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجی $4x^5y^2 + 2y.y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنشیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y.y'' + 4x.y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنشیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنشیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنشیالمساوات اینتیګرال هم بلل کیږي، ځکه، چی په بنسټیزه توګه رابیلیدنی د اینتیګرال له لاري لاس ته راځي د دیفرنشیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندي په مساواتو کی منځ ته راغلو، د دفیرنشیالونو او دیفرنشیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دي مانا چی د ورکړشوو رابیلیدنو ځخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

بیلگه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy / dx = y' = - x / 2$

$dy = -(x / 2).dx$

د رابیلیدنو د له منځورنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسی. د دیفرنځیالمساواتو اوبی یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$\int dy = - (1 / 2) \int x.dx$

اوبی (حل) $y = -(1 / 4) x^2 + C , C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(1/4) x^2 + c >$

یادونه :داسی پورته مات نوکان >, < دې بیا لږ لوي ولیکل شي، زه یی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(1/4) x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = - x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر- یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفرنځیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کټمټ یا ایدنتیك مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \ \blacktriangleright y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یی په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبی

$y = - (1 / 4)x^2 + C$

د ازمايښت لپاره نتيجه بيرته ديفرنځياليږي يا رابيليدنه نيول کيږي. دا نتيجه د دفيرنځيالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چې بيرته په دې توګه ديفرنځيالمساوات لاس ته راغي.

بيلګه: د ديفرنځيالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی يا حل سره، لکهٔ څنګه په ټولو اينتيګرالولو کی يوه ثابت C رامنځ ته کيږي،

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځيالمساوات اوبيونی يا حلونه کيدی شي، چی پهٔ دري ډلو وويشل شي.

۱ – ټوليز اوبی

د دفرنځيالمساوات اوبی يا حل کی ، لکه په هر اينتيګريشن کی يوه اينتيګريشن ثابته c رامنځ ته کيږي.

که د ديفرنځيالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کيږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفيرنځيال مساوات ټوليز اوبی او يا د دې ديفرنځيالمساوات ټوليز اينتګرال بلل کيږي.

بيلګه :

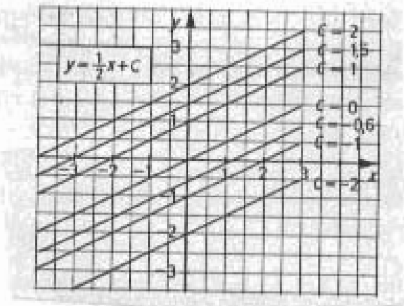
دفرنځيالمساوات $y' = 1 / 2$

$$\Rightarrow \quad y = (1 / 2) \quad dx$$
$$= (1 / 2)\, x + c$$

ټوليز دفرنځيالمساوات $f = < x \rightarrow (½)x + c \mid c \in R>$

د يوه ديفنځيالمساوات ټوليز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چی يو له بل سره غبرګی څغلي) په ډير په ګراف کيانخوريدلی شي .

دلته ناپايډيري اوبيونی ممکن دي، ځکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نيولي شي.



څیره

۲ - پارتیکیولر-یا ځانګړې اوبیونه partikuläre Lösung
یا برخه ئیز- یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow\ f = \langle x \longrightarrow (½)x + c,\ c \in R\rangle \Rightarrow$

ټولیز اوبی $y = (1/2)x + c\ ,\ c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه $y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow\ C = 1,5$

اربښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

$\Rightarrow\ 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

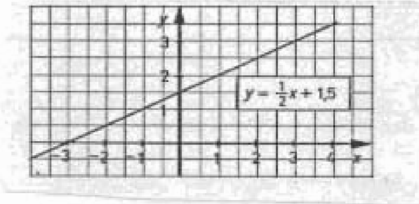
له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = < x \longrightarrow (½)x + 1,5 >$

د پارتیکولار اوبي په گراف کی د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه ښایي

د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینگولار اوبیونیsinguläre Lösungen

دا لاندي دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلگه : د ډفرنځیالمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ► *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x+c) \mid c \in \mathbb{R} \rangle$ ► *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x+c)$

منلی
تولیز
اوبیفکشن

ازمایښت

$$y = \sin(x+c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x+c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x+c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x+c)$$
$$y^2 \quad + \quad y'^2 \quad = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) = 1$$

ازمايښت د نيول شوي اوبي رتينښتينوالى تصديقوي

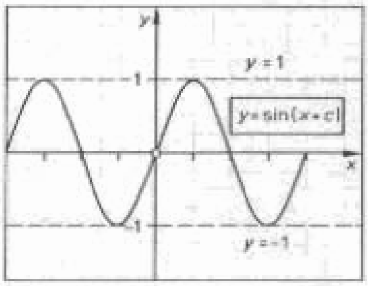
دا ځنى دفرنځيالمساوت د دې تر څنګ نورې اوبيونى هم لري، کومى چى په ريښتونى ديفرنځيالمساوات پوره کوي، مګر له دې پيدا ټوليز اوبى يا حل ځخه رابيليدونه دى.
د ټوليزې اوبيونى $y = \sin(x + c)$ تر څنګ دفرنځيالمساوات د فنکشنونو

$f_1 = < x \longrightarrow 1 >$ او $f_2 = < x \longrightarrow -1 >$

سره هم پوره کيږي.
دا اوبيونى يا حلونه زينګولار بلل کيږي. دا د يوه ټوليز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زينګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څير ښايي، چى د x –محور سره غبرګى ځغلي، کومى چى ټوليز يا عمومي اوبى يا حل $\sin(x + C)$ پوښوي يا پټوي.

$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$
$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_1 = \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \mapsto -1 \rangle \end{array}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زينګولار اوبيونې
يا حلونه



د ديفرنځيالمساواتو زينګولار حلونه د کم اهميت دى يا د کم غوروالى دي. د دې کتاب په چوکاټ کي به د دې په پيلونو يا کارونو تيريدنه وشي.

د اوبیونی متودونه

د دیفرنځیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنځیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړئ!

1. $y' = 4x$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یوازې د لمړي نظم دیفرنځیالکوځینت یا دیفرنځیالویش مخ ته پروت دی، نو د dy پسی برابریږي یا ترتیبیږي او اینتیګرالیږي.

اینتیګرالونه $dy = 4x\, dx$.

$$\int dy = 4 \int x.dx$$
$$y = 2x^2 + c,\ c \in R$$
$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

2. که ډیر اینتیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$
$$y = 8 \cdot \int x^3\,dx - 2 \cdot \int x^2\,dx$$
$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$
$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنځیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیګرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیږي

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$
$$y' = \int x^2\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + c_1;\ c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \frac{1}{3}\int x^3\, dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2;\ c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنځیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او له dx سره خلیږي

بیا دا بدلونېنه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $2(c_2 - c_1) = c$ ته سره را یوځاي کیږي. (دي ته دي په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوي لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$
$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$
$$\int y\, dy = \int \cos x\, dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$
$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$
$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \sin x + c};\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin x + c} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنځیالمساوات د dx سره خلیږي.

وریسی د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1, c_2

او c_3 و یوې ثابتې c ته سره راټولیږي یا رایوځای کیږي.
که دواړو لورو ته وریسې مربع تکمیلونه ۱ ور زیاته شي نو y شمیرل کیدی شي، او لاس ته راغلی f تولیز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int dy + \int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright\ 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y-1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 | c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

په یاد ولری

۱ – دیفرنځیالمساوات په تولیزه توګه تولیز، پارتیکیولار او په ورکړ شوي حالت کې زینګولار اوبیونی یا حلونه لري.
۲ – دیفرنځیالمساوات په مناسب یا ورته شمیرنیز کارونی له لارې په زیاتون– حالتونو کی د اینتیګرال له لارې اوبي کیږي.
۳ – زیات وخت باید چې اوبي ونیول شي او دا اوبی بیا د هغه د رینښتینوالی لپاره و ازمایل شي.

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنځیالمساوات اوبې یا حل کړی

1 . $y'' = x . e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$

4 . $x. y'' = 3y'$ 5 . $y . \ln x = x . y'$ 6 . $y' . y + y' + x = 0$

7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' . y = x + 1$

10 . $y' . y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$

12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$

14 . $y^3 . y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 . y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x . y' = y$

17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$

19 . $3x - y'' = a$ 20. $y'' = y'$ 21. $y'' = x . \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسې پیژندل کیږي، چې یواځې لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترڅنګ کیدی شي x او y همداسې د دوې توان رامنځ ته شي بیلګې :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y . y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y , y' اوx موجودیت او لویوالی تنظیمونې پسې د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښه

کیږي، په کومکي چی ممکن وي،چی لویي $dy , g(y)$ په همدې توګه $dx , f(x)$ هر یو یې په یوه لور بیل یا ځانلۀ کړو.
د دې اړونی سره کیدی، چی مساوات په دواړو خواوو ایتګرال شي.
بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \;\blacktriangleright\; y^3 = g(y);\; x^2 = f(x)$$

$$\int y^3\, dy = \int x^2\, dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چی د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندي بیلګه کی روښانیږي).
دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.
بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \;\blacktriangleright\; x^2 = f(x);\; y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2\, dy = \int x^2\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright\; 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \,|\, c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

۲ . د دې لپاره ، چی د $f(x) = x^2$ سره او x د $g(x) = y - 4$ د dy سره رایوځایونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي. *

وریسی له دې سره dy او g(y) همدا ډول dx او f(x) هر يو په يوه خوا خانلۀ کيږي. د کوم سره چې dx او dy بايد په مات باندې کی پراته يا ځاي وي. **
د مساوات دواړه خواوې ايتيګرال کيږي. د اينتيګرالثابتي c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډيږي.
دا راپيداشوی فنکشن د y په لور اوبی کيږي. د e^C لپاره c اينسوول کيږي.***
اوf د دفرنخيالمساوات ټوليز اوبی دی****

يا دونۀ : لاندې د شميرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2\cdot\frac{dy}{dx} - y + 4 = 0 \qquad *$$

$$x^2\cdot dy - y\cdot dx + 4\cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y\cdot dx}{x^2} + \frac{4\cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \qquad **$$

$$\int\frac{dy}{y-4} = \int\frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3 \qquad ***$$

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3}\cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c\cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x\cdot - c\cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c\in\mathbb{R}\rangle}} \qquad ****$$

ديفرنځيالمساوات د جلا يا بيلو شوواووبنتونو سره، ځان په دې ګروپونو توته کوي

۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرينوركوني وظيفه وركوي، لكه ځنګه، چې په اينتيګرالشميرنه کې.

بيلګه :

$$y' = x^2$$

بدلونه $dy / dx = x^2$

اينتيګرالونه $dy = x^2\, dx$

$$y = \int x^2\, dx$$

تولیز اوبی $y = (x^3 / 3) + C$

دلته f تولیز حل دی. $\Rightarrow f = \langle x \to (x^3 / 3) + c \mid c \in R \rangle$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووبنتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په یوه خوا ځانله کيږي.

د مساوات دواړه خواوې اينتيګراليږي، د کوم سره چې د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2+1}$ اينتيګرال پخوا اوبی شويدی..

بيلګه (يادونه : دا بيلګه لکه چې ناريښتيا اوبی وې، پام ورته وکړی، ؟ ؟ .)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2+1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2+1} = \int dx$$

$\ln \left|\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}}\right|$ کيڼ لور ته ځانله کيږي په داسې توګه، چې د اينتيګريشنشابته

بنې خوا ته راوړل شي او مساوات د $\sqrt{3}$ 2 سره ځل شي.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په بنې لور اکسپوننشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په یوه ځل توپه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کیږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بیا د $(3y - \sqrt{3})$ سره ځل کیږي او بالاخره مساوات د y سره کیڼ لور ته راوړل کیږي همداسی $\sqrt{3}$ و بنې خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنخیالمساوات د ټولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x)\,.\,g(y)$ بنې مساوات

د فرنخیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیګرالیږي.

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c-c} = c$$

وریسی بیا f تولیز یا عمومي اوبی دی

بیلگه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بنې یا فورم مساوات اووبشتونې y , dy او dx , x دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow \quad y\,dy = x\,dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینتیگرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$(1/2)\, y^2 + c_1 = (1/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنخیالمساوات تولیز اوبی یا حل دی.

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

۵ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووښتونې y ، dy او x ، dx په دواړو خواوو ځانله کیږي . او په اخر کې دو خواوې اینتیګرالیږي او په y پسې اوبی کیږي.

هغه لاس ته راوړې اینتیکریشنثابتې ږدو: $c_2 - c_1 = \ln | c |$

$$y' = y / x \; ; \quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln| y | + c_1 = \ln | x | + c_2$$

$$\ln | y | = \ln | x | + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln| c |$$

$$\ln | y | = \ln| x | + \ln | c |$$

$$\ln | y | = \ln | x. c |$$

$$y = x.c$$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow x.c \mid c \in R >$$

دا لاس ته راغلی f ټولیز حل دی

بیلګی

1 . $y' - 3x = -4x^2$

$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4. \int x^2\, dx + 3. \int x\, dx$$

$$y = (4 / 3)\, x^3 + c_1 + (3 / 2)\, x^2 + c_2$$

ږدو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2)x^2 + c>$$

دا f د مساوات ټولیزه ابیونه ده

۲ . $\sin x - y' = \cos x + y'$

$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$

$$2dy = \sin x \,.\, dx - \cos x \,.\, dx$$

$$y = (1 / 2) \int \sin x\, dx - (1 / 2) \int \cos x\, dx$$

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/29 \sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$=> \quad f = <x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c>$$

3 . $\quad 2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z + a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبی شوی دی (پا داپو ،ښ)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2] \, dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a \Longleftrightarrow z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره خلیږي، وروسی هغه غړی، چی y لري د مساوات یوې لور ته خانلهٔ کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y په لور اوبې – یا حل کیږي، چی په دې

توګه ټولیز اوبې لاس ته راځي .

$$y = \frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}} \right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کی دواړه خواوي آینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$
$$dy / y = dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int (1/y)\, dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$
$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1)\ , \quad c_2 - c_1 = c$$
$$\ln|y| = x + c$$
$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبې f ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$
$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 ټوټه ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \longrightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلګه ۵ . $x.\sqrt{y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توټه کیږي.
د دي برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

پردو $c_1 + c_2 + c_3 = c$

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وریسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځای کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

پردو $x_1 = 2,\ y_1 = 10$

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 = 9{,}8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځای په ځای کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9{,}8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو رینبه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} \, . \, dx$$

په لاندې کی راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2} \; dx$ د مخه اوبی شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\, x + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\, x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.

که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کی کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\, x_1 \blacktriangleright x_1 = 1, \; y_1 = 0$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $dx , f(x) = x / (x^2 + 1)$ د دفرنځیالمساوات په دواړو خواو کی ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوی اینتیګرال کیږي او بیا د y پسی اوبي یا حل کیږي.

$$dy / dx = y.[x / (x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیګرالثابتو c_1 او c_2 یوخایونه و $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2+1} + (c_2 - c_1),\ c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|\sqrt{x^2+1}\ .\ c|$$

$$y = \sqrt{x^2+1}\ .\ c$$

او لاندې f ټولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2+1} >$$

بیلګه ۸: $y' = [(x^2 - 4) / x^2].\quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $dy , g(x)$ او $dx , f(x)$ د مساوات په دواړو لورو ځانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4)\sqrt{1-y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(x^2-4)\cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1

او c_2, c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin}\, y + c_1 = x + c_2 - 4[-(1/x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2+4)/x] + c$$

$$y = \sin[((x^2+4)/x) + c]$$

د دې په اخر کی ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسی ، چی x_1 او y_1 د فنکشن- مساوات په ټولیز اوبی کی ځای په ځاي شي.
په دې توګه ورپسی ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin } y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \text{Arcsin } 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$
دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.
غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواځانله کیږي. انتیګریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چی ایمپلیځیت نه شی انځوریدلی وروسته پردو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\,dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\,dy$$

$$\frac{x^3}{3}+c_1+\ln|x|+c_2=\ln|y|+c_3-\frac{y^2}{2}+c_4$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|+c=0$$

بیلګه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y , dy ځانلوني وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځای شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انخوریدی

$$dx-\frac{4\cdot dx}{4+x}=\frac{dy}{y}+dy$$

$$\int dx-4\int\frac{dx}{4+x}=\int\frac{dy}{y}+\int dy$$

$$x+c_1-4\cdot\ln|4+x|+c_2=\ln|y|+c_3+y+c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4+c_3-c_2-c_1=c$$

$$x-4\ln|4+x|=\ln|y|+y+c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.

د واریابلوx او y د اکسپوننتو یا په جګګیونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دیفرنځیالمساوات د هوموجینواووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینبوونی یا بدلون له لارې ځان اوبیوني یا حل ته پرېږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.

(د) په ځاي اینبوونه مو یوه مساوات ته بیایي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

سبستيچيوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x.z$ او په ورته يا همدې

توګه $y^2 = x^2.z^2$ سبستيچيوشن کو.کله چې ترم $y = x.z$ د خلقاعدې سره

دفرنځياليږي، نو د dy لپاره بيا $z.dx + x.dz$ ږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو يا واريابلو سره د د

فرنځيالمساوات په بڼه راوړل کيږي.په کوم کې چې د x^2 سره خانله شي او

د x , dx همداسې z , dz سره غيري د بېيبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 \quad + y^2 \quad + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بيلګه : $x^2.dx + y^2 .dx + xydy = 0$

اوبې يا حل : اوبې په څلورو پلونو کې پلې کوو

۱ – په مساوات کې بدلون منځ راولو يا سبستيچيوشن کوو

$$y = x.z \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 . z^2$$
$$dy = z.dx + x.dz$$
$$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz\,(z.dx + x.dz) = 0$$
$$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$$
$$dx(\, 1 + 2z^2) = -x.z.dz$$
$$dx / x = -(z.dz\,)/\,(1+2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د

ديفرنځيالمساوات په بڼه راوړل کيږي.

۳ – د مساوات دواړه خواوې اينتيګرال کيږي.

د اينتيګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (\,½)\ln(a^2 + x^2)$ اوبې راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشنثابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپوننشلمساوات په څیر لیکل کیږي.
بیا x ریښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.
د $e^{4(c\ -\ c\ )} = c$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.
هغه f چی وروسته لاس ته راځي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4\cdot(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0,5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}\,(c - 0,5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c - 0,5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x\cdot -\frac{1}{x}\sqrt{c-0,5x^4}\right\rangle$$

بیلګی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخی dy / dx جوړوو او ړدو $dy = z.dx + x.dz$.اوس د بڼیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \;\blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیګرالیږي.د اینتیګر-یشنشابتې رایوخای کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \;\blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \;\blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle}}$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او ږدو $dy = z.dx + x.dz$.

د مساوات ښه بدلون سره x,dx همداسې z,dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بیلولو وروسته مساوات اینټیګرالیږي.

$$(x^2 + y^2)\,dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z(z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په ځاي y^2 / x^2 ځاي په ځاي کیږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c ږدو.

لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوڅ دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c} \rangle}$$

بیلګه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په ځای ایښوول

د $y = x . z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د ځلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او ږدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د ښي بدلون له لارې x,dx

همداسی z, dz په دواړو لوروځانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ږدو او

ایتیګریشنثابتی رایوځاي کوو.

د مساوات د y پسی اوبی مو

تولیز اوبي f ته بیایي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle}}$$

بیلګه ۴ : $y' . (y - x) = y$

(د) په ځاي ږدو $y = x.z$,

د ځلقانون سره dy / dx جوړوو

مساوات بنیبدلونسره $x.dx$ همداسی

z,dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اووښتونو ځانلونی وروسته

دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لري

$\int [f '(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z}\, dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z}\, dz = 0$$

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2\cdot\ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

(د) په ځایونه $y = x.z$

د $z = y/x$ اینسوونی سره په

څېر راګرځول کیږي.

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

وروستی اوبیونه مو فنکش-

برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي

ایمپلیلیخیت انځوریدلی شي.

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1+c_2)}$$

$$\blacktriangleright\ e^{-2(c_1+c_2)} = c$$

$$\underline{\underline{y^2 - 2xy = c}}$$

۱ . ۲ . ۳ لایني دیفرنځیال مساوات

د لمړي نظم لایني دیفرنځیالمساوات لاندې ، هغه مساوات پوهیږو، چی y او y' په ۱ – ام ګراد کی ، دا په دې مانا چی لایني وي، ولري.دا شرطونه داووبښتونکي x لپاره باور نه لري. دلته $F(x)$ او $f(x)$ د x فنکشنونه یا بلواک دي او یا ثابتی.

$$\textit{allgemein:}\ \frac{dy}{dx} + y\cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:

- $y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y'\cdot x = x\cdot\sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4\cdot y$

د لایني دفرنځیالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی همغه ارزښتیز متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبیونه

۱ – سبستیچیوشنوو $y = u(x).v(x)$ له دي څخه دخلقاعدي له لارې لاس ته راځي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\blacktriangleright\ y = u(x)\cdot v(x)$$

د y او y' لپاره ارزښتونه په دفرنځیا-لمساوات کي کینسوول کیږي

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x)\cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۲ – لوبي $u(x)$ همداسی $v(x)$ له نوکانو راوخي

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

۳ – د $u(x)$ همداسی $v(x)$ لپاره د څنګشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چی نوکترم $[dv / dx -(2/x)v(x)]$ او له دې سره د u څلوونې یا فاکتور صفر کیدی شي .

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1} \blacktriangleright c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د $v(x)$ لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چی x^2 په مساوات کې کیښوول شي.له $v(x)$ سره چی څل $u(x)[dv/dx- 2v(x) / x]$ په صفر برابر شي یو پاتی غړی راکوي، له کوم سره چي du همداسی $x.dx$ په دواړو خواو خانله کیدی شي.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x} \blacktriangleright v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot \quad 0 \quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

۴ – له پاتی غړي څخه $u(x)$ د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2 \quad \blacktriangleright c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

۵ – په وتلمساوات $y = u(x).v(x)$ کې راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :

$u(x) = -(1/x)-(½x^2)+c;v(x) =x^2$

$$y=\quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

لاس ته راوړنه يې د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

همدا بیلګه به اوس ددوم یعنی لاګرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - خاي په خاي کوو $F(x) = 0$ او راپاتی پاتی مساوات $y' - y.f(x) = 0$ د ورسره بلدمتود د اوبښتونکو بیلولو له لارې اوبی کوو. د اینتیګریشن ثابطی پهخاي، چی ګټور دی لوګاریتم ټاکو، چی دا لو- ګاریتم بیا له منځه ځی. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجین مساوات $y' - y.f(x)$ کی ثابته نه ده، بلکه د x یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د y لپاره د ځل یا ضرب قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

۳ - د y او y' دواړه توته اوبیونی په سرچینز مساوات کی خاي په خاي کیږي او مساوات و $dC(x) / dx$ پسی اوبی کیږي.

۴ - د اینتیګرالولو له لارې $C(x)$ لاس ته راوړ لکیږي.

۵ - په مساوات $y = x^2.C(x)$ کي د $C(x)$ لپاره ارزښت کیښول کیږي او مساوات ساده کیږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\,\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\,\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k\in\mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to kx^2 - x - \frac{1}{2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوت $y' - ay = x$ د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پۀ ځاي اینښوونی (سبستیچیوشن) $y = u.v$ له لارې او مناسب رابیلیدنی ته $dy / dx = u.(dv/dx) + v(du/dx)$

$$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$$

ب – $u(x)$ له نوکانو راوځي

پ– په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه $v(x)$ ټاکل کیږي.

$$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln|v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax + c_2 - c_1}$$

$$= e^{ax} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

ت – د $v(x)$ لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي.

د اینتیګرال اوبی د ټوټه اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.

$$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}}\, dx$$

$$u(x) = -\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c$$

ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات $y = u.v$ کی کینښوول کیږي.

لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبي دی

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c\right) \cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

الف – د لاګرانژ پسی ښی لور په صفر مساوي ګیښول کیږي او dx همداسی dy, y په دواړو لورو څانله کیږي.
راپاتی مساوات dy / y = a.dx اینتیګرالیږي، د y پسی بڼه‌بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

ب – د y لپاره برابرون د څل‌قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.
پ – د y او 'y لپاره ټوټه اوبیوني په پیلبرابرون کی کیښول کیږي. داسی ودیز برابرون د dc(x) پسی اوبی کیږي له دې سره $a.e^{ax} . C(x)$ له منځه ځي
ټ ٠ ارزښت C(x) د اینتیګر‌الولو له لارې لاس ته راځي

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه په مساوت
y = u(x) v(x) e^{ax} .C(x)
کی ږدو
نتیجه د لاګرانژ پسی ټولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

$$y' \qquad -a \cdot y \qquad = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k\right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax};\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\left\langle x \cdot - k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle}$$

بیلګه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) او y او y' په دفرنځیالبرابرون کی ږدو

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر ږدو او v شمیری.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی.

v(x)(du/dx) = sin x

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v(x)} = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي:

v(x) = 1 / x

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^c \blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د اینتیګرالولوله لارې ټاکل کیږي

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

$$\int \mathrm{d}u = \int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\ k\in\mathbb{R}$$

په y = u(x) .(x) کی لاس ته راوړل شوي ارزښتونه د u او v لپاره ځاي په ځاي کړي. لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات ټولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

بیلګه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبې کړۍ.

پړدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتې مساوات د اووښتونو د بیلولو له لارې اوبې کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په ځیر کینبوول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ او y تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$
$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$
$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$
$$= u(x) \cdot v(x)$$
$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونې په پیلمساوات کې کینبوول کیږي او $c(x) \cdot e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي.

د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\begin{array}{ccc} y' & + & y = e^{-x} \end{array}$$
$$\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot c(x) = e^{-x}$$
$$\int dc(x) = \int dx$$
$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$
$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x}.(x)$ کې $c(x)$ کینبوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسې تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \blacktriangleright c(x) = x + k$$
$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle}}$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوبنتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړی

1. $y' = \frac{y}{2a}$ 2. $y' = axy$ 3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

4. $y' - x^3 = y - x^3$ 5. $\frac{y'}{2x} = y^2$ 6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,\mathrm{d}y + xy \cdot \mathrm{d}x = 0$

13. $y' = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2 + 4}}{y^2\sqrt{y^2 + 9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$

21. $\mathrm{d}x(e^y + e^{-y}) = \mathrm{d}y(e^x + e^-$

22. $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره

لاندې دفرنځیالمساوات اوبی کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \dfrac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = y'$

7. $\mathrm{d}y \cdot x = (y - x)\,\mathrm{d}x$

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$

9. $(x + y)\,\mathrm{d}x - (x - y)\,\mathrm{d}y = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

13. $x \cdot \mathrm{d}y - y \cdot \mathrm{d}x = y \cdot \mathrm{d}y$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot \mathrm{d}x - 3x^2 \cdot \mathrm{d}x + 2xy \cdot \mathrm{d}y = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot \mathrm{d}x + \sqrt{4xy} \cdot \mathrm{d}y = x \cdot \mathrm{d}y$

19. $\dfrac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيالمساوات

لاندې ديفرنځيالمساوات د برنولي او لاګرانژ متودونو سره اوبى کړی.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دويم نظم ديفرنځيالمساوات

د دويم نظم ديفرنځيالمساوات لاندې يو مساوات پوهيږو، چې $y'' = d^2y / dx^2$ د y خورا
جګ دفيرنځيالکوشنت يا دفيرنځيالويش په څير ولري، د دې ترڅنګ کيدی شي
$y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.
د ديفرنځيالمساواتو په دې پيلونی په چاپيريال کی کيدی شي ، چی لنډ يو څو د دويم
نظم ديفرنځيالمساوات او د هغو کارونه يا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بڼی ديفرنځيالمساوات

Beispiel: بېلګه:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y''\,dx = \int -\sin x\,dx$$

$$y' = \cos x + c_1 ;\ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y'\,dx = \int \cos x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$\underline{\underline{y = \sin x + c_1 x + c_2 ;\ c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1 ;\ c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

د اوبيوني تلنه: د رابيليدنی د له منځه وړلو د اوبيوني پرينځيپ ډيرواره اينتيګرالول دي.
الف: د برابرون دواړه لوري اينتيکراليږي
۲ – راپورته شوي دفرنځيالمساوات بيا اينتيګراليږي.
۳ – په ورکړ شوي حالت کې له شرايطو c_1 او c_2 وټاکی

بیلگی:

لمړی – $y'' = 1/(1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس

ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y

لاس ته راځی اوله دې سره د f

تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int \operatorname{Arctan} x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_5, c_4, c_3 د اینتیګر–

یشنثابتی c_1 ته یوځاي کیږي

دویم اینګریشن y راکوي

ثابتی c_9, c_8, c_7, c_6 اینتیګریشن

ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - + \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

د جګ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توګه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

لمړی اتیګرالونه "' y رااکوي،
دومه – "y دریمه– 'y او
څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره
رایوځاي کیږي

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2}c_1 \cdot \int x^2\,dx + (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6}c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 + (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

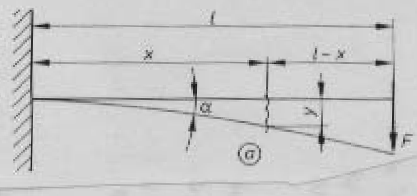
$$k_1 = c_1$$
$$k_2 = c_2 + c_3$$
$$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$$
$$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$$
$$k_1 ; k_2 ; k_3 ; k_4 \in \mathbb{R}$$

د لته f د ټولیز ابیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلګه : یوه یولوریز غزول شوي باوروني ګیرون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیه‌وله پریوتلی زور یې F دي له میخانیك څخه د ګیرون شمیرنی برابرون څرګند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد ګیرون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی ګیروممنت دی $-F(l-x)$

ګیرونمونت = M
د نرموالی– یاالاستیخیتي مودول= E
د هواري ورونمومنت = l



د اینتیګراولو له لارې y'' په y' اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دویم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرایطو څخه شمیرل کیږي. د $x = 0$ په ځاي کی جګوالی y' هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

für $x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

دویم اینتیګرولول مود یفرنشلبررابرون ته بیایي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I}\int x\,dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرځونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

für $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\underline{\underline{y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}}$$

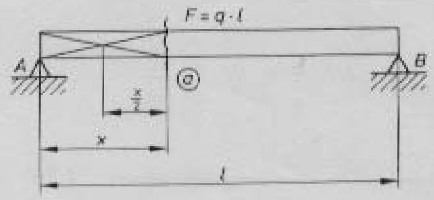
ماکسیمال ګرونه د $x = l$ سره پرته ده. y_{max} د $x = l$ ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي.

$$\underline{\underline{\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle}}$$

für $x = l \Rightarrow y_{max} = \underline{\underline{\frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}}}$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګرون وشمیرئ، د لیکي بار q سره. د تیر په یوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی دی، نو پرتی هر A او B هر یو یی د ټول بار نیمی دي.



$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنځيالمساوات كي كيښول كيږي.

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

د "y لپاره برابرون د اينتيګريشن سره و 'y ته بيرته بيول كيږي

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \, dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

په x = l / 2 ځاي كی هغه لوي كږون مخ ته پروت دی، دا په دي مانا چی په دي ځاي كی تنجنت د كږونكرښی سره پرته يعنی افقي پرته ده، جګی يا جګوالی y ' = 0 مساوي په صفر دی.

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

د c_1 لپاره راپيداشوی ارزښت په برابرون 'y كی ايښول كيږي.د 'y د بيا يا نوي اينتيګرلوني سره فنكشن y تاكل كيږي.

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{\cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \, dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

د x = 0 په ځاي كی راګږون y = 0 دی، د دي سره ثابته $c_2 = 0$ ده.

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

د x = l / 2 لپاره هغه خورا لوي كږون y_{max} مخ ته لرو دی، چی د ½ ايښوولو سره د خورا لوي كږون فرمول لاس ته راځي

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}}}$$

د $y'' = f(y)$ فورم یا بڼي دیفرنځیال مساوات

ېلګه **Beispiel:**

$$y'' = ay \quad \blacktriangleright y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z\,dz = a \cdot \int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\underline{\underline{x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5}}$$

اوبیوونتنه *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي اوz شمیرل کیږي.

۳ – او بیا ورپسی د واریابلی د خانلونی متود له لارې شمیرل کیږي.

د اوبیونی په څیر ایمپلیخیت فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګې: **Beispiele:**

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2} \int dy$$

د مساوات اینتیګریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

ورپسی د اووښتونی د ځانلونی متود له لارې شمیرل کیږي

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a} \sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2} (ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4} (x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

د لته f ټولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f = \left\langle x, \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3\right]\right\rangle$$

2. $y'' = -\frac{1}{2} \sin y$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z\, dz = -\frac{1}{2} \int \sin y\, dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونه مو یوه ناوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیایي.

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang: اوبيونلار

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲ – راپورته شوی مساوات اينتيګرال کيږي او په z پسی ترتيبيږي

۳ – دلته z اوبی کيږي، بيا اينتيګرالول يي د ديفرنخيال- مساوات ټوليز اوبيونه لاس ته راځي.

Beispiel: بيلګه:

$$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

Beispiele: بيلګې:

1. $y'' = y'^2$

$$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$$

2. $y''=1-y'^2$

$$y''=1-y'^2 \blacktriangleright y'=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1-z^2$$

$$\int\frac{dz}{1-z^2}=\int dx$$

$$\text{Artanh}\, z+c_1=x+c_2 \quad \blacktriangleright c_2-c_1=c_3$$

$$z=\tanh(x+c_3) \quad \blacktriangleright z=\frac{dy}{dx}$$

$$\int dy=\int \tanh(x+c_3)\,dx$$

$$y+c_4=\ln|\cosh(x+c_3)|+c_5 \quad \blacktriangleright c_5-c_4=c_6$$

$$y=\underline{\underline{c_6+\ln|\cosh(x+c_3)|}}$$

د لته f د تولیز اګیفنکشن دی

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x, -c_6+\ln|\cosh(x+c_3)|\rangle}}$$

تمرینونه

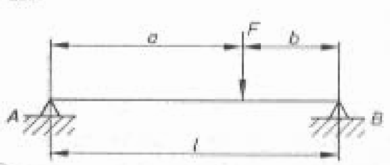
۳۱ . د دوم نظم دفرنځیالمساوات

لاندې دفرنځیالمساوت اوبې کړی

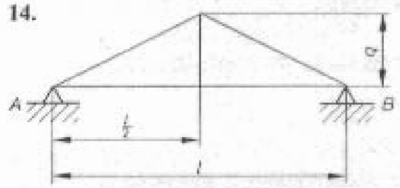
1. $y''=\frac{1}{x}$	2. $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$	3. $y''-x^3=0$
4. $y''=x+\sin x$	5. $y''=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	6. $y''=\tan x$
7. $y''=\sinh x$	8. $y''=e^{x^2}$	9. $y^{(4)}=\cos x$
10. $y''=e^x$	11. $y^{(4)}=\sinh(2x)$	12. $y^{(5)}=\cosh(ax)$

د کړون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کړوونی مساوات د لاندې بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

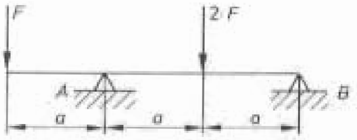
13.



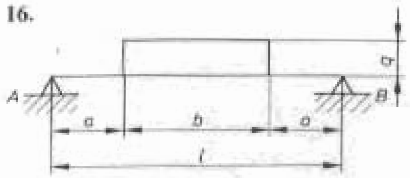
14.



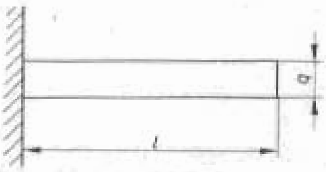
15.



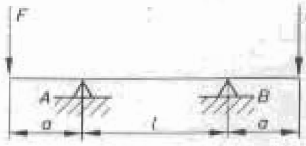
16.



17.



18.



لاندې دفرنځيالمساوات اوبې کړی

19. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^y$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \dfrac{1}{y}$

23. $y^2 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$c_2-c_3+c_4=c$$

$$y=e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4$$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int (y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$c_2+c_3=c$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$

$$y=\frac{1}{2}\sin x+c$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \;\blacktriangleright\; y'=z;\quad y''=z'$$

$$z'=\frac{dz}{dx}$$

$$x\cdot z'=3z$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3\, dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + c}}$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{y}\, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}\ln^2 x} + c}}$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1)\, dy = -\int x\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{c - x^2}}}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2)\, dx$$

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = -\cos x - e^x + c$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + c}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبیونه د y پسی اوبیوړ نه دی،
له دې امله ایمپلیثیت اوبیونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c$$

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$2y' = 2x^2 \quad \| :2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + c}}$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\, dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{x - \sin x + c}}$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$- \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$c = 4c_1$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \underline{\underline{\pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}}}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنخیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کی ونیول شي، پیژندل کیږي چی دفرنخیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\, dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} - x + c}}$$

16. $e^x \cdot y' = y$

ساده د $y = 0$ پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورې کارونې لپاره دې $y \neq 0$ نیول شوی وي

$c = e^{c_1}$

د $c = 0$ سره پارتیکولار- یا توته اوبیونه خوندي ده.

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$ پارتیکولار اوبیونه

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x} dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-e^{-x}+c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{-(e^{-x})}}}$$

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7 \int x^3 dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right) dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{7}{20}x^5 + c_1 x + c_2}}$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x \, dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right)dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $\underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

سملاسی $y = a = \text{const}$ د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسی اوبیونی لپاره تیك د $y' \neq 0$
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دي مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln|y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln|y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$$e^{c_1^*} = c_1 \qquad y' = c_1 \cdot e^x$$

په روښانه توګه د $C_1 = C_2 = 0$
همداسې د $C_1 = 0$ سره پورتنۍ
پارتيکيولار اوبي په توليز اوبي
کې دننه يا خوندي دي.

21. $y'' = x \cdot \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot e^x$$

$$\int dy = \int c_1 \cdot e^x\, dx$$

$$y = \underline{\underline{c_1 \cdot e^x + c_2}}$$

$$\frac{dy'}{dx} = x \cdot \cos x$$

$$\int dy' = \int \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{dv_1}$$

$$y' = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (x \cdot \sin x + \cos x + c_1)\, dx$$

$$y = \int \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{dv_2} + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + \sin x + c_1 x + c_2$$

$$= \underline{\underline{2 \sin x - x \cdot \cos x + c_1 x + c_2}}$$

۱ . ۲ د لمړي نظم دیفرنخیالمساوات ته تمرینونه

۱ . ۲ . ۱ دیفرنخیالمساوات د بیلوشوو اووبنتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

پارتیکولار اوبیونه: $y = 0$

نیونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{x}{2a}}$$

$c = e^{c_1}$

پارتیکیولار اوبیونه په ټولیز اوبی هم دننه دي(C = 0)

2. $y' = axy$

پارتیکولار اوبیونه: $y = 0$

نیونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}$$

د c = 0 سره پارتیکیولار اوبیونه په ټولیز اوبیونی کی دننه دی.

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4)\, dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

د دي ديفرنخيالبرابرون اوبی د تیرتمرین۱
څخه د1/2 = a سره، لاس ته راورل کیږي

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

$y = 0$: زيكولار اوبيونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

د ديفرنخيالمساوات اوبيونه يو
زينكولار اوبی لري.

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

$y = 0$:زينكولار اوبيونه

ساده پيژندلکيږي، چې اوبی
y = 0 ، زيكولار اوبی دی چې
دا به وروسته وښوول شي.

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1-c\cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1-c\cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنځيالمساوات اوبې د تر مخه تير تمرين ۵ ځخه رانيول کيدی شي

زيکولارزوبيونه :: $\underline{y=0}$

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

اوبې په ايمپليځيته بڼه (اهرامغوځی)

$$\underline{\underline{b^2x^2 - a^2y^2 = c}}$$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int dy = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$y = \underline{\underline{2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c}}$$

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x \cdot y'=y \cdot \ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي (د ln y له امله)، چې y > 0 باید باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسی کارونی لپاره یواځي x |= 0 نیول شوی.

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x) \triangleq \ln y.$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx}=y \cdot \ln y$$

نیونه : Voraussetzung: $x \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y \cdot \ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y \cdot \ln y}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c \cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c \cdot x}$$

$$y=e^{c \cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، چی له دې امله دا ټولیز اوبی دی

پارتیکولار اوبیونه : $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy \cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0 سملاسي پیژندل کیږي .ددیفرنځ-یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی باید y |= 0 ونیول شي او 1 - x |= 0 دا په دې مانا چی $y.(1 - x)^2 \neq 0$

نیونه : Voraussetzung: $y \cdot (1-x^2) \neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy \cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int \frac{dy}{y}=-\int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1}$$

$$= \left(e^{\ln|1-x^2|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot \sqrt{|1-x^2|}}}$$

$e^{c_1} = c$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتیکیو- لار اوبی دننه یا خوندي دی.
د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ، چې $|x| = 1$ اوبی هم دیفرنخیالمسا- وات پوره کوي، داسی چې دا ټولیز اوبی انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\sin x + \cos x| + c}}$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = \sin x + \cos x$

$$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\,dx$$

14. $y' = e^x \cdot y$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\,dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{(e^x)}}}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه اوبیونه خوندي ده .

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

زیکولار اوبیونه : $y'=0$

$y'=0 \Rightarrow \underline{\underline{y=a=\text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x$ ▶ quadrieren مربع کونه

$1 = y' \cdot x^2$

$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$

$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$

$y = -\frac{1}{x} + c$ ▶ für $x \neq 0$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y'=0$ زینکولار اوبی

$y'=0 \Rightarrow \underline{y=a=\text{const.}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$

$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$

$\int y^2\, dy = \int dx$

$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$

$c = 3c_1$

$y = \sqrt[3]{3x+c}$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \frac{dx}{x(x^2+2x+1)}$

$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$

$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}\, dx$

Koeffizientenvergleich: د کوونو انډول

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && A+B &&=0\\
&\text{II:} && 2A+B+C&&=0\\
&\text{III:} && A &&=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && 1+B=0 \Rightarrow B=-1\\
&\text{II:} && 2-1+C=0 \Rightarrow C=-1
\end{aligned}$$

$$\int dy = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\underline{\underline{\int dy = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c}}$$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري
او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په
پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,dy = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4}\int \sqrt{y^2+9}\,dy =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,dx \quad \| \cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3} - 9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9}+\frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right] =$$

$$= x\sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right]+c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 2x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم
ممکن ده.

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - 81\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =}}$$

$$\underline{\underline{= x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 16\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c}}$$

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

پارخیل اینتیګرال

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$

▶ $x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\downarrow}{x}\cdot \underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv}$$

u

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کې خوندي دی.

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}}}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$$dx = \ln y\, dy$$

$$\int dx = \int \ln y\, dy$$

$$x = \underline{\underline{y(\ln y - 1) + c}}$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اینتیګرالونه برابر فورم
لري بسیا کوي، چې یو وشمیرل شي
بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan } t + c$$

$$= \underline{\underline{\text{Arctan } e^x + c}}$$

اوبی په ایمپلیخیتفورم

$$\underline{\underline{\text{Arctan } e^y = \text{Arctan } e^x + c}}$$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

$\underline{\underline{y=0}}$:پارتیکولار اوبیونه

درېمه ریښه یې راوستل کیږي.
یا یې ۳ . جذر نیول کیږي

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$

$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$

$\ln |y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c_1} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}}}}$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کې خوندي دی.

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$z = x + y; \quad y = z - x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - 1$

$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$

$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$

$\frac{dz}{z^2+1} = dx$

$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$

$\text{Arctan } z = x + c$

$z = \tan(x+c)$

$x + y = \tan(x+c)$

$y = \underline{\underline{\tan(x+c) - x}}$

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ټینګولاراوبیونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نیونه

$\Rightarrow$ په y' ویشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$

$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$

$c = 2c_1$

$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$

$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x + c}$

$y = a = \text{const.}$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$y'^2 = x^2 + 2x$

$y' = \pm\sqrt{x^2 + 2x}$

$= \pm\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$

$= \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\int dy = \pm \int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$

سبستیچیوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

$y = \pm \int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$

$= \pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|\right] + c$

$$\underline{\underline{y = \pm\frac{1}{2}\left[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x} - \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|\right] + c}}$$

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل (ټوټه–) اینتیګرال

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u}\, \underset{dv}{dy} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$x^2 = z \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{2x}$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$\underline{y=0}$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}$$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کی خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارخیل اینتیګرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int \cosh y\cdot dy = \int \underset{u}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int\cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \text{Arsinh}\,[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]$$

30. $\dfrac{\text{Arsinh}\,x}{\text{Arcosh}\,y} = y'$

پارخیل یا پارشل اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Arsinh}\,x}{\text{Arcosh}\,y}$$

$$\int \underbrace{\text{Arcosh}\,y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int\underbrace{\text{Arsinh}\,x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\text{Arcosh}\,y - \int\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\text{Arsinh}\,x - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$y\cdot\text{Arcosh}\,y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\text{Arsinh}\,x - \sqrt{x^2+1} + c$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا-لمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پریږدي، چې د سبستیچیوشن $y = x.z$ له لارې اوبی شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$$

$$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$$

$$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازه لري

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$

$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$

$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$

$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$

$$x^2 + 2yx = c$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$\underline{\underline{y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0}}$$

$\underline{\underline{y=0}}$ :: پارتیکولار اوبیونه

2. $y' \cdot x = y$

دا دیفرنځیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبې کیدی شي.

نمونه: Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = c \cdot x$

په دې اوبيونوکي پارتيکيولاراوبيونی خوندي دي(د $c = 0$ سره) اود $x = 0$ لپاره هم ، دا په دې مانا، چې دا ټولیز اوبی دی.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

د وظيفي وركوني سره سم لاسی $x \neq 0$ وركوي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\,dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$z = \dfrac{y}{x}$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ويش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1+z^2)\,dx$$

$$x \cdot dz = (1+z^2)\,dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan } z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$$y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)$$

$z = \dfrac{y}{x}$

د $x \neq 0$ لپاره

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\, dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\, dx$$

نیونه: x |= 0 له دې امله په x^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) z = (z^2 - 1)\, dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = -2 \ln|x| + 2c_1$$

$c = 2c_1$

$$= c - \ln x^2$$

$z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x \sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0$$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظیفې ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس y |= 0 او x |= 0 باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\, dx \quad \| : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\, dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 2 \ln|x| + 2c_1$$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x \sqrt{\ln x^2 + c}$$

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$$

نیونه: $0 =|$ x له دي امله په x ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$$

$$x \cdot dz = -dx$$

$$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$z = -\ln|x| + c$$

$$y = \underline{\underline{x(c - \ln|x|);\quad x \neq 0}}$$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د وظیفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس $0 =|$ x لاس ته راځي.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$$

$$dy = (z + \tan z)\,dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\sin z = c \cdot x$$

$$z = \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)$$

$$y = \underline{\underline{x \cdot \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)}}$$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$$

نیونه: $0 \neq$ x له دي امله په x ویش

$$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$$

$$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$$

$$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \,\hat{=}\, \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\, z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

اوبیونی یواځې په ایملیخیته
بنه یا فورم ورکړ شوی دی.

$x \neq 0$ لپاره

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$$y=z\cdot x\Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan}\, z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\text{Arctan}\, z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

$x \neq 0$ لپاره

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

د اینټګرال اینټګرالونکی

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کیږي

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

د ضریبونو پرتله:

$$\begin{aligned}
&\text{I: } A+B+C=-1\\
&\text{II: } -B+C=0\\
&\text{III: } -A=3;\ \underline{\underline{A=-3}}
\end{aligned}$$

$$\text{I: } -3+B+C=-1$$

$$\left.\begin{aligned}B+C&=2\\ \text{II: }\quad -B+C&=0\end{aligned}\right\}+$$

$$2C=2;\ \underline{\underline{C=1}}$$

$$\text{II: } -B+C=0;\ \underline{\underline{B=1}}$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1}=c$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\underline{\underline{y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0}}$$

12. $y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته
راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \ln z$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln|\ln z - 1|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$y = \underline{\underline{x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0}}$$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$(x - y)\, dy = y \cdot dx$$

$$(x - x \cdot z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot dx$$

نیونه: 0 =| x له دې امله په x ویش

$$(1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx - zx \cdot dz - z^2 \cdot dx = z \cdot dx$$

$$x(1 - z)\, dz - z^2 \cdot dx = 0$$

وریسی نیونی :: $z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1 - z}{z^2}\, dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0; \quad x\neq0; \quad y\neq0$$

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

وریسی نیونی : $z\neq0$ (d.h. $y\neq0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c; \quad x\neq0; \quad y\neq0$$

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

$$-3(z^2-1)\,\mathrm{d}x = 2xz\cdot\mathrm{d}z$$

$$-3\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int\frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$\int\frac{2z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$-3\ln|x| = \ln|z^2-1| + c_1$$

$$e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{\ln|x^{-3}|} = e^{\ln|z^2-1|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$x^{-3} = (z^2-1)\cdot c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2};\quad z = \frac{y}{x}$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3}\quad \|\cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{x^2 + \frac{c}{x}};\quad x \neq 0}}$$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

$$y = x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y = x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}y = (y + \sqrt{y^2-x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x) = (xz + \sqrt{x^2z^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

نیونه: $|x| = 0$ له دې امله په x ویش

$$x\cdot\mathrm{d}z + z\cdot\mathrm{d}x = z\cdot\mathrm{d}x + \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z = \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2-1}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z + \sqrt{z^2-1} = c\cdot x$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2; \quad x\neq 0}}$$

په ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$x\cdot y'=y\cdot\ln\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot \mathrm{d}y=y\cdot\ln\frac{y}{x}\cdot \mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)=x\cdot z\cdot\ln z\cdot \mathrm{d}x \quad \| :x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x=z\cdot\ln z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z=z(\ln z-1)\,\mathrm{d}x$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z \,\hat{=}\, \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1}; \quad x>0}}$$

18. $y\cdot \mathrm{d}x+\sqrt{4xy}\cdot \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}y$

$$y\cdot \mathrm{d}x=(x-\sqrt{4xy})\,\mathrm{d}y$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x\cdot z\cdot \mathrm{d}x=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

د پوښتنکونی څخه لاس ته راځي، چې تل $4xy\geq 0$ باید باور ولري دا په دې مانا چې $x.y\geq 0$ هم

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x ویش

$$z\cdot \mathrm{d}x=(1-2\sqrt{z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

$$z\cdot \mathrm{d}x=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z+(z-2z\sqrt{z})\,\mathrm{d}x$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z-2z\sqrt{z}\,\mathrm{d}x$$

نوري نيوحي: $z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|z| = \ln|x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln|z| + c$$

$z = \frac{y}{x}$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln|x\cdot z| + c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln|y| + c$$

په ايمپليخيته بڼه اوبيونه

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + c; \quad x\cdot y > 0$$

19. $\frac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2} = y'$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$$0 = (x-y)\,dy + 2y\cdot dx$$

$$0 = (x-xz)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2xz\cdot dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ويش

$$0 = (1-z)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2z\cdot dx$$

$$0 = x(1-z)\,dz + (z - z^2 + 2z)\,dx$$

$$0 = x(1-z)\,dz + (3z - z^2)\,dx$$

$$-x(1-z)\,dz = (3z - z^2)\,dx$$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$A=\frac{1}{3};\quad B=\frac{2}{3}.$

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)dz = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$$\frac{1}{3}\ln|z| + \frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 3$$

$$\ln|z| + \ln(z-3)^2 = -3\ln|x| + 3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}| + 3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$e^{3c_1} = c$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \| \cdot x^3$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2 = c;\quad x \neq 0}}$$

20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$$dy = \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

$$x\cdot dz + z\cdot dx = (z+\sqrt{1+z^2})\,dx$$

$$= z\cdot dx + \sqrt{1+z^2}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{1+z^2}\,dx$$

د پوښتنورکووني خخه سملاسي $x \neq 0$ ورکوي، چې دا نورباید فرض نه شي

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2} = c\cdot x$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = c\cdot x \quad \| \cdot x$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot x^2;\quad x \neq 0}}$$

1. $y'+2xy=\dfrac{x}{e^{x^2}}$

$$y=u\cdot v\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u=u(x);\quad v=v(x)$$

د برنولي متود له مخې

رامنخ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسی ټاکل کیږي، چی وروسته شمیرنه یی ترممکنی اندازي ساده شي.

۱ – د برنولي متود له مخی اوبی

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+2xuv=x\cdot e^{-x^2}$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx}+2xv\right)}_{=0}+v\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|v|=-x^2+c_1$$

$$e^{\ln|v|}=e^{-x^2+c_1}=e^{-x^2}\cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1=0$

$$\underline{\Rightarrow v=e^{-x^2}}$$

$$u\cdot 0+e^{-x^2}\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}\quad\|:e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=x$$

$$\int du=\int x\,dx$$

$$\underline{u=\frac{x^2}{2}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}}$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخی اوبی

$$y'+2xy=0$$

$$dy=-2xy\cdot dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c\cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = c(x)\cdot e^{-x^2}$$

دا افاده د y' لپاره په دیفرنخیالمساوت اینسول کیږي.

$$y' = c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x) + 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2} \quad \|: e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)$$

2. $y' = e^x - y$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبی

$$y = u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u = u(x);\quad v = v(x)$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x - u\cdot v$$

$$\underbrace{u\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln|v| = -x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$v = e^{-x}$$

$$u\cdot 0 + e^{-x}\cdot\frac{du}{dx} = e^x \quad \|\cdot e^x$$

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$$

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$\underbrace{u(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

$c_1=0$ وټاکو

$$v=e^x$$

$$u\cdot 0+e^x\cdot u'=x^2-1\quad \|:e^x$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}dx-\int e^{-x}dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}dx+e^{-x}$$

$\int x^2\cdot e^{-x}dx$

دا پورته اینتیګرال د پارشل ایتیګرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\Big[x(-e^{-x})-$$

$$-\int(-e^{-x})dx\Big]$$

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2+2x+2) + c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x} + c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= [-e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$
$$= -(x^2+2x+2) + (e^{-x}+c)e^x$$
$$\underline{\underline{= ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبې :

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln |y| = x + c_1$$
$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$
$$\underline{\underline{y = c(x) \cdot e^x}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$
$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$
$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$
$$c'(x) = (x^2-1) \cdot e^{-x}$$
$$c(x) = \int (x^2-1) \cdot e^{-x} dx$$

دا اینتیګریشن همدا په برخه ۱ کی اوبی شو

$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$
$$= \underline{\underline{ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

4. $y'=e^{3x}-2y$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

وټاکه $c_1=0$

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x}\quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}}}$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{\underline{y=c(x)\cdot e^{-2x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کی دي کیښوول شي

$$y'=c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)=e^{3x}-2c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}=e^{3x} \quad \| \cdot e^{2x}$$

$$c'(x)=e^{5x}$$

$$\underline{c(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+k\cdot e^{-2x}}}$$

5. $y'\cdot x=y+x^2\cdot\sin x$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$(u\cdot v'+v\cdot u')\cdot x=u\cdot v+x^2\cdot\sin x$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'=x^2\cdot\sin x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: $x \neq c$, په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

وټاکه $c_1=0$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'=x^2\cdot\sin x \quad \| :x^2$$

$$\frac{du}{dx}=\sin x$$

$$\underline{u=-\cos x+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{=x(c-\cos x)}}$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $x=0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چي دا ټولیز اوبی دی.

۲ د لاګرانج متود له لارې اوبی

$$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی x |= 0 غوښتل کیږي، اوبی لکه پورته مګر د x = 0 لپاره به هم باور ولري.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

۱ – د برنولی متود له لارې اوبی

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: x |= 0 , ځکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\underline{v=\frac{1}{x}}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int du=\int x\cdot\sin x\,dx$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$\underline{=-x\cdot\cos x+\sin x+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0}}$$

۲ . د لاګرانژ متود له لارې‌اوبې

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه ،

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{c(x)}{x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

دالاندې

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

$\int x\cdot\sin x\,dx$

اینتیګرال همدا اوس برخه ۱

کې اوبې شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$\underline{c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k}$$

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k);\quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

۱ – د برنولی متود له لارې اوبی

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$\underbrace{u(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$\ln|v|=-x+c_1$$

$$\underline{v=e^{-x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x\quad \|\cdot e^{x}$$

$$u'=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال

$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$

د ټوټه انتیګرال سره اوبی کیږي

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$F=\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^{x}\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int e^{x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\left[e^{x}(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e\right.$$

$$F=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x-\underbrace{\int e^x\cdot\cos x\,dx}_{F}$$

$$2F=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+c_1$$

$$F=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+c \qquad c=\frac{1}{2}c_1$$

$$u=\frac{1}{3}e^{3x}-F$$

$$=\underline{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+c\cdot e^{-x}}}$$

۲ - د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow\underline{\underline{y=c(x)\cdot e^{-x}}}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای په ځای کړې.

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)+c(x)\cdot e^{-x}+\cos x-e^{2x}=0$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{2x}-\cos x \quad \|\cdot e^x$$

$$c'(x)=e^{3x}-e^x\cdot\cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x)=\int(e^{3x}-e^x\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\underline{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + k \cdot e^{-x}}}$$

۱ –د برنولي متود له لارې اوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv = b \cdot e^{cx}$$

$$u \underbrace{(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' = b \cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' = b \cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$u = \underline{\frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + c_2}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\frac{b}{a+c} e^{cx} + c_2 \cdot e^{-ax}}}$$

۲ – د لاگرانژ متود له لارې اوبی

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow \underline{\underline{y = c_2(x) \cdot e^{-ax}}}$$

8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Wählen: $c_1 = 0$: وټاکی

$$c_2 = e^{c_1}$$

په ديفرنځيالمساوات کي ځای په ځای کړی

$$y' = c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax} + ac_2(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$c_2(x) = \underline{\frac{b}{a+c}\, e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$= \underline{\underline{\frac{b}{a+c}\, e^{cx} + k\cdot e^{-ax}}}$$

9. $y' + ay - b\cdot \sin(cx) = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u\cdot v' + v\cdot u'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$u\cdot v' + v\cdot u' + auv - b\sin cx = 0$$

$$u\underbrace{(v' + av)}_{=0} + v\cdot u' - b\sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = -ax + c_1$$

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-ax}\cdot u' - b\sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b\cdot e^{ax}\cdot \sin cx$$

دا اینتیګرال د ټوټه یا پارشل اینتیګرال له لارې اوبی کیږي

$$u = b\int e^{ax}\cdot \sin cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot \cos cx + \frac{ab}{c}\int e^{ax}\cdot \cos cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot \cos cx +$$

$$+\frac{ab}{c}\left[e^{ax}\cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c}\int e^{ax}\cdot \sin cx\, dx\right]$$

$$u=-\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx+\frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$$1+\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$\underline{u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3}$$

$$c_3=c_2\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}}}$$

۲ – د لاگرانژ د متود له لارې اوبی

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow\underline{\underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}}$$

$$c_2=e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دې کینبوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$\underline{=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k}$$

$$y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$=\underline{\underline{\frac{b}{a^2+c^2}(a\cdot\sin cx-c\cdot\cos cx)+k\cdot e^{-ax}}}$$

10. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\ln x}$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس ته راځی $x>0$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u\cdot v'+v\cdot u'=\frac{uv}{x}+\frac{1}{\ln x}$$

$$\underbrace{u\left(v'-\frac{v}{x}\right)}_{=0}+v\cdot u'=\frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی:

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x\cdot u'=\frac{1}{\ln x}\quad\left\|\cdot\frac{1}{x}\right.$$

$$u'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$u=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$=\underline{\ln|\ln x|+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x\,(|\ln|\ln x|+c)$$

۲ – د لاګرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y'-\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln |y| = \ln |x| + c_1$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= \underline{\ln |\ln x| + k}$$

$y = c(x) \cdot x$

$$= \underline{\underline{x(\ln |\ln x| + k)}}$$

11. $y' = a + bx + cy$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولی متوډله لارپاوبی

$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$\ln |v| = cx + c_1$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

$$u\cdot 0+e^{cx}\cdot u'=a+bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u'=(a+bx)\cdot e^{-cx}$$

$$u=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=a\int e^{-cx}\,dx+b\int x\cdot e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{a}{c}e^{-cx}+b\int x\cdot e^{-cx}\,dx$$

پارشل ایتیګریشن یا اینتیګراول

$$=-\frac{a}{c}e^{-cx}+b\left[-\frac{x}{c}e^{-cx}+\frac{1}{c}\int e^{-cx}\,dx\right]$$

$$=-\frac{a}{c}e^{-cx}-\frac{bx}{c}e^{-cx}-\frac{b}{c^2}e^{-cx}+c_1$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_1$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_1\cdot e^{cx}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y'-cy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=cy$$

$$\int\frac{dy}{y}=c\int dx$$

$$\ln|y|=cx+c_1$$

$c_2=e^{c_1}$

$$y=c_2\cdot e^{cx}\Rightarrow \underline{\underline{y=c_2(x)\cdot e^{cx}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای
په ځاي کړی یا کیږدی

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{cx}+c\cdot c_2(x)\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{cx}+c\cdot c_2(x)\cdot e^{cx}=a+bx+c\cdot c_2(x)\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{cx}=a+bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x)=(a+bx)e^{-cx}$$

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

12. $xy'+1=e^x+y$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: $x\neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

د دې لاندې اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لږی ودیزینه باندې تیریدنه نه شي کیدی

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاګرانژمتود له لارې اوبی

$$xy' - y = 0$$

نیونه: $x \mid= 0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$c = e^{c_1}$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنځیالمساوات کی کیږدی

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیګرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبی شویدی

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

$$y=c(x)\cdot x$$
$$=k\cdot x+x\cdot \ln|x|+\frac{x^2}{1\cdot 2!}+\frac{x^3}{2\cdot 3!}+\frac{x^4}{3\cdot 4!}+\dots$$

$x \neq 0$

13. $y'(1-x^2)+xy=1$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لارې دا دلته :

$$(uv'+vu')\,(1-x^2)+xuv=1$$
$$u\underbrace{[v'(1-x^2)+xv]}_{=0}+vu'(1-x^2)=1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2)=-xv$$

نیونه: $|x| = 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{-x}{1-x^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکه

$$\ln|v|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$
$$=\ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$
$$v=\sqrt{|1-x^2|}$$

د ورپسې اوبیوني لپاره باید د
$|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$\|v=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{für } |x|<1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x|>1\end{cases}$$

1. Fall: $v=\sqrt{1-x^2}$; $|x|<1$

$$u\cdot 0+\sqrt{1-x^2}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$
$$u'=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$u=\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$$1-x^2=z^2\Rightarrow dx=-\frac{z\cdot dz}{x}$$

$$=\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

$x=\sqrt{1-z^2};\quad dx=-\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$

سبستیچیوشن

$z=\sin t \Rightarrow dz=\cos t\cdot dt$

$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t;\quad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$

$$=-\int\frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال

$$=\cot t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x+c\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\le 1$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x|=1$ هم پوره کوي

2. Fall: $v=\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

$$u\cdot 0+\sqrt{x^2-1}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$x^2-1=z^2 \Rightarrow dx=\frac{z\cdot dz}{x}$

$x=\sqrt{1+z^2};\quad dx=\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$$u=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$z=\sinh t \Rightarrow dz=\cosh t\cdot dt$

$\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$

$$=-\int\frac{\cosh t\, dt}{\sinh^2 t\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال،

$$u=\coth t+c$$
$$=\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t}+c$$
$$=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}+c$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

$\coth t=\frac{\cosh t}{\sinh t}$

$$y=u\cdot v$$

د $|x|\geq 1$ لپاره $\underline{\underline{=x+c\cdot\sqrt{x^2-1}}}$

د ټولو x لپاره $\underline{\underline{y=x+c\cdot\sqrt{|1-x^2|}}}$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x|=1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت کارونی له لارې و یوه اوبی ته رایوځای شي.

۲ – د لاگرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1-x^2)+xy=0$$

نیونه: $|x|\neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$
$$=\ln\sqrt{|1-x^2|}+c_1$$
$$y=\sqrt{|1-x^2|}\cdot c$$

$c=e^{c_1}$

$$y=\underline{\underline{c(x)\cdot\sqrt{|1-x^2|}}}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y=\begin{cases}c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} & \text{د } |x|<1 \text{ لپاره}\\ c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} & \text{د } |x|>1 \text{ لپاره}\end{cases}$$

$\underline{\text{1. Fall:}}\quad y = c(x)\cdot\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}} + c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + {} + xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱ حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x) = \int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + k}}$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات د $|x| = 1$ هم پوره کوي

$$y = c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} = \underline{\underline{x + k\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\le 1}}$$

$\underline{\text{2. Fall:}}\quad y = c(x)\cdot\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1} + c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1} + c(x)\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}} + {} + x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} = 1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځای شي.

$$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x$$

14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

دپوښتنی څخه $x \neq 0$ ورکوي،
دا په دې مانا چی $x \neq n \cdot \pi$
د $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ سره

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x (1 - \cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$\underbrace{u(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x (1 - \cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$v = e^{-\cos x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x (1 - \cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} dx$$

سبستیچیوشن (بدلون)

$$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$= -\int (1 - z) e^z dz$$

$$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z \, dz$$

پارشل یا ټوټه اینټیګریشن

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z (z-2) + c$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

دا اینټیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$$
$$=\underline{\underline{\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}}}$$

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\underbrace{u(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکه

$$\ln|v|=-\sin x+c_1$$
$$v=\underline{e^{-\sin x}}$$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{\sin x}$$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل يا ټوټه ايتيګريشن

$$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}\,dx$$
$$=\int z\cdot e^{z}\cdot dz$$
$$=z\cdot e^{z}-\int e^{z}\,dz$$
$$u=z\cdot e^{z}-e^{z}+c$$
$$=e^{z}(z-1)+c$$
$$=\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+c}$$

$$y=u\cdot v$$
$$=\underline{\underline{\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاګرانځ د متود له لاري اوبی

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} + \\ + \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \cos x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} dx$$

$$= \underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + k}}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$= \underline{\underline{\sin x - 1 + k \cdot e^{-\sin x}}}$$

16. $y' - yx = x^2 - 1$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0$$

$$v = v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot x = x^2 - 1$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] + v \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dv}{dx} - v \cdot x = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2}+c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1};\ c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2-1}{v}$$

$$du = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \ -x \quad + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ – د لاګرانژ د متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

د $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ سره

حل/اصل ارد $u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$

د راپاتی مساواتو به $u = u(x)$ د اینتیګریشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه $u(x)$ او $v(x)$ به په برابرون $y = u(x).v(x)$ کې کېښنول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفر- نځیالمساوات ټولیزه اوبیونه ده

کیږي ده $F(x) = 0$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0;\ x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

$$\mathrm{d}c_1(x)=\frac{x^2-1}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

دا د مساوات $y'-yx=0$ د اوبیونی سره لاس ته راغلی اینتیګریشنثابته د x فنکشن دی

$$\int c_1(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{c_1(x)=-x\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+c_2}$$

$c_1(x)$ د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.
لاس ته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده، لکه څنګه چی د برونولی متود له لارې لاس ته راغلی

$$y=c_1(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

$$=(-x\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=-x+c_2\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x,-c_2\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle}}$$

17. $y'\cdot x^2+y=x$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$(uv'+vu')x^2+uv=x$$

$$u\underbrace{(x^2v'+v)}_{=0}+x^2vu'=x$$

$$x^2v'=-v$$

نیونه: $x\mid=0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$\ln|v|=\frac{1}{x}+c_1$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$\underline{v=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot u'=x\quad \|:x^2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$u'=\frac{1}{x}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

$$u=\int\frac{1}{x}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

دا اینتیګرال کیدی شي یواځي د لړیودیزې له لارې اوبی شي

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$z=-\frac{1}{x}$$

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\underline{\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x \neq 0$ لپاره

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیگرال
همدا اوس برخه ۱کی اوبي شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-$$

$$-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k$$

$$y = c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4!4x^4} + - \ldots + k\right)$$

für $x \neq 0$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبيونه

18. $y' + \frac{1}{1+x}\,y + x^2 = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

د پوښتني كولو څخه همدااوس

وركوي $|x| = -1$

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

$$u\underbrace{\left(v' + \frac{v}{1+x}\right)}_{=0} + vu' + x^2 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|v| = -\ln|1+x| + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاكه

$-\ln|1+x| = \ln|1+x|^{-1}$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u\cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad \|\cdot(1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = -\int (x^2 + x^3)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = u\cdot v$$

$c = 12c_2$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y' + \frac{1}{1+x} y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y| = -\ln|1+x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\ln|1+x|+c_1} = e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot \frac{1}{1+x} \Rightarrow y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{1+x} - c(x) \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

په ديفرنخيالمساوات کی کيږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x} - \frac{c(x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{c(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$c'(x) = -x^2(1+x)$$

$$c(x) = -\int (x^2 + x^3)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$= \frac{k - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

$k = 12c_2$

19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$u\underbrace{(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} + vu' = e^{-\sin x}$$

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{u = x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)\, e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

په دیفرنځیالمساوات کی کېږدی

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

ورکوي $\cos x \neq 0$

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکئ:

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$= \underline{\underline{(x+k) e^{-\sin x}}}$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$u\underbrace{(v' + v \cdot \tan x)}_{=0} + vu' = \sin(2x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \tan x \, dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln |v| = \ln |\cos x| + c_1$$

$$v = \underline{\cos x}$$

$$u \cdot 0 + \cos x \cdot u' = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$u' = 2 \sin x$$

$$u = 2 \int \sin x$$

$$= \underline{-2 \cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\cos x \cdot (c - 2 \cos x)}}$$

– د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y' + y \cdot \tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \tan x \cdot dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot \cos x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$$

$$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{\underline{(k - 2 \cos x) \cdot \cos x}}$$

$$c = e^{c_1}$$

پہ دیفرنځیالمساوات کی کینبوول

۱ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

21. $y' - 2y = -x + 3$

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

د $u = e^{2x}$

سره حل لرو $v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0.$

د لاندي پاتی برابرون څخه د ایتیګرال له لاري

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$v = v(x)$ تاکل کیږي

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$$

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د u(x) او v(x) لاس ته راوړي ارزښتونه د y=u(x).v(x) په مساوات کې کېښنول کیږي. لاس ته راوړنې د ورکړ شوي دفرنځیالبرابراون ټولیز اوبې دي

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

ږدو $-x + 3 = 0$ نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیګریشنثابتی $e^{c_1} = c_3(x)$ د x فنکشن دی.

د y او 'y لپاره دواړه برخاوېیونې په پیلمساوات $y' - 2y = -x + 3$ کې کېښنول کیږي

د اینتګریشن له لارې لویه $c_3(x)$ پیداکیږي

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x + 3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

c_3(٢) په برابرون کی کیښنول کیږي $y = c_3(x)\cdot e^{2x}$

$$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$$

لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$$

$$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$$

١ . ٣ د دوم نظم درفنخیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$

د پوښتنیورکړې څخه لاسته0=| x راځي

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$$

$$y'=\ln|x|+c_1$$

وریسی اوبیونی ته دې حالتونه x>0 او x<0 توپیر شي

$$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$$

1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$

$$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$$

پارشل یا ټوټه ایتیکریشن

$$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$$

$$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$$

$$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$$

$c_3=c_1-1$

$$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$$

پارڅیل یا پارشل اینتیګرال

2. **Fall:** $y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\, dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\, dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$c_3 = -1 + c_1$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0$$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ←اړونه: $c_3 \hat{=} c_1$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\, dx$$

$$y' = \int f(x)\, dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1\right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\, dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\, dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي
خکه چی $x+\sqrt{1+x^2} > 0$ د ټولو
x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}}\, dx + c_1 x$$

$$= x\,[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$= x\,[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

6. $y'' = \tan x$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \ldots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

ددې انتیکرالبرابرون اوبیوني
کې په لړیودینه تریدنه ناشونې ده

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x\, dx$$

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{2x^6}{6 \cdot 15} + \frac{17x^8}{8 \cdot 315} + \dots$$

$$\underline{\underline{y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots}}$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x \, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\sinh x + c_1 \cdot x + c_2}}$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتیګرالبرابرون اوبیوني
یوائځی لړیودینی سره شونی ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2} dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \dots$$

$$\underline{\underline{y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30 \cdot 2!} + \frac{x^8}{56 \cdot 3!} +}}$$

$$\underline{\underline{+ \frac{x^{10}}{90 \cdot 4!} + \dots}}$$

9. $y^{(4)} = \cos x$

$$y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \cos x$$

$$\int dy''' = \int \cos x \, dx$$

$y''' = \frac{dy''}{dx}$

$$y''' = \sin x + c_1^*$$

$$\int dy'' = \int (\sin x + c_1^*)\, dx$$

$y'' = \frac{dy'}{dx}$

$$y'' = -\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*$$

$$\int dy' = \int (-\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*)\, dx$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = -\sin x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2^* \cdot x + c_3$$

$$\int dy = \int \left(-\sin x + \frac{c_1^*}{2} \cdot x^2 + c_2^* \cdot x + c_3\right) dx$$

$$y = \cos x + \frac{c_1^*}{6} x^3 + \frac{c_2^*}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

$c_1 = \frac{1}{6} c_1^*; \quad c_2 = \frac{1}{2} c_2^*$

$$\underline{\underline{y = \cos x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}}$$

10. $y''' = e^x$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = e^x$$

$$\int dy'' = \int e^x \, dx$$

$$y'' = e^x + c_1^*$$

$$\int dy' = \int (e^x + c_1^*)\, dx$$

$$y' = e^x + c_1^* \cdot x + c_2$$

$$\int dy = \int (e^x + c_1^* \cdot x + c_2)\, dx$$

$$y = e^x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$c_1 = \frac{1}{2} c_1^*$

$$\underline{\underline{= e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3}}$$

11. $y^{(4)} = \sinh(2x) \quad \blacktriangleright y^{(4)} = \dfrac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy''' = y^{(4)} \cdot dx$

$$\int dy''' = \int \sinh(2x)\,dx$$

$$y''' = \frac{1}{2}\cosh(2x) + c_1 \quad \blacktriangleright y''' = \frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy'' = y''' \cdot dx$$

$$\int dy'' = \int \left(\frac{1}{2}\cosh(2x) + c_1\right)dx$$

$$y'' = \frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx + \int c_1\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2x) + c_2 + c_1 x + c_3 \quad \blacktriangleright c_2 + c_3 = c_4$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2x) + c_1 x + c_4$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = y'' \cdot dx$$

$$\int dy' = \int \left(\frac{1}{4}\sinh(2x) + c_1 x + c_4\right)dx$$

$$y' = \frac{1}{8}\cosh(2x) + c_5 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7 \quad \blacktriangleright c_5 + c_6 + c_7 = c_8$$

$$= \frac{1}{8}\cosh(2x) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_4 x + c_8$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$\int dy = \int \left[\frac{1}{8}\cosh(2x) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_4 x + c_8\right]dx$$

$$y = \frac{1}{16}\cosh(2x) + c_9 + \frac{1}{6}c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2}c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{16}\cosh(2x) + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_4 x^2 + c_8 x + k}}$$

12. $y^{(5)} = \cosh(ax) \quad \blacktriangleright y^{(5)} = \dfrac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)} = y^{(5)} \cdot dx$

$$\int dy^{(4)} = \int \cosh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax) + c_1 = y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx}$$

$$\int \mathrm{d}y''' = \int \left[\frac{1}{a}\sinh(ax) + c_1\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_1 x + c_4 = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y'' = \int \left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_1 x + c_4\right]\mathrm{d}x$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax) + c_5 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_4 x + c_8 = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y' = \int \left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_4 x + c_8\right]\mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax) + c_9 + \frac{1}{6}c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2}c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax) + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{4}c_4 x^2 + c_8 x + c_{13} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y = \int \left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax) + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{4}c_4 x^2 + c_8 x + c_{13}\right]\mathrm{d}x$$

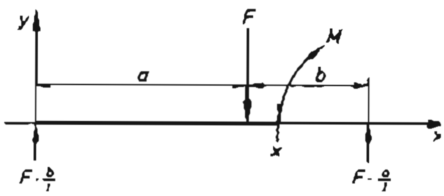
$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax) + c_{14} + \frac{1}{24}c_1 x^4 + c_{15} + \frac{1}{12}c_4 x^3 + c_{16} + \frac{1}{2}c_8 x^2 + c_{17} + c_{13} x + c_{18}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax) + \frac{1}{24}c_1 x^4 + \frac{1}{12}c_4 x^3 + \frac{1}{2}c_8 x^2 + c_{13} x + k}}$$

ورشو

د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوګا-
نی یاساحیa≥x≥0 اوl=a+b≥x≥a
توپیر شي

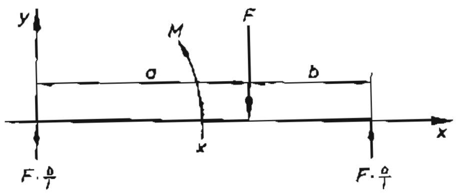
1. Bereich: $0 \le x \le a$



$$M - F\cdot\frac{b}{l}\cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}} \quad \text{für } 0 \le x \le a$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$



$$M - F\cdot\frac{a}{l}\cdot(l-x)=0$$

$$\underline{\underline{M=F\cdot\frac{a}{l}(l-x)}} \quad \text{für } a\leq x\leq l$$

د ورشو یا تعریفډیري $0 < x < a$

لپاره د کږونلاین y_1 ټاکنه

$$y_1''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

د دې دواړود هریوه ورشو یا ساحولپاره دې کږونلاین وټاکل شي، چی د x=a لپاره باید یوځاي ولویږي.

$$\frac{dy_1'}{dx}=-\frac{F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}{E\cdot I}$$

$$\int dy_1'=-\frac{F\cdot b}{l\cdot E\cdot I}\int x\,dx$$

$$y_1'=-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2+c_1$$

$$y_1=\int\left(-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2+c_1\right)dx$$

$$=-\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3+c_1\cdot x+c_2$$

د $x=0$ لپاره کږون 0 دی.

$$y_1(0)=0-c_2=0$$

$$\underline{\underline{y_1=-\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3+c_1\cdot x}}$$

د ورشو یا تعریفډیري $0 < x < l$

لپاره د کږونلائین y_2 ټاکنه:

$$y_2''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI} \int z\,dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

$$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په x=a کی یوځای پریوځي، دا په دي مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی کینول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI} (l-x)$$

رایوخایون :

$$y=\begin{cases}\dfrac{Fbx}{6lEI}\,[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\[2mm] \dfrac{Fa(l-x)}{6lEI}\,[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

ماکسیمالکږونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنځیالیدی شي.

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\,[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}\,(a+2b)$$

د $b<a$ له امله لاسته راځی

$$\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2a)}=a,$$

$$x_{m_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

دا په دې ماناچی $x_m<a$ په x_mکی ماکسیمالکږون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نوردy_2 کی څیړنی ته باید اړ نه دی

$$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$$ دلته بې معنا

ماکسیمال کږون y_{max}

$$y_{max}=y_1(x_m)$$

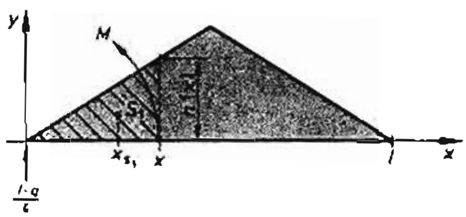
$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}\,(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le\frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(½)\,l.q$ دی داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(¼)l.q$ دی

دا کرښی شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.



$$h(x)=\frac{2q}{l}\,x$$

د دروندتکي پروتمحور x_{S1} کيدی شي بنستهندسيز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشميرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

د کږونلاين y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره

$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

د سيومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$x_m = \frac{l}{2}$ mit $y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$0 = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1 = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

د سیومتریکی بارونی یا زور له امله کږونلاین و $x = l/2$ ته سیو- متري دی۔د y_2 لپاره په ورشو $l/2 \le x \le l$ کی په y_1 کی فقط x د $l - x$ سره بدل کړي.

$$y_1 = \frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{qx}{12EI}\left(\dfrac{x^4}{5l} - \dfrac{lx^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{q(l-x)}{12EI}\left[\dfrac{(l-x)^4}{5l} - \dfrac{l(l-x)^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

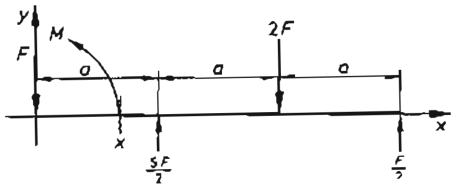
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ – دي ټوبنتنی سره د x لپاره دري ورزوگانی باید توپیر شي

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو :



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

د $0 \le x \le a$ لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

ژی ارزښت: $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

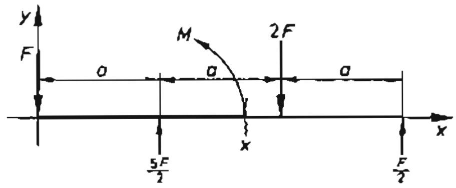
$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1 a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

2. Bereich: $a \le x \le 2a$: وردشو



$$0 = M - \frac{5F}{2}\cdot(x-a) + F\cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2}(x-a) - F\cdot x$$

$$= \frac{3F}{2}x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2}(3x - 5a)$$

د $a \le x \le 2a$ لپاره کږونلاین: y_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2 - 5ax + c_3\right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3x + c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

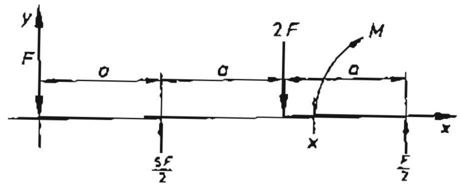
$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3a + c_4\right)$$

$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3(x-a) + 2a^3\right]$$

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ ورپسې



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_1 , y_2 , y_3 کی لا دننه ثابتی c_1 , c_3 , c_5 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لارې وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[ac_3 - 4a^3\right]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات يا برابرون I

$$\text{I:} \qquad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات يا برابرون II

$$\text{II:} \qquad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I او II څخه c_3 او c_3 ساده راپيدا کيږي

$$\text{I+II:} \qquad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \underline{\frac{23}{6}a^2}$$

$$\text{I-II:} \qquad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = \underline{-\frac{25}{6}a}$$

د c_1 ټاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړيکو څخه شميرل کيږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کی د ټولو دري ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکږونی ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کی نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کی کیدی شي ماکسیما-لکږون یواځی په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کي رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{\max_1}$$

$$y_{\max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a \blacktriangleright$$ دلته پامور نه دی.

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوروړشو کی نه دی پروت، چی له $a\leq x\leq 2a$ دې امله يواځ د x_2 لپاره ماکسيمال راکړون مو مخ ته پريوتی شي.

$$\underline{\underline{x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})}}$$

$$y_{\max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$

$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{\max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$\underline{\underline{=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)}}$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y-محور په مثبت- يا زياتونلور رامنځ ته کيږي(دا په دې مانا، چی تراوسه پاس يا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواوردیناتسیستم کی زور F کمون(تفريق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3 \blacktriangleright$$ دلته پامور نه دی

د x_1 - ارزښت نور د y_3 باوروړشو کی نه دی پروت، نو ځکه يواځي

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړ‌ون موجود کیدی شي

$$x_{m_3} = a\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y_{max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21a^3\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 9\left(\frac{29}{3} - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + 25\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54\sqrt{\frac{2}{3}} + \right.$$

$$\left. + 75 - 25\sqrt{\frac{2}{3}} - 21\right]$$

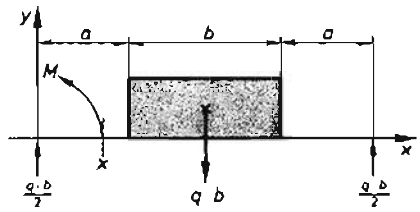
$$= \frac{Fa^3}{12EI} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶ . د x لپاره درې ورشوګانی توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$: لمړی ورشو (ورشو)

$l = 2a + b$



$$0 = M - \frac{q \cdot b}{2}x \Rightarrow M = \frac{q \cdot b}{2}x$$

د $0 \leq x \leq a$ لپاره کړ‌ونلاین y_1:

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI}x$$

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

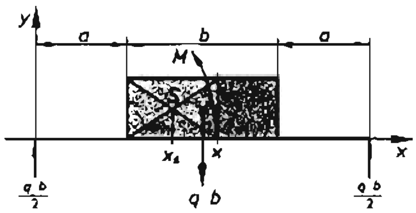
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1x + c_2$$

ارزښت اړی: $y_1(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1x$$

2. Bereich: $a \le x \le a+b$ ورډشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

لپاره کرونلاین $a \le x \le a+b$ د : X_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2x + c_3\right]$$

د سیومتري باروېشنی له امله

$$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$$

باور لري، له کوم سره

چی c_3 ټاکله کیږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتي c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د یوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

3. Bereich: $a+b\le x\le l$ وروستو

د دې ورشو لپاره کیدی شي کرونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي،څکه چې دا د سیومتری دروندوالي یا بارونی له امله و$x=l/2=(½)(2a+b)$ ته سیومتري دي.

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$$x:\blacktriangleright l-x$$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د ټولو دري ورشوګان په رابندفورم کی د ګرونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{q}{24EI}[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b\\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l\end{cases}$$

د سیومتریکي بارویشنی له امله مٖاکسیمال راکړونه په لاندي کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}(2a+b)^4-\frac{1}{4}(2a+b)^4+\frac{3}{2}a^2(2a+b)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$

$$+8(2a+b)(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$

$$+8(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

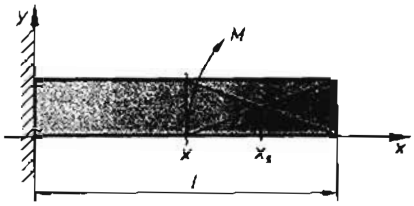
$$=\frac{q}{384EI}[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$

$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

17.



$x_s = \frac{l+x}{2}$

$$0 = M + q(l-x)\cdot(x_s - x)$$

$$= M + q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z$

$$y' = \frac{q}{2EI}\int (l-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{2EI}\int z^2\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{q}{6EI}z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI}(l-x)^3 + c_1$$

ژی ارزبنت : $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

$$0 = -\frac{q}{6EI}l^3 + c_1; \quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI}[l^3 - (l-x)^3]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = l - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z$

$$y = \frac{q}{6EI}\int [l^3 - (l-x)^3]\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{6EI}\int (l^3 - z^3)\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2\right)$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2\right]$$

ژی ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -\frac{q}{6EI}\left[l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2\right]$$

$$0 = l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4\right]$$

$$= \frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4\right]$$

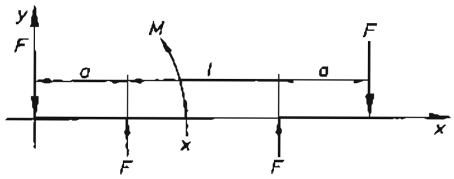
ماکسیمار اګیرون په ژی ارزښت
z = l کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

۱۸ . د x لپاره دي بيا دري
ورشوګانی توپير شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو



$$0 = M + x\cdot F \Rightarrow M = -x\cdot F$$

y_1: د $0 \le x \le a$ لپاره کرونلاین

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^2 + c_1x + c_2$$

ژی ارزښت
Randwert: $y_1(a)=0 \Rightarrow c_2$

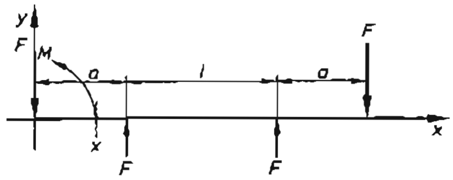
$$0 = \frac{F}{6EI}a^3 + c_1a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI}a^3 - c_1a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

ورشو

2. Bereich: $a \le x \le a+l$



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

y_2: د $0 \le x \le a+l$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\, x + c_3$$

د سیومتریکي بارویشنی له
امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\,(2a+l) + c_4\right]$$

ترى ارزښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\,(2a+l) + c_4\right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2}\,(a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\,[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)]$$

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-
گینیتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$
له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right]$$

د سیومتریکي بارویشنې له امله
کږونلاین y_3 و $x = a + (l/2)$ ته
سیومتري دی د کږونلاین y_1 سره.
له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه
شمیرل کیږي.

3. Bereich: $a + l \le x \le 2a + l$ وردشو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a + l - x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right]$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په یو رابندفورم کې د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right] & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right] & \text{für } a \le x \le a+l \\ \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right] & \text{für } a+l \le x \le 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف
راګرونونه رامنځ ته کیږي

$$y_{\max_1} = y(0) = y_{\max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{\max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 - 3a(a+l)(-a)\right]$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l\right]$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l) = y_{max_2}$$

$$y_{max_3} = y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$= y_2\left(a+\frac{l}{2}\right) = y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2 - \frac{1}{2}(2a+l)^2 + a(a+l)\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2)+a^2+al\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-a^2-al-\frac{l^2}{4}+a^2+al\right]$$

$$= -\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y > 0.$

$$\int z\,dz = \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 2y^{\frac{1}{2}} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 4\sqrt{y} + 2c_1^*$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z = \sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t = 4\sqrt{y} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t}-\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2c_1\sqrt{t}\right)+c_2$$

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\text{ Artanh }\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$x=-2\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$\int dx=\int \frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $Y \neq 0$ لپاره

$\neq$

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

د پوښتنکونې ځځه لاسته راځي:

$y\neq 0.$

$$\int z\,dz=\int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$c_1=2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int \frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$= \int y\, dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}}\, dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\Rightarrow 2t\, dt = \frac{2y}{y^2}\, dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

د دې اينتيګريشن سره ل

لړبودينې څخه تيريدنه ناشونى ده

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\ x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\, dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots \right]$$

د $y \neq 0$ ، لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\, dy = k^2 \int z\, dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$$c_1 = -3c_1^*$$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{y^3 + c_1}$$

$$\int dx = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د $|x|<1$ لپاره

د دې اینتیګرال شمیرنه یواځې د لړۍ ودیزئینی له لارې شونې ده.

▶ $\frac{y^3}{c_1}=x$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y|<|c_1|$ لپاره

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځیالمساوات هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کې شمیرلې دفرنځیالمسا- وات ځانګړی حالت دی. د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

ایتیګرال په ټوټه یا پارشلماتو ماتو ټوټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2}\right] dt$$

د خلوونو یا ضریبونو انهول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}\, t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1}\, t + t^2)$$

$$1=t^3(A-C)+t^2(-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D)+t(-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1})+$$
$$+Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\begin{aligned}
&\text{I}: && 0=A-C && \Rightarrow A=C\\
&\text{II}: && 0=-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D\\
&\text{III}: && 0=-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1}\\
&\text{IV}: && 1=Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II}: && 0=-2A\sqrt{c_1}+B+D\\
&\text{III}: && 0=-2B\sqrt{c_1}+2D\sqrt{c_1}\quad \| :2\sqrt{c_1} && \Rightarrow B=D\\
&\text{IV}: && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{II}: && 0=-2A\sqrt{c_1}+2B \quad \|\cdot c_1\\
&\text{IV}: && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+2Bc_1
\end{aligned}\right\}+$$

$$1=\qquad 4Bc_1 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{B=\frac{1}{4c_1}=D}}$$

$$\text{IV}: \quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{A=\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}=C}}$$

له دې سره x شمېرل یږي.

$$x=4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$=\frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t|-\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t|+\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right]+c_2$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right|+\frac{2t}{c_1-t^2}\right]+c_2$$

$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right|+\frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right]+c_2$$

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ► بنسټ اینټیګرال

$$x=\text{Arctan}\,z+c_1$$

$$\operatorname{Arctan} z = x - c_1$$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1)\,dx$$

$$\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\cos(x - c_1)| + c_2}}$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{Arsinh} z$$

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

$$\operatorname{Arsinh} z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1)\,dx$$

$$= \underline{\underline{\cosh(x + c_1) + c_2}}$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{z}$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= t \cdot \ln t - t + c_2$$

$$= t(\ln t - 1) + c_2$$

$$= \underline{\underline{(c_1 - x)[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2}}$$

30. $y'' = y'^3$

ثابت $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$: زینګولاراوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y' \neq 0$

$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'^2 - 3y''^2 = 0$$

$$y'^2 = 3y''^2$$

$$y' = \pm\sqrt{3}y''$$

پارتيکولار اوبيونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$; نيونه

$$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + c_1^*$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot\underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$$

$$z = c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot dx$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{3}c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2}}$$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتيکولاراوبيونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$$

زينګولارزوبيونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$$y = ax + b$$

نيونه : $y'' = z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z} = x + c_1$$

$$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$$

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$
$$= \ln |x+c_1| + c_2$$

د وروستي انتیگریشن لپاره دې ارزښتکرښې کېښول شي

1. Fall: $x+c_1>0$

$$y' = \ln (x+c_1) + c_2$$
$$y = (x+c_1)[\ln (x+c_1)-1] + c_2x + c_3$$

2. Fall: $x+c_1<0$

$$y' = \ln (-x-c_1) + c_2$$
$$y = (x+c_1)[\ln (-x-c_1)-1] + c_2x + c_3$$

د ارزښتکرښوکارونې سره د دواړو حالتونو پیرونو لاس ته راوړنې یا نتیجې رایوځای کېږي

$$y = (x+c_1)[\ln |x+c_1|-1] + c_2x + c_3$$
$$y = ax+b$$

33. $xy'^2 = y$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

د اوښتونو یا واریابلو بېلښت
x, dx und y, dy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیگریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$
$$2\sqrt{x} + c_1 = 2\sqrt{y} + c_2$$

$$\frac{c_1-c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1-c_2}{2}$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$
$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$