الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

لیکوال:

ډاکټر ماخان (میړی) شینواری

نيوليك

۱ ګڼونډیري

د دې لېاره، چی دا د الجبر کلیمی مو پوره څېړلی وي او ښه پوهوړ شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي بايد (چی متآسفانه دا مو په هيواد کي، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد، د ګڼونو ډيري يو په بل پسی تعريف کړم، یا بهتره لنډه ګوته ورته ونيسم او دا په هغو کی د باوري کارونو يا اپريشنونو يا عمليو او یا ګنډنو او یا د تړونونو په بنسټ.

۱ . ۱ طبيعي ګڼونډيری

Die Menge der natürliche Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډيری چی صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n\ ,\ ....\ \}$$

دا لاندې د طبيعي ګڼونو ډيري دی، چی صفر ورسره دی، يا په بل عبارت : د طبيعي ګنونو ډيری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډيري کی لاندې شيمر قاعدې باور لري

.

.

.

۱ . ۱ . ۲ په طبيعي ګڼونو کی شمیرقاعدې

الف : و زیاتون ته یا بهتره، نسبت وزیاتون ته:

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زیاتون ته، یا نسبت وزیاتون ته، یو دریم طبیعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چی باور لري: $a + b = c$

دوېم : اسوشیاتیو قانون Assotiative : د طبیعي ګڼونو لپاره د اسوشیاتیو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دریم : کموتاتیو قانون commutative : د طبیعي ګڼونو لپاره د کموتاتیو قانون باور لري، یعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثیره یا ناپیلی توکی das neutrales Element: په طبیعي ګڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبیعي ګڼونو ناپیلی یا بهتره بی تاثیره توکی بلل کیږي.

ب : و ځل ته یا بهتره نسبت ځل ته

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a, b \in N$ لپاره یو دریم طبیعی ګڼ $c \in N$ شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبیعي ګڼونو $a,b,c \in N$ لپار اسوشیاتیو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دریم : د طبیعي ګڼونوډیري کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a . b = b . a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپیلي یا بهتره بي تاثیره توکی : که طبیعي ګڼونه له 1 سره ځل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعي ګڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبیعي ګڼونو یو ناپیلی یا بي تاثیره توکی بلل کیږي، چی یوی(دا ځکه یوی بولو ، چی باید له یو سره یی توپیر شوی وي) یي بولو

یادونه : د بېلګو درو، چې یوې له بلو څخه توپیر [illegible] شي.

دیا

یادونه : په پورته نښلونو کی دي ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

ګورو چې په طبيعي ګڼونډيري کی، نسبت و زياتون ته، د هر توکی لپاره د هغه په څټ يا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبوريږو، چې د طبيعی ګڼونو ډيری د ټولګڼونو ډيري ته پراخ کړو،

١ . ٢ د ټولګڼونوډيرى die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډيرى، د طبيعي ګڼونو ډيرى د صفر او د دې طبيعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډيری دی، چې په Z سره يی ښايو او داسی يي ليکو

$$Z = \{ \ldots,-n, \ldots, -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

په ټولګڼونو ډيري کی هغه په طبيعی ګڼونډيري کی باوري ښىلونی يا عمليي باور لري او په دې برسيره د هر يوه ګڼ لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زياتون ته هم موجود دی، يعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په څټ ګڼ يعنی $-a \in Z$ موجود دی، چې دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ يا inverse دی نسبت و زياتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چې د مثبت ګڼ څل د منفی ګڼ

.

.

سره منځ ته راغلي، چې نتيجه يې يو منفي ګڼ دى، دا په دې مانا، چې دلته اصلي نبنلونه يا عمليه زياتون دى او نه . (ځل).

يادونه : زياتون دوه ځايزه عمليه binäre Operation يا نبنلونه ده او په ځتې عمليه يوه يوځايزه عمليه unäre Operation يا نبنلونه ده.

ګورو، چې د ټولګڼونو په ډيري کې د ځل لپاره د ګڼونو په ځتې ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعريف، يعنې د يوې افغانۍ يو په ځلورمه (1 / 4) يو ټولګڼ نه دى، نو له دې امله بايد د ټولګڼونو ډيرى و ريشنل ګڼونو Q ته پراخه شي .

۱ . ۳ ريشنل ګڼونه rationale Zahlen :

د ريشنلګڼونو ډيرى له دې امله د ټولګڼونو ډيرى Z او د ټولو ماتګڼونو ډيري a / b څخه جوړ دى، چې په Q سره يې په نخښه کو او په لاندې ډول يې ليکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b |= 0 \}$$

دا داسې لوستل کيږي : ډيرى Q مساوي دى د ټولګڼونو ډيرى Z اود مات ګڼونو a / b ډيري سره، a , b ∈ Z .

د ریشنلګڼونو ډیري کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، یعنی په ریشنل ګڼونو کی د هر ګڼ a Є Z لپاره یو b Є Z موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a, \ a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ویش نه دی تعریف.

ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ریشنلګڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چی د ریشنلګڼون ډیري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بي تاثیره پاتي کیږي یا ناپیلی. دا یوی موږ له دې امله ناپیلیdas neutrale Element او یا هم بی تاثیره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعریف دی، یعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یاعملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا ګڼونډیری نور هم پراخه شي. یعني د ګڼون ریښه هم باید په ګڼونډیري کی باور ولري. د بیلګي په توګه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعریف. دا پراختیا مو ریيلګڼونډیری ته لارښودوي، چي

په R سره ښايو يا نخښنه کوو.

۱ . ۴ رييل گڼونډيری R die Menge der reelen Zahlen:
د هغو گڼونوډيری، چې له ريښو جوړ وي، هغه مو ږ د ايريشنل گڼونوډيریdie Menge der irationale Zahlen بولو چې په Q_i سره يې په نخښنه کو . د رييل گڼونډيری ياد رييل گڼونو ډيری په دې توگه بيا د ريشنل گڼونو ډيري او د ايريشنلگڼونو ډيري د ټولنی څخه جوړ دی يعنی

$$R = Q \cup Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونکی کي که U راشي، نود ټولنی په ځاي به يی ځاي نيولی وي، که بل نوم ورسره مل نه وي.
په دې ډيري کي د هرنامنفی گڼ لپاره د هغه گڼ ريښه موجود ده. د رييلگڼونوډيری. بيا تکراوروو، چی د ټولو ريشنلگڼونو ډيري څخه عبارت دی، چی د نامنفي ريشنلگڼونوگڼونو ريښی هم ورزياتي شي.
په رييلگڼونو کي د ريشنل گڼونډيري ټول قوانين باورلري او په همدې ډول په R کی د هر مثبت گڼ a ريښه هم موجود ده، يعني $\sqrt{a}$موجود ده، چی a منفي گڼ نه وي. دا ريښه نيونه يو يوځايز اپريشن يا عمليه او يا نښلونه ده.

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چی د ریښې یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلګڼونوډیری د کمپلکش ګڼونډیری‌ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری:

د ټولو منفی ګڼونو ریښوډیري ته ایماګینار ګڼونډیری وایو die Menge der imaginäre Zahlen .
او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چې باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو رییلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .
اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګڼونډیری د رییلګڼونډیری او ایماګینارګنونډیري ټولنی ته وایي. یاني که ایماګینارګڼ د I سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره يي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

.

گڼونه دوه برخی لري، رییله برخه او ایماګینار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډیري کی ټولی نښلونی یا عملیې، چی په رییل ګڼونډیري او ایماګینار ګڼونډیري کی باور لري، باوري دي. او برسیره پردې، دا لاندې قوانین هم باور لري:

دلته که $z = a + ib$ یو کمپلکس ګڼ وي، چی a رییله برخه او $ib = bi$ یی ایماګینار یا ایماجینار برخه ده. او س راځو شمیرقوانینو ته:

الف : $i^5 = i \qquad i^4 = 1 \qquad i^3 = -i \qquad i^2 = -1$

په ټولیزه توګه:

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \qquad i^{4n+4} = +1 \qquad i^{4n+5} = i$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1+b_2)$$
$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2+a_2b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کیدی شي، چی وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ و $z = a+ib$ ته یو کونجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي

پ–

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ ib) (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو یا قضیو په څیر هم ښوول کیدی شي، خو موږ یې دلته د ښوونی څخه تیرېږو او دایی د تعریف له مخې د اعتبار وړ قوانینو په څیر راوړو.

یادونه : موږ کړای شو، چی دا د ګڼونو ډیري په لاندې ډول د ډیریو په توګه یو په بل کې خوندې ولیکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتیب د وړېسی ډیري اصلي برخډیري دي

۲ – ډیرپېژوهینیزې ستړکلیمی

۲ . ۱ . ډیری

په شمیرپوهنه کی پل په پل موږ ددې، د ستونځو سره مل، تعریف شوې کلیمې سره مخامخ کیږو، کومه چی د یوه لغات « ټولګې » سره روښانه کیدی یا پوهیدل کیدی شي. د بیلګې په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږیږو، چی په یوه ټاکلی وخت کی په یوه کوټه کی موجود وي، یا هغه هیلی، چی په یوه ځانګړي وخت کې په یوه ځانګړي ځای کې په اوبو کی لامبی. هغه غرڅه، چی د هسکی مینې د سپینی مورګي په ځنګلونو کی لا پاتی دي او همدا ډول هغه میږې او ووزې، چی په ۱۹۹۹ میلادې کال کی د کوچیانو څخه د لوږې له امله مړې شوي دي. د داسی شیانو ټولګه «ډیری» (Die Menge , set) بلل کیږي یا داسی ټولګې ډیری نوموو.

۲ . ۱ . ۱ **لنډ تعریف** : ځموږ د خیال یا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپیرکیدونکو شیانو ټولګه «ډیری» نوموو یا بولو.

شيان، چي له هغو ډيرى جوړ شوى دى، د ډيري «توكي» بلل كيږي. د دې لپاره، چي « x د ډيري M توكى دى» ليكو: « $x \in M$ ». د دې وينا په څټ يا نفي يا نيګيشن Negationد « $x \notin M$ » له لارې وركول كيږي.
د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځاي ليكو:

$$"x_1,x_2,\ldots,x_n \in M"$$

يو ځانګړى ډيرى تشډيرى دى، داسى كركتريزه كيږي، چي كوم توكى نه لري. دا تشډيرى د سومبول يا نخښبى Ø سره نخښبون كيږي يا په نخښه كيږي.
نور هغه ډيرې چي زيات مو مخ ته راځي يا زيات منځ ته راځي، دا لاندې ډيري دي:

د ټولو طبيعي يا پيدايښتي‌ګڼونو ډيرى د N سره په نخښه كيږي، چي صفر ورسره مل دى.
د ټولو ټولګڼونو ډيرى Z
د ټولو راشنلګڼونو ډيرى Q
د ټولو رييلګڼونو ډيرى R
د ټولو كمپلكسګڼونو ډيرى C
د ۳۰ پرويشونو ډيرى، چي له ۸ توكو څخه جوړ ډيرى دى.
يعنى {1,2,3,5, 6,10,15,30} ډيرى.

۲ . ۱ . ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیري N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه یی : $M \supset N$. یا $M \subset N$

۲ . ۱ . ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یي په نخښه کوو.

تشډیری $\emptyset$ د هرډیري برخډیری دی ، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیري نااصلي برخډیري بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیري څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید ګوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیري» هم ویل کیږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اینکلوزیون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲ . ۱ . ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \neq N$ نو M د N اصلي برخډیری بلل کیږي. ($M \neq N$)
په نخښونه یی : $M \subset N$

۲ . ۱ . ۵ تعريف: د يوه ډيرې S توکي کيدی شي پخپله ډيري وي. دلته نو S د ډيريسيستم په توګه په نخښه کيدی شي يا د ډيري سيستم په څير ګڼل کيدی شي يا په بل عبارت: د يوه ډيري د توکو ډيري د هغه ډيري برخڼيری دي، چی دا يو د ډيريسيستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعريف: د يوه ناتش ډيري سيتسم S غوڅڼيری (د سيستم هغه برخڼيری، چی د سيستم د هر ډيري برخڼيری وي) D د ټولو توکو هغه برخڼيری دی، چی په همغه وخت يا يووخت کی د سيستم S د هر ډيري M توکی وي. يعنی لرو $x \in D$ همغه ارزښته يا برابرارزښته د دې سره دی $x \in M$ د ټولو ډيريو $M \in S$ لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap_{M \in S} M$ يا $D = \bigcap \{ M \mid M \in S\}$

$$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

که S يواځي د پای ډيرو برخڼيريو $M_1, \dots, M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات يا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وايي، چی M او N ګډ توکی نه لري، يعني توکی پردي دي يا لنډ پردي يا ديسيونکت دي(Disjnukt) دي .

۲ . ۱ . ۷ **تعریف:** د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چی کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیري M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

په نخښونه : $V = \bigcup_{M \in S} M$ یا $V = \bigcup \{ M \mid M \in S \}$

$V = M_1 \cup .... \cup M_n$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخډیریو $M_1 , M_2 , ... , M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیري او ټولنډیري د تعریف په مرسته پسی ترلي لاندې اړیکي لاس ته راځي ، چی ښوونه یی ګرانو لوستونکو ته پرینښوول کیږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

(a) $M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$

(b) $M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$

(c) $M \cap N = M$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

(d) $M \cup N = M$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

پایډیري کیدی شي، چی د هغو د غړو له لارې په نخښه شي.
لیکل کیږي

$$\{ x_1 , x_2, \ldots , x_n \}$$

د همغه ډیري M لپاره، چی ټیك له دې ورکړشوو توکو څخه جوړ وي. یوتوکیز ډیری { x } د هغه د توکي x څخه باید توپیر شي:
د بیلګي په توګه { Ø } هغه ډیری دی، چی د هغه یواځنی توکی تشډیری دی .

دیوه ډیري M د توکو ګڼون یا تعداد د | M | سره په نخشه کیري. دا ګڼ |M| د ډیري M زور یا توان بلل کیږي، دا په دې مانا چي د ډیري د توکو ګڼون یا تقداد د ډیري زور دی. د بیلګي په توګه دی $1 = |\{Ø\}|$ او $0 = |Ø|$.
د یوه ډیري بل ډول روښانونه یا شمیرنه په دې کی نغښتی، چی دیوه ورکړ شوي ډیري M ټول توکي ورکړ شوي ، کوم توکی چی ګډ خویونه E ولري، و یوه نوي ډیري ته سره راټولګه کړي یا را یوځای کړي. E(x) په دې مانا چی x خویونه E لري، نو دا ډیری په $\{ x \in X | E(x) \}$ سره ښایو.
د بیلګي په توګه ډیری $\{ x \in Z | x^2 = 1\}$ د -1 او 1 څخه جوړ شوی، د ټولو ټولګڼونو برخډیري دی. د یوه ډیري دا
.

ډول جوړونی سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانيول کيږي، په غير له دې کيدی شي، له تضاد يا مخامخوالی ډك يا په ځتې ډيري رامنځ ته شي، دا چی انډولډيری په ډوليزه توگه په همغه اړيکو يواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپليځيت(Explizite لاتين : روښانه ، واضح) ورکونه تيريدنه وشي.

٢ . ١ . ٩ تعريف: د دوه ډيريو M او N کمونډيری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوځي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توگه لاندې يادوو:

کموتاتيو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \,, \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوځياتيو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ديستريبوتيويتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \,,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

ټولیز یا عمومي

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) \cap B = \bigcup_{\alpha}\left(A_{\alpha} \cap B\right)$$

او وروسته

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډیرې شمیرپوهنیزې ښوونې د پوره اندکشن په پرینځیپ ولاړې دي، کوم چې د طبیعي ګڼونو اکسیوماتیکي جوړخت دلایلو راوړنه کې یو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندکشن ثبوت پرینځیپ:

A دې په طبیعي ګڼونو $n \in N$ یوه ویناو ي. $A(n)$ په دې مانا دی، چې A په n باوري کیږي.
د یوه کره ټاکلی $n_0 \in N$ څخه پیل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اینډکشن پیل:
ب ؛ د اینډکشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي
نو بیا A د ټولو طبیعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره رینښتیا ده یا صحیح یا ټیك ده(دا رینښتیا مناسبه نومونه ده).

دې ته دې ګوته نيول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چيري د ايندکشن پای په لاندې ډول لاربښوده کړو:

ب : له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n_0 \leq i < n$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.

شرايط (b) او ('b) برابرارزښته دي ، لکه چې ورپسی يا تړلي ليدل کيږي.

د انيدکشن ښوونه يا ثبوت بيلګي د لاندې جملو اوبيو يا حلونو ته مرسته کوي يا د لاندې جملی اّبيو په چوپړ کي دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعريف: M دې يو ورکړشوی ډيری وي.
د M د ټولو برخډيريو ډيری. چې په $P(M)$ سره يی په نخښه کوو يا ښايو، د M دپوتنځډيري Potenzmenge يا توانډيري په نامه يادېږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې يو n– توکيز ډيری وي.
$P = P(M)$ دې د M د ټولو برخډيريو ډيری وي. نو دا د M په توان ډيری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ايندکشن پيل: $n = 0$

ګورو چې M کوم توکى نه لري. له دې امله M تشډېرى Ø دى. د $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ له امله په P کى يو توکى $1 = 2^0$ موجود دى.

وي دې : $n \in N , n \geq 1$

د اينډکشن نيونه يا فرضيه: هر $(n - 1)$ – توکييز ډېرى دې ټېك 2^{n-1} توپيريدونکى برخډېري ولري.

د اينډکشن اوبى يا ثبوت : که M يو ډېرى د n توکو سره وي، نو $P(M)$ ټېك له 2^n توکو جوړ دى.

د دې سره دې $M = \{ a_1, a_1, ..., a_n \}$ وي.

نو بيا $P(M')$ د $M' = \{ a_1 , a_2, ..., a_{n-1} \}$ لپاره د اينډکشن د نيونى يا فرضيي سره ټېك 2^{n-1} توکي لري،

که $A \in P(M)$,نو بيا يا $a_n \in A$ دى او يا $a_n \notin A$. په دوم حالت کي A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي حالت کي $A' = A \backslash \{a\} \in P(M')$ نو $P(M)$ ټېك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} (1 + 1) = 2^n$$

توکي لري. د پوره اينډکشن د پرينځيپ له مخى دلته وښوول شو، چې د هر n – توکيز ډېري M لپاره پوتنځ – يا تواناډېرى $P(M)$ ټېك 2^n توکى لري. *

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډيري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې یو ناتش ډیریسیستم وي. یو ناتش د S برخډیری K یو ځنځیر بلل کیږي، که له $M_1 , M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او یا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعریف :یو ډیري $M \in S$ د S یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیري، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چی $M = N$. نو د څورن جملګی په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګیLemma vo n Zorn:

که د ناتش ډیریسیستم S د هر ځنځیر K لپاره ټولنډیري $\{ K \mid K \in K \}$ هم یو د S ډیریسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximales Element توکی موجود دی.

ددې جملګی د ثبوت څخه دلته تیریږو.

وي دې N د یوه نیم منظم ډیرې M لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر (ضرور نه دی، چی په N کی ځای وي یا خوندې وي) a له M څخه، کوم چی د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

پوره کړي د لاندې ډيري پورته بند بلل کيږي يانی ډيری يی د لته رابند دی. دې ته دوګونی کليمه لاندې بند دی.
په ورکړ شوي نيممنظم ډيري M سره د ټولو ځنځيرونو ډيری د ډيري خونديونی په موخه يا هدف ، هم نيمه منظم دی. دا ټول د اخرني ډيري ماکسيمال توکی ، د خپل طبيعت له مخی د M ماکسيمال ځنځير بلل کيږي.
لاندې جملی يو بل ته ورته دې يانی د يوې څخه بله لاس ته راځی او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرميلو جمله Zermelo: هر ډيری کيدی شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff: هره د يوه نيمه منظم ډيري ځنځير په يوه ماکسيمال ځنځير کي خوندې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن جمله Kuratowski-Zorn :
که د يوه نيمنظم ډيري M هر ځنځير يو پورته بند ولري، نو د M په هر توکی پسی يو په نامه ماکسيمال توګي راځی.
ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تيريږو.

اوس دې X او Y دوه ناتش ډیرې وي. د یوې د X په Y کی ځیرونی (په نخښونه $f: X -> Y$) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د $x \in X$ هر توکی یواځنی یوه د $y \in Y$ توکی باندې د ځیرې په توګه تنظیم شي یا ترتیب شي، د x ځیره y په ځیرونه f د $f(x)$ سره او یا هم ساده د fx سره په نخښنه کوو. ډیری X د ځیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا ځیرډیری بلل کیږي.

که f د x ځیرونه یا ځیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو $x \in M$ توکو ځیرې ډیری او په ورته توګه د ډیرې M ځیره بلل کیږي او داسې په نخښنه کوو $f(M)$ یا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري ځیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري ځیره fX د f ځیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښنه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ **تعریف:** که $\mathrm{Im}\, f = Y$ باور ولري ، د ځیرونی $f: X -> Y$ لپاره، نو f یوه سوریکتیوه ځیرونه surjektive Abbildung **بلل** یږي، یو سوریکشن Surjektion یا یوه د X ځیرونه په Y باندې. په ځټ دې N یو د S

برخډیری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چی د هغو ثیره د N یو توکی وي، د N له ثیرې پخوا ثیرونه، په ثیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخډیری دی.

که $N \neq \varnothing$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری وي، یعنی هلته که $N \cap \mathrm{Im}\, f = \varnothing$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه ثیرونه $f : X \longrightarrow Y$ د خویونو سره،
چی له $x_1 \neq x_2$ تل $fx_1 \neq fx_2$ لاس ته ریشي، اینیکتیو ثیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او سوریکتیو وي، نو f بییکتیو ثیره کوونه bijektive Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f : X \to Y$ دې یوه بییکتیوه ثیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د ثیرې په توګه یو یواځنی

.

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د څیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي.
دا د f په څټ څیرونه بلل کیږي او یا دا f ته راګرځیدونکی څیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \to X$ سره په نخښنه کیږي

۱ . ۱ . ۱۹ **تعریف:** که دوه څیرونی $f : X \to Y$ او $g : Y \to Z$ یو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نخښنه شوې څیره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چی د f او g ځل یا ضرب څیرونه بلل کیږي زیات وخت د ځنځیرې او یا تړلی بلواك یا څیره کوني په نامه هم یادیږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$
کیدی شي چی تعریفډیری او څیره ډیری یو بل باندې پریوځي.
دلته بیا له یوې څیرونی f غبرږو، چی X په خپل ځان څیره کوي.

۲ . ۱ ۲۰ **تعریف:** که دډیرې X هر توکی په خپل ځان بیرته څیره شي، نو یو د X بیکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

چی د X کتمټ څیرونه Identität یا identische Abbildung یي بولو او په لاندي ډول یی ښایو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$.
که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دې په څټ څیره کونه f^{-1} هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلېدیری یا ضربېدیری او اړیکی یی

په دې برخه کی کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation کلیمه څیړو.

۲ . ۲ . ۱ تعریف: د دوه ډیریو A او B کارتیزي ځل $A \times B$ د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره.
دلته $(a , b) = (a', b')$ ټیك هلته باور لري، چی $a = a'$ او $b = b'$ وي.

.

۲ . ۲ . ۲ يادونه: کارتيزي ځل په ټوليزه توګه کموتاتيو نه دی ، دا په دې مانا چې $A \times B \neq B \times A$ که $A \neq B$ وي. په پام کې دې دا اڅتثنا وي، چې د هر ناتشډيري A او تشډيري $\varnothing$ لپاره باور لري

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A$$

په ورته توګه د دوه ډيريو کارتيزي ځل په څير د پاي ډيرو ډيريو دپاره هم کارتيزي ځل تعريفيږي.

۲ . ۲ . ۳ تعريف: کارتيزي ځل $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ د پاى ډيرو ډيريو A_i د $i = 1,\ldots,n$ لپاره، د ټولو منظمو يا ترتيبشوو n – ګونو $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$$

ټيك هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1,2,\ldots,n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1, 2, \ldots, n$ لپاره، نو $A^n = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$ د A n–ايزى توان يا پوتنځ بلل کيږي. ([illegible])

ډيرى $\{(a,\ldots,a) \in A^n \mid a \in A\}$ د A^n نيمى يا قطر دى.

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود $A\times A$ برخېدیری R د ډیري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه $a \sim b$, هلته او هلته یا په بل عبارت ټیك هلته، که وي

$$(a, b) \in R \qquad \text{او} \qquad a R b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندې توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a \overline{R} b$ ټیك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.
د بینار اړیکو د ځل RS لاندې پوهیږو، چی $a(RS)b$ ټیك اوټیك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی $a R c$ او cSb باور لري.

د بینارارېکو ځل اسوشیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

د بينار اړيکو څل په هيڅ توګه کوموتاتيو نه دی ، کله کله اړيکی R او S يو له بل سره بدليدونکی وي ، دا په دې مانا چې

$$RS = SR$$

يوون اړيکی E په لاندې ډول تعريف دي: aEb ټيك هلته باور لري که وي، $a = b$. يا په بل ډول اړيکی E د ټولو هغو توکو جوړو (a,a) د $a \in M$ سره ډېری دی. دلته په روښانه توګه باوور لري: $E = E^{-1}$ او ديوه خوښی اړيکیR لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

موږ تش اړيکو 0 ته هم ګوته نيسو، چی د $M \times M$ تشډيري په څير تعريف دی. د هر بيناراړيکي R لپاره په ډيري M کی باور لري:

$$0 \subseteq R \quad \text{او} \quad 0\,R = R0 = 0$$

موږ کله کله د بينارو اړيکو سره مخامخ کيږو، چي د لاندې خويونو څخه څنی په کی باور لري

رفلکسيويتي: $a\,R\,a$ د ټولو $a \in M$ لپاره دا په دې مانا چي $E \subseteq R$

ترانزيتيويتي: له $a\,R\,b$ او $b\,R\,c$ څخه لاس ته راځي، $a\,R\,c$ دا په دې مانا چي $RR \subseteq R$

سيومتري: له $a\,R\,b$ څخه لاس ته راځي $b\,R\,a$ دا په دې

مانا چي $R = R^{-1}$

انتیسیومتري: له $a R b$ او $b R a$ څخه لاس ته راځي
$a = b$ دا په دې مانا چی $R \cap R^{-1} \subseteq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم یو بینار اړیکي له دې پورته خویونو څخه کوم یو ولري یا ټول ولري، نو د دې اړیکو په څېر اړیکي R^{-1} هم دا خویونه لري.

اوبی (حل):
په عمل کی له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

ایکویوالنځ اړیکی :د بینار اړیکو څخه یی خورا مهمي اړیکی ایکویوالنځ اړیکي دي، چی په لاندې کی يي تعریفوو

۲ . ۲ . ۶ تعریف : یو ناتش دوه ځایزه اړیکی ~ په ډیري A کی ورته اړیکي یا اکویوالنځ اړیکی بلل کیږي، که د ټولو a , b , c ∈ A لپاره لاندې اړیکی باور ولري.

الف) $a \sim a$ (رفلکسیو reflexiv)

ب) $a \sim b \iff b \sim a$ (سیومتري symetrisch)

پ) $a \sim b$ او $b \sim c$ څخه (<=>) $a \sim c$ لاس ته راځي . (ترانزیتیو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بیلګه:

الف) مساوات یا برابرون « = » د هر ډیري A لپاره یو ورته والی اړیکي Äquivalenzrelation دي.

ب) د $a , b \in Z$ لپاره $a \sim b$ ټیك هلته باور لري، که 2 د ګڼ $a - b$ پرویشونی وي.

ایکویوالنځ اړیکی په کلکه د دې سره تړاو لري، چی یو ډیری

يو بل سره په پرديو ټولګي ډېريو ويشي. دوه ډېري يو بل سره پردي بلل کيږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري يانی غوځي يي تشډېری وي.

غواړم، چی دا ټولګيويشنه داسی لړغوندې روښانه وځيرم، که څه هم زياتو لوستنکو ته به ستړيکيدونکي وي، مګر لږ پوهوړ به شي. که چيرې طبيعي ګڼونه په 5 وويشو نو دلته پنځه ټولګيويشنی لاس ته راځي، چی ويشپردي دي: هغه ټولګی، چی 1 ولري او ټول $1 + n5$, ... , $1 + 5, 1 + 25$ ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر $2 + n5$ دريم: هغه ټولګی، چی 3 ولري او ټول ورسره $3 + n5$. څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره $4 + n5$. پنځم هغه ټولګی، چی 5 او ټول ورسره $5 + n 5$. چی دا په 0 سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول $0 + n5$ ولري. دا ډول شمرنی بيا د ګڼونتيوري دنده ده، چی په همغه ډول کتابونو کي لوستل کيږي. هلته د کونګرو- اينځ اړيکو لاندې لوستل کيږي، چی زه يي دلته په ليك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی يو پوره پام وځغلوي او ټولګی ويشنه او ايکوالنځ اړيکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

د ټولگيويشنه په همدې وخت کي ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ايکويوالنځ اړيکو او ټولگی ويشنی ترمنځ راگرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څټ کيدونکی هم دی.

که R په A کی يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو A / R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکوR ته. هغه څيرونه چی د A او A / R ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونی په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلی شو، چی ټولگي ويشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځی. موږ دا شمير پوهنيز په لاندې توگه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که ~ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی a ∈ A ورته والی ټولگی يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توگه ورکړ شوی دی.

$$[a]= \{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولگي [a] هر توکی b د ټولگي [a] نماينده

بلل کيږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډيري A ورته-والی اړيکي وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وينا وې جوړه برابرارزښته يا جوړه مساوي ارزښته دي

$$(a) \qquad [a] \cap [b] \neq \emptyset$$
$$(b) \qquad a \sim b$$
$$(c) \qquad [a] = [b]$$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو يو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سيومتري او ترانز-يتيويتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) يوه لاس ته راوړنه ده يا تعقيب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دېامله نو $x \in [a]$ د $x \sim a$ سره برابرارز-ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.

په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زيات موخور يا هدفمند دی، که يو ډيريسيستم S د يوه په نامه ايندکشنډيري يا پيژندډيري A په مرسته په نخښه کړو يا روښانه کړو. د لته A يو (پاي يا ناپای) ناتش

ډیری دی، او هر ایندکس یا پیژندنخښی $\alpha \in A$ یواځنی یو ډیری A له S څخه داسی ترتیب شوی دی، چی باور لري: $S = \{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعریف : د یوه ډیري $A \neq \emptyset$ د برخډیریو A یو سیستم $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ د د ډیري A یوه ټوټونه (تجزیه) بلل کیږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د پاره $\alpha \in A$ د ټولو

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ .۱۳ جمله : R دې په ډیري A کی یو ورته اړیکي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته یو د A ټوټونی دی. په څټ یو په خوښه د A ټوټونه $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ یواځنی یو ورته والی اړیکي په A ټاکي، د کوم لپاره چی د ټوټونی ډیری A ټیك ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل یا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملی ۲ . ۲ . ۸ او تعریف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکی جوړوي. دا هغه اړیکی دي، چی رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چی نیمنظم په کی تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسی لوستل کیږي، چی a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کی خوندي ده یا a له b څخه مخ ته ځی. که $a \leq b$ وي او $A \neq b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چي a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کی a په b کی اصلي خوندي ده. په یوه ډیري Mکی دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوړ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $b \geq a$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیری، په کوم چی دوه توکی تل یو له بل سره انډولوړ وي، نو دا ډیری لایني نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کیري.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او M'

ترمنځ یواځنی او په ځتې ځیره کونه f موجود ده یعني

$af = a' \quad , a \in M , a' \in M'$

که له $a \leq b \quad , a\, b , \in M$ تل $af \leq bf$ لاس ته را شي او په ځتې، نوf د M او 'M ترمنځ یو ایزومورفیزم ispmorphism بلل کیږي، چی دا به وروسته هم بیا پوره وڅیړل شي او ډیري M' , M پخپله ایزومورف نیممنظم ډیري بلل کیږي.
که یوه نیممنظم ډیری M په یوه نیممنظم ډیري N کی ایزومورف خوندې وي، نو دې ته ایزومورف ځایونه یا خوندیونه وایو، که د M یوه ایزومورفه ځیره کونه په 'N د ډیري N برخه ډیري باندې موجود وي او ډیری 'N پخلپه نیممنظم ډیری وي او که 'N په هغه نظم ترتیب وي ، چی له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نیمنظم ډیری M د ډیري N ، چی نسبت وخوندیونی ته نیممنظم دی، ټولو لاندیډیریو ډیري 'N سره ایزومورف دی.
په ځانګړي توګه کیدی شي ، چی د ډیري N لپاره پخپله ډیری M ونیول شي یا راوړل شي.
د دې جملی د خوونی څخه تیریږو. په کوروش کی کتل کیدی شي.

یوه نیمنظم ته په څټ اړیکی هم نیمنظمی دي.
د ټولو $M^{'}$ $af=a', a\in M, a'\in M$ لپاره، د $a, b\in M$
سره $a \leq b$ ټیك او ټیك هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af\leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x<a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي .
د بیلګي په توګه ډیری N' د ټولو د ډیري N لاندډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

۲ . ۴ . ۱ جمله(مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډیري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه): د نیمتنظیم شوي ډیري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots.$

د پایڼیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیږي یا غوڅیږي. په نورو کلیمو سره ، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots.$

سره یو ایندکس یا پیژند نخښه n شته، له کومی چی د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چی د n وروسته $a_n = a_{n+1} = \dots$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ایندکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډیري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چی له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

رابندیدی شي یاني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چې یو بل ته ورته دي، د ښوونی یا اوبیونی ځخه تیرېږو.

ویناوې چی د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیري M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه دی چی په N کی خوندې وي) د M د توکی a د کوم لپاره چی شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیري M کی هره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیري ټول ماکسیمال توکی په طبیعي توګه دM ماکسیمال ځنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کی کتل کیدی شي. موږ یی نوره رالنډوو.

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه څیړل کیږي، ځنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي n-ځایزي عملیي، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له دي څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړۍ Ring ، تن یا بدن Körper (engl. Field او په همدي ډول ترونونو یا ترنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چی لمړی له موړ ورسره بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دي لاري بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لاري دا موږ ورسره بلدي کلیمي لنډي تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو ځانګو لپاره بنستېزه کلیمه، چی ډیره تر څیړنی لاندي نیول شوي ده هغه د الجبري اپریشن یا الجبري عملیي او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري نښلوني یا الجبري ګنډني کلیمه ده.

موږ ځانونه په یوه دوئیزې کارونی په زیاتون یا ځل رابندوو یا محدودوو. دا دوئیزې کارونی یا عملیې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چې د یوه ډیري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډیري په یوه بل توکی c تنظیم یا څیره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، یعني دا د لاندې خویونو سره یوه څیرونه ده:

$$G \times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چې د ټولو $(a,b) \in G \times G$ لپاره یو c د G څخه، یعني $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چې باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \, . \, b \longrightarrow c$$

په دې ټولیزه توګه په یوه ډیري کی د بینار یا دوه-ځائیز عملیې کلیمی تعریف، په یوه ډیري کی د یوه ترنار ریلیشن ternäre Relation یا دریځایزو اړیکو سره په همغه یا مساوي مانا دی.

یادونه: اپریشن die Operation، عملیه ، کارونه او یا نښلونه، ګنډنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز-یشن die Komposition یا څنګ په څنګ ایښوونه یا بهتره څنځیرونه تل همغه مانا لري، چې ما کله کله

ترڅه هم کارولی ده. د ډیرو نومونو کارونه، کوم چی همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهني ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چې کومه اشتباه په کي نه رامنځ ته کيږي.

موږ دلته د نمونې په څیر یواځی یویزې کارونی یا عملیې په ګوته کوو. او ور پسی بیا نور سملاسی خپل اصلی موخه تر مخه نیسو. دا یویزې عملیې هغه عملي دې، چې د کارولو سره یی د ډیري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعی ګڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کی چی هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

$$a + 0 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N_0 \quad \text{د ټولو}$$

او یا په ځل کی ، چی د طبیعي ګڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعني

$$a \cdot 1 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N \quad \text{د ټولو}$$

۳ . ۱ ګروپ Gruppe:

که له یوې خوا د ټولګڼونو، ریشنلګڼونو یا رییلګڼونو زیاتون په پام کې ونیسو او له بلې خوا ریشنل یارییلګڼونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو ځل په پام کي ونیسو، نو دا میندلی شو، چې دواړه ننبلونعملیي یا ننبلو-نکاروني د همغه یو بل سره په یوغېږ شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګي په توګه باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{او} \quad (a.b).c = a.(b.c)$$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنایي ګڼونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1 ، کوم چې دې دوه تړنو ته ځانونه ناپیلی یا بي تاثیره نیسي. یعني:

$$0 + a = a \quad \text{او} \quad 1 . a = a$$

بالاخره باور لري

$$(-a) + a = 0 \quad \text{او} \quad (1/a).a = 1$$

دا په دې مانا، چې هر ګڼ a ته یو ګڼ á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل نښلونی یا نښلونعملیي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چی دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چی دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو تړنعملیو څخه خپلواك وخیږو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چی شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دې، چی څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چی د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه نښلونه یا تړنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چی هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا ځیره شي او دې پورته

ویلشوو قوانینو لاندې پرتی دي یا په بل عبارت دا پورته قوانین په کی باور لري.
دا نښلونه د یوه ناپیلی سومبول ° سره ښایو.

یادونه : دا سومبول له خپل ځاي جګ لیکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټیك منځ کی که ولیکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعریف : یو ګروپ دیوه ډیري G او یوې ترنې یا عملیې ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې ډیري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) یواځنی یو د $a^\circ b$ سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسی تنظیم شي، چی دا لاندې اکسیومونه پوره کړي:

اکسیوم ۱ – اسو څیاتیو قانوباور لري

د ټولو $a,b,c \in G$ لپاره $(a^\circ b)^\circ c = a^\circ (b^\circ c)$
اکسیوم ۲ – یو ناپییلی توکي $e \in G$ شته، د ° تړاو سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a^\circ e = e^\circ a = a$$

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په ځتې توکی á شته، د کوم لپاره چي لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو ګروپ کموتاتیو یا ابلي ګروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولو $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که ګروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو ګڼون یا تعداد $|G|$ د G نظم بلل کیږي.

د ګروپ ټاکنټوټو پورې د ډیري G ترڅنګ د ګروپتړنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.

یو ګروپ نو په دې توګه د یوې جوړې $(G , \circ)$ سره په نخښه کول کیږي. دا چی ګروپتړنه ډیر واره په دې اړوند

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځاي يواځی G ليکل کيږي. ګروپټرنه تر يوې اندازې پورې د ګروپځل يا ګروپضرب سره هم نومول کيږي، نو په دې توګه دا توکی $a^\circ b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل کيږي. په يوه نااېل – يا ناکموتاتيوګروپ کی دې د توکو ترتيب يا لړيپپرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په يوه نااېل ګروپ کی په ټوليزه توګه $a^\circ b$ له $b^\circ a$ سره توپير لري .

اکسيوم۱ را په ګوته کوي، چی په ډيرواره ځلولو کی په نوکانو کی بندونه يا راګيرونه پورې اړ تيا نه څرګنديږي. له دې امله کيدی شی ، چی له نوکانو اينبوولو څخه بيخی تيريدنه وشي او د بيلګي په توګه د $a^\circ (b^\circ c)$ لپاره په ساده توګه ليکو

$$a^\circ b^\circ c$$

۳ . ۱ . ۲ بيلګی :

اول – د ټولو ټولګنونوډيری Z د ورسره بلد زياتون سره، چی د کروپټرنی په څير يی نيسو، يو ابلګروپ $(Z;+)$ جوړوي. دلته بيا له زياتونګروپ څخه غبږيږو، په همدې توګه د ريشنلګنونو ډيری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسيوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په څټ توکی á

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمککچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروایىنځ ځیرونو (څرخون، ځایبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چې لم ډیر کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګڼونو ډیری Q^* او د ټولو ریيلګڼونو ډیري R^* توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو Q^* او R^* ځلوونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګڼ $1/a$ په ځیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو ځیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه ځیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو ځیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې ځیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

او

$$(f\circ(g\circ h))(x) = f((g\circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمټ څيرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري.
بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f\in S_M$ لپاره د څيرونې f'، هغه f ته په څټ څيرونه f^{-1} وټاکل شي. ډيرى S_M د يو په بل پسې د څيرونو ځلونې يا ضربونې له امله يو ګروپ جوړوي، چې د ډيري M سيو-متري ګروپ بلل کيږي.
که په ځانګړي توکه ډيرى M ډيرى $\{1,2,3,...,n\}$ وي، نو دا اړونده سيومتري ګروپ څيفرونه يا ګڼونه $1,2,3,...,n$ په ساده توګه د S_n سره په نخښه کوو. هره څيرونه $f\in S_n$ د ګڼونو $1,2,3,...,n$ پرموتيشن يا بدلون دی. که $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, ..., $f(n)=a_n$ باور ولري، نو f د څيره ګڼونو پرلپسی لړی $a_1, a_2, ..., a_n$ يواځنی ټاکلی ده. موږ ليکو $f=(a_1,a_2,...,a_n)$، که د بيلګي په توګه باور ولري $n=3$ او $f=(2,3,1)$, $g=(3,2,1)$ نو لاندې ځلونه يا ضربونه لاس ته راځي

$$f\circ g=(1,3,2) \quad \text{او} \quad g\circ f=(2,1,3)$$

دا بيلګه ښايي، چې S_n د $n = 3$ لپاره ابل ګروپ يا کموتاتيو ګروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ يادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولګڼونه ، نسبت و ځلونی يا ضرب ته ګروپ نه جوړوي، ځکه چې د بيلګي په توګه و 2 ته کوم ټول ګڼ $á$ وجود نه لري، د کوم لپاره، چې $2.á = 1$ باور ولري.

د ګروپ د اکسيومونو ځخه کيدی شي ، چې په لانديې کی يو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابيلي کړو. په لانديې کی دې G تل يو ګروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چې اکسيومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $á^\circ a = e$ څخه $a^\circ á = e$ لاس ته راځي.

اوبی يا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کيږي: و a' ته د اکسيوم۳ له مخی يو $a \in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی. د اکسيومونو۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$a^\circ a' = e^\circ(a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ(a^\circ a') = a''^\circ((a'^\circ a)^\circ a')$$
$$= a''^\circ(e^\circ a') = a''^\circ a' = e$$

له دې څخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \quad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي **جمله:** ټیك یو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسیوم ۲ او اکسیوم ۳ کی غوښتل کیږي. همدا اوس له $x^\circ a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبې یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بیا په ځانګړي توګه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^{*\circ}e = e$$

دا په دې مانا چې e یواځنی ټاکلی دی. که بیا هم ورپسی باور ولري $x^\circ a = a$ د یوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسیوم ۳ له امله یو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a^\circ a') = (x^\circ a) \circ a' = a^\circ a' = e \quad *$$

دا په دې توګه د اکسیومونو سره یواځنی ټاکلی ناپیلی یا بی

تاثیره د ګروپ G توکی e د ګروپG «یوی توکی» بلل کیږي.
په زیاتونډوله لیکلي ابلګروپ G کي ناپیلی توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کي 'a د a له لارې یاد a سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

دا توکی 'a د a « په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ–عملیي یا د ګروپټړنی زیاتون ډوله ولیکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او د a په څټتوکی د a- سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$

له مخې لرو، چې a و a^{-1} ته په څټ توکی دی، چې په دې توګه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \qquad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه ګروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چې x د a او b سره یواځنی ټاکلی . په څپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a)\ b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په ریښتونی یو اوبی یا حل دی.
په همدې توګه دوهم برابرون هم پاي کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چې داپورته د ګروپ تعریف لږ وغزوم

او په دې توګه ګروپوئيد او نيمګروپ تعريف کړم. دا کار په زياتو ادبياتو کی لمړی سر ته رسيږي، خو داسی تعريفونه يی هم په پوهيدلو کی ستونځي نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چی موږ لمړی د ګروپ کليمه باندې وپوهيږو، چی بنسټيزه ده.

۳ . ۱ . ۹ تعريف : يو ډيری G ، چی نسبت و يوه اپريشن يا ګنډنی يا عملي ° ، چی موږ يی دلته د ځل عمليي « . » په څير ښايو، ته رابند وي، نو دې ډيري ته ګروپوييد وايو، ياني که د هرې جوړي (a,b) د $a,b \in G$ لپاره يو توکی $c \in G$ موجود وي ، د کوم لپاره چي باور ولري $a.b = c$ ليکنه يی په لاندې توګه ده$(G, .)$.

دا د ګروپوئيد کليمه لږ را تنګوو او نيمګروپ تعريفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ تعريف . هغه ګروپوئيد G، په کوم کي، چی پورته د ګروپ اکسيوم ۱ باور ولري يا نی ځل يی اسو-شياتيو وي، نيمګروپ بلل کيږي، چی په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوڼ کيږي.

دا چې نیمګروپ همغه ګروپ دی، دا لاندې جمله یې روښانه را په ګوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمګروپ G هلته او هلته یو ګروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e موجودوي، چې لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو $a \in G$ لپاره $ae = a$

او دا توکی e داسې وټاکل شي، چې د هر $a \in G$ لپاره کم له کمه یو ښی په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چې غوښتنی

$$a \,.\, a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي، خو دا مو وښوول، چې ګروپ جوړوي. اوس دې یو نیمګروپ G راکړ شوی وي، چې پورته نیونی پوره کوي. دا غواړو وښایو، چې e په G کی یو کیڼ یویتوکي هم دی. که د a^{-1} سره د a ښی په څټ توکی وښایو ، نولاس ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

که د برابرون دواړه خواوې د یوه و a ته په ښۍ توکي سره ځل کړو او د نیمګروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم ځخه چې د حلونکی یا اوبیوونکی اړیکی $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګین یویتوکي e' او ښی یویتوکي e'' رانیسو، نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت ځخه دا اوبي یا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چې په دې توګه د G یوي(یویتوکي) e موجودیت او یواځنتوب وښوول شو.
بیا دې a^{-1} د یوه توکی $a \in G$ ښی په ښۍ توکی وي.
که برابرون $aa^{-1} = e$ له کینې لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په ښۍ توکي د اخرني برابرون ځلولو یا ضربولو ځخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چې $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

دا توکی a^{-1} ته له دې امله یو کیڼ په څټ توکی هم دی.
لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کیی شي ساده وښوول شي، چی د a هر ښی په څټتوکي د کیڼ په څټتو کی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی.
په دې توګه په G کي د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټتوکي موجودیت په یواځنی توکه تضمین دی.
د جملي د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چي توکي

$$x = a^{-1}b \quad \text{او} \quad y = ba^{-1}$$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښايي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چی $ax = xa$ دی، نو له کیڼ څخه یی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنی لپاره، د ځل عملیي په ځاي د زیاتون ګنډنه یا عملیه په کار اچوو، چی ناپیلی توکی یی 0 دی او هر توکی a ته په څټ توکی یی د a- سره په نخښه کوو.
دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیږي، خو د ښی یویتوکي لپاره 0 صفر یوي توکی دی او ښی په څټ یی a- دی. د په څټ عملیي یواځنتوب

د یوه نیمګروپ بیلګه چی ګروپ نه وي.
که د طبیعی ګڼونوډیری N پام کی ولرو، نو دا ډیری د زیاتونعملیي ته نیمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چی په دې ډیري کی، په هر حالت کی کمون نه دی تعریف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو څخه ګروپ جوړوو، نو باید دا مو پوره په پام کی وي، چی دا ګڼونډیری د صفر توکی ونه لري، ځکه چی په صفر پرویشنه نه ده تعریف.

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسی حال کی چی د ګروپ اپریشنونه یا ګروپ عملیي یواځی له یوه ترونعملیي څخه منځ ته راځي، اوس دوه عملیي څنګ په څنګ راوړل کیږي، چی په ورسره د ګڼو-نشمیرني بلد ډول، چی زیاتون «+ » او ځل یا ضرب « . » سره ښوولکیږي، تکیه کوو. که له ریشنل ګڼونو څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمیر قاعدو څخه

په ورته ذهنیت، لکه په ګروپونو کی، نوي الجبري جوړ- ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ **تعریف** : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی څیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل ګروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باوري کیږي

۱ – د زیاتون اسوشاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ – د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b + a$

۳ – په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $a = 0+a = a+0$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ – هر توکی $a \in F$ ته یو توکی $-a$ په F کی موجود

دی د $(-a)+a=0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F کی صفر توکی دی

د F توکو د څل یا ضرب . لپاره باور لري

۵ - اسوځیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ، چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a' د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون

$(b+c).a= b.a + c.a$ او $a.(b+c) = a.b + a.c$

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$

که یوائې د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب وغوښتل شي، نو F ته کړی بللل کیږي.

که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی

۱۰ - د څل کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a . b = b.a$
نو F يو کموتاتيو تن يا کموتاتيو بدن او همداسی کموتاتيوکړی بلل کيږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه يوه کړی يا تن هم د $(F.,+,.)$ په ځاي د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه ليکل کيږي او د دې لپاره لنډ ليکو ab . ډير واره د «بدن» يا «تن » لاندې کموتاتيو بدنونه پوهيږو، په داسی حال کي، چی ناکموتاتيو بدنونه ، «کاږه بدنونه» بلل کيږي. دلته به موږ تل کموتاتيتو بدنونه تر څيړنی لاندې نيولي وي.

د اکسيوم ۱ او اکيسوم ۵ له امله کيدی شي، چی نوکان نور هم پريښوول شي يا تيريدنه ترې وشي يا ونه ليکل شي. د نوکانو د نه ليکلو لپاره يو بل د مخه پيژندل شوی قرارداد يا پريکړې يو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عمليه د کرښو لکه زياتون عملي څخه د مخه اجرا کيږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توکه $ab+c$ ليکل کيږي. دا ساده- والی همدا اوس د اکسيوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F يا همداسی د کړی R ناپيلی توکی وزياتون ته صفر-

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په څټ توکي $-a$ و a ته منفي توکی بلل کیږي. د $b+(-a)$ په ځای لنډ لیکوو $b-a$ او دا کارونه د a او b کمون بولو.
باور لري $a+(b-a)=b$ او $b-a$ د ۳ . ۱ . ۸ له مخې د برابرون $a+x=b$ یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري $-(-a)=a$ او $-(a+b)=-a+(-b)=-a-b$.
دا د $F^{*}=F\backslash\{0\}$ ځلگروپ ناپیلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوکي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دي ته ضرورت نه لري چې یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلگي

الف – د ریشنلگڼونو ډیری Q او همداسی د رییل گڼونو ډیري R په ورسره بلدو تړنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسگڼونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توگه یا ډول یو کملکس گڼ a دا لاندې بڼه لري $a=a_1+a_2i$ د رییل گڼونو a_1, a_2 سره او

ایماګیناریوون i سره، د کوم لپاره چی $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماګینار برخه بلل کیږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون،
کمون او ځل یی په ځرګنده توګه په لاندي ډول روښانه دي
یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i \,,$$
$$a\, b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس
ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی . په دې پسی تړلي
لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a} \,.\, b \,, \quad \bar{\bar{a}} = a \,,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی رییلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$
د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $|a| = 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $|a\bar{a}| = 0$

او $C \ni aa / a=\bar{a}$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چې $a = a_1 + a_2 i$ د نامنفی رییلګڼونو ریښه ارزښت
دی، $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چې

$$|a| = +\sqrt{a^2 + a^2}.$$

رییلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چې ایماګینار یی ورکیږي: کمپلکسګڼ ټیك هلته یا هلته او
هلته یو رییلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړیو لپاره بیلګی:

الف –د ټولو ټولګڼون ډیری Z یوه کموتاتیو کړی‌ده، د یوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چې د بیلګي په توګه ۲
په Z کی نسبت و ځل ته په څټ نه لري. یعنی $1/2$ په Z
و 2 ته په څټ توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددي لپاره بیلګه ده، چې
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بڼې افاده

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F, i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کیږي د یوې نامعلومې x سره او چې ځلووني یا ضریبونه او یا کوایفځینتونه یي له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولینوم $f(x)$ درجه بلل کیږي.

نخښونه یې: ګراد $\text{Grad } f = n$

که حتی $a = 1$ وي، نو $f(x)$ یو نورمي شوی پولینوم normiertes Polynom بلل کیږي. د صفر درجې پولینومونه ثابتې دي د $0 \neq a \in F$ سره. صفر پولینوم $0(n=0, a=0)$ سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.

د ټولو پولینومونو $f(x)$ ډیری، چې ځلووني یې له بدن F څخه وي د$F[x]$ سره په نخښونو یا په نخښنه کوو. په $F[x]$ باندې زیاتون (په ورکړشوی حالتکي د صفرځلوونو سره) او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 +,,, + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + ... + (a_n+b_n)x^n \;,$$

$$(a_0 + a_1x + ... + a_mx^m).(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n)$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... + a_mb_nx^{n+m}$$

و زیاتون « + » او ځل « . » ته [F[x] یوه کړۍ‌ده،
د پولینو1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیرۍ F[x]
پولینوم کړي په F باندې بللکیږي، د ناپیژنونکی x سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګڼونوګروپ
یو ځانګړی ځای لري، له دې امله په ځانګړي څیړنی کی
ځانګړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي
جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده :

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$
د $Grad\ f > 1$ سره د لاینې پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو
ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف
کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی
توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \qquad \text{او} \qquad Grad\ f = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او
بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:

په یوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی یا حل :د $0+0=0$ اوی د اکسیوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0)\ .a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په یوه کړی کي باور ري

$$a(-b) = (-a).b = -ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(-a)(-b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(-b) = a(b-(b)) = a\ .\ 0 = 0$$

په دې پسی $a(-b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(-b) = -(ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

د مخه مو د بدن کلیمه روښانه کړه، اوس غواړم، چي دا کلیمه له یوې ببلې لورې هم، یا بهتره، په یوه بل ډول تر څېړنې لاندې ونیسم او هغه په دې ډول، چې هغه مو ورسره بلد د ترونکارونو نخښې ونه کاروم او دوه ذهني ترونونه راوړم، چي وروسته کار مو بیا همداسي مخ ته بیولی دی:

۳ . ۲ . ۷ تعریف :د ډیري M هغه جوړښتونه بدن بلل کیږي، د کومو لپاره چي باور ولري:

۱ - په ډیري M کی دوه ترونه ° او o تعریف دي
۲ - دلته (M ; °) کموتاتیو ګروپ دی
۳ - دلته (M\e$_0$; o) یو ګروپ دی او e$_0$ یو ناپیلی توکی دی و° ته.
دا لاندېقوانین باور لري:
۴ - دیستریبوتیو قانون: ao(b°c) = (a° b)o(a°c)
(a° b)oc = (aoc)°(boc)
په یوه کموتاتیو بدن کي په دې برسیره باور لري
۵ - کموتاتیو قانون : aob = boa

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئید G برخه‌یری یا لاندګړیري U ګرپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه ترنه ° (ځل) د دې ډیري U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ ځخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخه‌یری U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګرڅ عملیو یا ګروپترون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښنونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G,°)$ یو ناتش برخه‌یری U ټیک هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

اوبې یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چې پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوې توکی وي. د $U \neq Ø$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^{\circ} a' \in U$ او e د U یوې توکی دی. وریسی باور لري $a = e^{\circ} a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^{\circ} b \in U$
د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چې په U کی اسوشیاتیو قانون باور لري.
پس $(G , ^{\circ})$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېډیری A، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې-کړۍ بلل کیږي. دا په دې مانا، چې په A کی د R ټولې ترنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چې A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R ځلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کي تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېګروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړې R لاندیکړې پخپله R او د صفر- توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړې دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د ځل اسوځیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چې په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چې د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,\ldots,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \, . \, a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چې په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چې د a توکي څخه منځ ته راغلی یا جوړ ځیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمړی داسی نیسو، چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومی چی بیالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی یی ځاي نیولی د a^{-n} سره ښایو یا په نخښنه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپG د یوه ټولګنیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a ټول توانونه د صفر او منفی پوتنځ پورې له دې امله د G یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کیږي او په {a} سره په نخښنه کیږي.
په زیاتون لیکدود سره بیا د a دپوتنځ په ځاي د هغه ډیرخلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کی د یوه توکي a توان یا پوتنځ په مختلف جګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

ګروپ توکي نه ورکوي یا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپای ګروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري یا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپایېږیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولګڼ k او یو ټول ګڼ l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جګګڼ کوچنی مورډ د a نظم بولو یا نوموو.

که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^{\circ}, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر ورپسي منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

$$k= nq+r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړیکو $a = 1$ څخه لاس ته راځی:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راګرځیدونکي یا څیوکلیکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چی یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونګروپونه Tursionsgruppen یا پریودي ګروپونهperiodische Gruppen یا بیرته راګځیدونکي ګرپونه بللکیږي، په بل ډول ناپریودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کیږي.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راګرځیدونکی لاندیګروپ لپاره، رامنځ ته کیږي، چی ایا داسی یوه لاندېکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چي یو ورکړ شوی توکی ولري. R دې یوه ورکړشوې (ناضروري اسوځیاتیو) کړی وي اوa دې یو د هغی کړی په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول ځلونه، په کومو

کی چی ټيك فاکتور a رامنځ ته کيږي، د کوم يوه ګڼون يا تعداد ..., $n = 1, 2, 3$ سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ يا توان رول لوبوي. دا چی ځل بايد ضرور اسوشياتيو نه وي، نو په ټولو توپيريزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کی نيول کيږي، چی په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه يو د بل سره ځليږي يا ضربيږي. د $n = 3$ لپاره ځل $a(aa)$ او $(aa)a$ او $n = 4$ لپاره ، او همداسی د $n = 5$ لپاره اوداسی وريسی.
هر لاندېکړی د a سره ټول زياتونونه ، ورکړشوي پاي زياتو ځلونه، کوم چی د ټولګڼيز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري.
داسی د R توکی . چی په دې زياتونيز ډول ليکل کيږي د خپلی لور څخه په R يو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکې يا لټوونکې د a څخه جوړه، لاندېکړي بلل کيږي.
د يوه اسوشياتيوي کړیR لپاره د يوه توکی a څخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو څخه جوړه لاندېکړی، چی په يوه ډول د a زياتون او مثبت پوتنځ څخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګڼيز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتيو ده.

د يوه ګروپ هر لاندېګروپ د دې ګروپ يويتوکی لري، د

یوې کړۍ هره لاندېکړی په همدې توګه د دې صفر توکی لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړۍ R لاندېکړیو) غوڅی له دې امله تشېړیری نه دی.

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېګروپونو یوه سیستم غوڅی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړۍ R د لاندېکړیو د یو سیستم غوڅی، د دې کړۍ لاندېکړۍ جوړوي. د لاندې نیمګرپونو یوه سیستم غوڅی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

موږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پژندډیری یا ایندکسډیریIndexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوڅی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوي خل bc په هر لاندې ډیري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډیری دی.

اوس نیسو چی G دې یو ګروپ، کړی او یا په همدې توګه یو تن یا بدن یا کوم یو بل، مور ته څرګند، الجبري سیستم وي، کوم چی تراوسه پیژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښایو، نو یو مینیمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن یا لاندېبدن) شته، کوم چی M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي یا تولید شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوڅی دی، د کومو څخه، چی کم له کمه یو دا په نامه ګروپ G موجود دی.
د مخه ویل شوي یا ورکړ شوي څیوکلیکي لاندې ګروپ تعریف د ټولیزولو له لارې ساده ښوول کیدی شي، چی لاندیګروپ {M } ټیك د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چی د په خوښه ترتیب د پایډیرو M توکو د پوتنځئل په بڼه لیکل کیدی شي.

ټیك په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټولیزولو له لارې لاندېکړی، چی په R کی له M تولید ټولو توکو جوړ دی، کوم چی په M کي د پاي ډیرو توکو د ځلولو د زیاتون(د ټولګنیز ضریب سره) څخه انځوریدلی شي. په نااسوڅیا- تیو حالت کی دي طبعآ ضریبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخې د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو A_i , $i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمي ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره { A_i , $i \in I$ } لیکو، یا هم {A,B} { }، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کې هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړې هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسی ورپسی. نو په G کی داسی لاندېډیري M شته، د بیلګې په توګه پخپله G، د کوم لپاره چې باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدیږو ینکی سیستم بلل کیږي . تر هغې، چې G یو پاې د تولید- ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ)یو نیمګروپ، یو کړی) G ځخه غږیږو، چې پایتولیدیدونکی ګڼون یا

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چې دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی څخه جوړ وي. دا ګروپ چې یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د څیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، څیوکلیک ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو- رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چې همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چې لروده.
د بیلګي په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کتمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نموني ، چې په نیولی دې وي، چې که د ګروپ عملیي یی ترونونه همغه وي، په داسی حال کی چې توکي له کومو چې ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.
په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او G' ایزومورف

دي، که د ګروپوئید یواځنی او په ځتې ځیرونه f د ګروپو-
ئید G په ګروپوئید 'G داسی موجود وي، چی د په
خوښه a,b ∈ G لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره ځیرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي،
د ایزومورفی ځیرونی په ځیر یې په نخښه کوو یا یی ایز-
ومورف ځیرونه بولو. د دوه ګروپوئیدو خویونه، چی یو
بل سره ایزومورف وي، سیومتري خویونه دي، (هغه و
ایزومورفی ځیرونی ته په ځتې ځیرونه بیرته ایزومورف
ځیرونه ده)، او ترانزیتیو، دا برسیره پر دې ، که ځیرې
ځوك د ګروپوئید کتمتې په ځان ځیرونه ورسره وګڼي،
رفلکسیو هم دی. د ایزومورف ګروپوئیدو لپاره په ټولیزه
توګه لاندې لیکدود کارول کیږي یا استعمالیږي

$$G \sim G'$$

که چیرې د نورو الجبري جوړښتونو ایزومورفي مو هم
مطلب وي ، نو موږ به بیا هم همدا نخښه وکاروو.
طبعاً به د ګروپوئید په ایزومورف ځیرونه کی ټول هغه
خویونه، چی په ګروپوئید کی لیکل کیږي، لکه اسوځیاتیو

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په ځتهتوکي موجودیت، د ګروپوئید ځیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلګه سره ښایو، چې دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف ځیرونه په G' وي. که a' او b' دوه د G' په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چې باوړ لري

$$af = f(a) = a' \quad , bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون $ab = ba$ او د ځیرونی د یواځنتوب څخه $a'b' = b'a'$ دی. له دې ځخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی ځیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

څپکیدونکی نظم یا څیرونه موجوده وي، چی هغه څیرونه نسبت و زیاتونګروپ ته ایزومورفیزم وي او هم د کړی و څلګروپوئید ته ایزمورفیزم وي. د ایزومورف څیرونی سره طبعآ کړی هغه خویونه، اسوشیاتیو، او کمو- تایتو یا لیکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ایزومورف ګروپونو لپاره یوه په زړه پورې بیلګه، د مثبت ریيلګڼونو څلیزه ګروپ او د ټول ریيلو ګڼونو زیاتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاریتم باندي تنظیم یا څیره شي، چی بنسټ یی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ یو ایزومورف څیرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي.
ایزومورفیز له دې ریښتینیو څخه لاس ته راځي، چی د یوه څل لوګاریتم دې د لوګاریتم د یوګونو فاکتورونو د زیاتون سره برابر یا مساوي دی (د لوګاریتم او قوانینو لپاره دې څما د شمیر پوهنی کتاب وکتل شي).

موږ اوس هغه مخه په ګوته شوې پاملرنه په څیوکلیکي زیاتونګروپ کی رامخ ته کوو او په یوه بیلګه پیل کوو.
د ټولګڼونو زیاتونګروپ د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لپاره بیلګه ده، څکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو څله دی.

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګڼونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پاي د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.

ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیرېږو (ثبوت یی په Kuroŝ کی کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګڼونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.

او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی ګڼ ټول څوواره یو لاندېګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېګروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیري ګڼونو n لپاره لاندېګرپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګڼونو زیاتون ګروپ، لاندېګروپ A، چی یواځي د منفی ګڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چی د هر ګڼ سره د هغی په څټ هم لري. n دې کوچنی طبیعی ګڼ وي، چی په A کی خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\,,\ \ 0 < r < n$$

نو دی.

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنې څخه) ، دا په دې مانا چې دی $a = qn$ ، څه مو چې ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چې ګرپوئید G په ګرپو-ئید 'G کې ایزومورف خوندي دی، او یا په 'G کې ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپو-ئید 'G په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کې ایزومورف خوندي دی.
سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چې د همغه توکي $a \in R$، چې په اصلي نیمي یا قطر کې پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډېري M باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت یي په R کی پروت دی ، ایزومورف دی.
د ټولو x ∈ M لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت a ∈ R سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.
د یوه په خوښه اسوشیاتیو، کموتاتیو کړی R کی پولینومکړی R[x] پوتنځلړیکړی R{x} کی ایزومورف خوندې دی.
پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر ځخه توپیریدونکو ځلوونو یا ضریبونو سره، یو وR[x] ته ایزومورف د R{x} لاندېکړی جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کی، چی یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې برسیره اسوشیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چی دا همداسی په یوه اسوشیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی کی خوندي شي.
اوبی یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کي

نیسو، چې $a \in R$ او k یو ټولګڼ دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \qquad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \qquad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چې برسیره پر دې

$$\begin{aligned}[(a,k)+(b,l)](c,m) &= (a+b,k+l)(c,m)\\ &= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m\\ &= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m\\ &= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)\\ &= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)\end{aligned}$$

باور لري او ټيك په همدې ډول د ديستريبوتيو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډيرى يوه كړى انځوروي. له (2) څخه وريسى لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې كړيكى د يويتوكي ځاي نيسى يا نمايندګي كوي. بر سيره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د كومو سره ، چې د ټولو د (a,0) فورمجوړو ډيرى د ټولو

جوړو(a,k) په کړی کی یو وR ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دې سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2)
استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
موږ دا په ګوته کوو، چی دا له موږ جوړه شوې کړی یواځنی
کړی نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه)
خوندې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د
یوې کړی په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوځیاتیو یا
کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی
همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولڼو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو
کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a
ټولګڼونه دي او په رینښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای
ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3)
زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

$$\sum_{a \in G} k_a a + \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{a \in G} (k_a + l_a) a \qquad (4)$$

$$\sum_{a \in G} k_a a \cdot \sum_{a \in G} l_b b = \sum_{c \in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه یا تشریح دی، په کومو کي، چی m_c د ټولو صفر څخه توپیر څلونو $k_a\, l_a$ زیاتون په مانا دی، چی په ټولو a اوb کی ځغلیدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چی د برابرونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چی په کینړ لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پاي زیاتونونه د غړو په څیرېو له بل سره ځلیږي، او په رینبتونی د قانون

$$k_a a . l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندي، چی دab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چی د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځاي راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانو او د هغه ثبوت چی د G په ګروپ کی د ځل اسوځیاتیو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مگر په پرینځیپ یا اصولوکی ستونځی نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کي ، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسی یو گروپ G سره ایزومورف لاندېگروپوئید، د دې کړی د ځلوونکي گروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له موږ جوړ شوې د گروپوئید G کړی د ټولگڼونو گروپو- ئیدکړی بلل کیږي.
که G یو نیمگروپ وي او یا گروپ، ~~نو د~~ نو د دې په ځاي د ټولگڼیزنیمگروپ او همداسی د ټولگڼیزگروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر گروپ د یوه ډیري M په سیو- متري گروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چې د M په ځاي په ځانگړې توگه د گروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي.
دلته د گروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چې یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

کړي. دا چې له $x \neq y$ څخه هم $ax \neq ay$ لاس ته راځي
او برسيره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کيږي، ترانسفورميشن $x \to xa$ ګروپ G په ځان
په ځې يواځنی ځيره کوی يا تنظيموي، دا نو له دې امله يو
پرموتيشن (پرموتيشن ځما د شميرپوهنه کتاب کی په پراخه
توګه روښانه شوی دی) دی. د $a \neq b$ لپاره په دې برسيره
په دې د غوښتونکو پرموتيشنونو توکي يو له بل توپير لرود-
ونکی دي، ځکه، چی $1.a \neq 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چی د ab پورې اړونده پرموتيشن د a و b
پورې اړونده يويه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نيمګروپ G ، د يوه ډيري M
سيومتري نيمګروپ کی خوندي دی.
اوبی يا حل: د ثبوپ لپاره نيمګروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰
سره سم په يوه، د يوه اسوشياتيو کړی R, په ځليز ګروپ

کی خونديږ کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه اسوشیاتویکړی R کی د یویتوکي سره خونديږ کوو او د G سره یی په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی ځلیزه نیمګروپ دی. لکه څنګه، چی په G کی هم یو توکی 1 د 1.a |= 1.b سره له a |= b څخه موجود دی، نو د لغاتو پورې د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی دا نیمګروپ G د نیمګروپ سره پخپله، په دې ډیرG باندې، ایزومورف خونديږي دی. له دې څخه د سرچینیز ګروپ G خونديونه لاس ته راځي.

موږ غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه ګروپوئید (په ځانګړي توګه یو ه نیمګروپ) په بل ګروپوئید (یوه نیمګروپ) کي خونديونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه ګړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمګرپونو په ګروپ کی او کړی په یوه (ناضرورکموتاتیو) تن یا بدن کی خونديونه

هر نیمګروپ، ضروریه یوه ګروپ کی، ایزومورفف نه شی خونديږي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره بلد د لنډونی قاعدې دې.

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسې $ca = cb$ څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چې د لنډونې قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کې غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شر-طونه، چې د نیمګروپونو په ګروپونو همداسې د اسوشیاتیو کړې په یوه (ناسو(۸) ~~کموتایتو~~) بدن کې د کموتایتو په حالت کې پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملې په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G کې دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G کې دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چې له

$$ax = bx\ ,\ x \in S;\ a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشي. نو کیدی شي، چې G د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسې ابل ګروپ G کې د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چې د S هر توکی په G کې یو په ځټ توکی ولري.

(۸) ناځوړ د کموتایتو

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیرېږو. دا د الجبر په درسي کتابونو کې کتل کیدی شي،

له دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل ګروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل ګروپ کې خوندې کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمګروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمګر-وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کې میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوشیاتیو – کموتاتیو کړی R کې دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کې چې صفر او پرصفرویشنه نه وي موجوډ. نو کیدی شي، چې کړی R ایزومورف په یوه اسوشیاتیو-کموتایتو کړی R کې، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چې د N هر توکي په R کې یوه په ځټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پریږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندېګروپ H دې ورکړ شـوې وي. که یوه a دG په خوښه توکی وي، نو ممکنه ځلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د ah تعریف شوې، د ګروپ G کیڼ اړخیزځنګ- ټولګی یا ګاونډې ټولګی(موږ به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه $a \in aH$ دی، ځکه چی لاندېګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري $bH = aH$ ، دا داسی بللکیږي، چی د ګروپی G هر کیڼ اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که $b = aH , h \in H$ باور ولري، نو د په خوښه $h',h'' \in H$ لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a h'' = b(hh'')$$

پس $bH \subseteq aH$ او $aH \subseteq bH$

.

په دې سره هر دوه کيڼ اړخيز ګاونډيتوب لګي، يو د بل سره کټمټ دي او يا يې غوڅې تشډيري دي.

موږ ددې سره د ګروپ G يوه ټوټونه يا تجزيه لاس ته راوړو، په لاندېګروپ H پسي، چې د يوه مخه يې کيڼ اړخيزو ګاونډيتولګيو يو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کيڼ اړخيزه ټوټونه بلل کيږي په يوه لاندېګروپ H پسې. د دې ټوټوونو ياتجزيې يو ټولګي پخپله H دی: د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښی اړخيزه ټوټونه يا تجزيه لاس ته راوړی شو، په يوه لاندېګروپ H پسی، کوم چې له ښی اړخيز ګانډيتولګی ha , $a \in G$ څخه جوړدی، که يو ګروپ کموتاتيو نه وي، نو کيدی شي، چې کيڼ ګاونډيتو- لګي او ښی ګاونډي ټولګی باندې د يوه ګروپ G ټوټونه د لاندېګروپ H پسی يو له بل توپير ولري. په هر صورت دواړه ټوټونی د ټولګيو برابر ګڼون لري: څيرونه چې د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی څيره کوي، په څټکيدو- نکی يواځنی څيرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کيڼ اړخيز aH ګاونډيتولګی په همغه ورته ښی اړخيز ګانډيتو- لګي Ha^{-1} څيره کوي او په څټ.

۳ . ۶ . ۳ تعریف:د ګروپ G ټوټونه په لاندېګروپ H پسي ، د ګاونډیو ټولګیو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښنه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k.j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړيګن هغه ګڼ دی ، چی پرویشوني یی ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا ګروپ او یویتوکی) څیوکلیك یا په بل نوم، راګرځیدونکی دی.
دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه څیوکلیکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندښیمګروپ H د ګروپ G نورمالپرویشونی Nrmalteiler (یا اینواریانتي invariante Untergrupp لاندېګروپ) بلل کیږي، که د G کینې اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چی د هر $a \in G$ لپاره (په G کی د دواړو برخلېږیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$a H = H a \qquad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږیږو.
په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

دي همدا اوس ورکړشوي تعریف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعریف : په ګروپ G کی توکی x او y یو د بل سره کونجوګیري konjugiert **بلل کیږي**، که په G کی یو توکی a داسی پیداکیدي شي ، چی باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسی هم ویل کیږي، چی له y څخه د x سره ، د a ترانفورمیشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کی نور مالپرویشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کي ټول کونجوګیري توکی هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کی نورمالپرویشونی وي، او په ورزیات دې یا برسیره پر دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G یو په خوښه توکی وي، په H کی د (۱) پسی یا د (۱) له مخی یو توکی h' د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په څټ که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$ په H کی یو توکي h' موجود وي، کوم چی برابرون (۳) پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب (۲) پوره کړي، نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی، چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او همداسی $Ha \subseteq aH$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون (۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U او V په G کی یو د بل سره کونجوګیر konjugiert بلل کیږي، که یو داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

د په خوښه توکو $u_1 , u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چی څیرونه یا نظم $u \to a^{-1}ua$ د $u \in U$ سره، یو ایزومورف څیرونه د U په $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه ګروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوګیر لاندېګرپونو سره یوځای پریوزی. په څټ: د ګروپ G یولاندې ګروپ H ټولي و H ته په G کی کونجوګیر لاندېګروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نورمالپرویشونی دی.

له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

د اصلي خونديلرنی په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید، که هغه ټولی و هغی ته کونجو-
ګیر خوندي ولري، د دې توافق یا یو په بل سرخوړنی سره .
د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته
کیږي، له کوم چی (۱) رابیلیدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د یوه ګروپ G د په خوښه نومالپرو-
یشونو ډیریو غوځی ، بیرته نومال پرویشونی دي.

اوبی : که D د $i \in I$, A_i غوځی وي ، نو په هرترتیب D
د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر
دې د هر توکی ، چی یوه د D توکي سره کونجوګیر وي،
په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چی
په غوځ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله :د یوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو-
یشونو سیستم څخه تولید یا راپیداشوي لاندېګروپ(پرتله
۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G یو نومرمالپرویشونی
دی

ورکړ شوی دي نورمالپرویشونی A_i , $i \in I$ وي او د هغه ځخه جوړ شوي یا تولید شوی د لاندې ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندې بڼه لیکل کیدی شي

$$b = a_1 a_2 \ldots a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ سره . له G ځخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)\ldots(g^{-1}a_ng)$$

او دا چی

$$g^{-1}a_jg \in A_j \quad , j=1,2,\ldots,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندې ګروپونه د هغی خپل نورمالپر– ویشونی دي. په دې ورزیات یا برسیره پر دې په هر ګروپ G کی یوونګروپ E د نورمالپرویشونی په څیر موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

۳ . ۱۲.۶ تعریف : یو ګروپ ، چې نورمال پرویشونی یې یواځې یوونګروپ او پخپله خپل ځان وي، ساده **بلل کیږي**.

۳ . ۱۳.۶ جمله : یواځني ساده ابل ګروپونه، هغه ځیو-کلیکي ګروپونه دي، چې نظم یې پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.

اوبې : که یو ابل – یا کموتاتیو ګروپ ساده وي، نودا بیخي ناساده یا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چې په دې کي ځیوکلیکي لاندې ګرپونه باید خوندې وي، نو دا پخپله ځیوکلیکي دی. یو ناپاي ځیوکلیکي لاندې ګروپ نااصلي یا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چې د ټولګڼونو زیاتون-ګروپ دی ، په هغه کي چې د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کی دننه یا خوندي لري. که یو پای ځیوکلیکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چې نظم یې n دی، نو د ټوټونی n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چې لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G څخه توپیر لري.
د دې په څېر: ګروپ $G=\{a\}$ کیدی شي چې هیڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم یې یو پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.
چې د لاګرانژ له جملی څخه ساده په لاس راتلی شي.

یادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسې نور ې په دې هکله موضوعګانې په خارجي ژبو درسي کتابونو کې شته، چې هلته کتل کېدی شي، دلته به زيات وخت او ځاي ونيسي. زما هڅه هم دا ده، چې د زياتو شيانو سره په دا لمړي کې داسې لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایدیال او پاتي ټولګيکړی

Ideal und Restklassenring

یادونه: ی ما دا پاتیټولګیکړی بللی، چې يو نوم وي، خو دا کېدی شي، چې د پاتیټولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چې ځموږ په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کې ګورو، چې د نورمالپرويشونې په ځاي د ایدیال کلیمه رامنځ ته کیږي.
په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوښتوکی ۱ سره په نخښنه کوي یا ښايي. اوس د یوې کړی د « ایدیال»کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چې د R هر ایدیال Y په R باندې

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چی د هر $r \in R$ کړیتوکی اړونده ایکویوالنتټولګي $[r]$ بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخټړی Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ $(R, +)$ یو لاندې ګروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$.
دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که $R \neq Y$ وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخټړی $\{ 0 \}$ د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که $R = Z$ د ټولګښونو کړی وي، نو ډیری Y د ټولو جوړه ګڼونو $Y = 2z$ د $z \in Z$ سره جوړ ډیری د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in Z$ لپاره یو جوړه ګڼ دی.

پ) که $R = F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایدیالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایدیال Y اصلي ایدیال بلل کیږي، که $Y = yR$ وي، د یوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې یو $y \in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z \in R$ لپاره یو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجود وي. داسې هم ویل کیدی شي : چې دا توکی y ایدیال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایدیال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري : $r - s \in Y$

په نخښوونه یې : $r \sim s$ یا $s \sim r$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چې $\sim$ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایدیال وي د $R =| Y$ سره او R / Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r] = \{ s \in R \mid s \sim r \}$ ډیری وي.

نو R / Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] . [r_2]$
سره د ټولو $r_1, r_2 \in R$ لپاره یوه کړی‌وي د یوې توکی
$[1]$ سره .
اوبی: لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی
$[r], r \in R$ ډیری R په پردیو برخه‌یریو باندې ټوټه یا
تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1], [r_2] \in R / Y,$$

نو دا باید وښوول شي، چی زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] . [r_2] = [r_1 . r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا
ورته ټولګي دي. که $s_1, s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او
همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r - s = y \in Y$
هم دي، د ټولو $i = 1, 2$ لپاره، د کوم څخه چی لومړی

$$\begin{aligned}[r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] &= [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] = \\ &= [(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)] \\ &= [y_1 - y_2] = [0] \in R / Y\end{aligned}$$

لاس ته راځي. له دې امله زیاتون + کړه تعریف دی او [0] د ابل د ګروپ R / Y یو صفرتوکی دی و ټړنی یا نښلونی یا عملیې + ته.
په R / Y باندې ځل . هم کړه تعریف دی، ځکه چی

$$\begin{aligned} r_1r_2 - s_1s_2 &= (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2 \\ &= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2 \\ &= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y \end{aligned}$$

له کوم چی $[r_1] [r_2] = [r_1r_2] = [s_1s_2] = [s_1] [s_2]$ لاس ته راځي. سړی په دې پسی ټړلی په دې باور راوړی شي، چی R / Y (د کړی د تعریف سره سم) یوه کړی ده د یوي توکی [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعریف : دا کړی R / Y د R یو د پاتی- ټولګیو کړی و ایدیال Y ته بلل کیږي.

۳ . ۷ . ۷ تعریف : د کړی R یو ایدیال M ماکزیمال ایدیال بلل کیږي، که M ≠ R باور ولري او Y، د R یو بل ایدیال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې یوه کموتاتیوه کړی وي،

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.
ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبی:
الف) دا چی Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \ldots \subseteq Y$$

دې د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي
د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری
یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$،
د $i \in I$ سره موجود دی د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چی
ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$،
همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره
او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$
دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$
سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M
لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1
.

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته ترې اخې ، چې M د R یو ماکزیمال ایدیال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $[r] \neq [0]$. نو $M + rR$ د R یو ایدیال دی، کوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R یو ماکزیمال ایدیال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R یوی په $M + rR$ کې پروت دی، دا په دې مانا چې $1 = m + rs$ د توکو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[r]\,[s] = [1] \in R / M$ دی.
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتې ټولګې کړې یو بدن یا تن دی. خ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بیلګې

اول : د ټولګښونو Z په کړی کېY د ټولو جفتو ګڼونو ډیری ماکزیمال ایدیال دی. پاتیټولګي بدن Z / Y یې د دواړو پاتیټولګیو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله دوه توکی لري او د $Z / 2Z$ سره په نخښه کیږي.
دوم : په پولینومکړی $R = F[X]$ کې په بدن یا تن F باندې د نا ټاکلی یا مجهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

یو ماکزیمال ایډیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in R$$

نو $[f(X)] = [f]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا څیرونه $[f_0] \rightarrow f_0 \in F$ د بدنونو یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1 سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ **څخه** موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی.

ب) R د u څخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایډیال دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایډیال کي خوندي دی یا په بل ډول : په کوم ماکزیمال ایډیالکی خوندي نه دی).

ثبوت یا اوبی: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځی. که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه وي، نو د جملې ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(a) \Rightarrow (b)$ ساده دی.
څ چ ښ و (څه چی د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یو ناتش برخه‌یری U لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګي:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندې کړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیری Y د Z لاندې کړی ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

دا چې په ټولیزه توګه یوه لاندیکړی U یویتوکی نه لري، نو ضرور دا ده چې د لاندیکړی د « ایدیال» کلیمه رامنځ ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دې د R یوه لاندې کړی وي. د U دا ناتشهیری Y د لاندې کړی U یو ایدیال دی، که د ټولو $Y \in y_1 , y_2$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنی: U دې د R یوه لاندیکړی وي او Y دې د کړی R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره}
یوه د لاندیکړی ده.

پ) $(U + Y) / Y$ د پاتیټولګیکړی R / Y ، لاندیکړی ده.

ت) د R / Y د هر لاندیکړی T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

د R لاندې کړی ده.

ټ) د R / Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-} / Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴

څخه ترلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 \,,\; r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،

د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= (u_1 + y_1) (u_2 + y_2) \\ &= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y \end{aligned}$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوبیونې د کورکار دی.

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر ستګلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ ټرونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو ټرنی) غوځی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنځ یا توانډیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولګه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د ټرونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دي، چی دا ډول شمیرقاعدې لمړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر څیړنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

دی، چی د عملیي په ډول نه پیچوُبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چي دا عملیي باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چی د شیا ټنو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چي عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چی یو بل سره « تړلکیدی» شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توګه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلګي په توګه په ګڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم ګڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیي)،غوڅی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a , b , c

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوشیاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$
$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمني یا راکبښنی یا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$
$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او یوې خویونه

$$a \cup 0 = a \ , \ a \cap 0 = 0$$
$$a \cup 1 = 1 \ , \ a \cap 1 = 1$$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$$a \cup á = 1 \ , \ a \cap á = 0$$

دا اړیکي د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کیږي (د اکسیوم تعریف څما د شمیرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . موږ تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، څکه چی برخسیستمونه شته ، له کومو چی بیا دا نور اکسیومونه لاس ته راتللی شي.

په دې برخه کی ددې مینیمالسیستمونو کارونی یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمیر قوانین باور ولري.

که د توان یا پوتنځ ډیری $P(M)$ په پام کی ونیول شي، د هغه د غوڅي $\cap$ (انګریزي meet)، ټولنه $\cup$ (join) او کملپلیمنت جوړونی سره او $\emptyset = 0$, $M = 1$ سره نو دا د $\cap$ پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د $\cap$ لپاره $\wedge$ هم کارول کیږي او د $\cup$ په ځای $\vee$ او د $\acute{a}$ په ځای $\bar{a}$ هم کارول کیږي.

۴ . ۱ . ۲ بیلګه : یو د بول الجبر باید تل یو صفر 0 او یو1 (یوی) خوندې ولري. داکیدی شي ، چی یواځي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$ باندې عملیې $\cup,\cap,'$ په لاندې ډول تشریح کیږي:

$$0\cap0=0,\quad 0\cap1=0\ ,\quad 1\cap0=0\ ,1\cap1=1$$
$$0\cup0\ =0\ ,\quad 0\cup1=1\ ,\quad 1\cup0=1\ ,\ 1\cup1=1$$
$$0'=1\quad ,1'=0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمایل کیدی شي. له دې سره نو جوړښت یا سترکچر $(B,\cap\ ,\cup\ ,\ ')$ یو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ ته کیږي: که په همغه وخت کي اکسیومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$ د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسیو- مونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چی له اکسیومونوڅخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدیشي چی نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه ».دلته یوه ریښتیا وینا بیرته ریښتیا («د بول د الجبر یوه جمله ») وینا باندې

بدلیږي، ځکه چی د سیستم دوه ګونوالی ساتلی پاتی کیږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرینځیپ متن دی: د هرې جملی د ثبوت سره د هغی جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ – باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر ټولو توکو a لپاره

اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a')$$
$$= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ – د a کمپلیمنت a' د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$ نو دی $c = a'$.

اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی. څه چی د ښوولو وو (لنډ: څ ښ وو).

۳ – صفر 0 او یوی 1 په بول الجبر کی یواځنی ټاکلي دي، دا په دې مانا چی دا یواځني تو کی دي، د هغو خویونو سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.

اوبی : د یوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکو a لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره کیږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$.له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$ او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبیونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$ او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپلیمنت د یواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b)' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

ثبوت : د دوه ګونپرينځپ له لارې بسيا کوي، که يواځي يوه له دې دوه ګونو ويناو څخه وښايو. دبيلګي په توګه کينه.
د دې لپاره لاندې شميرقوانين کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$

$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b') = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$

$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتځنځيرڅخه په ګډه لاس ته راځي،
چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپليمنت دی.
۶ – د اسوشياتيو و کموتاتيو قوانينو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوښي (ټولنی) جوړولو نتيجه

په يوه توکو پای ډيرې کی، د لړيپرلپسی څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی ، چې يو توکي يواځي يوځل او که يا زيات رامنځ ته کيږي. زياتون نخښي ته ورته ليکل کيږي: $\bigcap_{i=1}^{n} a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$
د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسی

د $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره.

۷ – ديستريبوتيو قانون هم ټوليز کيدی شي او په ريښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i\in I} a_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} b_j\right)=\bigcup_{i\in I, j\in J}(a_i\cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} b_j\right)=\bigcap_{i\in I, j\in J}(a_i\cup b_j)$$

چيرته چی I او J پاي ايندکسډيري (پيژندډيري) دي

۸ – له $a\cap x = a\cap y$ او $a\cup x = a\cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x\cap(x\cup a) = x\cap(y\cup a) = (x\cap y)\cup(x\cap a) =$$
$$(x\cap y)\cup(y\cap a) = y\cap(x\cup a) = y\cap(y\cup a) = y$$

پای.

موږ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پيل کی وويل شو، د يوه ذهني نظر له لارې تر څېړنی لاندې نيسو، په دې کی چی موږ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه يوائي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شميرنه

کیدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ یو بییکتیوه ځیرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوځی) د تنظیم شوو توکو ټولنه (غوځي) تنظیم دي، او د هر توکي کمپلیمنت د ورسره تنظیم شوي توکی کمپلیمنت دی، نو په دې توګه کیدی شي ، چی دواړه الجبرونه «سوچه شمیریز» مساوي و لیدل شي. یو داسی بییکتیو ځیرونه $f : M_1 \longrightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم ګوته ورته نیولی ایزمورفیزم Isomorphismus نومیږي او دا راوړل شوي شرایط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کیڼ لور '، $\cup$، $\cap$ د M_1 عملیي او په ښي لور د M_2 عملیي. نخښلونی یا کارونی دي.

د نور الجبرونو په څېر یا خلاف کیدی شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه یو د یوه پام یا نظر امکانات برابر شي. د داسي یوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه باید برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ یو ایزومور-

فیزم موجود وي، یعنی که دا ایزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره یی په لیو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر یو پای د بول الجبر د یوه پاي ډیري M د برخډیریو څخه جوړ د بول د الجبر سره ایزومورف دی . په ځانګړي توګه د یوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم یا ډول دی ، او هر دوه پاي د بول الجبرونه د برابر ډیرو توکو سره یو د بل سره ایزومورف دي.

که څه هم موږ د پاي بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا باید په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي خویونه یا کرکتریي د ناپای ډیرو توکو ډیري لپاره باور نه لري . ناپای ډیر د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډیري د ټولو برخډیریو د الجبر سره ایزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډیر د بول الجبرونه کرکتریزه کړی شو، لاندې کلیمو ته اړ یو. M دې یو ډیری وي. یو سیستم K د M برخډیریو ډیریبدن یا ډیریتن بلل کیږي، که K د A, B سره $A \cup B$, $A \cap B$ او' $A \cap B$ هم خوندي ولري. د بیلګي په توګه ټول د تواڼډیری ډیریتن دی. K دې د

ډیري M برخډیریو یو ډیریتن وي، د $M \in K$ سره.
په K باندې کیدی شي بیا یو بول الجبر توضیح شي، په کوم کي چی $\sqcup$ د ټولنی ،$\sqcap$د غوځی ، تشډیری $\emptyset$ د صفر ، یو ډیری M د یوې ډیری، 'A د $A \in K$ کمپلیمنت $M - A$ سره نیسی ، یعني دا ډیري تیوریتیکي کومپلیمنت. داسی یو الجبر ډیریبدن الجبر هم بلل کیږي او په ټولیزه توګه د M هر برخډیری خوندې نه لري. اوس دا لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې
GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستېون Stone جمله) هر د بول الجبر د ډیریتن الجبر سره ایزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند ، کیدی شي چی د بول د الجبر سیده ځل ګټور وکارول شي یا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعریف : V او W دې دوه د بول الجبرونه وي، چی د هغی بنسټیز ډیري هم په V او W سره په نخښه کوو. نو دا د V او W سیده ځل $V \times W$ د بول الجبر دی د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډیري، چی $v \in V$

او $w \in W$ وي، د لاندي عمليو سره

$$(v,w) \cap (v_1,w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$
$$(v,w) \cup (v_1,w_1) = (v \cup v_1 , w \cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی $(0,0)$ او د يوي توکي $(1,1)$ سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د ګرانو لوستونکو دنده وي، چی وښايي، چی سيده ځل $V \times W$ په ريښتيا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، يعني $B = \{0,1\}$ د ترونونو

$$0 \cap 0 = 0 , \quad 0 \cup 1 = 1 , \quad 1 \cup 1 = 1$$
$$1 \cap 1 = 1 , \; 1' = 0 , \; 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دځپل ځان سره سيده ځل پوهيږو. د B^n توکی منظم n–ګونی دې له توکو $0, 1$ او د بول ترونونو کمپوننت ډوله تشريح شوي. دا په دې مانا چی:

$$(a_1, ..., a_n) \cap (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cap b_1, ..., a_n \cap b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n) \cup (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cup b_1, ..., a_n \cup b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n)' = (a_1', ..., a_n')$$
$$1 = (1, ..., 1)$$
$$0 = (0, ..., 0)$$

د بيلګي په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بيلګي ليدل کيږي، چې په B^n کې ساده شميرنه کيدی شي. له بلی خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملی ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ايزومورف دی. د بول الجبر د څيړنی لپاره کيدی شي، چې دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولينومونه

مو ږد فنکشنونو لپاره، د ټرونونو په تعريف پيل کوو، چې ارزښتڼيری يې د بول الجبر وي. دلته دې M يو په خوښه

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه ځیرونو

$$f, g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عملیې ∩ ، ∪ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسې یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښې اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چې $f(x)$ او $g(x)$ د V توکی دي او له دې امله ∩، ∪ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کې ځیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د ځیرونه f ده، د $f(x)$ سره، ټول $x \in M$ او د هغې یوي توکي د ځیروني f له لارې څخه د $f(x)$ سره، ټولو $x \in M$ دي.
یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M دV n–ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولې د V^n ځیرونې په V کې د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n– ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

هره د f څیرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چی د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظیموي. د دې څیرونو لاندې یی ثابتی څیرونی او پرویکشنونه د ځانګړو ماناو یا اهمیت دی. یوه ثابته څیرونه د ټولو $(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو i–ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی.
د ټولو $V^n \in (v_1,...,v_n)$ لپاره , $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$

یادونه : موږ دا ستونځې لرو، چی د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کیڼ وښی لور ته او بیا بیرته له ښي وکیڼ لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي ، چی داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n) \ni V^n$ لپاره
دا دا مانا لري چی : څیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په x_i ښایو، خو فکر کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو څیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو د $\cap$، $\cup$ ، $'$ عملیو. نخښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانګړې n–ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

۴ . ۲ . ۱ تعریف : هره څیرونه $f : V^n \to V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پاي زیاتو د عملیو $\cap$، $\cup$، $'$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n – ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ بیلګه : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \to V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1,v_2,v_3,v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاي په ځاي توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د $'$ ، $\cap$ ، $\cup$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

کمپوننت يو n–ګونی له V^n څخه کينښوول شي. دا شميرنه په رابنديزه توګه په V کی باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولينوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولينومفنکشن(=څيرونی) ترمنځ بايد ټيك توپير وشي. اړيکی « پولينوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چی له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، ∩ ، ∪ سره ټيك راجوړي دي يا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رييل پولينومونه د نښلونو + , * او − سره، چی نمونه يی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له يوه بنسټيزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره يو رييل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولينومونه په کوم کي چی x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، ∩ ، ∪ کېږی شي ، چی هغه پولينومونه وټاکی: دبيلګی په توګه د $x \cup (a \cap x)'$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولينومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چی وڅيړل شي يا پريکړه په وشي، چي ايا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پيښيږی، چی د هر پولينو–

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم $N(f)$ د یوه ټاکلی افادې په ځیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \models f_2$ لپاره $N(f_1) \models N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومي سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $\in V$ $a_{i\ i\ \ldots\ i}$ دی ، د ټولو $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۱– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځاي په ځای یا ځایول کیږي.

په ورته قانونيت يا قرارداد سره د هر پولينوم P کونيو-نکتيو نورمالفورم بلل کيږي، دلاندې ډبنې سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

که يو ځانګړی ديسيونکتيو نورمالبڼه وليکل شي، نوټول غړي به د ديسيونکتيو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ له ليکلو پرينښوول شي يا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې دا په نتيجه کوم تاثير نه پريباسی. په ورته توګه دا د ديسيو-نکتيو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بيلګه : يو پولينوم په ديسيونکتيو نورما-لفورم دی (د $a, b, c, \ldots \in V$ سره):

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې يو کونيونکتيو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن

$P : V^n \longrightarrow V$ لپاره ټيك يو ديسيونكتيو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توګه ټيك يو د بول پولينوم لاس ته راځي، كله چې ټول ديسيونكتيو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه (دوه ګوني) ويناد كونيونكتيو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملې د ښوونې څخه هم دلته تيرېږو، دا په نورو ادبياتو كې شته(دا دې ګران لوستونكی په پام كې ونيسی، چې دا به ځما پوره وخت ونيسی كه دا هرڅه راوګورم. ځما هدف همدومره دی، لكه چې په نورو ځايونوكې مې هم ګوته ورته نيولی، دا بنسټيز څه راټول كړم)

د نورمالفورم د څېړلولپاره كله كله لاندې خويونه (قاعدې) ګټورې دي، كومې چې په نورمالفورم كې د $V \ni 0,1$ « ځايونو يا ايښوونو » له لارې لاسته راوړل كيږي. څكه چې د بيلګي په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$ يواځې د n -ګونو لپاره له $V \ni 0 , 1$ نا مساوي 0 دي(په ريښتونی مساوي په 1)، په كوم كې ، چې $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$ د $i_j = -1$ لپاره دی، يعنی د دې n–ګونی

. $(1^{i_1} , 1^{i_2} ,\ldots, 1^{i_n})$ لپاره

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1\ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولينوم فنکشن $P \in A_n(V)$ ديسيونکتيو نورمالفورم وي، نو د $1^1 = 1$, $1^{-1} = 1' = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1\ldots i_n} = P(1^{i_1},\ldots,1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1,\ldots,i_n)$ لپاره.

نو د بيلګي په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1),\quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړيکو وروسته د P د ديسيونکتيو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسيا کوي، که 2^n د P فنکشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپيدا کړو.

ليدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P ديسيونکتيو نورمالفورم په لاندې توګه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د ديسيونکتيو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتيجه

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \dots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي،
نو د $1 = 0' = 0^{-1}$, $0^1 = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \dots, 0^{i_n})$$

د بیلګي په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چې موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون(تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً ټول الجبرونه پای دي.
که V ټیک $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چې پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چې V^n ټیك m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چې سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه لاس ته راځي، ځکه چې د دلته 2^n ځلوونې یا ضریبونه $a_{i_1 \dots i_n}$

په خوبنه د m توکو سره (له V څخه) ځاينيونکی يا ځاي په ځاي کيدی شي. که $m > 2$ وي، نو په ټوليزه توګه کم پولينومفنکشنونه موجود دي نسبت و څيرونو ته. که $m = 2$ وي، کوم چې د کاروني يا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بيا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ جمله: که $B = \{0,1\}$ دوه توکيزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځايز د بول فنکشن ، يو د بول پولينومفنکشن په څير انځورېږدی.

اوس د ديسيونکيو نورمالفورم د راپيداکولو تګلار و يوه پولينومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کيږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپليمنت ' جوړښتونه تړلي x_i ته راوړل کيږي، همداسې ثابتو ته راوړل کيږي.
۲ – د دسيتريبوتيو قانونه کاروني يا استعمال سره سم P د غوڅيو ټولنې ته راوړل کيږي. په دې فورم کې په ټوليزه توګه ځنی «زياتووني» (د x_i او x_i' غوڅې دي) يو څو x_i ورکيږي، مګر د هر i لپاره په يوه زياتووني کې

زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرګندیږي.

۳ – که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i ورك شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتیږي(دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ – په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمالیږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابرو زیاتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارونی لاندې) ، که چیرې ممکن دا ورك زیاتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بنه اړونی یا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

۴ . ۲ . ۷ بیلګه : P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

لوستونکي دې دا نتیجی د قاعدې ۱ سره و ازمایي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وڅیړل شي، کوم چی همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ سره پرېښوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ سره پرېښوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپیلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی لیکوږ دی)
ديسيونکتيو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د
ارزښت سره کوم کونيونکتيو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلګه: د لته دې ۳ -ځایز فنکشن

$P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P ديسيونکتيو نورمالفورم د
لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

ديسيونکتيو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره يو
زياتوونی خوندي لري، په کوم کی چی x_i ولاړ دی ،

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n– ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي$(x_i = 1)$ نو بیا « شرطونه پوره دی » بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دې پوره» بلل کیږي) ، نو په دې توګه دیسیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یوجوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چې 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دې او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کی چې x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځاي په ځاي وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n – ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

ده، د کومو لاندې چی 0 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي : $x_3' \cup x_2 \cup x_1'$ په دې مانا دې، چی x_1 یا x_2 پوره دي او یا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کی د $A_n(B)$ څخه دیوه د مخه ورکړ شوي پولینوم فنکشن P کمپلیمنت P' څنګه ټاکل کیږي؟ د ورکړ شوې قانونمندی له مخی د دې لپاره په ساده توګه P په یوه دیسیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو P' ټیك د غوڅیو ټولنه ده، کومه چی د P په نورمالفورم کی نه رامنځ ته کیږي (یعنی 0 ځلوونی لري). په ورته توګه د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه : د اخرنی بیلګی څخه د پولینوم فنکشن P لپاره د P' دیسیونکتیونورمالفورم په لاندې توګه ورکړ شویدی

$$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$$

پام دې وي، چی $(p')' = P$ دی او د دېمورګان قانون له مخی د یوه دیسیونکتیونورمالفورم کمپلیمنت کونیو- نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چی د د دیسیونکتیو

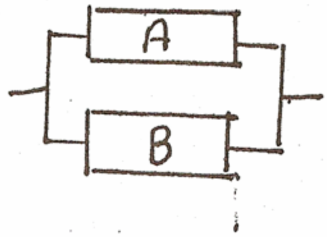
نورمالفورم 'P څخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا برېښنا جیریان الجبر

په برېښنايي یا برقي سرکیټونو (Schlatkreise (En. circuit (یا برېښناجیریانکړی یا په ساده توګه :برېښنادوران) کې سویچ د برېښنا اړیکو یا برېښنا تړونونو کې، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر څېړنې لاندې نیسو، کوم چې په بند حالت کې برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کېدی شي بند یا واز وي، یعنې تېك دوه ازښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیمو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیمو، داسې چې 0 په دې مانا دی ، چې«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چې« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کېږي.

کېدی شي، چې سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکټ ته سره

یوځای کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټړي circuitary دی، چې د پایډیرو غبرګسرکیټړیو یا همداسې سیریالسرکیټړیو په څیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چې«واز» یا « بند یعنې تړلی» کېدی شي.



څېره

که A او B دوه سويچونه وي، نو غبرګسرکيټېري، لکه په پورته ځېره کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د A v B سره په نخښنه کيږي.

په ځرګند ډول A v B يو سويچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه يو له دې سويچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو- يچونه ارزښت 0 ولري. کيدی شی د سويچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکيټېري (يا شايد په انګريزي سرکيټ وبېل شي) داسی وليکل شي

$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$

کيدیٔ شي ، چی $A \vee B$ د يوځاي اآيښوول شوي سويچ په څير وکتل شي، چی دا د A او B په اړتيا يا په واك برقجريان بهيږي يا برق جايان لري او که يا نه بهيږي يا نه پرېږدي.

د A او B سويچونو زيريالسرکيټېري $A \wedge B$ د A او B يو بل پسی يعنی په پرلپسی توګه ايښوونی يا ځاي په ځاي کونی څخه منځ ته راځي، لکه په ځيره کی چی انځور شوي.

سرکيټ يا برېښنادوران $A \wedge B$ ټيك او ټيك هلته ارزښت1 لري، که دواړهٔ سويچونه ارزښت 1 ولري او په غير له دې ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$.

دلته هم $A \wedge B$ يو رايوځاي شوی سويچ دی.

ددې سره ترنی $A \vee B$ او $A \wedge B$ د سويچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي يا پوره کوي، لکه د ويناو لپاره د سمسوځ له پوهی ورسره بلده په $\vee$ او په $\wedge$ راوړل شوو

تړونونو کي. هلته د يوې وينا نه والی هم موجود دی.
که ۷ ، ۸ د سويچ ارزښتونو 1 , 0 په څير راونيسو، نوهغه
په باندې شميرقوانين د ۷ او ۸ ديوه بول الجبر لپاره .
په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپليمنت هم په واك کی لرو.
دا کليمي جوړونی د سويچ لپاره هم يوه موخه لري: د 'A
سره يو سويچ په نخښه کوو، کوم چی تل يو و A ته په څټ
ارزښت لري، د کوم سره، چی موږ په تخنيکي ريښتينوالی
يا رياليزه باندې ددې

څيره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشين له لارې) په غم کی نه
يو.'A د A نيگيشن يا نفي هم بلل کيږي. د سويچ ارزښت
لپاره دا دامانا لري، چی 0 = '1 , 1 = '0 . په دې توگه سويچ
ارزښتونه د عمليو يا کارونو۷، ۸ ، ' سره يو دوه توکيزه
بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ تعريف : يو زيريالغبرگ سرکيټېري دپای ډيرو
سويچونو څخه جوړيږي د پای زيات فورمال عمليو ، ، '
د کارونی يا استعمال سره. په داسی سرکيټ کی دوه سويچونه،
کوم چی همغه د سويچ ارزښتونه لري په همغه يا برابر سومبول
سره په نخښه کيږي.
ټيك داسی تعريفولی شو: هر سويچ يو زيريالغبرگ سرکيټېري
جوړوي. که S_1 ، S_2 زيريالغبرگ سرکيټېرونه وي(يعنی سره

رایوځای اینبوولي سرکیټونه (په سرکیټري یا سویچونه) ،
نو $S_1 \wedge S_2$, $S_1 \vee S_2$ او S' هم زیریالغبرګ سرکیټرونه دي.
هر زیریالغبرګ سرکیټري په تولیزه توګه زیات پیچلی جوړ
شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیونی څخه په
واکوالی کی یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی
(ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه
سرکیټونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي،
چې موږ لنډ له سرکیټونو یا سرکیټریو څخه وغږیږو.
د یوه زیریالغبرګ سکریټري S د سویچ د هر ځای نیونی
لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت تول سرکیټري لاس ته
راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ برېښنا بهیږي
(جریان لری) او که نه. پس وي دي $A_1 , \ldots, A_n$ د پورته
تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,\ldots,A_n)$ سویچونه ، د
کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو
$A_1,\ldots,A_n$ هر ځاینیونه د $0, 1$ د یو n–ګونو سره برابر
دی او د S له لارې یا د S سره به دا n–ګونی یا 0 او
یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه
سرکیټ S یو n–ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د
بول په الجبر $B=\{0,1\}$, $f_S : B^n \longrightarrow B$ تعریفوي(دې ته
دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته ، چې دا د
لاتین تورو لیکنی له کیڼ وښی لوز ته لوستل کیږي، په دې
ګران لوستونکی پوهیږي، چې یادونی ته اړتیا نه شته،خو
زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکی

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنګه کیدی شي، چی سرکیټ په $A_n(B)$ کی د سرکیټري لپاره د $\cap$، $\cup$، $'$ کارونی یا عملیي وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دي S,T دوه سرکیټونه وي، له سویچونو A_i څخه د سویچفنکشنونو f_S , f_T سره، نو کیدی شي، چی له S , T څخه هم زیریالسرکیټري $S \wedge T$ او هم یو غبرګسرکیټري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و یوګونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسی لکه یو ګوني سویچونه. دا نو اوس روښانه ده، چی $f_S \cap f_T$ د $S \wedge T$ سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سویچفنکشن دی. بالاخره f_S' سویچفنکشن دی و سرکیټ S' ته، کوم چی تل و S ته مخامخ- یا په بل عبارت په خټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرګ سرکیټري S او T و همغو سویچونو $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چی که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کارونی د لیدټکي څخه دا تعریف موخور (همدفمند) دی، ځکه چی لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعني د سرکیټ ځانښیونی ته ده او کم د هغه دننني جوړښت ته.

د سرکیټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کی روښانه شوی اړیکی په رښتیني برابرارزښته اړیکی دی، په داسی

حال کی چی دې برابرارزښتېولګی پورې تړل سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولګی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره.
له دې سره د سرکیټ څېړنه د بول الجبر په څېړنه بیرته واړول شوه او په دې توګه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.
په سرکیټړي تیوری(Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توګه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:
اول) د ورکړ شوي سرکیټړي شننه یا تحلیل او
دوم) د پلټونکی سرکیټړي سینتیز Synthese .
په شننیز حالت کی یو سرکیټړي S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیداي شي یا غوښتل کیږي.
د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1;A_2,\dots,A_n$ د سرکیټړي S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1,A_2,\dots,A_n$ کی (د $x_1,x_2,\dots,x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توګه یا په ورته ډول د S جوړونه په $\wedge,\vee$ ' سره له $A_1,A_2,\dots,A_n$ څخه .
له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توګه لوستل کیږي.
۴ . ۳ . ۳ بیلګه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A . B . C سره مخ ته روت وي، څره دي وکتل شي. به

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

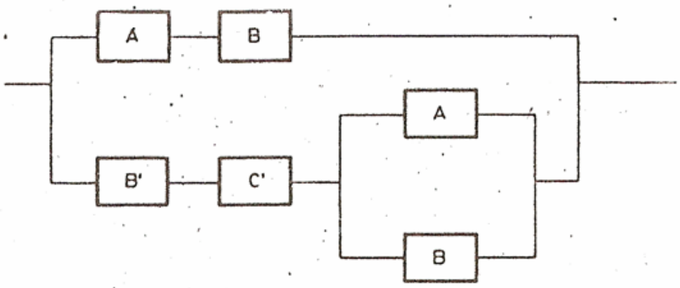
$$(A\wedge B)\vee(B'\wedge C'\wedge(A\vee B))$$

دا په دیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$$(A\wedge B)\vee(A\wedge B'\wedge C')\vee(B\wedge B'\wedge C)$$

$$(A\wedge B\wedge(C\vee C'))\vee(A\wedge B'\wedge C')$$

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C')\vee(A\wedge B'\wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

تیګ د دې په څټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده.د لته دې د سویچفن- کشن fورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن ربښتیاکیدونکی

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي، چی د دیسیونکتیو نور- مالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې رامنځته کیدونکی ګټون هر د سویچ په ټولیزه توګه نازغموړ یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغهٔ د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قمت یا مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګټون تاثیر نه لري، بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړښتښول، د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چا- لانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

يو څو بنسټيزې کليمې

لومړى موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټيزو کليمو په څېړلو پيل وکړو، چې موږ دا په نامه ټوليز الجبر، يا لنډ الجبر بولو. برسيره پردې دلته درې مهمې جوړښتيز کليمې پېژندل کيږي يا معرفي کيږي، چې د هغو په مرسته بيا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه يا کوچنى) الجبرونه ګټل کيدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بيا هومومورفي څيره کونى او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروايېنځ اړيکو له فاکتوره کوونى څخه لاس ته راوړل کيږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بيلګې لپاره ، لومړى، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

درس کی مو چی گوته ورته ونیوله ، گروپونه څیړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د گروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلگه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: گروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، گنډنی یا عملیې د تعریف سره. (دا په دې مانا، چې یوه څیره کونه له $G \times G$ څخه په G کي د $x.y <-- (x,y)$ سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کي، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) $x,y,z \in G$ (لپاره باورل ري):

(اسوشیاتیو قانون) $(x.y).z = x.(y.z)$

دا اسوشیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

$$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z)$$

(یو) $e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چی باور لري) :

$e.x = x.e = x$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسی په نخښولیکلی شو:

$$\exists\, e \in G, \forall x \in G : e.x = x.e = x$$

(د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چی باور لري:

$x.x' = x'.x$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښو داسی لیکلی شو:

$$\forall x \in G \quad \exists\, x' \in G : x.x' = x'x = e$$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسی لو

.

ستل کېږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په کې G پروت دی ، یو توکی 'x له G څخه موجود دی، د x.x' = e سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې x.x' = e باور لري ». دلته e د دومی قاعدې سره ورکړ شوی ناپیلی توکی دی(یواځنی ټاکلی) . ناپیلی په شمیرپوهنه کې د یوې عملیې یا کاروني یا نښلونی په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه عملیه کی همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانی د همغی عملیې سره د یوه توکی سره په نښلونه یا عملیه کی راوستلو سره ور سره نښلووني توکي کی بدلون نه راولی.

په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي ، چې د بیلګې په توګه کړی هم تعرفي شي، چې دې کار دمخه صورت نیولی، د کوم لپاره، چې په هر حالت کی دوه عملیې په کار دي(زیاتون او ځل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټيزو کلیمو فکر رامنځته کیږي: د یوه « ټولیز یا عمومي الجبر » لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې کورنی سره، کوم چی تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي.

دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام ور تعریفونو کي راټول شي.

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ګڼ $n \in N \setminus \{0\}$ او هر ډېري A لپاره یوه څېره ونه $f : A^n \to A$ شته، کومه چې n– ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n – ځا- یزو عملیو ډېرې په A د $Op_n(A)$ سره په نخښه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیې پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیې لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چې A^n دې د ټولو g څېره کو نو یا څېره ونو

$$g : \{0,1,2,\ldots, n-1\} \to A$$

ډېرې وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g : \emptyset \to A .$$

مګر ګورو، چې یواځې یوه څیرونه g موجود ده، یانې په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چې هره څیرونه $g : \emptyset \to A$ په کره نیونه د جوړو یو ډېرې دی، دا په نامه

$$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه
.

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده : $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$.
دا څیرونی همداسی ټیك د A توکی په ګوته کوي، ځکه چی f د $f(\emptyset) \in A$ توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د هر $a \in A$ (بیایی لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(\emptyset) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکی ثابتی هم بلل کیږي، او د f_a په ځای په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه (f , ß) (دلته دا f باید لوي وی ، خو زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، ځکه چی په کمپیوتر کی د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چی f یو ډیری دی ، چی توکي یی د عملیو سومبولونه دي او $ß : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چی هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځاي چی دا یی نیسی) ß(f) باندې تنظیم وي. دلته f یو د ß(f) – ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د (F, ß) تیوپ یو تنظیم شوې جوړه $A = (A, F)$ ده ، کومه چی له ډیري A او یوې
.

په A د عملیو کورنۍ $F(f \mid f \in f)$ څخه منځ ته راغلی یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f \in f$ په $\beta(f)$ – ځایز عملیې $f \in Op(A)$ باندې تنظیم شي. ډیری A د A بنسټېزې بلل کیږي او د F توکی د A بنسټیزې عملیي بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادو نه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسې نور، لږ پیچلی ښکاریږي، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا خیال کي راولو، چې A یو ډیری او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پاې ډیری وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دې ګکیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کی روښانه شي.

ب) په دې کتاب کی تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو. چې په دې توګه د کلاسیکي یا ټولګیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یې

.

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا ، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ $ß$ څخه غبرېږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عملیي سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځي پای ډیرې بنستېیزې کارونې یا عملې ولري، د بیلګې په توګه $F = (f_1 , f_2 ,...,f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1,...,f_k)$ د (A, F) په ځای لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1 ,..., ß_k)$ بنه نوټ کوو، چیرته چې $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کې بنستېیزې کارونې یا عملیې د f_A سره نه په نخښنه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا ، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل ګروپ کې زیاتون زیات د نخښې « + » سره په نخښنه کیږي. دا امکانات، چې دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دي.

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کی مو چی الجبر تعریف کړ، هغی ته ورته ګروپ د یو الجبر $(G, .)$ په څیر د تیوپ (2) تعریفوو (ټیك: د یوه الجبر، چی تیوپ یی $(f, ß)$ د $f = \{.\}$ سره دی او $ß(.) = 2$)، چی هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالك ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعریف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یی تعریف بل ډول وو و دې اوسنی تعریف ته). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر $G(., ^{-1}, e)$ دی، د تیوپ $(2, 1, 0)$ ، چی لاندې اکسیومونه پوره کړي:

ګ ۱ : $(x.y).z = x.(y.z)$ (اسوشیاتیو قانون)

ګ ۲ : $x . e = e . x = x$ (ناپیلی یا بي تاثیره توکی)

ګ ۳ : $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کی نغښتی ده، چی د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پیښیږي او په څټ توکی په ساده توره د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندې

ده». که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبوي.

سړی کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګي په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول ، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د $p(x,y,z) = x.y.z$ په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چي یو ګروپ $(G, ., ^{-1}, e)$ ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : $x . y = y . x$ (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی +, - , 0 د . , e په ځای کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

ب) یو الجبر (G , .) د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي.
یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیرې، چې په هغه کې یو دوه ځایزه کارونه یا عمیله کارول شوي وي، په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کې ګروپوئید هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید (H , .) نیمګروپ بلل کیږي، که (H , .) برابرون ګ ۱ پوره کړي..

ت) یو الجبر (M , . , e) د تیوپ (2 , 0)، مونوئید بلل کیږي، که (M , .) یو نیم ګروپ وي او برسیره پر دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید (Q , .) کوازیګروپ بلل کیږي، که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیروني د Q په Q باندې پرموتیشنونه وي، یعنې:

$x \longrightarrow a \cdot x$ (د a سره کیڼ ځلوونه)
$x \longrightarrow x \cdot a$ (د a سره ښې ځلوونه)

زیات وخت د کاروني یا مروج دي، چې کوازیګروپ

د تیوپ (2,2,2) الجبر (Q , . , \ , /) په څېر تعریف کړو، کوم چې لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

$$
\begin{array}{ll}
(Q1) & x\backslash(x.y) = y \;, \\
(Q2) & (x.y) / y = x \;, \\
(Q3) & x.(x\backslash y) = y \;, \\
(Q4) & (x/y).y = x
\end{array}
$$

یا دونه: ګورو چې / او \ د ښي او کیڼې ویشنې په څیر کارول شوي(دا سي، نخښې ، چې په هر بل ځاي کې په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کې چې (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چې برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شي چې لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړۍ: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړۍ بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

قوانین باور ولري:

د ۱) $x . (y + z)) x.y+x.z$

د ۲) $(x + y) z = x . z + y . z$

پام دې وي: د دې لپاره، چی نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کیږي، چی ټکیشمیرنه له کرښشمیرنی له مخه ده، دا په دې مانا، چی لمړی د ټکو شمیرنه بدنیز (تنیز) کیږي یا صورت نیسي لکه ځل او ویش او ورپسی بیا هغه چی کرښشمیرنه وي لکه زیاتون او کمون.

یوه اونیتار کړی ($R,+,-,0,.,1$) unitärer Ring (دا په دې مانا چی دا یوه کړی ده د یوي سره)، یو الجبر دی ، چیرته چی ($R,+,-,0,.$) یوه کړی ده او 1 یو ورزیات شوی صفر ځائیزه کارونه یا عملیه ده، کوم چی مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعآ دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن یا بدن) یو اونیتارکړی ($K , + , - , . , 0 , 1$) یو تن یا بدن بلل کیږي (انکریزي field) که ($K , \setminus ,\{0\}, .$) یو ابل ګروپ وي ، د ناپیلي توکی 1 سره. دا راته نزدې پرته ده، چی اوس که پر دې په ورزیاته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$

(په ($K \setminus \{0\}, .$) کی په ځتې څیرونه) یوه یوځائیزه کارونه یا

عملیه یا اپریشن وګڼو. دا چي 0^{-1} تعریف نه دی، نو ($K,+,-,0,.,^{-1},1$) به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي. د ټوټه الجبر په تیوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیي یا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا ($R,+,-,0,.$) دې یوه کړی وي. یو الجبر $(M,+,-,0,R)$ د $(2,1,0,(1)_{r\in R})$ تیوپ R–مودول بلل کیږي(یا مودول په کړی R باندې)، که $(M,+,-,0)$ یو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r,s \in R$ لپاره لاندې مساوات باور ولري:

م ۱) $r(x+y) = r(x) + r(y)$

م ۲) $(r+s)(x) = r(x) + s(x)$

م ۳) $(r.s)(x) = r(s(x))$

په یوه اوښتیارکړی $(R,+,-,.,1)$ باندې مودول څخه دا د لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

م ۴) $1(x) = x$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایډیرو عملیو سره(طبعاً که R ناپای وي) . برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی، ځکه چی سومبولونه $+ , - , 0$ په دوه مختلفو ماناو رامنځ
،

ته کیږي: یو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عملیي په څیر او بیا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څیر. دا پرابلم په ساده توګه کیدی شي ، چې راوباسل شي، د بیلګي په توګه په کوم کي $(M , +_M , -_M , 0)$ او $(R ,+_R , -_R , 0)$ په څیر لیکل کیږي. یواځې د اسانتیا له خاطره ضرور ښکاریږي، چې د ابل ګروپونو باندې په همغه یوون د + ,- , 0 سره پاتې شو،

خ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) یو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) مور K –وکتورهوا (یا وکتورهوا یا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) ترون(ترونونه) (Verband(english: lattice)) یو لاتیس یا ترون یو الجبر ($\wedge$، $\vee$، L) دی، د تیوپ (2,2)، کوم چې لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x\vee y = y\vee x \ , x\wedge y = y\wedge x$ کموتاتیو قانون

ل ۲) $x\wedge (y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$,

$x\vee (y \vee z) = (x\vee y)\vee z$

(اسوځیاتیو قانون)

ل۳) $x \vee x = x , x\wedge x = x$ (ایدمپوتینځ)

ل ۴) $x\vee(x\wedge y)=x,\ \ x\wedge(x\vee y)=x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادې " $x\vee y=z$ " او په همدېتوګه " $x\wedge y=z$ " داسې لوستل کیږي x له y سره تړلی مساوي په z دی، همداسې x غوځ په y مساوي په z دی.

یو رابند تړون یا لاتیس (یا تړون د 0 او 1 سره) یو الجبر $(L,\vee,\wedge,0,1)$ ددی د تیوپ $(2,2,0,0)$, داسې چې $(L,\vee,\wedge)$ یو تړون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x\wedge 0=0,\ \ \ x\vee 1=1$

تړونونه به په ځانګړي توګه په ورپسې برخو کې پوره وڅېړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کې و کښل شي)

د) نیم تړون (semilattice) یو نیم ګروپ $(S,.)$ نیمتړون یا سیمیلاتیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په دې مانا، چې که مساوات ګ ۴ او همداسې لاندې باور ولري:

س ۱) $x\,.\,x=x$ ایدمپوتنځ (Idempotenz)

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي. د نیم تړو ( )

ذ) دیستریبوتیو تړون یا – لاټیس) یو لاټیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کې چې دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

د ل ۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

د ل ۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

کیدی شي ، چې د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او دل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسی دي. چې له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر : یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دسیتریبوتیو لاټیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

ب ۱) $x \wedge x' = 0 , x \vee x' = 1$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګې مو، چې دلته راوړلی، د هغو څخه به ځنی وروسته پوره ترڅیړنی لاندې ونیول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري دیسځیپلین مهمه موخه داده، چې پوره بیلګي ترې لاس ته راوړل شي. زیات وخت داسی کیږي، چې د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کی به یو متود یا یوه لار وپیژندل شي یا معرفي شي، کومه چې د ټولګیزو کلیمو څخه لکه لاندېګروپ، لاندېوکتورفضا، لاندېتړون په لور لوریزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعریف : $A = (A,F)$ دې یو د تیوپ f الجبروي، او برخېیری $B \subset A$ دې یو د A برخېیری وي، د خویونو سره ، چې

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n -ګونو $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چې $ß(f) = n$ ځای په ځاي کیږي). الجبر $B = (B, (f \mid f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کیږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بندیزنو په څیر په ډیري B تعریف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره لیکو $B \leq A$.

د $\text{Sub}\, A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټهیریو.

ډیری په نخښنه کیږي، دا په دې مانا، چې $\{A \leq B \mid B\}$ =A
(انګر: Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخډیری $B \subset A$ ټیك هلته د یوه االجبر $A = (A, F)$ لاندې الجبر بنسټډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ عملیو سره رابنده، راتړلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه ټیکه توګه زیات داسی لیکل کیږي $B = (B,F)$ ،
داپه دې مانا، چې د B د بنسټعملیو ډیری بیرته په F سره په نخښنه کیږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسی د f_B لپاره هم په ساده توګه د کارونی سومبول په f سره ښوول کیږي یا بهتره، نخښنون کیږي.
د ګروپ په بیلګه روښانه کیږي، چې په لاندې الجبر کی په هغه تیوپ ګنړل کیږي ،کوم چې ټاکل شوی دی: که ګروپ د یوه الجبر په څیر، چې تیوپ یی (0 , 1 , 2) دی، راوړل شي یا وګنړل شي، لکه په مخ ته تیره بیلګه کیٔ نو لاندې الجبرونه په ټولګیزه موخه لاندېګروپونه دي. که چیرې ګروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راوړل شي یا په پام کی ونیول شي، د ګروپ سره ٔچی یواځنی عملیه یا کارونه ده، ممکن دي، چی لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چی لاندې ګروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه ،

لاس ته راځي، که ګروپ د یوه الجبر ، په څیر د

$$p(x, y, z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چې دا یې یواځنۍ عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوځیجوړښت په مخامخ رابند دی. ټیك یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in \text{Sub } A$

ب) $B \in \text{Sub}A$ د هر ناتشه‌یري $B \subseteq \text{Sub } A$ لپاره،

یادونه : دا افاده " $\cap B$ " د $\bigcap_{B \in B} B$ لپاره ځاې په ځاې ده او همداسې د $\bigcap\{B \mid B \in B\}$ لپاره .

اوبې : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونې لپاره دې وي:
$B \subseteq \text{Sub}A$, $B \neq \varnothing$. دا د ښوولو دی، چې $\cap B$
د A د هرې عملیې f لپاره رابند دی یا راتړلی دی.
وي دې $n = ß(f)$. له B $\bigcap$ $b_1, \ldots, b_n \in$ څخه
$b_1, \ldots, b_n \in B$ لاس ته راځي د ټولو $B \in B$ لپاره .
دا چې ټولې $B \in B$ څخه د لاندې الجبرونو بنسته‌یري
.

دي، نو باور لري $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in \mathcal{B}$
لپاره . له دې څخه لاس ته راځي $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم ديوې جملې په څير ده، خو له جملي څخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخېيري $X \subseteq A$ لپاره دی

$$<X> = \bigcap \{ B) \in \mathrm{Sub}\,A \mid B \supseteq X \}$$

د A د لاندې الجبر ېستېيری، دا په دې مانا چی $<X> \in \mathrm{Sub}A$. په څرګنده توګه $<X>$ د A د لاندېالجبرونو کوچنی بنسټېيری دی، کوم چی X خوندې لري (دا د X څخه راجوړه يا توليد شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډير وخت $<X>_A$ د $<X>$ په ځاي ليکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پاي ډيري $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ لپاره .

د بيلګي په توګه څيوکليکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نيسو (د ګڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شميرل کيږي): باور لري

$$<0> = \{0\} \quad , <1> = Z_6 \ , <2> = \{0, 1, 4\},$$
$$<3> = \{0, 3\} \ , <2, 3> = Z_6$$

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې يو الجبر وي . د برخېزيريو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزيويتيت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ايدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبې سملاسى د مخ ته تيرې عملي $\langle\ \rangle$ له تعريف څخه لاس ته راځي. پاى

بنستېزيرى $\langle X \rangle$ په ريښتيا چې د X څخه توليد شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د يوه توليدپروسي سره: د هر برخېزيري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (n = ß(f))\}$$

وريسى دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

برخڅېري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$< X > = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$$

اوبی : « $\supseteq$ »: وي دې $< X > \supseteq x = E^{0}(X)$.
نیونه دې وي، چی $E^{k}(X) \supseteq < X >$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چی په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$a \in < X >$ (
نو $f \in F, a_1, \ldots, a_n \in E^{k}(X)$
موجود دی ، د $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ سره .
د $E^{k}(X) \supseteq < X >$ له امله او دا چی $< X >$ د یوه لاندې
الجبر بنسټ ډیري دي، لاس ته راځي $a \in < X >$. دا
ښایي $E^{k+1}(X) \supseteq < X >$، او په k باندي د ایندکشن
سره لاس ته راکوي $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X) \supseteq < X >$.

« $\subseteq$ »: یواځي دې وښوول شي ، چی $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټډیری دی، دا په دې ما ، چی د F
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راټرلی ده. وي دې:

$$f \in F , n = ß(n) , a_1 , \ldots , a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X .$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ لپاره په لاندې توګه یو $\{0\} \cup k(i) \in N$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی. وي دې $m = \max \{(k(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. نو باور لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره. په دې پسې لاس ته راځي

$$f(a_1 , \ldots , a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د f لاندې رابند یا تړلی دی ~~شي~~ پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چې f په همغه الجبر کې باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کې هم پام وي، چې ډېر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کې په کار راځي، چې په خپل ځای کې به وکتل شي.

د ډیریسیستم Sub A یوائې دې ته همدا دلته ګوته نیسم، چې د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوبنسټیزې په

پیدا ښتي یا طبیعي ډول یو تړون یا تړنه یا لاټیس جوړوي:
د $B , C \in A$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶ جمله :د هر الجبر A لپاره $(\wedge , \vee , \text{Sub } A)$
یو تړون دی(د A د لاندې الجبرونو تړون یا تړاو یا تړون)
اوبی دې تمرین وي: د لته د تړون اکسیومونه له ل۱ تر
ل۴ پورې ازمائیل کیږي.

۵ . ۳ ایزومورفیزم ، هومومورفیزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چې د یوه الجبر ذهني خویونه تغیر نه خوري،
که چیرې د الجبر د سټډیري د توکو نومونه بدل شي ، یا بل
ډول ونومول شي. دا پام یا فکر مو تړلی د ایزمورفي کلیمي
ته لارښودوي .
دوه الجبره یو بل سره ایزمورف بلل کیږي، که چیرې یو الجبر
له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته
راوړی شو:

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د **همغه تیوپ** f، او $u : A \longrightarrow B$ دې یو **بیجکتیوه** bijektive **ځیرونه** وي. نون د A ایزومورفیزم په B **بلل** کیږي، که د ټولو $f \in f$ لپاره او ټولو$(n = ß(f)$,$a_1, \ldots, a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$uf_A(a, \ldots, a) = f_B(ua, \ldots, ua) \quad \text{(هوم)}$$

دا **الجبرونه** A او B بیا (یو د **بل سره**) **ایزومورف بلل** کیږي، په نخښونه یې $B \cong A$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, ., ^{-1}, e)$ او $(e, ^{-1}, ., H)$ ټیک هلته ایزمورف دي، که یوه بیجکتیو ځیرونه $u : A \longrightarrow B$ موجود وي کوم چې د ټولو $a, b \in G$ لپاره لاندې شرطونه پوره کوي.

$$\begin{array}{ll} (i) & u(a.b) = u(a).u(b) \\ (ii) & u(e) = e, \\ (iii) & u(a^{-1}) = u(a)^{-1} \end{array}$$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا اخوا دي، ځکه چې دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(Z_7 \setminus \{0\}, ., \ ,1)$ دې د تن $(Z_7, +, -, 0, 1)$
یو ځلیزګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_7 \setminus \{0\}, ., ^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزمورفیزم د A په B
وي، نو په څټ څیرونه u^{-1} د B یو ایزمورفیزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي
و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځای په ځای شي.
وي دې

$f \in f, b_1, \ldots, b_n \in B$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$$\bar{u}^1(f_B(b,\ldots,b) = u^{-1}f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$$

$= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)]$ ځکه چي u ایزومرفیزم

$= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n))$ پاي

پای

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو، چی $u: A \longrightarrow B$ بیجکتیو دی، نو د هومومورفیزم ټولیزي کلیمی ته راځو. پس هومومورفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پوري لکه په ایزمورفیزم کی)، مګر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دي د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه څیرونه $u: A \longrightarrow B$ هومو مورفیزم د A وB ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1, \ldots, a_n \in A$ $(n = \beta(n))$ لپاره هومومورفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دي.

د « u یو د A هومومورفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u: A \longrightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملې څخه همغه ورسره بلد د هومومورفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیك په همدې توګه، لکه د ګرووپ هومومورفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو- مومورفیزم لپاره لاندې نخښونې معمول دي: سورجکتیو هومومو- رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که $u : A \to B$ یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هومومورفه څیره بلل کیږي. (په نخښونه یې $uA = B$) . اینجکتیو هومومور- فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا نغړنه (په کی) بهتره یی رانغړنه(زه یی خوندیونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکې پادونه وګورئ) د یوه الجبر A هومومورفیزم $u: A \to A$ یانی هومورفیزم په خپل ځان ایندومورفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو- مورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چی بیجکتیو) دی، د A اوتومورفیزم Automorphismus بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری End A په پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د ټولو اوتومورفیزمونو (Auotomorpihismen (Aut A یو ګروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه ویناوو ته اړتیا پیښیږي، چی اوبی یی ګرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کتمتې څیرونه
یانی $id\,A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1 : A \longrightarrow B$ او $u_2 : B \longrightarrow A$ هومومورفیزمونه
وي، نو یو په بل پسی راوړنه یا په بل پسی نښلونه $u_1 \circ u_2$
یی هم یو د A هومومورفیزم و C پسی دی.
د لهمخ ته تیرې جملی له امله د End A همداسی
د Aut A ډیري د کارونی یا عملی $\circ$ لاندې رابند یا راګیر
دی . د مخ ته تیرې جملی له امله Aut A تل دا ناپیلی
توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in Aut\,A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\,A$ لاس ته راځي،
یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره $(End\,A, \circ)$ یو
نیم ګروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمګروپ) ،
او $(Aut\,A, \circ, ^{-1}, id\,A)$ یو ګروپ دی (داسی په
نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)
لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواك راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغموړ دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u : A \longrightarrow B$ دې یو هومو–

مورفيزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in Sub\,A$ څخه لاس ته راځي $uU \in Sub\,B$

ب) له $V \in Sub\,B$ څخه لاس ته راځي $\bar{u}^1 V \in SubA$ (۲)

پ) د ټولو برخړيريو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$\langle uX \rangle = u \langle X \rangle$$

اوبی : الف) وي دې $f \in f, b_1 ..., b_n \in uU$ (چيرته چی، لکه چی ورسره بلديو، $\beta(f) = n$ ليکل کيږي) .

نو $a_1, ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1, ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$$f_B(b, \ldots, b) = f_B(ua, \ldots, ua)$$

دا چي u هومورفيزم $= uf_A(a, \ldots, a)$

د $U \in Sub\,A$ له امله $\in uU$

دا راته په ګوته کوي، چی

$$uU \in Sub\,B$$

ب) وي دي $f \in f, a^1, \ldots, a^n \in \bar{u}^1 V$. نو باور لري $ua^1, ..., ua^n \in V$.

له دې لاس ته راځي

دا چی u هومورفيزم $uf_A(a_1, \ldots, a_n) = f_B(ua_1, \ldots, ua_n)$

د $V \in Sub\,B$ له امله $\in V$

(۲) $u^{-1} \in \ldots$.

.

له دې املې سره باور لري $u^{-1}V \in (f_A(a_1, \ldots, a_n)$ او له دې

امله $(u^{-1}V \Rightarrow) \bar{u}V \in Sub\ A$

پ) E دې لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه وي. لمړی ښوول کیږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$ لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$ سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چې لاندې بڼه لري $f_B(uy_1, \ldots uy_n)$ ، د $f \in f, y_1, \ldots, y_n \in Y$ سره. همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی، د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چې لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \ldots, y_n)$$

دا چې u یو هومومورفیزم دی ، نو ښايي چې $E(uY) = uE(Y)$.

په k باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي،

چې $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي

$$<uX> = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = \quad uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)]$$

$$= u<X> \qquad \text{پای}$$

لکه د مخه مو، چې ګوته ورته ونیوله د الجبر بنسدیري uU د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوڅخه د

الجبر بنسټېږي $u^{-1}V$ د $u^{-1}V$ سره په نخښنه کيږي. کيدی شي ، همدا د مخه کيدی شي، چی زيات وکارول شي، که د يوه الجبر A هومومورفيزم (ايزومورفيزم) په يوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بيلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کيدی شي، چی $<u1> = u<1> = uZ_6 = Z_6 = <1>$. له دې امله يا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = id$ ($=idZ$) لاس ته راځي، او يا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -id$.

پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{ id, -id \}$$

په ورته توګه د $End(Z_6, +, -, 0)$ توکی هم ټاکل کيږي

لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونيوله اينجکتيو هومومور- فيزم $u : A \longrightarrow B$ خوندېونه هم بلل کيږي، د u سره A په B کی خوندې کيږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندېونه په کی روښانه شوه داسی پای کيږي:

يادونه : الف) د هرې خونديونی $u:A \longrightarrow B$ لپاره باور لري $uA \leq B$ او $uA = A$ دا په دې مانا ، چی uA يو و A ته ايزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د يو

اینکلوژنځیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B\ ,\ i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګروراینځ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړی تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګروراینځ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګروراینځ اړیکو او هوموموروفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپتیوري او همدا ډول کړیتیوري کی، کیدی شي، چی الجبرونه د کونګر- واینځ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشنونی پسی فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختټولګی د یوه ایکویوالنځ اړیکی «ایکویوالنځ ټولګی» جوړوي. دا

کتنه یا څیړنه د «کونګروانیڅ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخډیری $R \subseteq A^n$ یو په ډیري A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي. یو 2 –ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x , y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

اي ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتټي)

اي ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

اي ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$ (ترانزیتیویتټي)

د $(a , b) \in \Theta$ په ځای داسي هم لیکلی شو $a = b(\mathrm{mod}\ \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولوΘ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a\,\Theta\,b$ ، په دې توګه کیدی شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x\,\Theta\,y\,\Theta\,z$ څخه لاس ته $x\,\Theta\,z$ راځي. د هر ایکویوالنڅ اړیکو Θ لپاره د لاندې بڼی ډیری $[a]\Theta = \{x \in A \mid x\,\Theta\,a\}$ ایکوالنڅټولګی بل کیږي.

په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیك د Θ یوه ګونګروایڅټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ایکوالنتټولګیو ډیری په Eq A سره په نخښنه کوو (د ایکویوالنځټولګی الماني او انګریزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډیري A لپاره دوه ایکوالنځ اړیکی ∇_A او Δ_A په لاندې ډول لاس ته راځی

$$\nabla_A = A^2 = \nabla_A$$ (ټول اړیکی Allrelation)
(کتمتی یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)
$$\Delta_A = \{(a , a) \mid a \in A \} = \Delta A$$

خیره: ۱۰۱
په پورته ځیره کی په ډیري {1,2,3 } باندې ټول ایکوالنځ- اړیکی د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي(دا یو د Hasse-DiaGram هازېدیاګرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه د ایکویوالنځټولګي په بیرته ورکړه کی انځور ده.

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتش
د Eq A برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Eq}\,A$$

(لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو
سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبی : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیري A ایکویوالنخ اړیکې په طبیعي یا پیدایښتي
توګه یو لاټیس یا ترون جوړوي. یا ترونی جوړوی .
د ټولو $\Psi \in \mathrm{Eq}\,A$, Θ دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیري A لپاره ($\mathrm{EqA}, \vee, \wedge$)
یو ترون یا لاټیس دی (په A باندې د ایکوالنخ اړیکو ترون)
دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\Psi \vee \Theta$ په ټولیزه توګه لږ
مناسب دی ، که په ریښتیا $\Psi \vee \Theta$ شمیرو. د دې لپاره
کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو Θ_1, Θ_2 لپاره

تعریف شوی د اړیکو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x\, \Theta_1\, z\, \Theta_2\, y \}$$

وکارول شي یا استعمال شي. دا اړیکځل اسوشیاتیو دی
(د ي ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چی ډیر واره راوړل شوي نوکان
له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in Eq\, A$
لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots,$$

دا په دې مانا چی $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ **ټیك هلته باور لري**،
کله چی توکي $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ موجود وي،
د $a = c_1\, \Theta\, c_2\, \Psi\, c_3\, \Theta\, c_4 \ldots c_n = b$ سره.
اوبی یا ځل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چی اوبیونی
یا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته یو ایکویوالنت
اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی
نیول شوو اړیکوځل(اړیکځل) په $\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A/\Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنتټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A/Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکووالنځټو- لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.

خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر ځیرني لاندې ونیسو: $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$$\forall x \in G : x^{-1} N x = N$$ (د نومال پرویشوني شرتونه)

(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري......)

وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د ځنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په ځیر،دا په دې مانا چی د $G/\Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$ سره. نو کیدی

شي، چی په G/Θ_N باندې يو ګروپجوړخت يا ګروپسکترکچر $(G / \Theta_N , . , ^{-1} , e_N)$ د دې لاندې سره تعريف کړي

$$(aN) . (bN) = abN ,$$
$$(a N)^{-1} = a^{-1}N ,$$
$$eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چې وښوول شي، چې دا ډول تعريف شوی اپريشن يا کارونه کره تعريف ده. د بيلګي په توګه د ځل . لپاره ښوول کيدی شي، چې له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کيدی شی، چې د نورما پرويشوني شرايطو سره ساده وشميرل شي. دلته ويل کيږي، چې Θ_N او . يوله بل سره زغموږ دي. همداسې په ټوليزه توګه تعريفيږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعريف: A دې يو ډيری وي او $\Theta \in Eq\ A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f د زغموږ بلل کيږي، که د ټول $a_1 , a_2 , ..., a_n , b_1 , ...,b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta\ b_1 , ... , a_n \Theta\ b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n) \Theta f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $A = (A,F)$ په الجبر $\Theta \in Eq\ A$ يو کونګرو-اينځ اړيکه بلل کيږي، که Θ د ټولو f سره زغموږ وي.

په A د ټولو کونګورنیخ اړیکو ډېرۍ په Con A سره په نخښنه کیږي یا نخښوون کیږي.
(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګی

الف) په هر ډیري A باندې ثابتی عملیي یا کارونی
$f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ او id_A کتمټ څیرونی
د ټولو $\Theta \in$ Con A سره زغمور دي. له دې امله د
پریوستونڅیرونی (المانی او انګریزي
(Projektionsabbidung or projections mapping یا
-عملیي باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i (x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چی دا پورته ډول څیرونه د
پریوستونڅیرونی Projektionsabbildung تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in$ Con A باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چی د Δ_A او ∇_A څخه بل کونګر-واینخ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګي په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A) ساده دی:

$$\mathrm{Con}(A,Op(A)) = \{ \Delta_A, \nabla_A \}$$

پ) باور لري

$$Con(A\ ,\ \emptyset) = Eq\ A$$

کیدی شي ، چې گونگروواینخ اړیکې، د زغموالی له لاري، د ځانگړو یوځایزو عملیو سره کرکتر.یزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A,F) دې یو الجبر وي. یوه څیرونه د بڼې

$$x \longrightarrow f(a_1,, a ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځایز) او $a_1, ..., a_{i.1}, a_{i+1}, ..., a_n \in A$ سره د (A, F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A, F) لپاره باور لري: $\Theta \in Eq\ A$ ټیك او ټیك هلته په $f(A, F)$ باندې یو کونگرواینخ اړیکه ده، که Θ د (A, F) د ټولو ترانسلا- یشنونو سره زغمور وي.

اوبی : دا چې هر $\Theta \in Con(A, F)$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور دی، دا سیده مخه لوستلود کونگرواینخ اړیکو څخه لاسته راځي. په څټ دې $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور وي. دا باید وښوول شي چې Θ د ټولو $f \in F$ سره زغمور دی. f دې یو n–ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري $a_1 \Theta b_1, ..., a_n \Theta b_n$. دا چې هر د f څخه گټلی

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځی

$$\begin{aligned} f(a_1,a_2,\ldots,a_n) \ \Theta \ & f(b_1,a_2,a_3\ldots,a_n) \\ \Theta \ & f(b_1,b_2, a_3 ,\ldots,a_n) \\ & \vdots \\ \Theta \ & f(b,b,\ldots,b) \end{aligned}$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې یو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in \mathrm{Con}\, A$ سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A / Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کېږي و کونګروراینخ Θ پسی یا کونګروراینخ Θ ته: د A / Θ بنسټ- ډیری یی همدا فاکتورډیری A / Θ دی ، دا په دې مانا چی د Θ د ټولوکونګروراینټټولګیو ډیری. د A / Θ بنسټکارونی یا عملي د A له کارونویا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta ,$$
$$f_{A/\Theta} ([a_1]\Theta,\ldots,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,\ldots,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي:
له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,\ldots,[a_n]\Theta=[b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,\ldots,a_1)] = [f_A(b_1,\ldots,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

د زغموالي خويونه دي).
الجبر $A / \Theta = (A / \Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بيرته د تيپ يا ډول f دی. زيات وخت په ساده توګه داسی $A = (A , F)$ او $A / \Theta = (A /\Theta,F)$ ليکل کيږي.

هومومورفيزم د کونګروانيڅ اړيکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي يا کلك تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعريف : $u : A \longrightarrow B$ دې يوه ځيرونه وي . نو د u زړی (المانی Kern) په لاندې توګه تعريف دی :

$$\mathrm{Ker}\, u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې يو ايکويوالنځ اړيکه ده . په دې برسيره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ ۱۶ جمله: د هر هومومورفيزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A يو کونګروانيڅ اړيکه ده، دا په دې مانا چی $\mathrm{Kern}\ u \in \mathrm{Con}\ A$ باور لري:

اوبی: f دې د A يو n–ځايز بنستيزه کارونه يا عمليه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n) \in \mathrm{Kern}\ u$$

دا په دې مانا چی $ua_1 = ub_1 , ..., ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځی:

$$uf(a_1,...,a_n) = f(ua_1,...,ua_n) = f(ub_1,...,ub_n) = uf(b_1,...,b_n)$$

له دې لاس ته راځی

$$(f(a_1,...,a_n) , f(b_1,...,b_n)) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چی Kern u یا د u زړی د ټولو بنسټیزو کارونو یا عملیو سره زغمور دی. ځ چ ښ و

د دې په څټ د کونګرویخ اړیکو څخه تل هومومورفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in \text{Eq } A$. نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta, \; P_\Theta (x) = [x] \Theta$$

د Θ کانوني څیرونه kanonische Abbildung بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې یو الجبر وي او $\Theta \in \text{Con } A$. نو کانوني څیرونه P_Θ یو سورجیکتیو هومومورفیزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/ \Theta$$

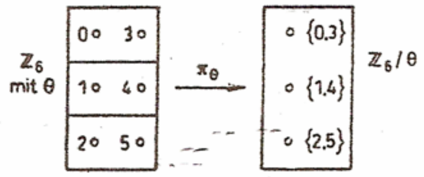
دی. (د Θ کانوني هومومورفیزم). باور لري: د P_Θ زړی یعنی $\mathrm{Kern}\ P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیرې جملې ویناوې ساده بڼوول کیږي. په تو- لیزه توگه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونگروواینځ اړیکی تیك د هومومورفیزم زړي دي د A پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بیلگه: Θ دې د گروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ یوه کونگرواینځ اړیکه وي، د کونگرواینځټولگیو $\{0,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,5\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta, +, -, 0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرگند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$، چیرته چی Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راگرزیدونکی گروپ دی د درې توکو سره. (وریسی څیره دې وکتل شي)



څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونگرواینځ اړیکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، یو-ترون یا لاتیس جوړوي. د دې د کتلو لپاره دا لاندې لاس ته راوړنې ته اړیو:

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دې یوالجبر وي او R دې د $\mathrm{Con}\, A$ یو ناتش برخېیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Con}\, A$$

اوبی یا ثبوت: f دې د A یو n–ځایزه بنستیزه کارونه یا عملیه وي، او وې دې: $(a_1,b_1),\ldots,(_na,b_n) \in R$، نو باور لري: $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \Theta$ او له دې امله

$$f(a_1,\ldots,a_n)\, \Theta\, f(b,\ldots,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

$$f(a_1,\ldots,a_n) \quad R\, f(b_1,\ldots,b_n) \qquad \text{پای}$$

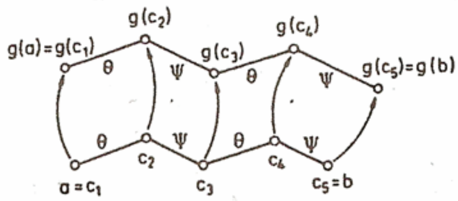
په دې پسې به وښوول شي چې د $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}\, A$ لپاره تل $\Theta \wedge \Psi \in \mathrm{Con} A$ او $\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con} A$ باور لري، د $\wedge$ او $\vee$ سره لکه د مخه مو، چې و ښوول.

په نورو ټکو یا کلیمو سره په Θ او Ψ کې غړې خوندې اکویوالنځ اړیکی او کوچنی Θ او Ψ خوندې لرلي ایکو-یوالنځ اړیکي دواړه اوتوماتیك کونګروایننځ اړیکي دي.

په داسې حال کې چې $\Theta \wedge \Psi \in \mathrm{Con}\, A$ په دې د مخه جمله پسې ترلی لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con}\, A$ ښونه په لاندې ډول سرته رسیدلي شي:

داچی $\Theta \vee \Psi \subset \mathrm{Eq}\, A$ روښانه ده نو لکه د مخه مو، چې ښوولی، بسیا کوي چې د $\Theta \vee \Psi$ زغموالی د $A = (A, F)$ ترانسلیشن سره وښوول شي. وي دې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $g(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ یو ترانسلیشن د $f \in F$ او $a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ سره.

نو $(g(a),g(b)) \in \Theta$ د ثبوت دی. جمله د
توکو $c_1,\dots,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي
د $a = c_1 \Theta c_2 \quad c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b_n$ سره. دا چي g
د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځی:
$$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) \dots g(c_n) = g(b_n)$$
له کومی چی د ۵.۲.۱۰ پسی $(g(a),g(b)) \in \Theta \vee \Psi$ ورکوي،
لکه څنګه چی د غوښتلو وو (دا پسی څیره دې وکتل شي).



څیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چی په لاندې ډول راټول شي:

۳.۵ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره $(\mathrm{Con}\, A, \wedge, \vee)$ د $(\mathrm{Eq}\, A, \wedge, \vee)$ یو لاندې الجبر دی. په ځانګړي توګه $(\mathrm{Con}\, A, \wedge, \vee)$ یو تړون یا فرباند دی (د A کونګرو-اینخفرباند یا کونګروانیخ تړون)

د دې جملی له مخه تیرې جملی څخه تړلی لاس ته راوړنه لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخه‌یري $X \subseteq A^2$ لپاره

$$\Theta(X) = \bigcap\{ \Theta \in \text{Con } A | \Theta \supseteq X\}$$

یو کونګروانیڅ اړیکه په A ده، دا په دې مانا
چې $\Theta(X) \in ConA$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A
باندې کوچنی کونګروانیڅ اړیکه ده، چې X خوندي لري.
دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-
اینڅ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$
لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),...,(a_n,b_n))$
د $\Theta(X)$ په ځای. د $Y\subsetneq A$ لپاره په زیات وخت کی په ساده
توګه د $\Theta(Y^2)$ اود $\Theta(a_1,...,a_n)$ په ځای $\Theta(Y)$ لیکل کیږي،
که $Y = \{ a_1,...,a_n \}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنېی کوانګروانیڅ
اړیکی د $a \neq b$ سره اصلي کوانګروانیڅ بلل کیږي.
لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی
شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په
روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده
توګه داسی کیږي، چې کونګروانیڅ اړیکي دلاندې الجبر-
ونو د بنسټډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر
وي د تیپ f د بنسټډیري A سره. د نوي الجبر بنسټډیری
A^2 دی. د هر n -ځایزې عملي سومبول $f \in f$ همداسی
یو n-ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,...,x_n),f_A(y_1,...,y_n))$$

سره.
بیا د هر $a \in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیي
په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندې توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

که $y_1 = x_2$ وي $t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2)$

په بله توګه (x_1,y_1)

د فامیل F سره، چې له عملیو

$$f_2\,(f \in f)\,,\,(a,a)\,(a \in A)\,,\,s\,,\,t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$Con\,A = Sub\,(A^2, F_{Con})$$

دا په دې مانا، چې په A باندې کونګروواینځ ټیك د (A^2, F_{Con}) لاندې الجبرونو بنسټیزي دي.

کیدي شي ، چې سیده په کونګروواینځ اړیکو وکارول شي یااستعمال شي. څکه چې باور لري $\Theta(X) = <X>$، د کوم سره، چې $<X>$ کوچنی X خوندې لرونکی د (A^2, F) لاندې الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړ ځیزه روښانونه به په جمله کی ورکړ شوې وي، چیرته چې د پولینوم کلیمه په واك کی لرو. یوه بله د کونګروواینځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړندونه په لاندې جمله کې روښانه شوې ده، چې ښوونه یی بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتی ده.

د دې له مخه یو بل تعریف : د هر ډیري A دې $\Theta \in Eq\,A$

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigsqcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چې $[X]\Theta$ د هغو ایکویوالنت اړیکوΘ ټولنه ده، کوم چې یو $x \in X$ خوندې ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A یو الجبر، $\Theta \in \mathrm{Con}A$،

او$B \in \mathrm{Sub}\,A$. نو باور لري

$$[B]\Theta \in \mathrm{Sub}\,A.$$

عمومي الجبر تیپ او داسی نور لاندې الجر

۶ ترونې Verband (lattice)

۶ . ۱ ترونې او مکمل یا پوره ترونې

د ګروپ تیورۍ اوکړۍ تیورۍ ترمنځ غبرګوالی نورۍ تیورۍ،
په ځانګړي توګه د ترونی تیوري رامنځ ته کړه یا راپورته کړه.
دا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د یوه ګروپ لاندېګرو-
پونه او هم د ګروپ نورمالپرویشوني او په همدې توګه د
یوې په خوښه کړۍ ټولو لاندېکړۍ اویا ټول (دوه اړخیزو،
کینې اړخیز ، ښي اړخیز) ایدیالونه نسبت د ډیرۍ تیوري
خوندیونی ته-چی نیممنظم یا نیمترتیب دي-هلته دا نیممنظم
یو څو بنسټیز خویونه لري.

۶ . ۱ . ۱ تعریف : یوه نیمترتیب ډیرۍ S ترونی بلل
کیږي، که هغه دا لاندې دوه خویونه ولري:
الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی یو داسی
توکی $c = a \cap b$ شته. چی د a او b غوځي بلل کیږي، د
کومو لپاره چی

$$c \leq a \quad , c \leq b$$

باور لري، که یو بل توکی c' موجود وي، چې هغه همدا شرطونه $c' \leq b$, $c' \leq a$ پوره کړي ، نو $c' \leq c$ دی.

الف ۲) د توکو $a , b \in S$ هرې جوړې ته په S کې یو توکی d ، چې د a او b پولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چې
$d \geq a$, $d \geq b$
باور لري، او هر بل داسی توکی d' د $d' \geq b$, $d' \geq a$ سره دا اړیکی $d \geq d'$ پوره کوي.

په ښکاره توګه د دوه توکو a ، b دا پولونه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره یواځني ټاکلي دي.دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کیږي، چې هر نیممنظم ډیری ، یوه ترون ته په خټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرتله برخه ۲) په همدې ډول یو ترون دی. په کومو کې، چې کلیمی غوڅی او پولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمې دي. پس کیدی شی، چې د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له ترونې او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشونې له ترونې څخه وغیره، او همداسی د یوې کړی R د لاندې کړیو ترون او همداسی د دې کړی R د ایدیال د ترونو څخه وغیره، که دا ایدیالونه کیڼ او ښي هم وي. په دې ټولو حالت نوکې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوڅی څخه د هغو ډیرپټیوریکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د پولنی په ځیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې-ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) $\{ A , B \}$.

په ټولیزه توګه کیدی شي د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

ترون څخه وغږېږو. د ترون لپاره یوڅو نورې بېیلګی هم راوړو.
د یوه ډېرې M ټول لاندې ډېرې نسبت د ډېریتیورې خوند-
ېوني ته یو ترونی جوړوي، په کومو کی چی غوڅي او ټولنی
د ډېریتیوري د موخی یا هدف په څیر پوهیدل کیږي، داد
لاندېډېریو M ترون به وریسی هم زیات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ جمله: هر لاینې منظم ډېری L یو ترون دی،
او دا د

$$a \cap b = a \ , a \cup b = b$$

سره د $a, b \in L, a < b$ (دې ته دلته بیا هم ګوته نیسم،
چی دا په لاتین تورو لیکنه له کینې لورلوستل کیږي) له امله.
د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډېری یو ترون دی، که د نظم
اړیکي د ویشوړوالی اړیکی ونیول شي، د غوڅي رول دلته
غټې ګډ پرویشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زیات-
څله لوبوي. (دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی څما د
شمیرپوهنی په کتاب کی پوره څیړل شوې)
ترونونه د الجبر یو ځانګړی حالت دی. کیدی شي ، چی
ترون بې د نیمنظم له استعمال څخه،یواځي د خویونو له
مخی تعریف کړی شي، چی غوڅي او ترون د بینار اړیکو
په څیر باید ولري:

۶ . ۱ . ۳ جمله : ډېریS د دوه بینار یادوه ګونو اړیکو
$a \cap b$ او $a \cup b$ سره هلته او هلته یا ټیك هلته یو ترون
دی، که دا عملیي لاندې کتمې اړیکی پوره کړي:

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو تړون دی. اوپه ځې: که دا الجبر یو تړون وي ، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چي د یوه څخه بل لاس ته راځي او په ځې

$$II_1.\quad a\cap a=a,\quad a\cup a=a$$
$$II_2.\quad a\cap b=b\cap a,\quad a\cup b=b\cup a$$
$$II_3.\quad (a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c),$$
$$(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c):$$
$$II_4.\quad a\cap(a\cup b)=a\cup(a\cap b)=a$$

موږ لمړی نیسو ، چی یو تړون S ورکړ شوی دی، عملیې $a\cap b$ او $a\cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعریف شوې دي یا پیژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کید نه بیا روښانه ده. موږ اوس خوې II_3 ازمایو او دا د غوځي لپاره. له لمړي ۱ څخه لاس ته راځي:

$$(a\cap b)\cap c\le a\cap b\le a.$$
$$(a\cap b)\cap c\le a\cap b\le b,$$
$$(a\cap b)\cap c\le c$$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$$(a\cap b)\cap c< b\cap c.$$
$$(a\cap b)\cap c<a\cap(b\cap c)$$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توګه دی

$$a\cap(b\cap c)<(a\cap b)\cap c$$

له دې سره II_3 باوري کېږي
وریسی بیا د لمړي ۱ پسی روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a;$$

په همدې توګه له بلې خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲ له امله $a < a \cup b$، پس د لمړي ۱ پسی دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د II_2 باوري کیدنه لاس ته راځي.

اوس دې یو ډېریS د دوه بینار یا دوه ګونو اړیکو سره ورکړ شوي وي، کوم چی خویونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$ لپاره خویونه

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$

تل سملاسي پوره دې یا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو له II_4 او II_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.

که د دې په خټ $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسی لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري، نوکیږدو $a \leq b$. له دې سره په ډېريS کی یو نیمنظم پلی کیږي. په ریښتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی. که په دې ورزیات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، یعنی

$$a \cap b = a, \; b \cup c = b،$$

نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

دا په دې مانا، چې $a \leq c$. بالاخره دی: $a \leq b$ ، $b \leq a$,
په، $a \cap b = a$, $b \cap a = b$ له II_2 بیا لاس ته $a = b$ راځي .
پسی تړلی د لمړي ۱ شرط باوړیوالی یا باوریتوب ښایو. له
$$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$$
څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توګ کیدی شي
$a \cap b \leq b$ وښوول شي.
د دې په څټ په S کی دې یو په خوښه توکی c' ټاکلی وي،
کوم چی شرطونه $c' \leq a$, $c' \leq b$ دا په دې مانا چی
$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$
پوره کوي، نو باور لري
$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$
له کوم چی $c' \leq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په
تعقیب د توکو a او b غوځی د لمړي ۱ په موخه یا هدف
انځوروي. په ټیك دې سره سمه توګه توکی $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چی د توکو a او b تړولنه ده، د لمړي ۲ په
موخه یا هدف.
څموږ د تړون د کلیمي دوم تعریف په ګوته کوي، چی تړون
د ټولیز الجبر پریمیتیو ټولګي یا ساده ټولګی جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عملیو سره(دا مو د مخه په ګوته کړي
وو، چی ساده ټولګی څه ته وایي)
دا د تړون د کلیمي هغه زړی دی، څنګه چی دا د لاندې
تړونو او ایزومورفو ځیرونو او د تړونونو د خوندیونو لپاره
په پام کي نیول کیږي.

۶ . ۱ . ۴ تعریف : یو د ټرون S لاندېډیری T لاندېټرون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوې، د الجبر په موخی راوړل شوي ټرون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوڅی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندې لري، نسبت وهغو عملیو ته چی په ټرون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ټرون شي وهغو عملیو ته چي په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ټرون S یو لاندې ډیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مګر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېټرون جوړ کړي. د ګروپ G د ټولولاندېګروپونو ټرون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ټرون د ګروپ G د ټولو لاندېډیریو ټرون لاندېټرون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ټرونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدې توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ټرون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیګروپ لاندېګروپونه ټرون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ جمله : د یوه ګروپ G د نورمالپرویشونو ټرون د زیاتونګروپ G د ټولولاندېګروپونو لاندې ټرون نه دی، چی دا مو د مخه د ګروپتیوري کی ښوولی دی.

۶ . ۱ . ۶ تعریف : د یوه تړوني S را په ځنکیدونکی یواځنی څیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوه څیرونه u په تړون S' باندې یوه ایزومورفه څیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه ده د S په S' کی ، که د په خوښه توکو $a , b \in S$ لپاره

$$(a \cup b)\,u = au \cup bu \;, \quad (a \cap b)\,u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زبات وخت یوناني توري ځاي په ځاي کیږي، مګر زه دا ستونځي لرم، چی یوناني توري می په پروګرام کی نه شته. هیله ده چی څیرونی او د یوه ډیری توکی توپیر ته بد د ګرانو لوستونکو پام وي) دا د S او S' یو ایزومورفیزم دی، چی د ټولیز الجبر په څیر راوړل شوي تړوني یې یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ جمله : د یوه تړوني S ایزومررف خوندیونه u په تړون S' کی، د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیرې S کی یو ایزومورفیزم انخوروي.

اوبی : د اوبیونی لپاره ټکو $a , b \in S$. که $a < b$ وي یعنی $a \cap b = a$. نو وبه لرو

$$(a \cap b)\,u = au \cap bu = au$$

او نه دې امله لاس ته راخي $au < bu$. که دا پام په ځنې یا په برعکس لور وکړو او وکاروو. چی u یو یواځنی په ځنکیدونکی دی. نو له $au < bu$ څخه هم $a < b$ لاس

ته راځي.

دا پورته بیلګې را ته ښايي، چې په څپ ثابتونه باورنه لري.
د دوه ډیریو S او S' لپاره ، چې نیممنظمي دي، یو ایزو-
مورف څیروني u ته د S په S' کې، هلته اړتیا یا
ضرورت شته، چې S او S' دواړه تړونونه وي. دا د S
ایزمورفی څیرونی کي په S' باندې بل ډول ځانونه نیسي.

۶ ۱ . ۸ جمله : که تړونونه S او S' ورکړ شوي وي،
نو د نیم نظم په موخه هر ایزمورف څیرونه د S په S'
باندې تړون S ایزمورف په تړون S' باندې انځوروي.
اوبی : په ریښتیني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \le a$
څخه هم $(a \cap b)u \le au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \le bu$$

که $c' \in S$ داسې وي، چې $c' \le au$ او $c' \le bu$ باور
ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چې
$cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \le a$ او $c \le b$ دا
په دې مانا چې $c \le a \cap b$ له کوم څخه چې
$cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم
لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د ټولنې لپاره یې ښوونه یا اوبیونه په همدې توګه ده. موږ
دا هم په پام کې نیسو، چې په تړونونو باندې د هومورفیزم
اوټولی هغه کیلمي چې په خوښه، د ټولیزالجبرونو په ساده

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګې هم شته خو هغه موضوعګانی موږ نه دې څیړلی ، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دې وکتل شي)،
په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکی یو ټرونې جوړوي،
کوم چی د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي،
یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو ټرون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چی ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو ټرون د بینار اړیکو د ټرون لاندې ټرون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر ټرون په یوه ځانګړي ډیري باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو ټرون کی ایزومورف خوندې دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندې تعریف شوی ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو ټرون کی ایزومورف خوندې دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دې سره سم هر ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو-پونوټرون کی ایزومورف خوندې دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي ټرونونه – لکه د یوه ډیري M لاند-ډیریو ټرون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو ټرون، د یوې

کړی R د ایډیالونو ټرون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-اړیکو ټرون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوڅی او ټولنه نه یواځي د دوه توکو لپاره بلکه د اسوشیاتیو قانون سره سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.
په بل ډول افاده کوو، دا ټرونونونه دلاندي تعریف سره سم پوره ټرونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره ټرون یا مکمل ټرون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$ لپاره په S کي توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره سم موجود وي:
الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري، هر وریسی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.
دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور لري، هرا وریسی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.
دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندېډیري A د توکو غوڅی او همداسی ټولنه بلل کیږي. د سومبولونو سره کیدی ، چی c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژندډیري I کې وخغلي
یعنې i∈I، په لاندې بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i\in I} a, \quad d = \bigcup_{i\in I} a$$

طبعاً یو پوره ترون یو ترون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره ترون S د ټولو توکو غوڅی د ترون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه کیږي. دا توکي د لاندې دري شرطونو، هر یوه سره یوا- ځنی ټاکل کیدیشي. د ټولو a∈S لپاره باور لري

$$1)\quad 0 \le a; \quad 2)\ 0 \cap a = 0; \quad 3)\quad 0 \cup a = a.$$

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره ترون د ټولو توکو ټولنه د ترون یویتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې دري په خوبنه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو a C S لپاره باور لري

$$1')\quad 1 \ge a; \quad 2)\ 1 \cup a = 1 \quad ; \quad 3')\ 1 \cap a = a$$

طبعاً هغه ترونونه چی پوره ترونونه نه دي کړی شي، چی صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري.
د یوه ګروپ G د لاندې ګروپونو په ترون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G سره انځوریږي، د یوې کړی د لاندېکړیو په ترون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

سره انځوريږي، د يوه ډيرې M ټولو لاندېډيريو تړون کې د تشډيري او پخپله د ډيري M سره انځوريږي.
د پرويشنې قانون له مخې منظم يا تنظيم شوي د طبيعي ګڼونو تړون او د ځنځيروني ، چې پخپله طبيعي نظم يې جوړوي، هر وار يې صفر توکی ګڼ ۱ دی، په داسې حال چې يوېتوکي موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيری S هلته او هلته يوتړون دی، که هغه يو يوېتوکی ولري او په هغې کې د هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوځې موجود وي.
اوبې : د ښوونې لپاره بسيا کوي، که داسې فکر وکړو، چې د يوېتوکی د موجوديت او د د ټولو غوځيو له موجوديت څخه د ټولنې موجوديت لاس ته راځي. A دې د S يو ناتش لاندېډيری وي. په S کې داسې توکيb موجود دی د کوم لپاره چې $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره، داسې يو توکی تل دا يوېتوکی دی، B دې د ټولو داسې توکو يو ناتش لاندېډيري وي او d دې د هغو غوځې وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

موږ به سملاسې وښايو، چې d د لاندېډيري A ټولنه انځوروي. په رېښتيني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. وريسې دې $s \in S$ داسې وي، چې $s \geq a$ د ټولو$a \in A$ لپاره دی.

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \leq s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډېري خویونه، چې یو پوره ترون(او یا هم یو ترون) وي، ځان په یوه په ځېړ ایزومورفیزم ته لاښودوي (د دې سره دې لمړی برخه پرتله شي)، موږ کړی شو، چې د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندېږيريو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعریف: د یوه نیم منظم ډیري M څیرونه u په نیم منظم ډيري N کی، په کوم کی چی له $a, b \in M, a \leq b$ څخه تل $au \leq bu$ لاسته اخي، مونوتون monoton بلل کیږي(مونوتون په دې مانا، چی توکی یو په بل پسی یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که دS په هر مونوتون څیرونی u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي، یعني توکي، د کومو لپاره چی $au = a$ دی

(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چی وښول شو، هر نیم منظم ډيري M د ټولو لاندېږيريو په پوره ترون M کی خوندې ده.

موږ غواړو چې دا لاندې جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر ټرون کیدی شي ، چې په یو پوره ټرون کی ایزومورف(د ټرونونود ایزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندي شي.

دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تیره لمړی برخی کی وینا ته لږ تیزه وینا د :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نیم منظم ډیری M په یو ټاکلي ټرون S کی ایزومورف خوندې دی، او دا په داسی توګه چې د هر لاندېډیري M A لپاره و کوم ته چې په M کی غوڅی یا ټولنه موجود ده، چې دواړه د u په خوندیونه کی و بل ته ورل کیږي: دا داسی بلل کیږي، چې دی

$$(\bigcap_{a\in A} a)u = \bigcap_{a\in A} au \quad , \quad (\bigcup_{a\in A} a)u = \bigcup_{a\in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کي جوړ شوي د M خوندیونه په M کی، په روښانه توګه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسیانه کوي.

موږ په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړی نیسو چې ډیری M یو صفر توکی لري، که نه نو M ته یو توکی 0 صفر ورزیاتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعریف : یو ناتش لاندیډیری M X په M کی یو ایدیال بولو که:

اول) X و هر خپل توکی x ته ټول توکی y هم لري

د $y \leq x$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چې په M کی ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کي هم موجود ده.

د ډیري M د ټولو ایدیالونو ډیری S نسبت د ډیریتیوري خوندیونی ته نیم منظم دی. دا چې S یو یویتوکی لري- په څرګند ډول M د خپل ځان ایدیال دی-، له دې وراخواد ایدیالونو په خوښه ډیري غوځی، چې صفر لري، او ټول د ایدیال په تیوري کی راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیريS د په دې برخه کی د مخه لوستل شوو له مخی پوره تړون دی.

د یوه په خوښه توکی $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډیری (a) د $b \leq a$ سره یو ایدیال انځوري، کوم چې د a څخه راجوړ یا تولید شوی اصلي ایدیال بلل کیږي. که هر توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ یا تولید ایدیال(a)باندې تنظیم شي، نو په لمړی برخه کي لوستل شوو له مخی یو ایزومورف خوندیونه u د نیم تنظیم شویډیر M ، په پوره تړون S کی، لاس ته راځي.

موږ نو نیسو ، چې په M کی د لاندېډیریو $A \subseteq M$ د هغو غوځی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسی $(c) \geq (a)$ د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایډیالونو(a) , $a \in A$ د ډیریتیور-

یکي غوڅې توکی x ولري، نو$a \geq x$ دی، د ټولو $a \subset A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$. له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو.
همداسې دې و دې لاند ډېر $M \subseteq A$ ته په M کې ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.
که یو ټاکلی ایډیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنې سره $X \subseteq (d)$ دی.
له دی امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملې اوبې پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره تړون دی، کله چې په S کې یو صفر توکیموجود وي او هر ایډیال یو اصلي ایډیال وي.
یا دونه: د دې جملې له ښوونې څخه هم دلته تیرېږو .
کیدی شي په کوروش یا خوروش کې , وکتل شي ..