الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Ketabton.com

لیکوال:

داکټر ماخان (میړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیك

سریزه ..... الف

شمیرپوهنیزې نخښې..... ټ

۱ . ګنوندیری ۱

۱ . ۱ طبیعي ګنوندیری ۱

۱ . ۲ د ټول ګنوندیری ۴

۱ . ۳ ریشنل ګنوندیری ۵

۱ . ۴ ریبل ګنوندیری ۷

۱ . ۵ ایماګینار ګنوندیری ۷

۱ . ۶ کمپلکس ګنوندیری ۸

۲ . دیریپوهنیزې ستپکلیمی ۱۱

۲ . ۱ دیری ۱۱

۲ . ۲ خلدیری یا ضرب دیری او اړیکی یی... ۲۶

۲ . ۳ نیمنظم یا نیمترتیب ۳۶

۲ . ۴ مینیمالشرطونه ۳۸

۳ . الجبري جوړښتونه ۴۱

۳ . ۱ ګروپ ۴۴

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی ۵۹

نورمي شوی ټولینوم ۶۶ څه مانا لري

۳ . ۳ لاندیګروپ او لاندې کړی ۷۰

۳ . ۴ ایزومورفیزم ۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ د نیمګروپ په ګروپ او کړی په یوه (ناضرور کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه ۹۲
۳ . ۶ نورمالپرویشنه ۹۵
۳ . ۷ ایدیال او پاتیټولګیکړی ۱۰۵
۴ د بول الجبر، سرکټ الجبر..... ۱۱۶
۴ . ۱ د ول الجبر ستې کلیمی ۱۱۶
۴ . ۲ د بول فنکشنونه او پولینومونه ۱۲۹
سویچ الجبر یا بریښناجریان الجبر ۱۴۶
۵ الجبرونه ۱۵۶
یو څو بنسټکلیمی ۱۵۶
۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر ۱۷۳
۵ . ۳ ایزمورفیزم ، هوموMورفیزم ۱۸۰
۶ . ټرونونه یا ټرونی ۲۰۷
۶ . ۱ ټرونی او مکمل - یا پوره ټروني.. ۲۰۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ګڼوندېري

د دې لپاره، چې دا د الجبر کلیمی مو پوره څیړلی وي او ښه پوهږ شي، نو په سر کې غواړم هغه د ښوونځي باید (چې متآسفانه دا مو په هیواد کې، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد ، د ګڼونو ډیري یو په بل پسی تعریف کړم، یا بهتره لنډه ګوته ورته ونیسم او دا په هغو کی د باوري کارونو یا اپریشنونو یا عملیو او یا ګنډنو او یا د ټرونونو په بنسټ.

۱ . ۱ طبیعي ګڼوندېری

Die Menge der natürliche Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډیری چی صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n , ... \}$$

دا لاندې د طبیعي ګڼونو ډیري دی، چې صفر ورسره دی، یا په بل عبارت : د طبیعي ګنونو ډیری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډیري کی لاندې شیمر قاعدې باور لري

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ . ۲ په طبیعي ګڼونو کی شمیرقاعدې

الف : و زیاتون ته یا بهتره، نسبت وزیاتون ته:

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زیاتون ته، یا نسبت وزیاتون ته، یو دریم طبیعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چی باور لري: $a + b = c$

دوم : اسوځیاتیو قانون Assotiative : د طبیعي ګڼونو لپاره د اسوځیاتیو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دریم : کموتاتیو قانون commutative : د طبیعي ګڼونو لپاره د کموتاتیو قانون باور لري، یعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثیره یا ناپیلی توکی das neutrales Element: په طبیعي ګڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبیعي ګڼونو ناپیلی یا بهتره بی تاثیره توکی بلل کیږي.

ب : و ځل ته یا بهتره نسبت ځل ته

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول : د هرو دوه طبیعی ګڼونو $a , b \in N$ لپاره یو دریم طبیعی ګڼ $c \in N$ شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبیعي ګڼونو $a,b,c \in N$ لپار اسوځیاتیو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دریم : د طبیعي ګڼونوډیري کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a . b = b . a$$

څلورم. نسبت و څل ته ناپیلي یا بهتره بي تاثیره توکی : که طبیعي ګڼونه له 1 سره څل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعي ګڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبیعي ګڼونو یو ناپیلی یا بي تاثیره توکی بلل کیږي، چی یوی(دا څکه یوی بولو ، چی باید له یو سره یی توپیر شوی وي) یي بولو

یادونه : په پورته ننبلونو کی دې ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې په طبیعي ګڼونډیري کې، نسبت و زیاتون ته، د هر توکی لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبوریږو، چې د طبیعی ګڼونو ډیری د ټولګنونو ډیري ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګنونوډیری die Menge der ganzen Zahlen :

د ټولګنونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چې په Z سره یی ښایو او داسی یي لیکو

$$Z = \{ ...,-n, ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$$

په ټولګنونو ډیري کی هغه په طبیعی ګڼونډیري کی باوري نښلونی یا عملیي باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی، یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی $-a \in Z$ موجود دی، چی دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چی د مثبت ګڼ ځل د منفی ګڼ

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره منځ ته راغلى، چې نتيجه يې يو منفى ګڼ دى، دا په دې مانا، چې دلته اصلي نښلونه يا عمليه زياتون دى او نه . (ځل).

يادونه : زياتون دوه ځايزه عمليه binäre Operation يا نښلونه ده او په څټ عمليه يوه يوځايزه عمليه unäre Operation يا نښلونه ده.

ګورو، چې د ټولګڼونو په ډيري کې د ځل لپاره د ګڼونو په څټ ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعريف، يعنى د يوې افغانۍ يو په څلورمه (1 / 4) يو ټولګڼ نه دى، نو له دې امله بايد د ټولګڼونو ډيرى و ريشنل ګڼونو Q ته پراخه شى .

۱ . ۳ ريشنل ګڼونه rationale Zahlen :

د ريشنلګڼونو ډيرى له دې امله د ټولګڼونو ډيرى Z او د ټولو ماتګڼونو ډيرې a / b څخه جوړ دى، چې په Q سره يې په نخښه کو او په لاندې ډول يې ليکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \neq 0 \}$$

دا داسى لوستل کيږي : ډيرى Q مساوي دى د ټولګڼونو ډيرى Z اود مات ګڼونو a / b ډيرې سره، $a , b \in Z$.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریشنلګڼونو ډيري کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، یعنی په ریشنل ګڼونو کی د هر ګڼ $a \in Z$ لپاره یو $b \in Z$ موجود دی د کوم لپاره چې باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a \,,\ a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ویش نه دی تعریف.
ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ریشنلګڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چی د ریشنلګڼون ډیري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بې تاثیره پاتې کیږي یا ناپیلی. دا یوی مور له دې امله ناپیلی das neutrale Element او یا هم بی تاثیره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعریف دی، یعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یاعملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا ګڼونډیری نور هم پراخه شي. یعني د ګڼون ریښه هم باید په ګڼونډیري کی باور ولري. د بیلګې په توګه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعریف. دا پراختیا مو رییلګڼونډیری ته لارښودوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په R سره ښايو يا نخښه کوو.

۱ . ۴ ريیل ګڼوټېرى die Menge der reelen Zahlen R:

د هغو ګڼوټېرى، چى له ريښو جوړ وي، هغه مو ږ د ايريشنل ګڼوټېرى die Menge der irationale Zahlen بولو چى په Q_i سره يى په نخښه کو . د ريیل ګڼوټېرى ياد ريیل ګڼوټو ټېرى په دې توګه بيا د ريشنل ګڼوټو ټېري او د ايريشنلګڼوټو ټېري د ټولنى څخه جوړ دى يعنى

$$R = Q \cup Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونکى کي که U راشي، نود ټولنى په ځاي به يى ځاي نيولى وي، که بل نوم ورسره مل نه وي.
په دې ټېري کي د هرنامنفى ګڼ لپاره د هغه ګڼ ريښه موجود ده. د ريیلګڼوټېرى. بيا تکراوروو، چى د ټولو ريشنلګڼوټو ټېري څخه عبارت دى، چى د نامنفي ريشنلګڼوټوګڼوټو ريښى هم ورزياتي شي.
په ريیلګڼوټو کي د ريشنل ګڼوټېري ټول قوانين باورلري او په همدې ټول په R کى د هر مثبت ګڼ a ريښه هم موجود ده، يعني $\sqrt{a}$ موجود ده، چى a منفي ګڼ نه وي. دا ريښه نيونه يو يوځايز اپريشن يا عمليه او يا نښلونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چی د ریښي یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د ریيلګڼوندېیری د کمپلکس ګڼوندېیرې ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼوندېیری:د ټولو منفی ګڼونو ریښوېیري ته ایماګینار ګڼوندېیری وایو die Menge der imaginäre Zahlen .
او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چې باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو ریيلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .
اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼوندېیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګڼوندېیری د ریيلګڼوندېیری او ایماګینارګڼوندېیري ټولنی ته وایي.یاني که ایماګینارګڼ دI سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼونه دوه برخى لري، رييله برخه او ايماګينار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډيري کى ټولى نښلونى يا عمليې، چى په رييل ګڼوندېري او،ايماګينار ګڼوندېري کى باور لري، باوري دي. او برسيره پردې، دا لاندې قوانين هم باور لري: دلته که $z = a + ib$ يو کمپلکس ګڼ وي، چى a رييله برخه او $ib = bi$ يى ايماګينار يا ايماجينار برخه ده. او س راځو شميرقوانينو ته:

الف : $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$ $i^5 = i$

په ټوليزه توګه:

$$i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+4} = +1 \quad i^{4n+5} = i$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1+b_2)$$
$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) +i(a_1b_2+a_2b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کيدى شي، چى وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ و $z = a+ib$ ته يو کونجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي

پ–

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو یا قضیو په څیر هم ښوول کیدی شي، خو مور یی دلته د ښوونی څخه تیریږو او دایی د تعریف له مخی د اعتبار وړ قوانینو په څیر راوړو.

یادونه : مور کړای شو، چی دا د ګڼونو ډیري په لاندې ډول د ډیریو په توګه یو په بل کي خوندې ولیکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتیب د ورپسی ډیري اصلي برخډیري دي

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – ډیریپوهینیزې ستړکلیمی

۲ . ۱ . ډیری

په شمیرپوهنه کی پل په پل مور ددې، د ستونځو سره مل، تعریف شوې کلیمي سره مخامخ کیږو، کومه چی د یوه لغات « ټولګې » سره روښانه کیدی یا پوهیدل کیدی شي. د بیلګې په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږیږو، چی په یوه ټاکلی وخت کی په یوه کوټه کی موجود وي، یا هغه هیلی، چی په یوه ځانګړي وخت کې په یوه ځانګړي ځای کې په اوبو کی لامبی، هغه غرڅه، چی د هسکی مینې د سپینی مورګي په ځنګلونو کی لا پاتی دي او همدا ډول هغه میږې او ووزې، چی په ۱۹۹۹ میلادې کال کی د کوچیانو څخه د لورې له املې مړې شوي دي. د داسی شیانو ټولګه «ډیری» (Die Menge , set) بلل کیږي یا داسی ټولګي ډیری نومو و.

۲ . ۱ . ۱ لنډ تعریف : ځمور د خیال یا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپیرکیدونکو شیانو ټولګه «ډیری» نومو و یا بولو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شیان، چې له هغو ډیرې جوړ شوی دی، د ډیري «توکي» بلل کیږي. د دې لپاره، چې « x د ډیري M توکی دی» لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په څټ یا نفي یا نیګیشن Negation د « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي. د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1, x_2, \ldots, x_n \in M"$$

یو ځانګړی ډیرې تشډیرې دی، داسی کرکتریزه کیږي، چې کوم توکی نه لري. دا تشډیرې د سومبول یا نخښی Ø سره نخښون کیږي یا په نخښه کیږي.

نور هغه ډیرې چې زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته راځي، دا لاندې ډیري دي:

د ټولو طبیعی یا پیدایښتګنونو ډیرې د N سره په نخښه کیږي، چې صفر ورسره مل دی.

د ټولو ټولګنونو ډیرې Z

د ټولو راشنلګنونو ډیرې Q

د ټولو ریبلګنونو ډیرې R

د ټولو کمپلکسګنونو ډیرې C

د ۳۰ پرویشونو ډیرې، چې له ۸ توکو څخه جوړ ډیرې دی. یعنی {1,2,3,5, 6,10,15,30} ډیرې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۲ تعريف : يو ډيری M د ډيري N برخه ډيری بلل کيږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه يی : $N \supset M$. يا $M \subset N$

۲ . ۱ . ۳ تعريف : هغه ډيری، چی هيڅ توکی ونه لري، تشډيری بلل کيږي او داسی $\emptyset$ يي په نخښه کوو.

تشډيری $\emptyset$ د هرډيري برخډيری دی ، برسيره پردې هر ډيری د خپل ځان برخډيری دی. دا ډول ډيري نااصلي برخډيري بلل کيږي، هغه برخډيری اصلي برخډيری دی. يا اصلي برخډيری بلل کيږي، که دا برخډيری له دې دوه ډيريو يعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډيرې او تشډيري څخه توپير ولري. دې ته دې هم بايد ګوته نيول شوي وي، چی کله کله برخډيريو ته «لاندې ډيري» هم ويل کيږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اينکلوزيون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کيږي.

۲ . ۱ . ۴ تعريف : که وي $M \subseteq N$ او $M \models N$ نو M د N اصلي برخډيری بلل کيږي. ($M \neq N$)
په نخښونه يی : $M \subset N$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۵ تعریف: د یوه ډیرې S توکي کیدی شي پخپله ډیري وي. دلته نوS د ډیریسیستم په توګه په نخښه کیدی شي یا د ډیري سیستم په څیر ګڼل کیدی شي یا په بل عبارت: د یوه ډیري د توکو ډیري د هغه ډیري برخې دي، چی دا یو د ډیریسیستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعریف: د یوه ناتش ډیري سیتسمS غوښتنه ډیری (د سیستم هغه برخې دی، چی د سیستم د هر ډیري برخې ډیری وي) D د ټولو توکو هغه برخې دی، چی په همغه وخت یا یووخت کی د سیستم S د هر ډیري M توکی وي. یعنی لرو $x \in D$ همغه ارزښته یا برابرارزښته د دې سره دی $x \in M$ د ټولو ډیریو $M \in S$ لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap \{ M \mid M \in S \}$ یا $D = \bigcap_{M \in S} M$

$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$

که S یواځي د پای ډیرو برخې ډیریو $M_1 , \dots , M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات یا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وایي، چی M او N ګډ توکی نه لري، یعني توکی پردي دي یا لنډ پردي یا دیسیونکت دي(Disjnukt) دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۷ تعریف: د یوه ناتش ډیریسیستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډیری دی، چې کم له کمه د S ډیریسیستم یوه ډیري M پورې اړه ولري یعنی توکی وي.

په نخښونه : $V = \bigcup_{M \in S} M$ یا $V = \bigcup \{ M \mid M \in S \}$

$$V = M_1 \cup .... \cup M_n$$

که ډیریسیستم S د پای ډیرو برخډیریو $M_1 , M_2 , ... , M_n$ څخه منځ ته راغلی یا جوړ وي.

د غوڅډیري او ټولنډیري د تعریف په مرسته پسی ټرلي لاندې اړیکي لاس ته راځي ، چې ښوونه یی ګرانو لوستونکو ته پریښوول کیږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

(a) $M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$
(b) $M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$
(c) $M \cap N = M$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

(d) $M \cup N = M$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پايډيري کيدى شي، چى د هغو د غړو له لارې په نخښه شي. ليکل کيږي

$$\{ x_1 , x_2, \dots , x_n \}$$

د همغه ډيري M لپاره، چى ټيك له دې ورکړشوو توکو څخه جوړ وي. يوتوکيز ډيرى $\{ x \}$ د هغه د توکي x څخه بايد توپير شي:

د بيلګې په توګه $\{ \emptyset \}$ هغه ډيرى دى، چى د هغه يواځنى توکى تشډيرى دى.

ديوه ډيري M د توکو ګڼون يا تعداد د $| M |$ سره په نخشه کيږي. دا ګڼ $| M |$ د ډيري M زور يا توان بلل کيږي، دا په دې مانا چې د ډيري د توکو ګڼون يا تقداد د ډيري زور دى. د بيلګې په توګه دى $| \{ \emptyset \} | = 1$ او $| \emptyset | = 0$.

د يوه ډيري بل ډول روښانونه يا شميرنه په دې کى نغښتى، چى ديوه ورکړ شوي ډيري M ټول توکي ورکړ شوي ، کوم توکى چى ګډ خويونه E ولري، و يوه نوي ډيري ته سره راټولګه کړي يا را يوځاي کړي. $E(x)$ په دې مانا چى x خويونه E لري، نو دا ډيرى په $\{ x \in X | E(x) \}$ سره ښايو.

د بيلګې په توګه ډيرى $\{ x \in Z | x^2 = 1 \}$ د -1 او 1 څخه جوړ شوى، د ټولو ټولګنونو برخډيري دى. د يوه ډيري دا

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول جوړونی سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانيول کيږي، په غير له دې کيدی شي، له تضاد يا مخامخوالی ډک يا په څټ ډيري رامنځ ته شي، دا چی انډولډيری په ټولیزه توګه په همغه اړيکو يواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپليخيت(Explizite لاتين : روښانه ، واضح) ورکونه تيريدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعريف: د دوه ډيريو M او N کمونډيری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوڅي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توګه لاندې يادوو:

کموتاتيو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \ , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوڅياتيو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ديستريبوتيويتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ ,$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولیز یا عمومي

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_\alpha \cap B)$$

او ورپسی

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډیرې شمیرپوهنیزې ښوونې د پوره اندکشن په پرینسیپ ولاړې دي، کوم چې د طبیعي ګڼونو اکسیوماتیکي جوړښت دلایلو راوړنه کې یو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندکشن ثبوت پرینسیپ:

A دې په طبیعي ګڼونو $n \in N$ یوه ویناوي. $A(n)$ په دې مانا دی، چې A په n باوري کیږي.
د یوه کره ټاکلی $n_0 \in N$ څخه پیل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اینډکشن پیل:
ب ؛ د اینډکشن پای : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي
نو بیا A د ټولو طبیعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتیا ده یا صحیح یا ټیک ده(دا ریښتیا مناسبه نومونه ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ته دې ګوته نیول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چیرې د ایندکشن پای په لاندې ډول لاربښوده کړو:

ب : له A(i) څخه د ټولو i لپاره د $n \geq i \geq n_0$ سره A(n) هم لاس ته راځي.

شرایط (b) او (b') برابرارزښته دي ، لکه چې ورپسې یا ټرلي لیدل کیږي.

د انیدکشن ښوونه یا ثبوت بیلګې د لاندې جملو اوبیو یا حلونو ته مرسته کوي یا د لاندې جملې اثبیو په چوپړ کې دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعریف: M دې یو ورکړشوی ډیری وي. د M د ټولو برخډیریو ډیری. چې په P(M) سره یې په نخښه کوو یا ښایو، د M دپوتنخډیري Potenzmenge یا توانډیري په نامه یادیږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې یو n– توکیز ډیری وي. P =P (M) دې د M د ټولو برخډیریو ډیری وي. نو دا د M په توان ډیری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د ایندکشن پیل: n = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې M کوم توکی نه لري. له دې امله M تشډیری Ø دی. د $P(Ø) = \{Ø\}$ له امله په P کی یو توکی $1 = 2^0$ موجود دی.

وي دي : $n \in N , n \geq 1$

د ایندکشن نیونه یا فرضیه: هر $(n - 1)$ – توکییز ډیری دې ټیك 2^{n-1} توپیریدونکی برخډیري ولري.

د ایندکشن اوبی یا ثبوت : که M یو ډیری د n توکو سره وي، نو $P(M)$ ټیك له 2^n توکو جوړ دی.

د دې سره دې $M = \{a_1,a_1,...,a_n\}$ وي.

نو بیا $M' = \{a_1 , a_2,...,a_{n-1}\}$ د $P(M')$ لپاره د ایندکشن د نیونی یا فرضیې سره ټیك 2^{n-1} توکي لري،

که $A \in P(M)$ نو بیا یا $a_n \in A$ دی او یا $a_n \notin A$. په دوم حالت کي A په $P(M')$ پورې اړه لري، او په لومړي حالت کي $A' = A\setminus\{a\} \in P(M')$ نو P(M) ټیك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n$$

توکي لري. د پوره ایندکشن د پرینسیپ له مخی دلته وښوول شو، چی د هر n – توکیز ډیري M لپاره پوتنځ – یا توانډیری $P(M)$ ټیك 2^n توکی لري. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاې ډيري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې يو ناتش ډيريسيستم وي. يو ناتش د S برخډيرى K يو څنځير بلل کيږي، که له $M_1, M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او يا $M_1 \supseteq M_2$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعريف :يو ډيري $M \in S$ د S يو ماکزيمال يا لوي توکى بلل کيږي، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چې $M = N$. نو د څورن جملګى په لاندې ډول ده: (ماکزيمال يا ماکسيمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګى Lemma vo n Zorn:

که د ناتش ډيريسيستم S د هر څنځير K لپاره ټولنډيري $\{K \mid K \in K\}$ هم يو د S ډيريسيستم توکى وي، نو بيا په کې يو ماکزيمال maximales Element توکى موجود دى.

ددې جملګى د ثبوت څخه دلته تيريږو.

وي دې N د يوه نيم منظم ډيري M لاندې ډيرى يا برخه ډيرى. هر (ضرور نه دى، چى په N کى ځاى وي يا خوندې وي) a له M څخه، کوم چى د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوره کړي د لاندې ډيري پورته بند بلل کيږي يانى ډيرى يى د لته رابند دى. دې ته دوګونى کليمه لاندې بند دى.
په ورکړ شوې نيممنظم ډيري M سره د ټولو څنځيرونو ډيرى د ډيري خوندیونى په موخه يا هدف ، هم نيمه منظم دى. دا ټول د اخرني ډيري ماکسيمال توکى ، د خپل طبيعيت له مخى د M ماکسيمال څنځير بلل کيږي.
لاندې جملى يو بل ته ورته دې يانى د يوې څخه بله لاس ته راځى او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرميلو جمله Zermelo: هر ډيرى کيدى شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff:هره د يوه نيمه منظم ډيري څنځير په يوه ماکسيمال څنځير کي خوندې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن جمله Kuratowski-Zorn :

که د يوه نيمنظم ډيري M هر څنځير يو پورته بند ولري، نو د M په هر توکى پسى يو په نامه ماکسيمال توکي راځى.
ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تيريږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې X او Y دوه ناتش ډیري وي. د یوې د X په Y کی څیرونی (په نخښونه $f: X \to Y$) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د $x \in X$ هر توکی یواځنی یوه د $y \in Y$ توکی باندې د څیرې په توګه تنظیم شي یا ترتیب شي، د x څیره y په څیرونه f د f(x) سره او یا هم ساده د fx سره په نخښه کوو. ډیری X د څیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا څیرېډیری بلل کیږي.

که f د x څیرونه یا څیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو $x \in M$ توکو څیرې ډیری او په ورته توګه د ډیرې M څیره بلل کیږي او داسې په نخښه کوو f(M) یا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري څیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري څیره fX د f څیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ تعریف: که $Im f = Y$ باور ولري ، د څیرونی $f: X \to Y$ لپاره، نو f یوه سوریکتیوه څیرونه surjektive Abbildung بلل یږي، یو سوریکشن Surjektion یا یوه د X څیرونه په Y باندې. په څټ دې N یو د S

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخلیږي وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چې د هغو څیره د N یو توکی وي، د N له څیرې پخوا څیرونه، په څیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخلیږي دی.

که $N \neq \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشډیری وي، یعنی هلته که $N \cap \operatorname{Im} f = \emptyset$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه څیرونه $f : X \longrightarrow Y$ د خویونو سره،

چې له $x_1 \neq x_2$ تل $fx_1 \neq fx_2$ لاس ته ریشي، اینیکتیو څیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن Injektion. که په همدې وخت کې f حتی یو اینیکتیو او سوریکتیو وي، نو f بییکتیو څیره کوونه bijektive Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f : X \to Y$ دې یوه بییکتیوه څیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د څیرې په توګه یو یواځنی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د څیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي.
دا د f په څټ څیرونه بلل کیږي او یا دا f ته راګرځیدونکی څیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \rightarrow X$ سره په نخښه کیږي

۱ . ۱ . ۱۹ تعریف: که دوه څیرونی $f : X \rightarrow Y$ او $g : Y \rightarrow Z$ یو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نخښه شوې څیره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چی د f او g ځل یا ضرب څیرونه بلل کیږي زیات وخت د څنځیرې او یا ټرلی بلواك یا څیره کوني په نامه هم یادیږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$
کیدی شي چی تعریفډیری او څیره ډیری یو بل باندې پریوځي. دلته بیا له یوې څیرونی f غږیږو، چی X په خپل ځان څیره کوي.

۲ . ۱ . ۲۰ تعریف: که دډیري X هر توکی په خپل ځان بیرته څیره شي، نو یو د X بیکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی د X کټمټ څیرونه identische Abbildung یا Identität
یي بولو او په لاندې ډول یی ښایو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$.
که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دې په څټ څیره کونه f^{-1}
هم موجود ده او لاس ته تري راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلډیری یا ضربډیری او اړیکی یی

په دې برخه کی کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د
اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation
کلیمه څیرو.

۲ . ۲ . ۱ تعریف: د دوه ډیریو A اوB کارتیزې ځل $A \times B$
د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره.
دلته $(a , b) = (a', b')$ ټیك هلته باور لري، چی $a = a'$
او $b = b'$ وي.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲ یادونه: کارتیزې ځل په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی ، دا په دې مانا چې $A\times B \mid = B\times A$ که $A \mid = B$ وي. په پام کې دې دا اثتثنا وي، چې د هر ناتشډیري A او تشډیري Ø لپاره باور لري

$$A\times\emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډیریو کارتیزې ځل په څیر د پاې ډیرو ډیریو دپاره هم کارتیزې ځل تعریفیږي.

۲ . ۲ . ۳ تعریف: کارتیزې ځل $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ د پای ډیرو ډیریو A_i د $i = 1,\ldots,n$ لپاره، د ټولو منظمو یا ترتیبشوو n – ګونو $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ د $a_i \in A , i = 1 , 2 , \ldots , n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots ,a_n')$$

ټیک هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1,2,\ldots,n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1 , 2,\ldots,n$ لپاره، نو $A = \prod_{i=1} A_i$ د A د n –ایزې توان یا پوتنځ بلل کیږي. (د ۲۰۰۸ کال قرآن)

ډیرې $\{(a,\ldots,a) \in A^n \mid a \in A\}$ د A^n نیمې یا قطر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود $A\times A$ برخډیری R د ډیري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه $a \sim b$, هلته او هلته یا په بل عبارت ټیك هلته، که وي

$$(a,b) \in R \qquad \text{او} \qquad a\,R\,b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندي توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a\,\overline{R}\,b$ ټیك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.

د بینار اړیکو د ځل RS لاندي پوهیږو، چی $a(RS)b$ ټیك اوټیك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی $a\,R\,c$ او cSb باور لري.

د بیناراړیکو ځل اسوځیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینار اړیکو څل په هیڅ توګه کوموتاتیو نه دی ، کله کله اړیکی R او S یو له بل سره بدلیدونکی وي ، دا په دې مانا چې

$$RS = SR$$

یوون اړیکی E په لاندې ډول تعریف دي: aEb ټیك هلته باور لري که وي، $a = b$. یا په بل ډول اړیکی E د ټولو هغو توکو جوړو (a,a) د $a \in M$ سره ډیری دی. دلته په روښانه توګه باوور لري: $E = E^{-1}$ او دیوه خوښی اړیکیR لپاره باور لري :

$$RE = ER = R$$

مورِ تش اړیکو 0 ته هم ګوته نیسو، چې د $M \times M$ تشډیري په څیر تعریف دی. د هر بیناراړیکي R لپاره په ډیري M کی باور لري:

$$0 R = R0 = 0 \quad \text{او} \quad 0 \subseteq R$$

مورِ کله کله د بینارو اړیکو سره مخامخ کیږو، چې د لاندې خویونو څخه څنی په کی باور لري

رفلکسیویتي: $a R a$ د ټولو $a \in M$ لپاره دا په دې مانا چې $E \subseteq R$

ترانزیتیویتي: له $a R b$ او $b R c$ څخه لاس ته راځي، $a R c$ دا په دې مانا چې $RR \subseteq R$

سیومتري: له $a R b$ څخه لاس ته راځي $b R a$ دا په دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مانا چې $R^{-1} = R$

انتیسیومتري: له $a R b$ او $b R a$ څخه لاس ته راځي $a = b$ دا په دې مانا چې $R \cap R^{-1} \subseteq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم یو بینار اړیکي له دې پورته خویونو څخه کوم یو ولري یا ټول ولري، نو د دې اړیکو په څټ اړیکي R^{-1} هم دا خویونه لري.

اوبی (حل):
په عمل کی له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايکويوالنځ اړيکی :د بينار اړيکو څخه يی خورا مهمي اړيکی ايکويوالنځ اړيکي دي، چی په لاندې کی يي تعريفوو

۲ . ۲ . ۶ تعريف : يو ناتش دوه ځايزه اړيکی ~ په ډيري A کی ورته اړيکي يا اکويوالنځ اړيکی بلل کيږي، که د ټولو $a, b, c \in A$ لپاره لاندې اړيکی باور ولري.

الف) $a \sim a$ (رفلکسيو reflexiv)

ب) $a \sim b \iff b \sim a$ (سيومتري symetrisch)

پ) $a \sim b$ او $b \sim c$ څخه ($\iff$) $a \sim c$ لاس ته راځي . (ترانزيتيو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بيلګه:

الف) مساوات يا برابرون « = » د هر ډيري A لپاره يو ورته والی اړيکي Äquivalenzrelation دي.

ب) د $a, b \in Z$ لپاره $a \sim b$ ټيك هلته باور لري، که 2 د ګڼ $a - b$ پرويشونی وي.

ايکويوالنځ اړيکی په کلکه د دې سره تړاو لري، چی يو ډيری

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو بل سره په پردیو ټولګي ډیریو ویشي. دوه ډیري یو بل سره پردي بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانی غوڅي یي تشډیری وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشنه داسی لږغوندي روښانه وڅیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستړیکیدونکي وي، مګر لږ پوهږ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په 5 وویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چی ویشپردي دي: هغه ټولګی، چی 1 ولري او ټول $1 + n5$, ... , $1 + 25$, $1 + 5$ ، دوم هغه ټولګی، چی ۲ ولري او ورسره تر $2 + n5$ دریم: هغه ټولګی، چی 3 ولري او ټول ورسره $3 + n5$. څلورم هغه ټولګی، چی ۴ ولري او ټول ورسره $4 + n5$. پنځم هغه ټولګی، چی 5 او ټول ورسره $5 + n5$. چی دا په 0 سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول $0 + n5$ ولري. دا ډول شمرنی بیا د ګډونتیوري دنده ده، چی په همغه ډول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو- اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چی زه یي دلته په لیك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وڅغلوي او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګيويشنه په همدې وخت کې ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ايکويوالنځ اړيکو او ټولګی ويشنی ترمنځ راګرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څټ کيدونکی هم دی.

که R په A کی يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو A/R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکوR ته. هغه څيرونه چی د A او A/R ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونی په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلی شو، چی ټولګي ويشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځی. مور دا شمير پوهنيز په لاندې توګه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که ~ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی $a \in A$ ورته والی ټولګی يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توګه ورکړ شوی دی

$$[a]=\{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولګي [a] هر توکی b د ټولګي [a] نماينده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کیږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډیري A ورته - والی اړیکي وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وینا وې جوړه برابرارزښته یا جوړه مساوي ارزښته دي

(a) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

(b) $a \sim b$

(c) $[a] = [b]$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو یو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سیومتري او ترانز- یتیویتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) یوه لاس ته راوړنه ده یا تعقیب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دې امله نو $x \in [a]$ د $x \sim a$ سره برابرارز- ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.

په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخور یا هدفمند دی، که یو ډیریسیستم S د یوه په نامه ایندکشنډیري یا پیژندډیري A په مرسته په نخښه کړو یا روښانه کړو. د لته A یو (پاي یا ناپای) ناتش

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډيری دی، او هر ايندکس يا پيژندنخبنی $\alpha \in A$ يواځنی يو ډيری A له S څخه داسی ترتيب شوی دی، چی باور لري: $S = \{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعريف : د يوه ډيري $A \neq \emptyset$ د برخډيريو A يو سيستم $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ د د ډيري A يوه ټوټونه (تجزيه) بلل کيږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د ټولو $\alpha \in A$ د پاره

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ . ۱۳ جمله : R دې په ډيري A کی يو ورته اړيکي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته يو د A ټوټونی دی. په څټ يو په خوښه د A ټوټونه $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ يواځنی يو ورته والی اړيکي په A ټاکي، د کوم لپاره چی د ټوټونی ډيری A ټيك ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل يا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملی ۲ . ۲ . ۸ او تعريف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکی جوړوي. دا هغه اړیکی دي، چی رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چی نیمنظم په کی تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسی لوستل کیږي، چی a له b کوچنی او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کی خوندې ده یا a له b څخه مخ ته څی. که $a \leq b$ وي او $A \models b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چې a له b څخه کوچنی ده، په دې حالت کی a په b کی اصلي خوندې ده. په یوه ډیري Mکی دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوړ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $a \geq b$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیری، په کوم چی دوه توکی تل یو له بل سره انډولوړ وي، نو دا ډیری لایني نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره ترلی بلل کیږي.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او 'M

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمنځ یواځنی او په څټ څیره کونه f موجود ده یعنې

$af = a' \quad , a \in M , a' \in M'$

که له $a \leq b \ , a\, b , \in M$ تل $af \leq bf$ لاس ته را شي او په څټ، نوf د M او 'M ترمنځ یو ایزومورفیزم ispmorphism بلل کیږي، چې دا به وروسته هم بیا پوره وڅیړل شي او ډیرې M' , M پخپله ایزومورف نیممنظم ډیرې بلل کیږي.

که یوه نیممنظم ډیرې M په یوه نیممنظم ډیرې N کې ایزومورف خوندې وي، نو دې ته ایزومورف ځایونه یا خوندیونه وایو، که د M یوه ایزومورفه څیره کونه په 'N د ډیرې N برخه ډیرې باندې موجود وي او ډیرې 'N پخلپه نیممنظم ډیرې وي او که 'N په هغه نظم ترتیب وي ، چې له N ورته راپاتې وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نیمنظم ډیرې M د ډیرې N ، چې نسبت وخوندیونې ته نیممنظم دې، ټولو لاندیډیریو ډیرې 'N سره ایزومورف دې.

په ځانګړې توګه کیدی شي ، چې د ډیرې N لپاره پخپله ډیرې M ونیول شي یا راوړل شي.

د دې جملې د خوونې څخه تیریږو. په کوروش کې کتل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه نیمنظم ته په څټ اړیکی هم نیممنظمی دي.
د ټولو $a, b \in M$ د لپاره، $af = a', a \in M, a' \in M'$
سره $a \leq b$ ټیك او ټیك هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af \leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a ٬د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي .
د بیلګي په توګه ډیری 'N د ټولو د ډیري N لاندېډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندي ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندي یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۴ . ۱ جمله(مينيمال شرطونه) : هر د يوه نيمتنظيم شوي ډيري M ناتش لاندې ډيرى N يو مينيمال توکى (په N کى) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لويدونکى ځنځير پريکيدنى شرطونه):
د نيمتنظيم شوي ډيري M په را غونډه موخه هر لويدونکى ځنځير

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots.$$

د پايډيرو غړو وروسته پرې کيږي يا ماتيږي يا غوڅيږي. په نورو کليمو سره ، د توکو د هر لويدونکى ځنځير

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots.$$

سره يو ايندکس يا پيژند نخښه n شته، له کومى چى د دې ډيري ټول توکى برابر دي دا په دې مانا چى د n ورسته $a_n = a_{n+1} = \ldots$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ايندکشن شرطونه): د يوې
نيمتنظيم شوي ډيري M ټول توکى څه روښانه خويونه E لري. که دا خويونه په ټولو مينمال توکو (که داسى يو توکى موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالى، د ټولو توکو لپاره، چى له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خويونو a

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابندیدی شي یاني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چې یو بل ته ورته دي، د ښوونې یا اوبیونې څخه تیریږو.

ویناوې چې د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیرۍ N دې د یوه ډیرې M لاندې ډیرۍ وي. هر (ضرور نه دی چې په N کې خوندې وي) د M د توکۍ a د کوم لپاره چې شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د لاندې ډیرې پورته بند بلل کیږي یانې دا ډیرۍ په دې توکۍ سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیرې M کې هره د ټولو څنځیرونو ډیرۍ د ډیرې پوهنې په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیرې ټول ماکسیمال توکۍ په طبیعي توګه د M ماکسیمال څنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کې کتل کیدی شي. مور یې نوره رالنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه څیړل کیږي، څنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي n–ځایزې عملیې، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له دې څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړۍ Ring ، تن یا بدن Körper (engl. Field او په همدې ډول ټرونونو یا ټرنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چی لمړی له مورډ ورسره بلدو کارووونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دې لارې بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لارې دا مورډ ورسره بلدې کلیمې لنډې تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو څانګو لپاره بنسټیزه کلیمه، چی ډیره تر څیړنی لاندې نیول شوې ده هغه د الجبري اپریشن یا الجبري عملیې او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري نښلوني یا الجبري ګنډنې کلیمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مور. ځانونه په يوه دوئيزې کارونی په زياتون يا ځل رابندوو يا محدودوو. دا دوئيزې کارونی يا عمليي، په لرې موخه، هغه عملي دي، چی د يوه ډيري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډيري په يوه بل توکی c تنظيم يا څيره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، يعني دا د لاندې خويونو سره يوه څيرونه ده:

$$G\times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چی د ټولو $(a,b) \in G\times G$ لپاره يو c د G څخه، يعني $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چی باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \cdot b \longrightarrow c$$

په دې ټوليزه توګه په يوه ډيري کی د بينار يا دوه-ځائيز عمليي کليمی تعريف، په يوه ډيري کی د يوه ترنار ريليشن ternäre Relation يا درېځايزو اړيکو سره په همغه يا مساوي مانا دی.

يادونه: اپريشن die Operation، عمليه ، کارونه او يا نښلونه، ګڼړنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز-يشن die Komposition يا څنګ په څنګ اينښوونه يا بهتره ځنځيرونه تل همغه مانا لري، چی ما کله کله

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټرنه هم کارولی ده. د ډیرو نومونو کارونه، کوم چی همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شمیرپوهني ژبه هم باید پوره پراخه وي او په دې باور لرو چی کومه اشتباه په کې نه رامنځ ته کیږي.

مور دلته د نمونی په څیر یواځی یویزې کارونی یا عملیې په ګوته کوو. او ور پسی بیا نور سملاسی خپل اصلی موخه تر مخه نیسو. دا یویزې عملیې هغه عملي دې، چی د کارولو سره یی د ډیري توکي تغیر نه خوري، لکه د صفر سره طبیعی ګڼونو N_0 توکو سره، په زیاتون کی چی هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

$$a + 0 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N_0 \quad \text{د ټولو}$$

او یا په ځل کی ، چی د طبیعي ګڼډیري N هر توکي سره 1 ځل شي، یعني

$$a \cdot 1 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N \quad \text{د ټولو}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ ګروپ Gruppe:

که له يوې خوا د ټولګټونو، ريشنلګټونو يا رييلګټونو زياتون په پام کې ونيسو او له بلې خوا ريشنل يارييلګټونو د صفر توپيرې يا د صفر سره نامساوي توکو څل په پام کې ونيسو، نو دا ميندلی شو، چې دواړه نښلونعمليي يا نښلو- نکاروني د همغه يو بل سره په يوغږ شميرقوانينو لاندې دي. د بيلګې په توګه باور لري:

$(a.b).c = a.(b.c)$ او $(a+b)+c = a+(b+c)$

برسيره پر دې راويستلي يا استثنايي ګټونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1 ، کوم چې دې دوه ټرنو ته څانونه ناپيلی يا بې تاثيره نيسي. يعني:

$1 . a = a$ او $0 + a = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بالاخره باور لري

$$(-a) + a = 0 \quad او \quad (1/a).a = 1$$

دا په دې مانا، چې هر ځې a ته یو ځې á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل ننبلونی یا ننبلونعملیي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چې دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو ترنعملیو څخه خپلواك وځیږو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دې، چې څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه ننبلونه یا ترنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چې هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا ځیره شي او دې پورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ویلشوو قوانینو لاندې پرتې دي یا په بل عبارت دا پورته قوانین په کې باور لري.
دا نښلونه د یوه ناپیلی سومبول ° سره ښایو.

یادونه : دا سومبول له خپل ځاي جګ لیکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټیک منځ کې که ولیکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعریف : یو ګروپ دیوه ډیري G او یوې ټرني یا عملیي ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې ډیري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) یواځنی یو د a° b سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسی تنظیم شي، چی دا لاندې اکسیومونه پوره کړي:

اکسیوم ۱ - اسو څیاتیو قانوباور لري

د ټولو a,b,c ∈ G لپاره (a° b)° c= a° (b° c)

اکسیوم ۲ - یو ناپیلی توکي e ∈ G شته، د ° ټراو سره ، د کوم لپاره چی باور لري

a° e= e ° a = a

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په څټ توکی á شته، د کوم لپاره چې لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو ګروپ کموتاتیو یا ابل ګروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولo $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که ګروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو ګڼون یا تعداد $|G|$ د G نظم بلل کیږي.

د ګروپ ټاکنټوټو پورې د ډیرې G ترڅنګ د ګروپټرنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.

یو ګروپ نو په دې توګه د یوې جوړې $(G, \circ)$ سره په نخښه ګول ګیږي. دا چې ګروپټرنه ډیر واړه په دې اړوند

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځای یواځی G لیکل کیږي. ګروپټرنه تر یوې اندازې پورې د ګروپځل یا ګروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې توګه دا توکی a° b د توکو a او b د ځل په نامه هم یاد کیږي. په یوه نا ابل - یا ناکموتاتیوګروپ کی دې د توکو ترتیب یا لړیپرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه نا ابل ګروپ کی په ټولیزه توګه a° b له b° a سره توپیر لري .

اکسیوم۱ را په ګوته کوي، چی په ډیروارہ ځلولو کی په نوکانو کی بندونه یا راګیرونه پورې اړه تیا نه څرګندیږي. له دې امله کیدی شی ، چی له نوکانو ایښوولو څخه بیخی تیریدنه وشي او د بیلګې په توګه د a° (b° c) لپاره په ساده توګه لیکو

a ° b ° c

۳ . ۱ . ۲ بیلګی :

اول - د ټولو ټولګټونوډیری Z د ورسره بلد زیاتون سره، چی د کروپټرنی په څیر یی نیسو، یو ابلګروپ (+;Z) جوړوي. دلته بیا له زیاتونګروپ څخه غږیږو، په همدې توګه د ریشنلګټونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسیوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په څټ توکی á

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمکچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروااینځ څیرونو (څرخون، ځایبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هنداروونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چې دریمه کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وي نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګټونو ډیری *Q او د ټولو ریيلګټونو ډیري *R توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو *Q او *R ځلوونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګټ 1 / a په څیر لیکل کیږي.

څلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو څیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه څیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو څیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی څل دی. د هر درې څیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمټ څیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري.
بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د څیرونې f ، هغه f ته په څټ څیرونه f^{-1} وټاکل شي. ډیرې S_M د یو په بل پسې د څیرونو خلونې یا ضربوني له املې یو ګروپ جوړوي، چې د ډیرې M سیو-متري ګروپ بلل کیږي.
که په خانګړي توګه ډیرې M ډیرې $\{1,2,3,...,n\}$ وي، نو دا اړونده سیومتري ګروپ څیفرونه یا ګڼونه $1, 2, 3, ..., n$ په ساده توګه د S_n سره په نخښه کوو. هره څیرونه $f \in S_n$ د ګڼونو $1,2,3,...,n$ پرموتیشن یا بدلون دی. که $f(1) = a_1$ ، $f(2) = a_2$ ، ... ، $f(n) = a_n$ باور ولري، نو f د څیرې ګڼونو پرلپسې لړۍ $a_1, a_2, ..., a_n$ یواځنۍ ټاکلی ده. مور لیکو $f = (a_1, a_2, ..., a_n)$، که د بیلګې په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2,3,1)$, $g = (3,2,1)$ نو لاندې خلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f \circ g = (1,3,2) \quad \text{او} \quad g \circ f = (2,1,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بیلګه ښایي، چې S_n د $n = 3$ لپاره ابل ګروپ یا کموتاتیو ګروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولګټونه ، نسبت و ځلونی یا ضرب ته ګروپ نه جوړوي، ځکه چې د بیلګې په توګه و 2 ته کوم ټول ګڼ á وجود نه لري، د کوم لپاره، چې $2.á = 1$ باور ولري.

د ګروپ د اکسیومونو څخه کیدی شي ، چې په لاندې کې یو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابیلي کړو. په لاندې کې دې G تل یو ګروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چې اکسیومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $a^\circ á = e$ څخه $á \circ a = e$ لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و a' ته د اکسیوم۳ له مخې یو $a \in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی. د اکسیومونو۱ او ۲ په پام کې لرلو سره لاس ته راځي

$$a \circ a' = e \circ (a \circ a') = (a'' \circ a') \circ (a \circ a') = a'' \circ ((a' \circ a) \circ a')$$
$$= a'' \circ (e \circ a') = a'' \circ a' = e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a^{\circ} e = a^{\circ} (a' \circ a) = (a^{\circ} a')^{\circ} a = e^{\circ} a = a \quad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي جمله: ټینك یو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسیوم ۲ او اکسیوم ۳ کی غوښتل کیږي. همدا اوس له $x^{\circ} a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بیا په څانګړي توګه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^{*\circ} e = e$$

دا په دې مانا چي e یواځنی ټاکلی دی. که بیا هم ورپسی باور ولري $x^{\circ}a = a$ د یوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسیوم ۳ له امله یو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^{\circ} e = x^{\circ} (a^{\circ} a') = (x^{\circ} a) \circ a' = a^{\circ} a' = e \quad *$$

دا په دې توګه د اکسیومونو سره یواځنی ټاکلی ناپیلی یا بی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاثیره د ګروپ G توکی e د ګروپG «یوی توکی» بلل کیږي.
په زیاتونډوله لیکلي ابلګروپ G کي ناپیلی توکی e د G «صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کي a د a' له لارې یاد a سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

دا توکی a' د a « په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ–عملیي یا د ګروپټرنی زیاتون ډوله ولیکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او د a په څټتوکی د a- سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $(a^{-1})^{-1} = a$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مخې لرو، چې a و a^{-1} ته په څټ توکی دی، چې په دې توګه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \qquad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه ګروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چی x دa او b سره یواځنی ټاکلی . په څټ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a)\ b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په ریښتونی یو اوبی یا حل دی. په همدې توګه دوهم برابرون هم پاي کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چې داپورته د ګروپ تعریف لږ وغزوم

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په دې توګه ګروپوئيد او نيمګروپ تعريف کړم. دا کار په زياتو ادبياتو کې لږې سر ته رسيږي، خو داسې تعريفونه يې هم په پوهيدلو کې ستونځې نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چې مور لږې د ګروپ کليمه باندې وپوهيږو، چې بنسټيزه ده.

۳ . ۱ . ۹ تعريف : يو ډيرې G ، چې نسبت و يوه اپريشن يا ګڼنې يا عملي ° ، چې مور يې دلته د خپل عملي « . » په څير ښايو، ته رابند وي، نو دې ډيرې ته ګروپوييد وايو، يانې که د هرې جوړې (a,b) د a ,b ∈ G لپاره يو توکی c ∈ G موجود وي ، د کوم لپاره چې باور ولري a.b = c ليکنه يې په لاندې توګه ده (G , .) .

دا د ګروپوئيد کليمه لږ را تنګوو او نيمګروپ تعريفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ تعريف . هغه ګروپوئيد G، په کوم کې، چې پورته د ګروپ اکسيوم ۱ باور ولري يا نې خپل يې اسو-ښياتيو وي، نيمګروپ بلل کيږي، چې په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوؤن کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې نیمګروپ همغه ګروپ دی، دا لاندې جمله یې روښانه را په ګوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمګروپ G هلته او هلته یو ګروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e موجودوي، چې لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو $a \in G$ لپاره $ae = a$

او دا توکی e داسی وټاکل شي، چې د هر $a \in G$ لپاره کم له کمه یو ښی په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چې غوښتنی

$$a \cdot a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي، خو دا مو وښوول، چې ګروپ جوړوي. اوس دې یو نیمګروپ G راکړ شوی وي، چې پورته نیونی پوره کوي. دا غواړو وښایو، چې e په G کی یو کین یویتوکي هم دی. که د a^{-1} سره د a ښی په څټ توکی وښایو ، نولاس ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د برابرون دواړه خواوې د یوه و a ته په څټ توکي سره ځل کړو او د نیمګروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم څخه چې د حلونکی یا اوبیوونکی اړیکی $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګڼ یویتوکي e' او ښی یویتوکي e'' رانیسو، نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت څخه دا اوبي یا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چې په دې توګه د G یوي (یویتوکي) e موجودیت او یواځنتوب وښوول شو.

بیا دې a^{-1} د یوه توکی $a \in G$ ښی په څټ توکی وي.

که برابرون $aa^{-1} = e$ له کیڼ لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په څټ توکي د اخرني برابرون څلولو یا ضربولو څخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چې $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا توکی a^{-1} ته له دې املې یو کین په څټ توکی هم دی.
لکه د مخې تیرې جملې د ثبوت په توګه، کیدی شي ساده وښوول شي، چې د a هر ښی په څټتوکي د کین په څټتوکی سره پریوځي یا هغې سره ورته دی.
په دې توګه په G کې د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټتوکي موجودیت په یواځنی توګه تضمین دی.
د جملې د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چې توکي

$$x = a^{-1}b \quad \text{او} \quad y = ba^{-1}$$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښایي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چې $ax = xa$ دی، نو له کین څخه یې د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای یا *

د ابلګروپ د څیړنې لپاره، د ځل عملیې په ځای د زیاتون ګڼنه یا عملیه په کار اچوو، چې ناپیلی توکی یې 0 دی او هر توکی a ته په څټ توکی یې د a- سره په نخښه کوو. دلته هم همغه پورته جمله کارووو کیږي، خو د ښی یویتوکي لپاره 0 صفر یوې توکی دی او ښی په څټ یې a- دی. د په څټ عملیې یواځنتوب

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه نیمګروپ بیلګه چې ګروپ نه وي.
که د طبیعی ګڼونوډیری N پام کی ولرو، نو دا ډیری د زیاتونعملیي ته نیمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چې په دې ډیري کی، په هر حالت کی کمون نه دی تعریف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو ځخه ګروپ جوړوو، نو باید دا مو پوره په پام کی وي، چې دا ګڼونډیری د صفر توکی ونه لري، ځکه چې په صفر پرویشنه نه ده تعریف.

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسی حال کی چې د ګروپ اپریشنونه یا ګروپ عملیي یواځی له یوه ټرونعملیي ځخه منځ ته راځي، اوس دوه عملیي ځنګ په ځنګ راوړل کیږي، چې په ورسره د ګڼو-نشمیرني بلد ډول، چې زیاتون «+ » او ځل یا ضرب « . » سره ښوولکیږي، تکیه کوو. که له ریشنل ګڼونو ځخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمیر قاعدو ځخه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته ذهنیت، لکه په ګروپونو کی، نوي الجبري جوړ-
ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ **تعریف** : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی څیره کړي، چی لاندې باورې کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل ګروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باورې کیږي

۱ - د زیاتون اسوځاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ - د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b+a$

۳ - په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $0+a = a+0 = a$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ - هر توکی $a \in F$ ته یو توکی -a په F کی موجود

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $a+(-a) = 0$ سره ، د کوم سره چې 0 په F کی صفر توکی دی.

د F توکو د ځل یا ضرب . لپاره باور لري

۵ - اسوځیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ، چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a' د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون

$(b+c).a = b.a + c.a$ او $a.(b+c) = a.b + a.c$

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$

که یواځې د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب وغوښتل شي، نو F ځای کړی. بللل کیږي.

که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی

۱۰ - د ځل کموتاتیو قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a \cdot b = b.a$
نو F یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی کموتاتیوکړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه یوه کړی یا تن هم د $(F.,+,.)$ په ځای د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو ab. ډیر واره د «بدن» یا «تن» لاندې کموتاتیو بدنونه پوهیږو، په داسی حال کي، چی ناکموتاتیو بدنونه، «کاږه بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیتو بدنونه تر څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکیسوم ۵ له امله کیدی شي، چی نوکان نور هم پریښوول شي یا تیریدنه تري وشي یا ونه لیکل شي. د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد یا پریکړې یو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه څل عملیه د کړښو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توکه $ab+c$ لیکل کیږي. دا ساده‌والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F یا همداسی د کړی R ناپیلی توکی وزیاتون ته صفر‌

(c) ketabton.com: The Digital Library

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په څټ توکي a- و a ته منفی توکی بلل کیږي. د b+(-a) په ځای لنډ لیکو b - a او دا کارونه د a او b کمون بولو.

باور لري a+(b - a) = b او b - a د ۳ . ۱ . ۸ له مخی د برابرون a + x = b یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري -(- a) =a او -a-b= (-b)+-a=-a+(-b) =-a-b (a+b) -.

دا د F*=F\{0} ځلګروپ ناپیلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوګي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دي ته ضرورت نه لري چی یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلګي

الف – د ریشنلګنونو ډیری Q او همداسی د ریبل ګنونو ډیري R په ورسره بلدو ټرنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسګنونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توګه یا ډول یو کملکس ګڼ a دا لاندې بڼه لري $a = a_1 + a_2 i$ د ریبل ګنونو a_1 , a_2 سره او

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایماګیناریوون i سره، د کوم لپاره چې $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a ریيل برخه او a_2 د a ایماګینار برخه بلل کيږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون،
کمون او ځل یې په څرګنده توګه په لاندې ډول روښانه دي
یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i ,$$
$$a\, b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس
ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی. په دې پسې تړلي
لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \bar{a}b = \bar{a} \cdot b , \quad \bar{\bar{a}} = a ,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی ریيلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$
د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $|a = 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $|a\bar{a} = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $a = \bar{a} / aa \in C$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چې $a = a_1 + a_2 i$ د نامنفی ریيلګڼونو ریښه ارزښت
دی. $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چې

$$|a| = +\sqrt{a^2 + a^2}.$$

ریيلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چې ایماګینار یې ورکیږي: کمپلکسګڼ ټیك هلته یا هلته او
هلته یو ریيلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړیو لپاره بیلګې:

الف –د ټولو ټولګڼون ډیری Z یوه کموتاتیو کړی ده، د ٔیوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چې د بیلګې په توګه ۲
په Z کی نسبت و خل ته په څټ نه لري. یعنی $1/2$ په Z
و 2 ته په څټ توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددي لپاره بیلګه ده، چی
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بڼې افاده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F$, $i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کیږي د یوې نامعلومی x سره او چې ځلووني یا ضریبونه او یا کوایفځینتونه یې له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د پولینوم $f(x)$ درجه بلل کیږي.

نخښونه یې: ګراد $\text{Grad } f = n$

که حتی $a = 1$ وي، نو $f(x)$ یو نورمي شوی پولینوم normiertes Polynom بلل کیږي. د صفر درجې پولینومونه ثابتی دی د $a \in F$ $a \neq 0$ سره. صفر پولینوم $0(n=0,a=0)$ سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.

د ټولو پولینومونو $f(x)$ ډیری، چې ځلووني یی له بدن F څخه وي د $F[x]$ سره په نخښونو یا په نخښه کوو. په $F[x]$ باندې زیاتون (په ورکړشوی حالتکي د صفرځلوونو سره) او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x+a_2x^2+,,,+a_nx^n)+(b_0+b_1x+ b_2x^2+...+b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x +...+(a_n+b_n)x^n ,$$
$$(a_0+a_1x+...+a_mx^m).(b_0+b_1x+...+b_nx^n)$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+$$
$$...+a_mb_nx^{n+m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و زیاتون « + » او ځل « . » ته F[x] یوه کړۍ ده، د پولینو1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیږی F[x] پولینوم کړي په F باندې بللکیږی، د ناپیژنونکی x سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګنونوګروپ یو ځانګړی ځای لري، له دې امله په ځانګړي څیرنی کی ځانګړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده :

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$ د $\text{Grad } f > 1$ سره د لاینې پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \qquad \text{او} \qquad \text{Grad } f = \sum_{i=1}^{m} k_i$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:

په يوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی يا حل :د $0+0=0$ اوی د اکسيوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0).a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی يا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په يوه کړی کي باور ري

$$a(-b) = (-a).b = -ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(-a)(-b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(-b) = a(b-(b)) = a \cdot 0 = 0$$

په دې پسی $a(-b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(-b) = -(ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخه مو د بدن کلیمه روښانه کړه، اوس غواړم، چې دا کلیمه له یوې ډلې لورې هم، یا بهتره، په یوه بل ډول تر څیړنې لاندې ونیسم او هغه په دې ډول، چې هغه مو ورسره بلد د ټرونکارونو نخښې ونه کاروم او دوه ذهني ټرونونه راوړم، چې وروسته کار مو بیا همداسې مخ ته بیولې دی:

۳ . ۲ . ۷ تعریف : د ډیري M هغه جوړښتونه بدن بلل کیږي، د کومو لپاره چې باور ولري:

۱ – په ډیري M کې دوه ټراونه ° او o تعریف دي

۲ – دلته (M ; °) کموتاتیو ګروپ دی.

۳ – دلته (M\e$_0$; o) یو ګروپ دی او e$_0$ یو ناپیلی توکی دی و° ته.

دا لاندې قوانین باور لري:

۴ – دیستریبوتیو قانون: ao(b°c) = (a° b)o(a°c)

(a° b)oc = (aoc)°(boc)

په یوه کموتاتیو بدن کې په دې برسیره باور لري

۵ – کموتاتیو قانون : aob = boa

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئیدG برخېړی یا لاندېړی U ګروپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه ترنه ° (ځل) د دې ډیرې U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخېړی U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګړنې عملیو یا ګروپترون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G, \circ)$ یو ناتش برخېړی U ټیک هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوی توکی وي. د $U \neq \emptyset$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^{\circ} a' \in U$ او e د U یوی توکی دی. ورپسی باور لري $a = e^{\circ} a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^{\circ} b \in U$
د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چی په U کی اسوځیاتیو قانون باور لري.
پس $(G , ^{\circ})$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېړیری A، نسبت و هغه په R کی تعیرف شوو عملیو ته، یوه لاندې-کړۍ بلل کیږي. دا په دې مانا، چی په A کی د R ټولې ټرنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R څلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کې تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېړیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېګروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چی له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړی R لاندیکړی پخپله R او د صفر- توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړی دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د ځل اسوځیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چی په یواځنی توګه (یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چی د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,...,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چی په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چی د a توګي څخه منځ ته راغلی یا جوړ څیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمړی داسی نیسو، چی $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفی توانونه هم پلي کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومی چی بیالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکی، چی د (3) دواړه خواو کی یی ځای نیولی د a^{-n} سره ښایو یا په نخښه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپG د یوه ټولګنیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a ټول توانونه د صفر او منفی پوتنځ پورې له دې امله د G یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کیږي او په {a} سره په نخښه کیږي.

په زیاتون لیکدود سره بیا د a دپوتنځ په ځای د هغه ډیرځلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کی د یوه توکي a توان یا پوتنځ په مختلف جګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګروپ توکي نه ورکوي يا نه رامنځ ته کوي، کوم چې د ناپاي ګروپ له موجوديت څخه جوتيږي. که د a ټول توانونه توپير ولري يا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپايډير نظم توکی بلل کيږي، په بل ډول بيا يو د پاينظم توکی بلل کيږي.

په دوم حالت کی يو ټولګن k او يو ټول ګڼ l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l}=1$ ، چيرته چې $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چې د يويتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت يا جګګڼ کوچنی مورډ a نظم بولو يا نومورو.

که a يو د پاينظم n توکی وي، نو بيا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^{\circ}, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول يو له بل توپير لري او هر ورپسي منفی يا مثبت د a پوتنځ a^k د يوه دې په (4) کی وَکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول ليدل کيږي: دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k = nq + r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړیکو $a = 1$ څخه لاس ته راځی:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راګرځیدونکي یا څیوکلیکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چی یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونګرپونه Tursionsgruppen یا پریودي ګروپونهperiodische Gruppen یا بیرته راګځیدونکي ګرپونه بللکیږي، په بل ډول ناپریودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کیږي.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راګرځیدونکی لاندیګروپ لپاره، رامنځ ته کیږي، چی ایا داسی یوه لاندېکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چي یو ورکړ شوی توکی ولري. R دې یوه ورکړشوې (ناضروري اسوځیاتیو) کړی وي اوa دې یو د هغی کړی په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول څلونه، په کومو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی چی ټیك فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه ګڼون یا تعداد ...,3 , 2 , 1 = n سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چی ځل باید ضرور اسوځیاتیو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کی نیول کیږي، چی په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د 3 = n لپاره ځل a(aa) او a(aa) او 4 = n لپاره ، او همداسی د 5 = n لپاره اوداسی ورپسی. هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه ، ورکړشوي پاي زیاتو ځلونه، کوم چی د ټولګنیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري. داسی د R توکی . چی په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور څخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکي یا لټوونکي د a څخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.

د یوه اسوځیاتیوې کړیR لپاره د یوه توکی a څخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو څخه جوړه لاندېکړی، چی په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ څخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګنیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه ګروپ هر لاندېګروپ د دې ګروپ یویتوکی لري، د

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوې کړۍ هره لاندېکړی په همدې توګه د دې صفر توکی لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړۍ R لاندېګړیو) غوڅی له دې امله تشډیری نه دی .

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېګروپونو یوه سیستم غوڅی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړۍ R د لاندېکړیو د یو سیستم غوڅی، د دې کړی لاندېکړۍ جوړوي. د لاندې نیمګړپونو یوه سیستم غوڅی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

مورږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پژندډیری یا ایندکسډیریIndexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوڅی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوي ځل bc په هر لاندې ډیري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی. او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډیری دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نیسو چی G دې یو ګروپ، کړی او یا په همدې توګه یو تن یا بدن یا کوم یو بل، مور ته څرګند، الجبري سیستم وي، کوم چی تراوسه پیژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښایو، نو یو مینیمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن یا لاندېبدن) شته، کوم چی M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي یا تولید شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوښی دی، د کومو څخه، چی کم له کمه یو دا په نامه ګروپ G موجود دی.

د مخه ویل شوي یا ورکړ شوي څیوکلیکي لاندې ګروپ تعریف د ټولیزولو له لارې ساده ښوول کیدی شي، چی لاندیګروپ {M } ټیك د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چی د په خوښه ترتیب د پایډیرو M توکو د پوتنځل په بڼه لیکل کیدی شي.

ټیك په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټولیزولو له لارې لاندېکړی، چی په R کی له M تولید ټولو توکو جوړ دی، کوم چی په M کي د پاي ډیرو توکو د ځلولو د زیاتون(د ټولګنیز ضریب سره) څخه انځوریدلی شي. په نااسوځیا- تیو حالت کی دې طبعآ ضریبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخی د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو $A_i , i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمي ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره $\{ A_i , i \in I \}$ لیکو، یا هم $\{A,B\}$، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کې هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړي هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسی ورپسی. نو په G کی داسی لاندېډیري M شته، د بیلګې په توګه پخپله G، د کوم لپاره چې باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدې ینکی سیستم بلل کیږي . تر هغی، چې G یو پاي د تولید-ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ)یو نیمګروپ، یو کړی) G څخه غږیږو، چې پایتولیدیدونکی ګڼون یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چی دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی څخه جوړ وي. دا ګروپ چی یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د څیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، څیوکلیك ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو-رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چی همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چی لروده.
د بیلګې په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کټمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نمونې ، چی په نیولی دې وي، چی که د ګروپ عملیي یی ټرونونه همغه وي، په داسی حال کی چی توکي له کومو چی ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.
په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او G' ایزومورف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، که د ګروپوئيد يواځنی او په څټ څيرونه f د ګروپو- ئيد G په ګروپوئيد G' داسی موجود وي، چی د په خوښه a,b ∈ G لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره څيرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي، د ايزومورفی څيرونی په څير يي په نخښه کوو يا يی ايز- مورف څيرونه بولو. د دوه ګروپوئيدو خويونه، چی يو بل سره ايزومورف وي، سيومتري خويونه دي، (هغه و ايزومورفی څيرونی ته په څټ څيرونه بيرته ايزومورف څيرونه ده)، او ترانزيتيو، دا برسيره پر دې ، که ځيرې څوک د ګروپوئيد کټمټ په ځان څيرونه ورسره وګنې، رفلکسيو هم دی. د ايزومورف ګروپوئيدو لپاره په ټولیزه توګه لاندې ليکدود کارول کيږي يا استعماليږي

$$G \sim G'$$

که چيرې د نورو الجبري جوړښتونو ايزومورفي مو هم مطلب وي ، نو مور به بيا هم همدا نخښه وکاروو.
طبعآ به د ګروپوئيد په ايزومورف څيرونه کی ټول هغه خويونه، چی په ګروپوئيد کی ليکل کيږي، لکه اسوځياتيو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په څټتوکي موجودیت، د ګروپوئید څیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. مور په ساده بیلګه سره ښایو، چی دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف څیرونه په G' وي. که a' او b' دوه د G' په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چی باور لري

$$af = f(a) = a' \quad , \quad bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , \quad (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون $ab = ba$ او د څیرونی د یواځنتوب څخه $a'b' = b'a'$ دی. له دې څخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی څیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

(c) ketabton.com: The Digital Library

څټکيدونکی نظم يا څيرونه موجوده وي، چی هغه څيرونه نسبت و زياتونګروپ ته ايزومورفيزم وي او هم د کړی و ځلګروپوئيد ته ايزمورفيزم وي. د ايزومورف څيرونی سره طبعآ کړی هغه خويونه، اسوځياتيو، او کمو- تايټو يا ليکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ايزومورف ګروپونو لپاره يوه په زړه پوري بيلګه، د مثبت ريبلګټونو ځليزه ګروپ او د ټول ريبلو ګټونو زياتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاريتم باندې تنظيم يا څيره شي، چی بنسټ يی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ يو ايزومورف څيرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي.
ايزومورفيزم له دې ريښتينيو څخه لاس ته راځي، چی د يوه ځل لوګاريتم دې د لوګاريتم د يوګونو فاکتورونو د زياتون سره برابر يا مساوي دی (د لوګاريتم او قوانينو لپاره دې ځما د شمير پوهنی کتاب وکتل شي).

مورِ اوس هغه رڼمخه په ګوته شوې پاملرنه په څيوکليکي زياتونګروپ کی رامخ ته کوو او په يوه بيلګه پيل کوو.
د ټولګټونو زياتونګروپ د يوه ناپای څيوکليکي ګروپ لپاره بيلګه ده، ځکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو ځله دی.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګټونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پاي د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.

ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیریږو (ثبوت یی په Kuroŝ کی کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګټونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.

او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی ګڼ ټول څوواره یو لاندېګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېګروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیري ګټونو n لپاره لاندېګړپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګټونو زیاتون ګروپ، لاندېګروپ A، چی یواځي د منفی ګټونو څخه نه وي جوړ، ځکه چی د هر ګڼ سره د هغی په څټ هم لري. n دې کوچنی طبیعی ګڼ وي، چی په A کی خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\,,\ 0 < r < n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنی څخه) ، دا په دې مانا چې دی $a = qn$ ، څه مو چې ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چې ګرپوئید G په ګرپوئید G' کی ایزومورف خوندې دی، او یا په G' کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپوئید G' په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.
سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چې د همغه توکي $a \in R$، چې په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډیري M باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت یي په R کی پروت دی ، ایزومورف دی.
د ټولو $x \in M$ لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت $a \in R$ سره، همغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.
د یوه په خوښه اسوځیاتیو، کموتاتیو کړی R کی پولینومکړی $R[x]$ پوتنځلړیکړی $R\{x\}$ کی ایزومورف خوندې دی.
پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر څخه توپیریدونکو ځلوونو یا ضریبونو سره، یو و $R[x]$ ته ایزومورف د $R\{x\}$ لاندېکړی جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کی، چی یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې برسیره اسوځیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چی دا همداسی په یوه اسوځیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی کی خوندي شي.
اوبی یا ثبوت: مونږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو، چې $a \in R$ او k یو ټولګې دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \quad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \quad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چې برسیره پر دې

$$\begin{aligned}[(a,k)+(b,l)](c,m) &= (a+b,k+l)(c,m)\\ &= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m\\ &= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m\\ &= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)\\ &= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)\end{aligned}$$

باور لري او ټیك په همدې ډول د دیستریبوتیو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډیری یوه کړی انځوروي. له (2) څخه ورپسی لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې کړیکی د یویتوکي ځای نیسی یا نمایندګي کوي. بر سیره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره ، چې د ټولو د $(a,0)$ فورمجوړو ډیری د ټولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړو(a,k) په کړۍ کی یو وR ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دې سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2)
استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
مور دا په ګوته کوو، چی دا له مور جوړه شوې کړۍ یواځنی
کړۍ نه ده(او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه)
خوندې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د
یوې کړۍ په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوځیاتیو یا
کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی
همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولونو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو
کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a
ټولګټونه دي او په ریښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای
ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3)
زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{a\in G} k_a a + \sum_{a\in G} l_a a = \sum_{a\in G} (k_a + l_a)a \qquad (4)$$

$$\sum_{a\in G} k_a a \cdot \sum_{a\in G} l_b b = \sum_{c\in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه یا تشریح دی، په کومو کې، چې m_c د ټولو صفر څخه توپیر څلونو $k_a\ l_a$ زیاتون په مانا دی، چې په ټولو a او b کې څغلیدلی وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چې د برابرونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چې په کینې لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پاې زیاتونونه د غړو په څیر پو له بل سره ځلیږي، او په ریښتونی د قانون

$$k_a a.l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې د ab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چې د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځاې راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانو او د هغه ثبوت چې د G په ګروپ کې د ځل اسوځیاتیو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مګر په پرینځیپ یا اصولوکی ستونځی نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کي ، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسې یو ګروپ G سره ایزومورف لاندېګروپوئید، د دې کړی د ځلوونکي ګروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له مور جوړ شوې د ګروپوئید G کړی د ټولګټونو ګروپوئیدکړی بلل کیږي.
که G یو نیمګروپ وي او یا ګروپ، خو نو د دې په ځای د ټولګټیزنیمګروپ او همداسی د ټولګټیزګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر ګروپ د یوه ډیري M په سیو-متري ګروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چی د M په ځای په ځانګړې توګه د ګروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي. دلته د ګروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیموو، چی یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړي. دا چې له $x \mid= y$ څخه هم $ax \mid= ay$ لاس ته راځي او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \to xa$ ګروپ G په ځان په څټ یواځنی څیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو پرموتیشن (پرموتیشن ځما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه توګه روښانه شوی دی) دی. د $a \mid= b$ لپاره په دې برسیره په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود– ونکی دي، ځکه، چې $1.a \mid= 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چې د ab پورې اړونده پرموتیشن د a او b پورې اړونده یوپه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ G ، د یوه ډیري M سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.
اوبی یا حل: د ثبوپ لپاره نیمګروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰ سره سم په یوه، د یوه اسوځیاتیو کړی R, په ځلیز ګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی خوندې کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه اسوځیاتویکړی R کی د یویتوکي سره خوندې کوو او د G سره یی په نخښه کوو، چی داد اخرنی کړی ځلیزه نیمګروپ دی. لکه څنګه، چی په G کی هم یو توکی 1 د 1.a |= 1.b سره له a |= b څخه موجود دی، نو د لغاتو پورې د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی دا نیمګروپ G د نیمګروپ سره پخپله، په دې ډیرG باندې، ایزومورف خوندي دی. له دې څخه د سرچینیز ګروپ G خوندیونه لاس ته راځي.

مور غواړو، چی دې ته ګوته ونیسو، چی د یوه ګروپوئید (په ځانګړي توګه یو ه نیمګروپ) په بل ګروپوئید (یوه نیمګروپ) کي خوندیونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه ګړی د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمګړپونو په ګروپ کی او کړی په یوه (ناضرورکموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه

هر نیمګروپ، ضرورپه یوه ګروپ کی، ایزومورفف نه شی خوندي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره بلد د لنډونی قاعدې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسی $ca = cb$ څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چی د لنډونی قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کی غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شرطونه، چی د نیمګروپونو په ګروپونو همداسی د اسوځیاتیو کړی په یوه (ناسو کمو[۸۸]تایتو) بدن کی د کموتایتو په حالت کی پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوې جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G کی دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G کی دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چی له

$$ax = bx \; , \; x \in S; \; a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشی. نو کیدی شي، چی G د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسی ابل ګروپ G کی د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چی د S هر توکی په G کی یو په څټ توکی ولري.

(۸) ناځی د کمو تایتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیریږو. دا د الجبر په درسی کتابونو کی کتل کیدی شي،

په دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل ګروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل ګروپ کي خوندې کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمګروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمګروپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کی میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوځیاتیو - هوکوتاتیو کړی R کی دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کي چې صفر او پرصفرویشنه نه وي موجود. نو کیدی شي، چې کړی R ایزومورف په یوه اسوځیاتیو-کموتایتو کړی R کی، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چې د N هر توکي په R کی یوه په څټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پریږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندېګروپ H دې ورکړ شـوي وي. که یو a د G په خوښه توکی وي، نو ممکنه ځلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د a sh تعریف شوي، د ګروپ G کینې اړخیزځنګ– ټولګی یا ګاونډی ټولګی(مور به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه a ∈ aH دی، ځکه چی لاندېګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري bH = aH ، دا داسی بللکیږي، چی د ګروپ G هر کینې اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که b = aH , h ∈H باور ولري، نو د په خوښه h',h'' ∈ H لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a\,h'' = b(hh'')$$

پس $bH \subseteq aH$ او $aH \subseteq bH$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې سره هر دوه کینې اړخیز ګاونډیتوالګي، یو د بل سره کتمټ دي او یا یې غوښې تشډیری دی.
مور ددې سره د ګروپ G یوه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړو، په لاندېګروپ H پسې، چې د یوه مخه یې کینې اړخیزو ګاونډیتوالګیو یو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کینې اړخیزه ټوټونه بلل کیږي په یوه لاندېګروپ H پسې. د دې ټوټوونو یاتجزیې یو ټولګی پخپله H دی:
د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښی اړخیزه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړی شو، په یوه لاندېګروپ H پسې، کوم چې له ښی اړخیز ګاونډېټولګی $ha , a \in G$ څخه جوړدی، که یو ګروپ کموتاتیو نه وي، نو کیدی شي، چې کینې ګاونډیټو-لګي او ښی ګاونډي ټولګی باندې د یوه ګروپ G ټوټونه د لاندېګروپ H پسې یو له بل توپیر ولري. په هر صورت دواړه ټوټونې د ټولګیو برابر ګڼون لري: ځیرونه چې د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی ځیره کوي، په څټکیدو-نکی یواځنی ځیرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کینې اړخیز aH ګاونډیټولګی په همغه ورته ښی اړخیز ګاونډیټو-لګي Ha^{-1} ځیره کوي او په څټ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۳ تعریف: د ګروپ G ټوټونه په لاندېکروپ H پسي ، د ګاونډیو ټولګیو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k.j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړيګن هغه ګڼ دی ، چی پرويشوني يی ساده پرويشوني وي، يعنی پخپله دا ګروپ او يويتوکی) څيوکليك يا په بل نوم، راګرځيدونکی دی.

دا بايد د په خوښه د هغه توکي جوړه څيوکليکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چی دا توکی له ۱ څخه توپير ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعريف: يو لاندښيمګروپ H د ګروپ G نورمالپرويشونی Nrmalteiler (يا اينواريانتي invariante Untergrupp لاندښګروپ) بلل کيږي، که د G کيڼ اړخيزه ټوټونه يا تجزيه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چی د هر a ∈ G لپاره (په G کی د دواړو برخډيريو يو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$a H = H a \qquad (1)$$

رامنځ ته کيږي. يا باوري کيږي. کيدی شي چی د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږيږو. په لاندې کی د نورمالپرويشونی يو بل تعريف ورکوو، چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې همدا اوس ورکړشوي تعريف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعريف : په ګروپ G کی توکی x او y يو د بل سره کونجوګيري konjugiert بلل کيږي، که په G کی يو توکی a داسی پيداکيدي شي ، چی باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسی هم ويل کيږي، چی له y څخه د x سره ، د a ترانفورميشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کی نور مالپرويشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کې ټول کونجوګيري توکی هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کی نورمالپرويشونی وي، او په ورزيات دې يا برسيره پر دې دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G يو په خوښه توکی وي، په H کی د (۱) پسی يا د (۱) له مخی يو توکی h' د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په څټ که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$ په H کی یو توکي h' موجود وي، کوم چی برابرون (۳) پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب(۲) پوره کړي، نو باور لري $Ha \subseteq aH$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی، چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $Ha^{-1} \subseteq a'H$ ته راځي او همداسی $aH \subseteq Ha$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون (۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U اوV په G کی یو د بل سره کونجوګیرkonjugiert بلل کیږي، که یو داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه توکو $u_1 , u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چې $u \in U$ د $u \to a^{-1}ua$ سره، یو ایزومورف څیرونه یا نظم $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه ګروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوګیر لاندېګړپونو سره یوځای پریوزی. په څټ: د ګروپ G یولاندې ګروپ H ټولې و H ته په G کی کونجوګیر لاندېګروپونه خوندي لري، نو له دې املە دا نورمالپرویشونی دی.

له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اصلي خوندیلرنی په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید، که هغه ټولی و هغی ته کونجوګیر خوندي ولري، د دې توافق یا یو په بل سرخوړنی سره . د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته کیږي، له کوم چی (۱) رابیلیدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د یوه ګروپ G د په خوښه نومالپروپشونو ډیریو غوڅی ، بیرته نومال پرویشونی دي.

اوبی : که D د $i \in I$, A_i غوڅی وي ، نو په هرترتیب D د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر دې د هر توکی ، چی یوه د D توکي سره کونجوګیر وي، په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چی په غوڅ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله : د یوه ګروپ G په خوښه نورمالپروپشونو سیستم څخه تولید یا راپیداشوي لاندېګروپ(پرتله ۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G یو نومرمالپرویشونی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوی دې نورمالپرویشونی $A_i , i \in I$ وي او د هغه څخه جوړ شوي یا تولید شوی د لاندې ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندې بڼه لیکل کیدی شي

$$b = a_1 a_2 ... a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j , j = 1,2,...,n$ سره . له G څخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)...(g^{-1}a_ng)$$

او دا چې

$$g^{-1}a_jg \in A_j \quad , j=1,2,...,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندې ګروپونه د هغی خپل نورمالپر- ویشونی دي. په دې ورزیات یا برسیره پر دې په هر ګروپ G کی یوونګروپ E د نورمالپرویشونی په څیر موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱۲.۶ تعريف : يو ګروپ ، چې نورمال پرويشونی يی يواځی يوونګروپ او پخپله خپل ځان وي، ساده بلل کيږي.

۳ . ۱۳.۶ جمله : يواځني ساده ابل ګروپونه، هغه څيو-کليکي ګروپونه دي، چې نظم يی پريمګڼ يا لمړی ګڼ وي.

اوبی : که يو ابل - يا کموتاتيو ګروپ ساده وي، نودا بيخي ناساده يا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چې په دې کي څيوکليکي لاندې ګرپونه بايد خوندې وي، نو دا پخپله څيوکليکي دی. يو ناپاي څيوکليکي لاندې ګروپ نااصلي يا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چې د ټولګټونو زياتون-ګروپ دی ، په هغه کي چې د جفت ګټونو ګروپ په ځان کی دننه يا خوندي لري. که يو پای څيوکليکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چې نظم يی n دی، نو د ټوټونی n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چې لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G څخه توپير لري.
د دې په څټ: ګروپ $G=\{a\}$ کيدی شي چې هيڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم يی يو پريمګڼ يا لمړی ګڼ وي. چې د لاګرانژ له جملی څخه ساده په لاس راتلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نور ې په دې هکله موضوعګاني په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زیات وخت او ځاي ونیسی. زما هئله هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایدیال او پاتي ټولګیکړی

Ideal und Restklassenring

یادونه: ی ما دا پاتیټولګیکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیټولکی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځمونږ په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرویشونی په ځاي د ایدیال کلیمه رامنځ ته کیږي.
په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوښتوکی ۱ سره په نخښه کوي یا ښایي. اوس د یوې کړی د « ایدیال»کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د R هر ایدیال Y په R باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چې د هر $r \in R$ کړیتوکی اړونده ایکویوالنټولګي $[r]$ بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخه‌پیرۍ Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ $(R , +)$ یو لاندې ګروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$. دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که $Y \neq R$ وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګې:

الف) دا د R یواځې د صفرتوکی څخه جوړ برخه‌پیرۍ $\{0\}$ د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی. او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که $R = Z$ د ټولګنونو کړی وي، نو ډیرۍ Y د ټولو جوړه ګنونو $Y = 2z$ د $z \in Z$ سره جوړ ډیرۍ د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګنونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in Z$ لپاره یو جوړه ګڼ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) که $R = F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایدیالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایدیال Y اصلي ایدیال بلل کیږي، که $Y = yR$ وي، د یوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چی یو $y \in Y$ داسی ټاکلی دی، چی د هر $z \in R$ لپاره یو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجودوي. داسی هم ویل کیدی شي : چی دا توکی y ایدیال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایدیال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري : $r - s \in Y$
په نخښوونه یی : $r \sim s$ یا $s \sim r$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چی ~ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایدیال و ي د $Y \mid = R$ سره او R / Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r] = \{ s \in R \mid s \sim r \}$ ډیری وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو R/Y به د زیاتون $[r_1]+[r_2]$ او ځل $[r_1].[r_2]$ سره د ټولو $r_1, r_2 \in R$ لپاره یوه کړی وي د یوې توکی [1] سره .

اوبی: لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی $[r], r \in R$ ډیری R په پردیو برخډیریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1], [r_2] \in R/Y,$$

نو دا باید وښوول شي، چی زیاتون

$$[r_1]+[r_2]=[r_1+r_2]$$

او ځل

$$[r_1].[r_2]=[r_1.r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا ورته ټولګي دي. که $s_1, s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r-s=y \in Y$ هم دي، د ټولو $i=1,2$ لپاره، د کوم څخه چی لومړی

$$\begin{aligned}[r_1+r_2]-[s_1+s_2] &= [r_1+r_2-s_1-s_2] = \\ &= [(r_1-s_1)+(r_2-s_2)] \\ &= [y_1-y_2] = [0] \in R/Y\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي. له دې املې زياتون + کره تعريف دی او [0] د ابل د ګروپ R / Y يو صفرتوکی دی و ټرنی يا نښلونی يا عمليي + ته.
په R / Y باندې ځل . هم کره تعريف دی، ځکه چی

$$r_1r_2 - s_1s_2 = (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2$$
$$= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2$$
$$= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y$$

له کوم چی $[s_2] [s_1] = [s_1s_2] = [r_1r_2] = [r_2] [r_1]$ لاس ته راځي. سړی په دې پسی ټرلی په دې باور راوړی شي، چی R / Y (د کړی د تعريف سره سم) يوه کړی ده د يوې توکی [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعريف : دا کړی R / Y د R يو د پاتی-ټولګيو کړی و ايډيال Y ته بلل کيږي.

۳ . ۷ . ۷ تعريف : د کړی R يو ايديال M ماکزيمال ايديال بلل کيږي، که $M \models R$ باور ولري او Y، د R يو بل ايديال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې يوه کموتاتيوه کړی وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.

ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبی:

الف) دا چی Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \ldots \subseteq Y$$

دې د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u, v \in W$، د $i \in I$ سره موجود دی د $u, v \in Y_i$ سره، ځکه چی ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$، همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$ دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$ سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1 .

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته تري اځي ، چې M د R یو ماکزیمال ایدیال دی. دا Y خوندي لري.
ب) وي دې $|[r]| = [0]$. نو $M + rR$ د R یو ایدیال دی، کوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R یو ماکزیمال ایدیال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R یوی په $M + rR$ کی پروت دی، دا په دې مانا چې $1 = m + rs$ د توکو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.
له دې امله $[1] \in R / M = [r] [s]$ دی.
او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.
نو پاتې ټولګی کړی یو بدن یا تن دی. څ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بیلګې

اول : د ټولګټونو Z په کړی کی Y د ټولو جفتو ګټونو ډیری ماکزیمال ایدیال دی. پاتیټولګي بدن Z / Y یی د دواړو پاتیټولګیو $[0]$ او $[1]$ څخه جوړ دی. دا نو له دې امله دوه توکی لري او د $Z / 2Z$ سره په نخښه کیږي.
دوم : په پولینومکړی $R = F[X]$ کی په بدن یا تن F باندې د نا ټاکلی یا مجهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د مخ ته تیر تعریف له مخی، څکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in R$$

نو $[f] = [f(X)]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا څیرونه $f_0 \in F \rightarrow [f_0]$ د بدنونو یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1 سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ څخه موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی.

ب) R د u څخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایدیال کي خوندي دی یا په بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیالکی خوندي نه دی).

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت یا اوبی: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځی.
که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه وي، نو د جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو R = uR او 1 = uv د یو v ∈ R لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن (a) => (b) ساده دی. څ چ ښ و (څه چی د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یو ناتش برخډیری U لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګي:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندېکړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیږی Y د Z لاندې کړی ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په ټولیزه توګه یوه لاندېکړۍ U یویتوکی نه لري، نو ضرور دا ده چې د لاندیکړۍ د « ایدیال» کلیمه رامنځ ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دې د R یوه لاندې کړۍ وي. د U دا ناتشېیری Y د لاندې کړۍ U یو ایدیال دی، که د ټولو $y_1 , y_2 \in Y$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنی: U دې د R یوه لاندېکړۍ وي او Y دې د کړۍ R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره$\}$
یوه د لاندېکړۍ ده.

پ) $(U + Y) / Y$ د پاتیټولګیکړۍ R / Y ، لاندېکړۍ ده.

ت) د R / Y د هر لاندېکړۍ T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د R لاندې کړی ده.
ټ) د R/Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-}/Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴
څخه ټرلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 , \ r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،
د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$r_1 . r_2 = (u_1 + y_1)(u_2 + y_2)$$
$$= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوښونې د کورکار دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر ستړکلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ ټرونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو ټرنی) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنځ یا توانډیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولګه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د ټرونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دي، چی دا ډول شمیرقاعدې لړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر څیړنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، چی د عملي په ډول نه پیچوُبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چي دا عملیي باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چی د شیا ئنو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چي عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چی یو بل سره « ټرلکیدی» شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توګه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو ټرون یا ټرنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلګې په توګه په ګڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم ګڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیي)،غوڅی ∩ ، ټولنه ∪ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a , b , c

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره لاندې اړيکي باور لري:

۱ – اسوځياتيو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ – کموتاتيو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$
$$a \cup b = b \cup a$$

۳ – رازغمني يا راکښنی يا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$
$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ – ديستريبوتيو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ – د صفر او يوې خويونه

$$a \cup 0 = a \ , \ a \cap 0 = 0$$
$$a \cup 1 = 1 \ , \ a \cap 1 = 1$$

۶ – د کمپليمنت يا پوره کيدونکی خويونه

$$a \cup \acute{a} = 1 \ , \ a \cap \acute{a} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړیکي د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کیږي (د اکسیوم تعریف ځما د شمیرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . مور تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، ځکه چی برخسیستمونه شته ، له کومو چی بیا دا نور اکسیو- مونه لاس ته راتللی شي.
په دې برخه کی ددې مینیمالسیستمونو کارونی یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمیر قوانین باور ولري.

که د توان یا پوتنځ ډیری P(M) په پام کی ونیول شي، د هغه د غوڅې ∩ (انګریزي meet)، ټولنه ∪ (join) او کملپلیمنت جوړونی سره او Ø = 0 , M = 1 سره نو دا د ∩ پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د ∩ لپاره ∧ هم کارول کیږي او د ∪ په ځای ∨ او د á په ځای $\bar{a}$ هم کارول کیږي.

۴ . ۱ . ۲ بیلګه : یو د بول الجبر باید تل یو صفر 0 او یو1 (یوی) خوندې ولري. داکیدی شي ، چی یواځې د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$ باندې عملیې $\cap, \cup, '$ په لاندې ډول تشریح کیږي:

$$0 \cap 0 = 0,\ 0 \cap 1 = 0,\ 1 \cap 0 = 0,\ 1 \cap 1 = 1$$
$$0 \cup 0 = 0,\ 0 \cup 1 = 1,\ 1 \cup 0 = 1,\ 1 \cup 1 = 1$$
$$0' = 1,\ 1' = 0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمایل کیدی شي.
له دې سره نو جوړښت یا سترکچر $(B, \cap, \cup, ')$ یو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ ته کیږي: که په همغه وخت کې اکسیومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$ د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسیو-مونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چی له اکسیومونوڅخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدیشي چی نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه » .دلته یوه ریښتیا وینا بیرته ریښتیا («د بول د الجبر یوه جمله ») وینا باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلیږي، ځکه چې د سیستم دوه ګونوالی ساتلی پاتې کیږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرینځیپ متن دی: د هرې جملی
د ثبوت سره د هغې جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د
اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ – باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر
ټولو توکو a لپاره
اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a')$$
$$= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ – د a کمپلیمنت a' د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی
دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$
نو دی $c = a'$.
اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی . څه چی د ښوولو وو (لنډ : څ ښ وو).

۳ – صفر 0 او یوی 1 په بول الجبر کی یواځني ټاکلي دي، دا په دې مانا چی دا یواځني تو کی دي، د هغو خویونو سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.

اوبی : د یوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکوa لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره کیږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$،له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$ او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبیونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$ او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپلیمنت د یواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b)' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت : د دوه ګونټرینخټ له لارې بسیا کوي، که یواځي یوه له دې دوه ګونو ویناو څخه وښایو. دبیلګې په توګه کینه. د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$

$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b') = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$

$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتځنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،

چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپلیمنټ دی.

۶ – د اسوڅیاتیو و کموتاتیو قوانینو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوڅي (ټولنې) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای لرونکې د لږپرلپسې څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی ، چې یو توکي یواځي یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښې ته ورته

لیکل کیږي: $\bigcup_{i=1} a_i$ همداسې د $\bigcap_{i=1} a_i$

د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_1 \cup a_2 \cup .. \cup a_n$ لپاره.

۷ – دیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په ریښتونی داسی

$$(\bigcup_{i\in I} a_i) \cap (\bigcup_{j\in J} b_j) = \bigcup_{i\in I, j\in J} (a_i \cap b_j)$$

او

$$(\bigcap_{i\in I} a_i) \cup (\bigcap_{j\in J} b_j) = \bigcap_{i\in I, j\in J} (a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پاي ایندکسډیري (پیژندډیري) دي

۸ – له $a \cap x = a \cap y$ او $a \cup x = a \cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x \cap (x \cup a) = x \cap (y \cup a) = (x \cap y) \cup (x \cap a) =$$
$$(x \cap y) \cup (y \cap a) = y \cap (x \cup a) = y \cap (y \cup a) = y$$

پای.

مورډ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی مورډ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه یواځي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ یو بییکتیوه څیرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوڅی) د تنظیم شوو توکو ټولنه (غوڅي) تنظیم دي، او د هر توکي کمپلیمنت د ورسره تنظیم شوي توکی کمپلیمنت دی، نو په دې توګه کیدی شي ، چی دواړه الجبرونه «سوچه شمیریز» مساوي و لیدل شي. یو داسی بییکتیو څیرونه $f : M_1 \longrightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم ګوته ورته نیولی ایزمورفیزم Isomorphismus نومیږي او دا راوړل شوي شرایط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کینې لور ', ∪، ∩ د M_1 عملیي او په ښي لور د M_2 عملیي. نخښلونی یا کارونی دي.

د نور الجبرونو په څټ یا خلاف کیدی شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه یو د یوه پام یا نظر امکانات برابر شي. د داسي یوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه باید برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ یو ایزومور-

(c) ketabton.com: The Digital Library

فيزم موجود وي، يعنی که دا ايزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره يی په ليو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر يو د بول الجبر د يوه پاي ډيري M د برخډيريو څخه جوړ د بول د الجبر سره ايزومورف دی . په ځانګړي توګه د يوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم يا ډول دی ، او هر دوه پاي د بول الجبرونه د برابر ډيرو توکو سره يو د بل سره ايزومورف دي.

که څه هم مونږ د پاي بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا بايد په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورکړ شوي خويونه يا کرکتريي د ناپای ډيرو توکو ډيري لپاره باور نه لري . ناپای ډير د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډيري د ټولو برخډيريو د الجبر سره ايزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډير د بول الجبرونه کرکتريزه کړی شو، لاندې کليمو ته اړ يو. M دې يو ډيری وي. يو سيستم K د M برخډيريو ډيريبدن يا ډيريتن بلل کيږي، که K د A, B سره $A \cup B , A \cap B$ او $A \cap B'$ هم خوندې ولري. د بيلګې په توګه ټول د توانډيری ډيريتن دی. K دې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډيري M برخليږيو يو ډيريتن وي، د $M \in K$ سره.
په K باندې کيدی شي بيا يو بول الجبر توضيح شي، په
کوم کي چی ∪ د ټولنی ،∩د غوڅی ، تشډيری Ø د
صفر ، يو ډيری M د يوې ډيری، 'A د $A \in K$
کمپليمنت M - A سره نيسی ، يعنې دا ډيري تيوريتيکي
کومپليمنت. داسی يو الجبر ډيريبدن الجبر هم بلل کيږي او
په ټوليزه توګه د M هر برخليږی خوندې نه لري. اوس دا
لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې
GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستون Stone جمله) هر د بول الجبر د ډيريتن الجبر سره ايزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتريزه کولو سره په اړوند ، کيدی شي چی د بول د الجبر سيده ځل ګټور وکارول شي يا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعريف : V او W دې دوه د بول الجبرونه وي، چی د هغی بنسټيز ډيري هم په V او W سره په نخښه کوو. نو دا د V او W سيده ځل $V \times W$ د بول الجبر دی. د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډيري، چی $v \in V$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $w \in W$ وي، د لاندي عملیو سره

$$(v,w)\cap(v_1,w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$
$$(v,w)\cup(v_1,w_1) = (v \cup v_1, w \cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی $(0,0)$ او د یوي توکي $(1,1)$ سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د ګرانو لوستونکو دنده وي، چی وښایي، چی سیده ځل $V\times W$ په ریښتیا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توکو باندې، یعني $B = \{0,1\}$ د ټرونونو

$$0 \cap 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$
$$1 \cap 1 = 1, \quad 1' = 0, \quad 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دخپل ځان سره سیده ځل پوهیږو. د B^n توکی منظم n–ګونی دې له توکو $0, 1$ او د بول ټرونونو کمپوننت ډوله تشریح شوي. دا په دې مانا چی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_1 , ...,a_n) \cap (b_1,...,b_n) = (a_1 \cap b_1,...,a_n \cap b_n)$$
$$(a_1,....,a_n) \cup (b_1,...,b_n) = (a_1 \cup b_1,...,a_n \cup b_n)$$
$$(a_1,...,a_n)' = (a_1',...,a_n')$$
$$1 = (1,...,1)$$
$$0 = (0,...,0)$$

د بیلګې په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بیلګې لیدل کیږي، چې په B^n کی ساده شمیرنه کیدی شي. له بلی خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملی ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنی لپاره کیدی شي، چې دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

مو ږد فنکشنونو لپاره، د ټرونونو په تعریف پیل کوو، چې ارزښتډیری یې د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه څیرونو

$$f , g : M \longrightarrow V$$

لپاره لاندې عملیي $\cap$ ، $\cup$ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسی یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښی اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چی f(x) او g(x) د V توکی دي او له دې املە $\cap$، $\cup$ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چی د ټولو د M په V کی څیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چی د هغه صفر توکي د څیرونه f ده، د f(x) سره، ټول $x \in M$ او د هغی یوي توکي د څیروني f له لارې څخه د f(x) سره، ټولو $x \in M$ دي.

یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M د V د n–ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. مور غواړو ټولی د V^n څیرونی په V کی د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n– ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره د f څیرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چی د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظیموي. د دې څیرونو لاندې یی ثابتی څیرونی او پرویکشنونه د څانګړو ماناو یا اهمیت دی. یوه ثابته څیرونه د ټولو $(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو i–ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی.

د ټولو $(v_1,...,v_n) \in V^n$ لپاره $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$,

یادونه : مونږ دا ستونځې لرو، چی د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کیڼ وښی لور ته او بیا بیرته له ښي وکیڼ لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي ، چی داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n)$ د V^n لپاره

دا دا مانا لري چی : څیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په x_i ښایو، خو فکر کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو څیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو د ∩، ∪ ، ′ عملیو. نخښلونو یا کارونو په مرسته یوه څانګړې n–ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۱ تعریف : هره څیرونه $f : V^n \longrightarrow V$ ، کومه چې په $A_n(V)$ د پاې زیاتو د عملیو $\cap, \cup, '$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n – ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ بیلګه : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چې د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \longrightarrow V$ انځوروي: دکوم لپاره چې باور لري

$$P(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاې په ځاې توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادې له لارې کره ټاکلی دی، چې له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د $'$ ، $\cap$ ، $\cup$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپوننت یو n–ګونی له V^n څخه کیښوول شي. دا شمیرنه په رابندیزه توګه په V کی باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولینوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولینومفنکشن(=څیرونی) ترمنځ باید ټیك توپیر وشي. اړیکی « پولینوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چی له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، ∩ ، ∪ سره ټیك راجوړي دي یا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور ریبل پولینومونه د نښلونو + , * او − سره، چی نمونه یی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له یوه بنسټیزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره یو ریبل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولینومونه په کوم کي چی x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، ∩ ، ∪ کړی شي ، چی هغه پولینومونه وټاکی: دبیلګی په توګه د $x \cup (a \cap x)'$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولینومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چی وڅیړل شي یا پریکړه په وشي، چي ایا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پیښیږی، چی د هر پولینو–

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم N(f) د یوه ټاکلی افادې په څیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \models f_2$ لپاره $N(f_1) \models N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومې سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $a_{i\ i\ \ldots i} \in V$ دی ، د ټولو $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۰– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځای په ځای یا ځایول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته قانونیت یا قرارداد سره د هر پولینوم P کونیو-
نکتیو نورمالفورم بلل کیږي، دلاندې ښې سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

که یو ځانګړی دیسیونکتیو نورمالښه ولیکل شي، نوټول
غړي به د دیسیونکتیو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ له
لیکلو پرینښوول شي یا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې
دا په نتیجه کوم تاثیر نه پریباسي. په ورته توګه دا د دیسیو-
نکتیو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بیلګه : یو پولینوم په دیسیونکتیو نورما-
لفورم دی (د $a,b,c,\ldots \in V$ سره):

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې یو کونیونکتیو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن $P : V^n \longrightarrow V$ لپاره ټیك یو دیسیونکتیو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توګه ټیك یو د بول پولینوم لاس ته راځي، کله چې ټول دیسیونکتیو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه (دوه ګوني) ویناد کونیونکتیو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملې د ښوونې څخه هم دلته تیریږو، دا په نورو ادبیاتو کې شته(دا دې ګران لوستونکی په پام کې ونیسي، چې دا به ځما پوره وخت ونیسي که دا هرڅه راوګورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چې په نورو ځایونوکی می هم ګوته ورته نیولی، دا بنسټیز څه راټول کړم)

د نورمالفورم د څیړلولپاره کله کله لاندې خویونه (قاعدې) ګټورې دي، کومې چې په نورمالفورم کې د $0,1 \in V$ « ځایونو یا ایښوونو » له لارې لاسته راوړل کیږي. ځکه چې د بیلګې په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$ یواځې n –ګونو لپاره له $0 , 1 \in V$ نا مساوي 0 دي(په ریښتونې مساوي په 1)، په کوم کې ، چې $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$ د $i_j = -1$ لپاره دی، یعنې د دې n–ګونې $(1^{i_1} , 1^{i_2} , \ldots\ldots , 1^{i_n})$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1\ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولینوم فنکشن $P \in A_n(V)$ دیسیونکتیو نورمالفورم وي، نو د $1^1 = 1$, $\bar{1}^1 = 1' = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1\ldots i_n} = P(1^{i_1},\ldots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1,\ldots,i_n)$ لپاره.

نو د بیلګې په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړیکو وروسته د P د دیسیونکتیو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسیا کوي، که 2^n د P فنکشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپیدا کړو. لیدوړ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P دیسیونکتیو نورمالفورم په لاندې توګه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتیجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي، نو د $0^1 = 0$, $0^{-1} = 0' = 1$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \ldots, 0^{i_n})$$

د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چې مور د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون(تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعآ ټول الجبرونه پای دي.

که V ټیك $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چې پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چې V^n ټیك m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چې سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه لاس ته راځي، ځکه چې د دلته 2^n څلوونې یا ضریبونه $a_{i_1 \ldots i_n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځاینیونکی یا ځای په ځای کیدی شي. که $m>2$ وي، نو په ټولیزه توګه کم پولینومفنکشنونه موجود دي نسبت و ځیرونو ته. که $m=2$ وي، کوم چی د کارونی یا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بیا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ جمله: که $B=\{0,1\}$ دوه توکیزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځایز د بول فنکشن ، یو د بول پولینومفنکشن په ځیر انځورولای شی.

اوس د دیسیونکیو نورمالفورم د راپیداکولو تګلار و یوه پولینومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کیږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپلیمنټ ' جوړښتونه ټرلي x_i ته راوړل کیږي، همداسی ثابتو ته راوړل کیږي.

۲ – د دسټریبوتیو قانونه کارونی یا استعمال سره سم P د غوڅیو ټولنی ته راوړل کیږي. په دې فورم کی په ټولیزه توګه ځنی «زیاتووني» (د x_i او x_i' غوڅي دي) یو څو x_i ورکیږي، مګر د هر i لپاره په یوه زیاتووني کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرګندیږي.

۳ – که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i ورک شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتیږي(دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ – په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمالیږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابرو زیاتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارنی لاندې) ، که چیرې ممکن دا ورک زیاتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بڼه اړونی یا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۷ بیلګه : P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$
$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$

لوستونکي دې دا نتیجی د قاعدې ۱ سره و ازمایي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وځیړل شي، کوم چی همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ سره پریښوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ سره پریښوول کیږي یعنی صرف نظر پرې کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپیلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی لیکو دی)
دیسیونکتیو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د
ارزښت سره کوم کونیونکتیو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلګه: د لته دې ۳ -ځایز فنکشن $P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P دیسیونکتیو نورمالفورم د
لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

دیسیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره یو
زیاتوونی خوندي لري، په کوم کی چی x_i ولاړ دی ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي ، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n– ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي($x_i = 1$) نو بیا « شرطونه پوره دی » بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دي پوره» بلل کیږي) ، نو په دې توګه دیسیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یوجوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چي 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دي او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کی چي x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځاي په ځاي وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n – ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي : $x_1' \cup x_2 \cup x_3'$ په دې مانا دې، چې x_1 یا x_2 پوره دي او یا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کې د $A_n(B)$ څخه دیوه د مخه ورکړ شوي پولینوم فنکشن P کمپلیمنت P' څنګه ټاکل کیږي؟ د ورکړ شوې قانونمندۍ له مخې د دې لپاره په ساده توګه P په یوه دیسیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو P' ټیک د غوڅیو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کې نه رامنځ ته کیږي(یعنی 0 ځلوونی لري). په ورته توګه د دیسیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه : د اخرنۍ بیلګې څخه د پولینوم فنکشن P لپاره د P' دیسیونکتیونورمالفورم لاندې توګه ورکړ شویدی.

$$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$$

پام دې وي، چې $P = (P')'$ دی او د دېمورګان قانون له مخې د یوه دیسیونکتیونورمالفورم کمپلیمنت کونیو- نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د دیسیونکتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

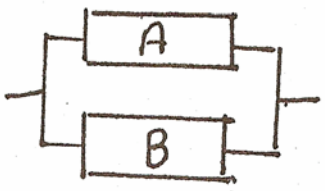
نورمالفورم 'P څخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۳ . ۴ سویچ الجبر یا بریښنا جیریان الجبر

په بریښنایي یا برقي سرکیتونو (En. circuit) Schlatkreise (یا بریښناجیریانکړی یا په ساده توګه :بریښنادوران) کی سویچ د بریښنا اړیکو یا بریښنا ټرونونو کی، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. مور دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر څیړنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کی برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند یا واز وي، یعنی ټیک دوه ارزښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیموو او بند ټرلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو، داسی چی 0 په دې مانا دی ، چی«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چی« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدی شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره

یوځاي کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټري circuitary دی، چی د پایډیرو غبرګسرکیټریو یا همداسی سیریالسرکیټریو په څیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چی«واز» یا « بند یعنی ټرلی» کیدی شي.



څیره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که A او B دوه سویچونه وي، نو غبرګسرکیټري، لکه په پورته څیره کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د A v B سره په نخښه کیږي.

په څرګند ډول A v B یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو- یچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شی د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکیټري (یا شاید په انګریزي سرکیټ ویبل شي) داسی ولیکل شي

$$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$$

کیدی شي ، چی $A \vee B$ د یوځای اآیښوول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چی دا د A او B په اړتیا یا په واك برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پریږدي.

د A او B سویچونو زیریالسرکیټري $A \wedge B$ د A او B یو بل پسی یعنی په پرلپسی توګه اینښوونی یا ځاي په ځاي کونی څخه منځ ته راځي، لکه په څیره کی چی انځور شوي.

سرکیټ یا بریښنادوران $A \wedge B$ تیك او تیك هلته ارزښت1 لري، که دواړه سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دې ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$.

دلته هم $A \wedge B$ یو رایوځاي شوی سویچ دی.

ددې سره ترڅنګ $A \vee B$ او $A \wedge B$ د سویچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د سمسوچ له پوهی ورسره بلده په $\vee$ او په $\wedge$ راوړل شوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټرونونو کي. هلته د یوې وینا نه والی هم موجود دی.
که ۷ ، ۸ د سویچ ارزښتونو 1 , 0 په څیر راوښیسو، نوهغه
په باندې شمیرقوانین د ۷ او ۸ دیوه بول الجبر لپاره
په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپلیمنټ هم په واک کی لرو.
دا کلیمي جوړونی د سویچ لپاره هم یوه موخه لري: د A'
سره یو سویچ په نخښه کوو، کوم چی تل یو و A ته په څټ
ارزښت لري، د کوم سره، چی مور په تخنیکي ریښتینوالی
یا ریالیزه باندې ددې

څیره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشین له لارې) په غم کی نه
یو. A' د A نیګیشن یا نفي هم بلل کیږي. د سویچ ارزښت
لپاره دا دامانا لري، چی 0 = 1' , 1 = 0' . په دې توګه سویچ
ارزښتونه د عملیو یا کارونو ۷، ۸ ، ' سره یو دوه توکیزه
بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ تعریف : یو زیریالغبرګ سرکیټري د پای ډیرو
سویچونو څخه جوړیږي د پای زیات فورمال عملیو ، ، '
د کارونی یا استعمال سره. په داسی سرکیټ کی دوه سویچونه،
کوم چی همغه د سویچ ارزښتونه لري په همغه یا برابر سومبول
سره په نخښه کیږي.
ټیک داسی تعریفولی شو: هر سویچ یو زیریالغبرګ سرکیټري
جوړوي. که S_1 , S_2 زیریالغبرګ سرکیټرونه وي (یعنی سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

رایوځاي اینبوولي سرکیټري یا سویچونه) ،
نو $S_1 \wedge S_2$, $S_1 \vee S_2$ او S' هم زیریالغبرګ سرکیټرونه دي.
هر زیریالغبرګ سرکیټري په ټولیزه توګه زیات پیچلی جوړ شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیونی څخه په واکوالی کی یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا ټرلی (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه سرکیټونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وټرل شي. کیدی شي، چې مور لنډ له سرکیټونو یا سرکیټریو څخه وغږیږو.
د یوه زیریالغبرګ سکریټري S د سویچ د هر ځاي نیونی لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیټري لاس ته راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ بریښنا بهیږي (جریان لري) او که نه. پس وي دې A_1 , ..., A_n د پورته تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,...,A_n)$ سویچونه ، د کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو $A_1,...,A_n$ هر ځاینیونه د 0 , 1 د یو n–ګونو سره برابر دی او د S له لارې یا د S سره به دا n–ګونی یا 0 او یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه سرکیټ S یو n –ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د بول په الجبر $B=\{0,1\}$, $f_S : B^n \longrightarrow B$ تعریفوي(دې ته دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته ، چې دا د لاتین تورو لیکنی له کیږ وښی لور ته لوستل کیږي، په دې ګران لوستونکی پوهیږي، چې یادونې ته اړتیا نه شته،خو زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنګه کیدی شي، چې سرکیټ په $A_n(B)$ کې د سرکیټري لپاره د ∩،∪، او کارونې یا عملیې وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دې S,T دوه سرکیټونه وي، له سویچونو A_i څخه د سویچفنکشنونو f_T , f_S سره، نو کیدی شي، چې له S , T څخه هم زیریالسرکیټري S ∧ T او هم یو غیرګسرکیټري S ∨ T جوړ شي، پوره و یوګونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسې لکه یو ګوني سویچونه . دا نو اوس روښانه ده، چې $f_S \cap f_T$ د S ∧ T سویچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د S ∨ T سویچفنکشن دی. بالاخره f_S' سویچفنکشن دی و سرکیټ S' ته ، کوم چې تل و S ته مخامخ- یا په بل عبارت په څټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرګ سرکیټري S او T و همغو سویچونو $A_1 , A_2 , ..., A_n$ ته، ایکویوالنټ یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چې که د هغو سویچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال یا کارونې د لیدټکي څخه دا تعریف موخور (همدفمند) دی، ځکه چې لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعني د سرکیټ څانګیونې ته ده او کم د هغه دننني جوړښت ته.

د سرکیټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کې روښانه شوی، اړیکه یې ښتینې برابرارزښته اړیکی دی، په داسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

حال کی چی دې برابرارزښتونو لپاره د ټول سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولګی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره. له دې سره د سرکیټ څېړنه د بول الجبر په څېړنه بیرته واړول شوه او په دې توګه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.

په سرکیټري تیوری (Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توګه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:

اول) د ورکړ شوي سرکیټري شننه یا تحلیل او

دوم) د پلټونکی سرکیټري سینتیز Synthese .

په شننیز حالت کی یو سرکیټري S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي.

د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1,A_2,...,A_n$ د سرکیټري S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1,A_2,...,A_n$ کی (د $x_1,x_2,...,x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توګه یا په ورته ډول د S جوړونه په ۸۷. ' سره له $A_1,A_2,...,A_n$ څخه. له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توګه لوستل کیږي.

۴ . ۳ . ۳ بیلګه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A . B . C سره مخ ته وړت وي، څنه دې وکتل شي. په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

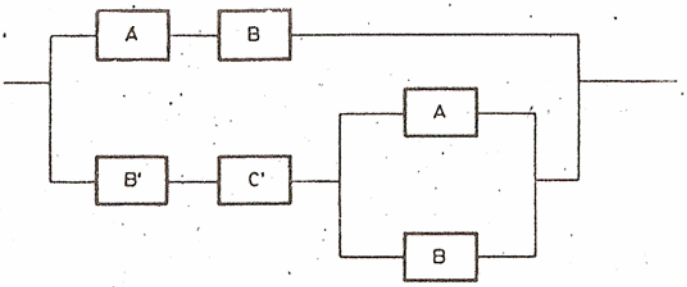
$$(A \wedge B) \vee (B' \wedge C' \wedge (A \vee B))$$

دا په ډیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B' \wedge C') \vee (B \wedge B' \wedge C)$$

$$(A \wedge B \wedge (C \vee C')) \vee (A \wedge B' \wedge C')$$

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C') \vee (A \wedge B' \wedge C')$$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

ټیګ د دې په څټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده.د لته دې د سویچفنکشن ورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن ربښتیاکیدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی
ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی
لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي
مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت
جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي ، چی د دیسیونکتیو نور-
مالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی
شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې
رامنځته کیدونکی ګټون هر د سویچ په ټولیزه توګه
نازغمور یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا،
چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو
سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغۀ د مخه
ورکړ شوی سویچفنکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قمت یا
مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګټون تاثیر نه لري،بلکه
جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړشټول،
د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد
کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو
حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتاب کی
ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چا-
لانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ،
کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی
ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو،
چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته
را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ الجبرونه

یو څو بنسټیزې کلیمې

لومړی موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټیزو کلیمو په څېړلو پیل وکړو، چې مور دا په نامه ټولیز الجبر، یا لنډ الجبر بولو. برسیره پردې دلته دري مهمې جوړښتیز کلیمې پیژندل کیږي یا معرفي کیږي، چې د هغو په مرسته بیا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه یا کوچنی) الجبرونه ګټل کیدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بیا هوموморفي څیره کونی او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروانځ اړیکو له فاکتوره کوونی څخه لاس ته راوړل کیږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بیلګې لپاره ، لومړی، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

(c) ketabton.com: The Digital Library

درس کی مو چی ګوته ورته ونیوله ، ګروپونه څیړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د ګروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلګه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: ګروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، ګنډنی یا عملیي د تعریف سره. (دا په دې مانا، چي یوه څیره کونه له G× G څخه په G کي د x.y <— (x,y) سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کي، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو x,y,z ϵ G (لپاره باورل ري):

(x.y).z = x.(y.z) (اسوځیاتیو قانون)

دا اسوځیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z))$

(یو $e \in G$ (د ټولو $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چې باور لري) :

$e.x = x.e = x$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسی په نخښولیکلی شو:

$\exists\ e \in G, \forall\ x \in G : e.x = x.e = x$

(د ټولو $x \in G$ (لپاره یو $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چې باور لري:

$x.x' = x'.x$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښو داسی لیکلی شو:

$\forall\ x \in G \quad \exists\ x' \in G : x.x' = x'x = e$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسی لو

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستل کږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په کې G پروت دی، یو توکی 'x له G څخه موجود دی، د x.x' = e سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې x.x' = e باور لري ». دلته e د دومی قاعدې سره ورکړ شوی ناپیلی توکی دی(یواځنی ټاکلی) . ناپیلی په شمیرپوهنه کی د یوې عملیې یا کاروني یا نښلونی په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه عملیه کی همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانی د همغی عملیې سره د یوه توکی سره په نښلونه یا عملیه کی راوستلو سره ور سره نښلووني توکي کی بدلون نه راولی.

په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي ، چی د بیلګې په توګه کړی هم تعرفي شي، چی دې کار دمخه صورت نیولی، د کوم لپاره، چی په هر حالت کی دوه عملیې په کار دي(زیاتون او ځل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کیږي: د یوه « ټولیز یا عمومي الجبر » لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې کورنی سره، کوم چی تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي. دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام ور تعریفونو کي راټول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ځنې $n \in N \setminus \{0\}$ او هر ډیري A لپاره یوه څیره ونه $f: A^n \to A$ شته، کومه چې n– ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n – ځا– یزو عملیو ډیری په A د $Op_n(A)$ سره په نخښه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیې پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیې لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چې A^n دې د ټولو g څیره کو نو یا څیره ونو

$$g : \{0,1,2,\ldots, n-1\} \longrightarrow A$$

ډیری وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g: \emptyset \longrightarrow A\ .$$

مګر ګورو، چې یواځې یوه ځیرونه g موجود ده، یانی په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چې هره ځیرونه $g : \emptyset \longrightarrow A$ په کره نیونه د جوړو یو ډیری دی، دا په نامه

$$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه .

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده : $f : \{Ø\} \longrightarrow A$.
دا څیرونی همداسی ټیك د A توکی په ګوته کوي، څکه چی f د $f(Ø) \in A$ توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د هر $a \in A$ (بیایی لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{Ø\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(Ø) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکی ثابتی هم بلل کیږي، او د f_a په ځای په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه $(f, ß)$ (دلته دا f باید لوي وی ، خو زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، څکه چی په کمپیوتر کی د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چی f یو ډیری دی ، چی توکي یی د عملیو سومبولونه دي او $ß : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چی هر $f \in f$ په ځایزوالی (یاني هغه ځای چی دا یی نیسی) ß(f) باندې تنظیم وي. دلته f یو د ß(f) − ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د $(F, ß)$ تیوپ یو تنظیم شوې جوړه $A = (A, F)$ ده ، کومه چی له ډیري A او یوې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د عملیو کورنۍ $F(f \mid f \in f)$ څخه منځ ته راغلی یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f \in f$ په $\beta(f)$ – ځایز عملیی $f \in Op(A)$ باندې تنظیم شي. ډیرۍ A د A بنسټډیرۍ بلل کیږي او د F توکی د A بنسټیزې عملیي بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادونه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسی نور، لږ پیچلی ښکاریږي، نو کړی شي ، چی دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چی یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا خیال کي راولو، چی A یو ډیرۍ او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پاي ډیرۍ وي. هغه نازکوالی، چی د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دی ځکیدی شي، چی وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کی روښانه شي.

ب) په دې کتاب کی تل د الجبر د کلیمی لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو. چی په دې توګه د کلاسیکي یا ټولګیز الجبر د کلیمی سره په یوه کړۍ باندې، څخه یی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یي «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یی یو څو یادونی : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کږي، دا په دې مانا، چی له سره مو فکر د کارونی سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ ß څخه غږیږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونی یا عملیي سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځي پای ډیرې بنسټیزې کارونی یا عملي ولري، د بیلګي په توګه $F = (f_1 , f_2 ,...,f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1,...,f_k)$ د (A, F) په ځای لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1 ,..., ß_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چی $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کی بنسټیزې کارونی یا عملیي د f_A سره نه په نخښه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا، چی د اړوند کارونی سومبول سره، لکه چی د ابل ګروپ کی زیاتون زیات د نخښی « + » سره په نخښه کیږي. دا امکانات، چی دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کی مو چی الجبر تعریف کړ، هغی ته ورته ګروپ د یو الجبر (G , .) په څیر د تیوپ (2) تعریفوو (ټیك: د یوه الجبر، چی تیوپ یی (ƒ , ß) د ƒ = {.} سره دی او ß(.) = 2)، چی هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالك ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعریف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یی تعریف بل ډول وو و دې اوسنی تعریف ته). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر (G(. , -1 , e دی، د تیوپ (2 , 1 , 0) ، چی لاندې اکسیومونه پوره کړي:

ک ۱ : (x.y).z= x.(y.z) (اسوځیاتیو قانون)

ک ۲ : x . e = e . x = x (ناپیلی یا بې تاثیره توکی)

ک ۳ : x . x̄¹ = x̄¹ . x = e (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کی نغښتی ده، چی د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پیښیږي او په څټ توکی په ساده تورې د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده» . که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبو ي.

سړی کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګې په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول ، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د p (x,y,z) = x.y.z په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چې یو ګروپ (G , . , $^{-1}$, e) ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : x . y = y . x (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی +, - , 0 د . , e په ځاي کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) یو الجبر (G , .) د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي.
یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیرې، چې په
هغه کې یو دوه ځایزه کارونه یا عملیه کارول شوي وي،
په ځانګړې توګه ګروپونه په همدې وخت کې ګروپوئید
هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید (H , .) نیمګروپ بلل کیږي، که
(H , .) برابرون ګ ۱ پوره کړي..

ت) یو الجبر (M , . , e) د تیوپ (2 , 0)، مونوئید
بلل کیږي، که (M , .) یو نیم ګروپ وي او برسیره پر
دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید (Q , .) کوازیګروپ بلل کیږي،
که د هر a ∈ Q لپاره لاندې څیرونې د Q په Q
باندې پرموتیشنونه وي، یعنی:

(د a سره کېنې ځلوونه) x —> a . x
(د a سره ښی ځلوونه) x —> x . a

زیات وخت د کارونې یا مروج دی، چې کوازیګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیوپ (2,2,2) الجبر (/ , \ , . , Q) په څیر تعریف کړو، کوم چی لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

(Q1) $x\backslash(x.y) = y$,
(Q2) $(x.y) / y = x$,
(Q3) $x.(x\backslash y) = y$,
(Q4) $(x/y).y = x$

یا دونه: ګورو چی / او \ د ښي او کینې ویشنی په څیر کارول شوي(دا سي، نخښی ، چی په هر بل ځای کی په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کی چی (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چی برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شی چی لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړی: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړی بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قوانین باور ولري:

د ۱) $x . (y + z)) x.y+x.z$

د ۲) $(x + y) z = x . z + y . z$

پام دې وي: د دې لپاره، چې نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کیږي، چې ټکیشمیرنه له کرښشمیرنې له مخه ده، دا په دې مانا، چې لمړی د ټکو شمیرنه بدنیز (تنیز) کیږي یا صورت نیسي لکه څل او ویش او ورپسې بیا هغه چې کرښشمیرنه وي لکه زیاتون او کمون. یوه اونیتار کړی (R,+,-,0,.,1) unitärer Ring (دا په دې مانا چې دا یوه کړی ده د یوې سره)، یو الجبر دی، چیرته چې (R,+,-,0 , .) یوه کړی ده او 1 یو ورزیات شوی صفر څائیزه کارونه یا عملیه ده، کوم چې مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعآ دلته 1 د e په ځای دی).

ح تن یا بدن) یو اونیتارکړی (K , + , - , . , 0 , 1) یو تن یا بدن بلل کیږي (انکریزي field) که (K , \ ,{0} , .) یو ابل ګروپ وي ، د ناپیلي توکی 1 سره. دا راته نزدې پرته ده، چې اوس که پر دې په ورزیاته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$ (په (K \ {0} , .) کی په څټ څیرونه) یوه یوځائیزه کارونه یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليه يا اپريشن وګڼو. دا چې 0^{-1} تعريف نه دی، نو ($K,+,-,0,.,,^{-1},1$) به د لمړنی تعريف په موخه کوم الجبر نه وي. د ټوټه الجبر په تيوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل کيږي، نا پوره تعريف شوې عمليي يا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا ($R,+,-,0,.$) دې يوه کړی وي. يو الجبر ($M,+,-,0,R$) د ($2,1,0,(1)_{r\in R}$) تيوپ R–مودول بلل کيږي(يا مودول په کړی R باندې)، که $(M,+,-,0)$ يو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r,s \in R$ لپاره لاندې مساوات باور ولري:

م ۱) $r(x+y) = r(x) + r(y)$

م۲) $(r+s)(x) = r(x) + s(x)$

م۳) $(r.s)(x) = r(s(x))$

په يوه اومنيّارکړی ($R,+,-,.,1$) باندې مودول څخه دا د لاندې مساوات باوريوالی هم غوښتل کيږي.

م ۴) $1(x) = x$

دا لمړنی بيلګه ده د ناپايړيرو عمليو سره (طبعآ که R ناپای وي) . برسيره پردې هم يو ځانګړی پام ضرور دی، ځکه چی سومبولونه $0 , - , +$ په دوه مختلفو ماناو رامنځ

،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته کیږي: یو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عملیي په څیر او بیا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څیر. دا پرابلم په ساده توګه کیدی شي ، چی راوباسل شي، د بیلګې په توګه په کوم کي (R ,$+_R$, $-_R$, 0) او (M , $+_M$, $-_M$, 0) په څیر لیکل کیږي. یوائی د اسانتیا له خاطره ضرور ښکاریږي، چی د ابل ګروپونو باندې په همغه یوون د + ,- , 0 سره پاتی شو،

خ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) یو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) مور K –وکتورهوا (یا وکتورهوا یا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) تړون(تړونونه) (Verband(english: lattice)) یو لاتیس یا تړون یو الجبر (∧، ∨، L) دی، د تیوپ (2,2)، کوم چی لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ کموتاتیو قانون

ل ۲) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
(اسوځیاتیو قانون)

ل۳) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (ایدمپوتینځ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ل ۴) $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادي " $x \vee y = z$ " او په همدېتوګه " $x \wedge y = z$ " داسی لوستل کیږي x له y سره ټرلی مساوي په z دی. همداسی x غوڅ په y مساوي په z دی.

یو رابند ټرون یا لاتیس (یا ټرون د 0 او 1 سره) یو الجبر ($L, \vee, \wedge, 0, 1$) ددی د تیوپ (2,2,0,0), داسی چي ($L, \vee, \wedge$) یو ټرون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$

ټرونونه به په ځانګړي توګه په ورپسی برخو کی پوره وڅیړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کی و کښل شي)

د) نیم ټرون (semilattice) یو نیم ګروپ $(S, .)$ نیمټرون یا سیمیلاټیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په د ې مانا، چی که مساوات ګ ۴ او همداسی لاندې باور ولري:

س ۱) $x . x = x$ ایدمپوتنځ (Idempotenz)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي. (نیم ترڅی)

ذ) دیستریبوتیو ترون یا – لاټیس) یو لاټیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کې چې دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

د ل ۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

د ل ۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

کیدی شي، چې د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او دل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسی دي. چې له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر: یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دسیتریبوتیو لاټیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

ب ۱) $x \wedge x' = 0 , x \vee x' = 1$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګې مو، چې دلته راوړلی، د هغو څخه به ځنې وروسته پوره ترځیړنې لاندې ونیول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ لاندې الجبر يا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري ديسځيپلين مهمه موخه داده، چې پوره بيلګې تړې لاس ته راوړل شي. زيات وخت داسې کيږي، چې د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کې به يو متود يا يوه لار وپيژندل شي يا معرفي شي، کومه چې د ټولګيزو کليمو څخه لکه لاندېګروپ، لاندېوکتورفضا، لاندېټرون په لور لوريزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعريف : $A = (A,F)$ دې يو د تيوپ f الجبروي، او برخېړی $B \subset A$ دې يو د A برخېړی وي، د خويونو سره ، چې

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n –ګونو $f \in f$ لپاره $(b_1, \ldots b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چې $ß(f) = n$ ځای په ځای کيږي). الجبر $B = (B, (f \mid f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کيږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بندیزنو په څېر په ډيري B تعريف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره ليکو $B \leq A$. د Sub A سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنسټېړيو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری په نخښه کیږي، دا په دې مانا، چې $A \supseteq \{ B \mid B \leq A \}$
(انګر: Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخه‌ډیری $B \subset A$ ټیك هلته د یوه االجبر $A = (A , F)$ لاندې الجبر بنسټه‌ډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ عملیو سره رابنده، راټرلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه ټیکه توګه زیات داسی لیکل کیږي $B = (B,F)$ ،
داپه دې مانا، چې د B د بنسټعملیو ډیری بیرته په F سره په نخښه کیږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسی د f_B لپاره هم په ساده توګه د کارونی سومبول په f سره ښوول کیږي یا بهتره، نخښون کیږي.
د ګروپ په بیلګه روښانه کیږي، چې په لاندې الجبر کی په هغه تیوپ ګڼل کیږي ،کوم چی ټاکل شوی دی: که ګروپ د یوه الجبر په څیر، چی تیوپ یی (0 , 1 , 2) دی راوړل شي یا وګڼل شي، لکه په مخ ته تیره بیلګه کې نو لاندې الجبرونه په ټولګیزه موخه لاندېګروپونه دي. که چیرې ګروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راوړل شي یا په پام کی ونیول شي، د ګروپ سره چی یواځنی عملیه یا کارونه ده، ممکن دي، چی لاندې الجبر لاس ته راوړو، کوم چی لاندې ګروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي، که ګروپ د یوه الجبر ، په څیر د

$$p(x , y , z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چې دا یې یواځنۍ عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوښتجوړښت په مخامخ رابند دی. ټیک یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in Sub\ A$

ب) $B \in SubA$ د هر ناتشې یري $B \subseteq Sub\ A$ لپاره،

یادونه : دا افاده "$\bigcap B$" د $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ لپاره ځای په ځای ده او همداسی د $\bigcap\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ لپاره .

اوښی : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونې لپاره دې وي:
$B \subseteq SubA$, $B \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چې $\bigcap B$ د A د هر ې عملیې f لپاره رابند دی یا راټولی دی.
وي دې $n = ß(f)$. له $b_1 , \ldots , b_n \in \bigcap B$ څخه $b_1 , \ldots , b_n \in B$ لاس ته راځي د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره .
دا چې ټولې $B \in \mathcal{B}$ څخه د لاندې الجبرونو بنسټیري
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، نو باور لري $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in B$ لپاره . له دې څخه لاس ته راځی $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم ديوې جملی په څير ده، خو له جملي څخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخليږي $X \subseteq A$ لپاره دی

$$\langle X \rangle = \bigcap \{ B) \in \mathrm{Sub}\, A \mid B \supseteq X \}$$

د A د لاندې الجبر بسټليږی، دا په دې مانا چی $\langle X \rangle \in \mathrm{Sub}A$. په څرګنده توګه $\langle X \rangle$ د A د لاندې‌الجبرونو کوچنی بنسټليږی دی، کوم چی X خوندې لري (دا د X څخه راجوړه يا توليد شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچوونې له املې ډير وخت $\langle X \rangle_A$ د $\langle X \rangle$ په ځای ليکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پای ډيرې $X = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ لپاره .

د بيلګې په توګه څيوکليکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نيسو (د ګڼونو $Z = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ سره مودول 6 شميرل کيږي): باور لري

$$\langle 0 \rangle = \{ 0 \}, \langle 1 \rangle = Z_6, \langle 2 \rangle = \{ 0, 1, 4 \},$$
$$\langle 3 \rangle = \{ 0, 3 \}, \langle 2, 3 \rangle = Z_6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې يو الجبر وي . د برخډيريو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزيويتيت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتونيMonotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ايدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبې سملاسی د مخ ته تيرې عملي $\langle\ \rangle$ له تعريف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټډيری $\langle X \rangle$ په ريښتيا چې د X څخه توليد شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د يوه توليدپروسي سره: د هر برخډيري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (n = ß(f))\}$$

ورپسی دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخېږي $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$< X > = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$$

اوبی : « $\supseteq$ »: وي دې $x = E^{0}(X) \subseteq < X >$.
نیونه دې وي، چی $E^{k}(X) \subseteq < X >$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چی په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

($a \in < X >$

نو $f \in F , a_1 , \ldots , a_n \in E^{k}(X)$

موجود دی ، د $a = f(a_1 , \ldots , a_n)$ سره .

د $E^{k}(X) \subseteq < X >$ له امله او دا چی $< X >$ د یوه لاندې
الجبر بنسټ ډیري دي، لاس ته راځي $a \in < X >$. دا
ښایي $E^{k+1}(X) \subseteq < X >$، او په k باندې د ایندکشن
سره لاس ته راکوي $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X) \subseteq < X >$.

« $\subseteq$ »: یواځي دې وښوول شي ، چی $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^{k}(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټېږی دی، دا په دې ما ، چی F د
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راټرلی ده. وي دې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f \in F , n = ß(n) , a_1 , \ldots , a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X .$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots , n\}$ لپاره په لاندې توګه یو $k(i) \in N \cup \{0\}$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی. وي دې $m = \max \{(k(i) \mid i = 1, \ldots , n\}$. نو باور لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1 , \ldots , n$ لپاره. په دې پسې لاس ته راځي

$$f(a_1 , \ldots , a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د f لاندې رابند یا ټرلی دی. پای

یادونه: دا رابند یا راټرلی دا مانا لري، چې f په همغه الجبر کی باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کی هم پام وي، چی ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کی په کار راځي، چی په خپل ځاي کی به وکتل شي.

د ډیریسیستم Sub A یواځی دې ته همدا دلته ګوته نیسم، چی د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوینستډیرې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیدایښتي یا طبیعی ډول یو ټرون یا ټرنه یا لاټیس جوړوي:
د $B, C \in A$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶جمله :د هر الجبر A لپاره $(\text{Sub } A, \vee, \wedge)$ یو ټرون دی(د A د لاندې الجبرونو ټرون یا څرګندونې ټرون)

اوبی دې تمرین وي: د لته د ټرون اکسیومونه له ل۱ تر ل۴ پورې ازمائیل کیږي.

۵ . ۳ ایزومورفیزم ، هوموومورفیزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چی د یوه الجبر ذهني خویونه تغیر نه خوري، که چیرې د الجبر د سټرکچر د توکو نومونه بدل شي ، یا بل ډول ونومول شي. دا پام یا فکر مو ټرلی د ایزمورفي کلیمي ته لارښودوي .

دوه الجبره یو بل سره ایزمورف بلل کیږي، که چیرې یو الجبر له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته راوړی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د **همغه تیوپ** f، او $u : A \longrightarrow B$ دې یو بیجکتیوه bijektive څیرونه وي. نو u د A ایزومورفیزم په B **بلل کیږي**، که د ټولو $f \in f$ لپاره او ټولو $n = ß(f)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$uf_A(a, \ldots, a) = f_B(ua, \ldots, ua) \quad \text{(هوم)}$$

دا الجبرونه A او B بیا (یو د بل سره) ایزومورف **بلل کیږي**، په نخښونه یې $A \cong B$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بیلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, ., ^{-1}, e)$ او $(H, ., ^{-1}, e)$ ټیك هلته ایزمورف دي، که یوه بیجکتیو څیرونه $u : A \longrightarrow B$ موجود وي کوم چې د ټولو $a, b \in G$ لپاره لاندې شرطونه پوره کوي.

$$(i) \quad u(a.b) = u(a).u(b)$$
$$(ii) \quad u(e) = e,$$
$$(iii) \quad u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتیا اخوا دي، ځکه چې دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e ,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) $(Z_4, +, -, 0, 1)$ دې د تن $(Z_4 \setminus \{0\}, ., \ , 1)$ يو ځليزګروپ وي. نو ايزومورفيزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_4 \setminus \{0\}, ., {}^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ايزومورفيزم و B ته په ټوله توګه سيومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u يو ايزمورفيزم د A په B وي، نو په څټ ځيرونه u^{-1} د B يو ايزمورفيزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تير درس څخه کيدی شي و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځاي په ځاي شي. وي دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \in f, b_1, \ldots, b_n \in B$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$$\bar{u}(f_B(b,\ldots,b)) = u^{-1}f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$$
$$= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)] \quad \text{ځکه چې u ایزومرفیزم}$$
$$= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n)) \quad \text{پای}$$

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو، چې $u: A \longrightarrow B$ بیجکتیو دی، نو د هوموسورفیزم ټولیزې کلیمی ته راځو. پس هوموسورفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزمورفیزم کی)، مګر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دې د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه ځیرونه $u : A \longrightarrow B$ هومو مورفیزم د A وB ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1, \ldots, a_n \in A$ ($n = ß(n)$) لپاره هوموسورفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دي.

د « u یو د A هوموسورفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u : A \longrightarrow B$ » هم معمول دی. یا کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملی څخه همغه ورسره بلد د هوموморفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیك په همدې توګه، لکه د ګرووپ هوموморفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو- مومورفیزم لپاره لاندې نخښونی معمول دي: سورجکتیو هومومو- رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که u : A—> B یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هوموморفه ځیره بلل کیږي. (په نخښونه یی uA = B) . اینجکتیو هومومور- فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا نغړنه (په کی) بهتره یی رانغړنه(زه یی خوندیونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکی یادونه وګوری) د یوه الجبر A هوموморفیزم u: A—> A یانی هوموморفیزم په خپل ځان ایندوморفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو- مورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چی بیجکتیو) دی د A اوتومورفیزم Automorphismus بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری End A په پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د ټولو اوتومورفیزمونو Auotomorpihismen (Aut A) یو ګروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه ویناوو ته اړتیا پیښیږي، چی اوبی یی ګرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کټمټ څیرونه
یانی $id\ A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1 : A \longrightarrow B$ او $u_2 : B \longrightarrow A$ هوموموړفیزمونه
وي، نو یو په بل پسی راوړنه یا په بل پسی ننبلونه $u_1 \circ u_2$
یی هم یو د A هوموموړفیزم و C پسی دی.
د لاندې مخ ته تیرې جملی له املې د End A همداسی
د Aut A ډیرې د کارونی یا عملی ° لاندې رابند یا راګیر
دی . د مخ ته تیرې جملی له املې Aut A تل دا ناپیلی
توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in Aut\ A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\ A$ لاس ته راځي،
یعنې باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره $(End\ A, \circ)$ یو
نیم ګروپ دی (د A د ایندوموړفیزم نیمګروپ) ،
او $(Aut\ A, \circ, {}^{-1}, id\ A)$ یو ګروپ دی (داسی په
نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)
لاندې الجبرونه او هوموموړفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواك راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغمور دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u : A \longrightarrow B$ دې یو هومو-

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورفیزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in Sub\ A$ څخه لاس ته راځي $uU \in Sub\ B$

ب) له $V \in Sub\ B$ څخه لاس ته راځي $\bar{u}^1V \in SubA$ (۲)

پ) د ټولو برخلیریو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<uX> = u< X>$$

اوښی : الف) وي دې $f \in f, b_1..., b_n \in uU$ (چیرته چې، لکه چې ورسره بلدیو، $ß(f) = n$ لیکل کیږي) .

نو $a_1 , ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1 , ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$$f_B(b, . . . , b) = f_B(ua , . .. , ua)$$
$$= uf_A(a , . . . , a)$$

دا چې u هوموړفیزم $\in uU$ له امله $U \in Sub\ A$ د

دا راته په ګوته کوي، چې

$$uU \in Sub\ B$$

ب) وي دې $f \in f, a^1 , . . . , a^n \in \bar{u}^1V$. نو باور لري

. $ua^1,...,ua^n \in V$

له دې لاس ته راځي

دا چې u هوموړفیزم $uf_A (a_1, . .. ,a_n) = f_B(ua_1, . . .,ua_n)$

د $V \in Sub\ B$ له امله $\in V$

$U^{-1} \in ...$ (۹)

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې املې سره باور لري $f_A(a_1, \ldots, a_n) \in u^{-1}V$ او له دې املې $\bar{u}V \in \mathrm{Sub}\, A$ ($u^{-1}V \Rightarrow$)

پ) E دی، لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه وي. لمړی ښوول کیږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$ لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$ سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چې لاندې بڼه لري $f_B(uy_1, \ldots uy_n)$ ، د $f \in f, y_1, \ldots, y_n \in Y$ سره. همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی، د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چې لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \ldots, y_n)$$

دا چې u یو هوګمورفیزم دی ، نو ښایي $E(uY) = uE(Y)$.

په k باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي، چې $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي

$$< uX > = \bigcup_{k=0} E^k(uX) = \qquad uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0} E^k(X)]$$

$$= u<X> \qquad \text{پای}$$

لکه د مخه مو، چې ګوته ورته ونیوله، د الجبر بنسټیز uU د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوڅخه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر بنسټېږي $u^{-1}V$ د $u^{-1}V$ سره په نخښه کیږي. کیدی شي ، همدا د مخه کیدی شي، چی زیات وکارول شي، که د یوه الجبر A هوموومورفیزم (ایزومورفیزم) په یوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بیلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کیدی شي، چی $< u1> = u<1> = uZ_6 = Z_6$. له دې امله یا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = id$ ($=idZ$) لاس ته راځي، او یا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -id$. پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{ id, -id \}$$

په ورته توګه د $End(Z_6,+,-,0)$ توکی هم ټاکل کیږي

لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله، اینجکتیو هوموومورفیزم $u : A \longrightarrow B$ خوندېونه هم بلل کیږي، د u سره A په B کی خوندې کیږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندېونه په کی روښانه شوه داسی پای کیږي:

یادونه : الف) د هرې خوندیونی $u:A \longrightarrow B$ لپاره باور لري $uA \leq B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چی uA یو و A ته ایزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اینکلوژنځیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B \ , \ i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګرواینځ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړی تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګرواینځ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګرواینځ اړیکو او هوموومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپتیوري او همدا ډول کړیتیوري کی، کیدی شي چی الجبرونه د کونګر- واینځ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشونی پسی فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختولګی د یوه ایکویوالنځ اړیکی «ایکویوالنځ ټولګی» جوړوي. دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتنه یا څیړنه د «کونګروایښځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخه‌یری $R \subseteq A^n$ یو په ډیري A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي. یوه 2–ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x , y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

ای ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتې)

ای ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

ای ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$ (ترانزیتیویتې)

د $(a , b) \in \Theta$ په خای داسي هم لیکلی شو $a = b(\mod \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولو Θ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a \Theta b$ ، په دې توګه کیدی شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x \Theta y \Theta z$ څخه لاس ته $x \Theta z$ راځي. د هر ایکویوالنځ اړیکو Θ لپاره د لاندې بنې ډیری $[a]\Theta = \{x \in A \mid x \Theta a\}$ ایکوالنځټولګی بل کیږي. په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیک د Θ یوه ګونګروایځټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتو ټولګیو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ایکوالنټولګیو ډیری په Eq A سره په نخښه کوو (د ایکویوالنځټولګی المانې او انګریزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډیرې A لپاره دوه ایکوالنځ اړیکی ∇_A او Δ_A په لاندې ډول لاس ته راځی

$\nabla_A = A^2 = \nabla_A$ (ټول اړیکی Allrelation)
(کټمټی یا دیاګونالی Identität oder Diagonale)
$\Delta_A = \{(a , a) \mid a \in A\} = \Delta_A$

څیره: ۱۰۱
په پورته څیره کی په ډیرې {1,2,3} باندې ټول ایکوالنځ-اړیکی د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي(دا یو د Hasse-DiaGram هازېدیاګرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه د ایکویوالنځټولګي په بیرته ورکړه کی انځور ده.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتل
د $\mathrm{Eq\,A}$ برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Eq\,A}$$

(لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو
سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبی : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیري A ایکویوالنځ اړیکې په طبیعي یا پیدایښتي
توګه یو لاټیس یا ټرون جوړوي. یا څرګنده جوړوی .
د ټولو $\Theta, \Psi \in \mathrm{Eq\,A}$ دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیري A لپاره $(\mathrm{Eq\,A}, \vee, \wedge)$
یو ټرون یا لاټیس دی (په A باندې د ایکوالنځ اړیکو ټرون)
دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\Theta \vee \Psi$ په ټولیزه توګه لږ
مناسب دی ، که په ریښتیا $\Theta \vee \Psi$ شمیرو. د دې لپاره
کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو Θ_1, Θ_2 لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف شوی د اړيکو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x , y) \mid \exists z \in A : x \, \Theta_1 \, z \, \Theta_2 \, y \}$$

وکارول شي يا استعمال شي. دا اړيکځل اسوځياتيو دی.
(د ې ښوونه دې تمرين وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کيدی شي، چی ډير واره راوړل شوي نوکان له ليکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډيري A او ټولو $\Theta , \Psi \in Eq\, A$ لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots$$

دا په دې مانا چی $(a , b) \in \Theta \vee \Psi$ ټيک هلته باور لري، کله چی توکي $c_1 , c_2 , .., c_n \in A$ موجود وي، د $a = c_1 \, \Theta \, c_2 \Psi c_3 \, \Theta \, c_4 \ldots c_n = b$ سره.

اوبی يا ځل: تمرين دې وي: لمړی فکر کيږي، چی اوبيونی يا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته يو ايکويوالنت اړيکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور يا اړخ، په نوکانو کی نيول شوو اړيکوځل (اړيکځل) په $\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A/\Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A/Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکووالنځټو– لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.

خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر څیړني لاندې ونیسو: (G , . , $^{-1}$,e) دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$\forall x \in G : x^{-1} N x = N$ (د نومال پرویشوني شرتونه)

(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري.....)

وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د څنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په څیر،دا په دې مانا چی د $G/\Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$ سره. نو کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي، چی په G/Θ_N باندې یو ګروپجوړخت یا ګروپسکترکچر $(G / \Theta_N , . , ^{-1} , e_N)$ د دې لاندې سره تعریف کړي

$$(aN) . (bN) = abN \ ,$$
$$(a N)^{-1} = a^{-1}N \ ,$$
$$eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چی وښوول شي، چی دا ډول تعریف شوی اپریشن یا کارونه کره تعریف ده. د بیلګې په توګه د ځل . لپاره ښوول کیدی شي، چی له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کیدی شی، چی د نورما پرویشوني شرایطو سره ساده وشمیرل شي. دلته ویل کیږي، چی Θ_N او . یوله بل سره زغمور دي. همداسی په ټولیزه توګه تعریفیږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in Eq\ A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f ته زغمور بلل کیږي، که د ټول $a_1 , a_2 , ..., a_n , b_1 , ...,b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta b_1 , ... , a_n \Theta b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n) \Theta f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $\Theta \in Eq\ A$ په الجبر $A = (A,F)$ یو کونګرو- اینځ اړیکه بلل کیږي، که Θ د ټولو f سره زغمور وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د ټولو کونګورنیځ اړیکو ډیرۍ په Con A سره په نښه کیږي یا نښوون کیږي.
(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګې

الف) په هر ډیري A باندې ثابتې عملیې یا کارونې $f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ کټمټ ځیرونې id_A او د ټولو Con A $\Theta \in$ سره زغمور دي. له دې امله د پریوستونځیرونې (المانې او انګریزې (Projektionsabbidung or projections mapping یا عملیې باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i(x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چې دا پورته ډول ځیرونه د پریوستونځیرونې Projektionsabbildung تعریف دی.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره Con A $\in \Delta_A, \nabla_A$ باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چې د Δ_A او ∇_A څخه بل کونګرـ واینځ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګې په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A)) ساده دی:

$$Con(A,Op(A)) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) باور لري

$$Con(A , \emptyset) = Eq\ A$$

کیدی شي ، چی کونګروااینځ اړیکي، د زغموالی له لاري، د ځانګړو یوځایزو عملیو سره کرکتر یزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A ,F) دې یو الجبر وي. یوه څیرونه د بنې

$$x \longrightarrow f(a_1 , , a \ldots, a_{i-1} , x ,a_{i+1} ,\ldots,a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځایز) او $a_1 , \ldots,a_{i.1} ,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ سره د (A , F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A , F) لپاره باور لري: $\Theta \in Eq\ A$ ټیک او ټیک هلته په $f(A , F)$ باندې یو کونګروااینځ اړیکه ده، که Θ د (A , F) د ټولو ترانسلا– یشنونو سره زغمور وي.

اوبی : دا چی هر $\Theta \in Con(A , F)$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور دی، دا سیده مخه لوستلود کونګروااینځ اړیکو څخه لاسې ته راځي. په څټ دې $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور وي. دا باید وښوول شي چې Θ د ټولو $f \in F$ سره زغمور دی. f دې یو n–ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري $a_1 \Theta b_1 , \ldots, a_n \Theta b_n$. دا چی هر د f څخه ګټلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځی

$$f(a_1,a_2,...,a_n) \ \Theta \ f(b_1,a_2,a_3...,a_n)$$
$$\Theta \ f(b_1,b_2, a_3 ,...,a_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$\Theta \ f(b,b,...,b)$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې یو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in Con\ A$ سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A / Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کږي و کونګروااینځ Θ پسی یا کونګروااینځ Θ ته: د A / Θ بنسټ- ډیری یی همدا فاکتورډیری A / Θ دی ، دا په دې مانا چی د Θ د ټولوګونګروااینټولګیو ډیری. د A / Θ بنسټکارونی یا عملي د A له کارونویا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta ,$$
$$f_{A/\Theta} ([a_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,...,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي:
له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,...,[a_n]\Theta=[b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,...,a_1)] = [f_A(b_1,...,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زغموالي خويونه دي).
الجبر $((A/\Theta = (A/\Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بيرته د تيپ يا ډول f دی. زيات وخت په ساده توګه داسی $A = (A, F)$ او $A/\Theta = (A/\Theta, F)$ ليکل کيږي.

هوموMورفيزم د کونګروانټ اړيکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي يا کلك ټرلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعريف : $u : A \longrightarrow B$ دې يوه څيرونه وي . نو د u زړی (المانی Kern) په لاندې توګه تعريف دی :

$$\text{Ker } u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې يو ايکويوالنټ اړيکه ده . په دې برسيره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ . ۱۶ جمله: د هر هوموMورفيزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A يو کونګروانټ اړيکه ده، دا په دې مانا چی $\text{Kern } u \in \text{Con } A$ باور لري:

اوبی: f دې د A يو n–ځايز بنسټيزه کارونه يا عمليه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in \text{Kern } u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا چې $ua_1 = ub_1 , ...,ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځي:

$$uf(a_1,...,a_n) = f(ua_1,...,ua_n)$$
$$= f(ub_1,...,ub_n)$$
$$= uf(b_1,...,b_n)$$

له دې لاس ته راځي

$$(f(a_1,...,a_n) , f(b_1,...,b_n)) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې Kern u یا د u زړی د ټولو بنسټیزو کارونو یا عملیو سره زغمونې دی. څ چ ښ و

د دې په څټ د کونګرویځ اړیکو څخه تل هوموموړفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in \text{Eq A}$. نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta, \quad P_\Theta(x) = [x]\Theta$$

د Θ کانوني څیرونه kanonische Abbildung بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې یو الجبر وي او $\Theta \in \text{Con A}$. نو کانوني څیرونه P_Θ یو سورجیکتیو هوموموړفیزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/\Theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

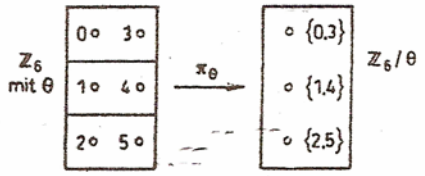
دی. (د Θ کانونی هوموموفیزم). باور لري: د P_Θ زړی یعنی $\text{Kern } P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیري جملي ویناوي ساده شوول کیږي. په ټولیزه توګه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګروانټ اړیکی ټیك د هوموموفیزم زړي دي د A پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بیلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ یوه کونګروانټ اړیکه وي، د کونګروانټونو ټولګیو $\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}$ د $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta, +, -, 0)$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په څرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$ ، چیرته چې Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راګرزیدونکی ګروپ دی د درې توکو سره. (ورپسې څیره دې وکتل شي)



څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونګروانټ اړیکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، یو ټرون یا لاټیس جوړوي. د دې د کتلو لپاره دا لاندې لاس ته راوړنې ته اړیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دي يوالجبر وي اوR دي د Con A يو ناتش برخديری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \text{Con } A$$

اوبی يا ثبوت: f دي د A يو n–خايزه بنسټيزه کارونه يا عمليه وي، او وي دي: $R \in (a_1,b_1),\ldots,({}_na,b_n)$ ،نو باور لري: $\Theta \in (a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ او له دي امله

$$f(a_1,\ldots,a_n)\ \Theta\ f(b,\ldots,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دي امله باور لري

$$f(a_1,\ldots,a_n)\quad R\ f(b_1,\ldots,b_n)$$ پای

په دي پسی به وښوول شي چی د $\Theta, \Psi \in \text{Con } A$ لپاره تل $\Theta, \Psi \in \text{ConA}$ او $\Theta \vee \Psi \in \text{ConA}$ باور لري، د ۸ او ۷ سره لکه د مخه مو ، چی و ښوول.

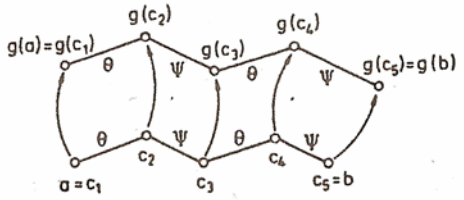
په نورو ټکو يا کليمو سره په Θ او Ψ کی غټ خوندي اکويوالنخ اړيکی او کوچنی Θ او Ψ خوندي لرلي ايکو–يوالنخ اړيکي دواړه اوتوماتيک کونګروااينخ اړيکي دي.

په داسی حال کي چی $\Theta \wedge \Psi \in \text{Con } A$ په دي د مخه جمله پسی ترلی لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in \text{Con } A$ ښونه په لاندي ډول سرته رسيدلي شي:

داچی $\Theta \vee \Psi C \text{ Eq } A$ روښانه ده نو لکه د مخه مو، چی ښوولی، بسيا کوي چی د $\Theta \vee \Psi$ زغموالی د $A = (A, F)$ ترانسليشن سره وښوول شي. وي دي $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $g(x) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$ يو ترانسليشن د $f \in F$ او $a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $(g(a),g(b)) \in \Theta$ د ثبوت دی. جمله د
توکو $c_1,...,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي
د $a = c_1 \Theta c_2 \quad c_3 \Theta c_4 ... c_n = b_n$ سره. دا چې g
د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځي:
$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2)\ \Psi\ g(c_3)\ \Theta\ g(c_4) ... g(c_n) = g(b_n)$
له کومې چې د ۳.۵.۱۰ پسې $(g(a),g(b)) \in \Theta$ ورکوي،
لکه څنګه چې د غوښتلو وو (دا پسې څیره دې وکتل شي).



څیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چې په لاندې ډول راټول شي:

۳.۵ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره $(Con A, \wedge, \vee)$ د $(Eq A, \wedge, \vee)$ یو لاندې الجبر دی. په خانګړي توګه $(Con A, \wedge, \vee)$ یو ټرون یا فرباند دی (د A کونګرو-اینځفرباند یا کونګروااینځ ټرون)

د دې جملې له مخه تیرې جملې څخه ټرلی لاس ته راوړنه لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخلیږي لپاره $X \subseteq A^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Theta(X) = \bigcap\{\Theta \in \mathrm{Con}\, A \mid \Theta \supseteq X\}$$

یو کونګروانیځ اړیکه په A ده، دا په دې مانا چې $\Theta(X) \in \mathrm{Con}A$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A باندې کوچنی کونګروانیځ اړیکه ده، چې X خوندي لري. دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-اینځ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n))$ د $\Theta(X)$ په ځای. د $Y \subseteq A$ لپاره په زیات وخت کی په ساده توګه د $\Theta(Y^2)$ اود $\Theta(a_1,\ldots,a_n)$ په ځای $\Theta(Y)$ لیکل کیږي، که $Y = \{a_1,\ldots,a_n\}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنې کوانګروانیځ اړیکی د $a \mid= b$ سره اصلي کوانګروانیځ بلل کیږي.

لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده توګه داسی کیږي، چې کونګروانیځ اړیکي دلاندې الجبر-ونو د بنسټډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر وي د تیپ f د بنسټډیري A سره. د نوي الجبر بنسټډیری A^2 دی. د هر n -ځایزې عملي سومبول $f \in f$ همداسی یو n-ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,,\ldots,x_n),f_A(y_1,\ldots,y_n))$$

سره.

بیا د هر $a \in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیې په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندې توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

$t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) =$ (x_1,y_2) وي $y_1 = x_2$ که

(x_1,y_1) په بله توګه

د فامیل F سره، چې له عملیو

$$f_2\,(f \in f)\,,(a,a)\,(a \in A)\,,s\,,t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

(نښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$\mathrm{Con}\,A = \mathrm{Sub}\,(A^2, F_{\mathrm{Con}})$$

دا په دې مانا، چې په A باندې کونګروانیځ ټیک د (A^2, F_{Con}) لاندې الجبرونو بنسټیږي دي.

کیدې شي ، چې سیده په کونګروانیځ اړیکو وکاروو شي یااستعمال شي. ځکه چې باور لري $\Theta(X) = \langle X \rangle$، د کوم سره، چې $\langle X \rangle$ کوچنی X خوندې لرونکی د (A^2, F) لاندې الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړښتیزه روښانونه به په جمله کې ورکړ شوې وي، چیرته چې د پولینوم کلیمه په واک کې لرو. یوه بله د کونګروانیځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړوندونه په لاندې جمله کې روښانه شوې ده، چې نښوونه یې بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتې ده.

د دې له مخه یو بل تعریف : د هر ډیرې A دې $\Theta \in \mathrm{Eq}\,A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چې $[X]\Theta$ د هغو ايکويوالنت اړيکو Θ ټولنه ده، کوم چې يو $x \in X$ خوندي ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A يو الجبر، $\Theta \in ConA$، او $B \in Sub A$. نو باور لري

$$[B]\Theta \in Sub A.$$

عمومي الجبر تيپ او داسې نور لاندې الجر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ ټرونې Verband (lattice)

۶ . ۱ ټرونې او مکمل یا پوره ټرونې

: ګروپ تیورې اوکړی تیورې ترمنځ غبرګوالی نورې تیورې،
په ځانګړې توګه د ټرونی تیوري رامنځ ته کړه یا راپورته کړه.
دا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د یوه ګروپ لاندېګرو-
پونه او هم د ګروپ نورمالپرویشوني او په همدې توګه د
یوې په خوښه کړی ټولو لاندېکړی اویا ټول (دوه اړخیزو،
کین اړخیز ، بنې اړخیز) ایدیالونه نسبت د ډیری تیوري
خوندیونی ته-چې نیممنظم یا نیمترتیب دي-هلته دا نیمنظم
یو څو بنسټیز خویونه لري.

۶ . ۱ . ۱ تعریف : یوه نیمترتیب ډیری S ټرونی بلل
کیږي، که هغه دا لاندې دوه خویونه ولري:
الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی یو داسی
توکی $c = a \cap b$ شته. چې د a او b غوڅې بلل کیږي، د
کومو لپاره چې
$$c \leq a \ , c \leq b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، که یو بل توکی c' موجود وي، چې هغه همدا شرطونه $c' \leq b$, $c' \leq a$ پوره کړي ، نو $c' \leq c$ دی.

الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هري جوړې ته په S کې یو توکی d ، چې دa اوb ټولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چې $d \geq a$, $d \geq b$

باور لري، او هر بل داسی توکی d' د $d' \geq b$, $d' \geq a$ سره دا اړیکی $d \geq d'$ پوره کوي.

په بنکاره توګه د دوه توکو a , b دا ټولونه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره یواځني ټاکلي دي.دا هم په بنکاره توګه ساده لیدل کیږي، چې هر نیممنظم ډیری ، یوه ټرون ته په څټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (یرتله برخه ۲) په همدې ډول یو ټرون دی. په کومو کې چې کلیمی غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمي دي. پس کیدی شی، چې د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له ټرونې او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشوني له ټرونې څخه وغیږو، او همداسی د یوې کړۍ R د لاندې کړیو ټرون او همداسی د دې کړۍ R د ایدیال د ټرونو څخه وغیږو، که دا ایدیالونه کیږ او بنې هم وي- په دې ټولو حالتونو کې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوڅی څخه د هغو ډیرېتیوریکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنی په څیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې- ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) { A , B }.

یه ټولیزه توګه کیدی شی د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټرون څخه وغږيږو. د ټرون لپاره يوځو نوري بېيلګې هم راوړو.
د يوه ډيري M ټول لاندې ډيري نسبت د ډيريتيوري خوند-
ېوني ته يو ټرونی جوړوي، په کومو کی چی غوڅي او ټولنی
د ډيريتيوري د موخی يا هدف په څير پوهيدل کيږي، داد
لاندېډيريو M ټرون به ورپسی هم زيات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ جمله: هر لايني منظم ډيری L يو ټرون دی،
او دا د

$$a \cap b = a \ , \ a \cup b = b$$

سره د $a, b \in L, a < b$ (دې ته دلته بيا هم ګوته نيسم،
چی دا په لاتين تورو ليکنه له کينې لورلوستل کيږي) له املە.
د پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيری يو ټرون دی، که د نظم
اړيکي د ويشوړوالی اړيکی ونيول شي، د غوڅي رول دلته
غټ ګڼ پرويشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګڼ زيات-
څله لوبوي. (دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی څما د
شميرپوهنی په کتاب کی پوره څيړل شوې)
ټرونونه د الجبر يو ځانګړی حالت دی. کيدی شي ، چی
ټرون بې د نيمنظم له استعمال څخه،يواځي د خويونو له
مخی تعريف کړی شي، چی غوڅي او ټرون د بينار اړيکو
په څير بايد ولري:

۶ . ۱ . ۳ جمله : ډيریS د دوه بينار يادوه ګونو اړيکو
$a \cap b$ او $a \cup b$ سره هلته او هلته يا ټيك هلته يو ټرون
دی، که دا عملیي لاندې کتمټ اړيکی پوره کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو ټرون دی. اوپه څټ: که دا الجبر یو ټرون وي ، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چې د یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ

II_1. $a \cap a = a$, $a \cup a = a$

II_2. $a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$

II_3. $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$,
$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$:

II_4. $a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$

مورږ لمړی نیسو ، چی یو ټرون S ورکړ شوی دی، عملیې $a \cap b$ او $a \cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعریف شوې دي یا پیژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باورې کید نه بیا روښانه ده. مورږ اوس خوې II_3 ازمایو او دا د غوښې لپاره. له لمړي ۱ څخه لاس ته راځي:

$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a$.
$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b$,
$(a \cap b) \cap c \leq c$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$(a \cap b) \cap c < b \cap c$.
$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توګه دی

$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره II_3 باورې کیږي

وړسی بیا د لمړي ۱ پسی روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a ;$$

په همدې توګه له بلی خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲

له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسی دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د IIم باورې کیدنه لاس ته راځي.

اوس دې یو ډیرې S د دوه بینار یا دوه ګونو اړیکو سره ورکړ شوي وي، کوم چې خویونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$ لپاره خویونه

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$

تل سملاسي پوره دي یا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو له II_4 او II_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.

که د دې په څټ $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسی لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري، نوکیږدو $a \leq b$. له دې سره په ډیرې S کی یو نیمنظم پلی کیږي. په ریښتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی. که په دې ورزیات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، یعنی

$$a \cap b = a, b \cup c = b ،$$

نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، چې $a \leqq c$. بالاخره دی: $a \leqq b$, $b \leqq a$, پ $a = b$, $a \cap b = a$, $b \cap a = b$ له II_2 بیا لاس ته راځي . پسی ټرلی د لمړي ۱ شرط باورېوالی یا باوریتوب ښایو. له $(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$ څخه لاس ته راځي $a \cap b \leqq a$ ، په ورته توګ کیدی شي $a \cap b \leqq b$ وښوول شي.

د دې په څټ په S کی دې یو په خوښه توکی 'c ټاکلی وي، کوم چی شرطونه $c' \leqq a , c' \leqq b$ دا په دې مانا چی

$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$

پوره کوي، نو باور لري

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$

له کوم چی $c' \leqq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په تعقیب د توکو a او b غوڅی د لمړي ۱ په موخه یا هدف انځوروي. په ټیک دې سره سمه توګه توکی $a \cup b$ ښوول کیدی شي، چی د توکو a او b ټولنه ده، د لمړي ۲ په موخه یا هدف.

ځمونږ د ټرون د کلیمي دوم تعریف په ګوته کوي، چی ټرون د ټولیز الجبر پریمیتیو ټولګي یا ساده ټولګی جوړوي، د دې دوه دوه ځایزو عملیو سره (دا مو د مخه په ګوته کړي وو، چی ساده ټولګی څه ته وایي)

دا د ټرون د کلیمي هغه زړی دی، څنګه چی دا د لاندې ټرونو او ایزومورفو څیرونو او د ټرونونو د خوندیونو لپاره په پام کي نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۴ تعریف : یو د ټرون S لاندېډیری T لاندېټرون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوي، د الجبر په موخی راوړل شوي ټرون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوڅی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندې لري، نسبت وهغو عملیو ته چی په ټرون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ټرون شي وهغو عملیو ته چې په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ټرون S یو لاندې ډیری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مګر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېټرون جوړ کړي. د ګروپ G د ټولولاندېګروپونو ټرون د ډیریټیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ټرون د ګروپ G د ټولو لاندېډیریو ټرون لاندېټرون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ټرونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدې توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ټرون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیګروپ لاندېګروپونه ټرون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ جمله : د یوه ګروپ G د نورمالپرویشونو ټرون د زیاتونګروپ G د ټولولاندېګروپونو لاندې ټرون نه دی، چی دا مو د مخه د ګروپټیوري کی ښوولی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۶ **تعریف** : د یوه تړونې S وړ په څنګیدونکی یواځنی څیرونه یا په بل عبارت یو اینجکټیوه څیرونه u په تړون S' باندې یوه ایزومورفه څیرونه ده یا یه بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه ده د S په S' کی ، که د په خوښه توکو a , b ∈ S لپاره

$$(a \cup b)\, u = au \cup bu \quad . \quad (a \cap b)\, u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زیات وخت یونانې توري خاي په خاي کیږي، مګر زه دا ستونځې لرم، چې یونانې توري می په پروګرام کی نه شته. هیله ده چې څیرونې او د یوه ډیری توکی توپیر ته به د ګرانو لوستونکو پام وي) دا د S او S' یو ایزومورفیزم دی. چې د ټولیز انجبر په څیر راوړل شوي تړونې یې یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ **جمله** :د یوه تړونې S ایزومورف خوندیونه u په تړونS کی.د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیري S کی یو ایزومورفیزم انخوروي.

اوبی : د اوبیونې لپاره ټاکو a , b ∈ S . که a < b وي یعنی a ∩ b = a . نو وبه لرو

$$(a \cap b)\, u = au \cap bu = au$$

او له دې امله لاس ته راځي au < bu . که دا پام په څټ یا په برعکس لور وګرو او وکاروو. چې u یو یواځنی په څنګیدونکی دی. نو له au < bu څخه هم a < b لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي.

دا پورته بیلګې را ته ښایي، چې په څټ ثابتونه باورنه لري.

د دوه ډیریو S او S' لپاره ، چې نیممنظمي دي، یو ایزو-مورف څیروني u ته د S په S' کې، هلته اړتیا یا ضرورت شته، چې S او S' دواړه ټرونونه وي. دا د S ایزمورفی څیرونی کي په S' باندې بل ډول څانونه نیسي.

۱۶ . ۸ جمله : که ټرونونه S او S' ورکړ شوي وي، نو د نیم نظم په موخه هر ایزمورف څیرونه د S په S' باندې ټرون S ایزمورف په ټرون S' باندې انځوروي.

اوښی : په ریښتیني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \leq a$ څخه هم $(a \cap b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسې وي، چې $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چې $cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا په دې مانا چې $c \leq a \cap b$ له کوم څخه چې $cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د ټولنی لپاره یې ښوونه یا اوښیونه په همدې توګه ده. مور دا هم په پام کې نیسو، چې په ټرونونو باندې د هومورفیزم اوټولی هغه کیلمي چې په خوښه، د ټولیزالجبرونو په ساده

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نوري بیلګي هم شته خو هغه موضوعګانی مو نه دي څیرلی ، له دي امله یي نوري زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دي وکتل شي)، په یوه ډیري M باندي بینار اړیکی یو ټرونې جوړوي، کوم چی د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي، یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندي تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو ټرون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چی ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو ټرون د بینار اړیکو د ټرون لاندې ټرون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر ټرون په یوه ځانګړي ډیري باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو ټرون کی ایزومورف خوندي دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندي تعریف شوی ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو ټرون کی ایزومورف خوندي دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دي سره سم هر ټرون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو- پونوټرون کی ایزومورف خوندي دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي ټرونونه - لکه د یوه ډیري M لاند- ېډیریو ټرون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو ټرون، د یوې

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړی R د ایدیالونو ټرون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-
اړیکو ټرون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوڅی او ټولنه
نه یواځي د دوه توکو لپاره بلکه د اسوڅیاتیو قانون سره
سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د
ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.
په بل ډول افاده کوو، دا ټرونونونه دلاندي تعریف سره سم
پوره ټرونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره ټرون یا
مکمل ټرون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$
لپاره په S کې توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره
سم موجود وي:
الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري،
هر ورپسی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره
شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.
دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور
لري، هرڅورپسی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$
لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.-
دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندیډیري A د توکو
غوڅی او همداسی ټولنه بلل کیږي. د سومبولونو سره
کیدی ، چی c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

دا کې A ټ[illegible]

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژندډیري I کی وځغلي یعنی $i \in I$، په لاندي بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعآ یو پوره ټرون یو ټرون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره ټرون S د ټولو توکو غوڅی د ټرون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا-ځنی ټاکل کیدیشي. د ټولو $a \in S$ لپاره باور لري

1) $0 \leq a$; 2) $0 \cap a = 0$; 3) $0 \cup a = a$.

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره ټرون د ټولو توکو ټولنه د ټرون یویتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې درې په خوښه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو $a \subset S$ لپاره باور لري

1') $1 \geq a$; 2) $1 \cup a = 1$; 3') $1 \cap a = a$

طبعآ هغه ټرونونه چې پورې ټرونونه نه دي کړی شي، چې صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري.

د یوه ګروپ G د لاندې ګروپونو په ټرون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G سره انځوریږي، د یوې کړی د لاندېکړیو په ټرون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره انځوریږي، د یوه ډیرې M ټولو لاندېډیریو ټرون کی د تشډیري او پخپله د ډیري M سره انځوریږي.
د پرویشنی قانون له مخی منظم یا تنظیم شوي د طبیعي ګڼونو ټرون او د څنځیروني ، چی پخپله طبیعي نظم یی جوړوي، هر وار یی صفر توکی ګڼ ۱ دی، په داسی حال چی یویتوکي موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: یو نیم منظم ډیری S هلته او هلته یوټرون دی، که هغه یو یویتوکی ولري او په هغی کی د هرو، په خوښه ناتش لاندې ډیریو لپاره غوڅی موجود وي.
اوښی : د ښوونی لپاره بسیا کوي، که داسی فکر وکړو، چی د یویتوکی د موجودیت او د د ټولو غوڅیو له موجو-دیت څخه د ټولنی موجودیت لاس ته راځي. A دې د S یو ناتش لاندېډیری وي. په S کي داسی توکيb موجود دی د کوم لپاره چی $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره، داسی یو توکی تل دا یویتوکی دی، B دي د ټولو داسی توکو یو ناتش لاندېډیري وي او d دې د هغو غوڅی وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

مورږ به سملاسی وښایو، چی d د لاندېډیري A ټولنه انځوروي. په ریښتیني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. ورپسی دې $s \in S$ داسی وي، چی $s \geq a$ د ټولو $a \in A$ لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $s \leq d$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډیري خویونه، چې یو پوره ټرون(او یا هم یو ټرون) وي، ځان په یوه په څټ ایزومورفیزم ته لاښودوي (د دې سره دې لمړی برخه پرتله شي)، مور کړی شو، چې د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندېډیریو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ **تعریف:** د یوه نیم منظم ډیري M څیرونه u په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چې له $a \leq b$ $a, b \in M$ څخه تل $au \leq bu$ لاسته اخي، مونوتون monoton بلل کیږي(مونوتون په دې مانا، چې توکی یو په بل پسی یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو ټرون S هلته او هلته پوره ټرون دی که دS په هر مونوتون څیرونی u په خپل څان باندې فیکس توکی موجود وي، یعني توکي، د کومو لپاره چې $au = a$ دی

(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چې وښول شو، هر نیم منظم ډیري M د ټولو لاندېډیریو په پوره ټرون M کی خوندې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مور غواړو چې دا لاندې جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر ټوپولوژيکي شي ، چې په يو پوره ټوپولوژۍ کې ايزومورف (د ټوپولوژۍ ايزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندي شي.

دا جمله د راتولنکي جملې څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تيره لمړۍ برخې کې وينا ته لږ تيزه وينا د :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نيم منظم ډيرۍ M په يو ټاکلي ټوپولوژۍ S کې ايزومورف خوندي دی، او دا په داسې توګه چې د هر لاندېډيرۍ A M لپاره و کوم ته چې په M کې غوڅې يا ټولنه موجود ده، چې دواړه د u په خوندیونه کې و بل ته وړل کيږي: دا داسې بلل کيږي، چې دی

$$(\bigcap_{a\in A} a)\,u = \bigcap_{a\in A} au \quad , \quad (\bigcup_{a\in A} a)u = \bigcup_{a\in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کې جوړ شوي د M خوندیونه په M کې، په روښانه توګه مخ ته لرونکې شرطونو لپاره بسيانه کوي.

مور په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړۍ نيسو چې ډيرۍ M يو صفر توکی لري، که نه نو M ته يو توکی 0 صفر ورزياتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعريف : يو ناتش لاندېډيرۍ M X په M کې يو ايديال بولو که:

اول) X و هر خپل توکی x ته تل توکی y هم لږ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \leq y$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چې په M کې ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کې هم موجود ده.

د ډيري M د ټولو ايديالونو ډيرې S نسبت د ډيريتيوري خوندیونې ته نيم منظم دی. دا چې S يو يويتوکی لري- په څرګند ډول M د خپل ځان ايديال دی-، له دې وراخواد ايديالونو په خوښه ډيري غوځی، چې صفر لري، او ټول د ايديال په تيوري کې راغلي تعريفونه پوره کوي، نو ډيريS د په دې برخه کې د مخه لوستل شوو له مخې پوره ټرون دی.

د يوه په خوښه توکی $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډيرې (a) د $b \leq a$ سره يو ايديال انځوري، کوم چې د a څخه راجوړ يا توليد شوی اصلي ايديال بلل کيږي. که هر توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ يا توليد ايديال(a)باندې تنظيم شي، نو په لمړی برخه کې لوستل شوو له مخې يو ايزومورف خوندیونه u د نيم تنمظيم شويډير M ، په پوره ټرون S کې، لاس ته راځي.

مورِ نو نيسو ، چې په M کې د لاندېډيريو $A \subseteq M$ د هغو غوځی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسې $(c) \geq (a)$ د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بيا د ټولو اصلي ايډيالونو (a) , $a \in A$ د ډيريتيور-

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکي غوخی توکی x ولري، نو $x \leq a$ دی، د ټولو $a \subset A$ لپاره او له دې املې $x \leq c$.له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو.

همداسی دې و دې لاند ډیر $A \subseteq M$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.

که یو ټاکلی ایدیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $(d) \subseteq X$ دی.

له دی املې باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې املې د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره ترون دی، کله چی په S کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایدیال یو اصلي ایدیال وي.

یا دونه: د دې جملي له ښوونی څخه هم دلته تیریږو .

کیدی شی په کوروش یا خوروش کې وکتل شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library