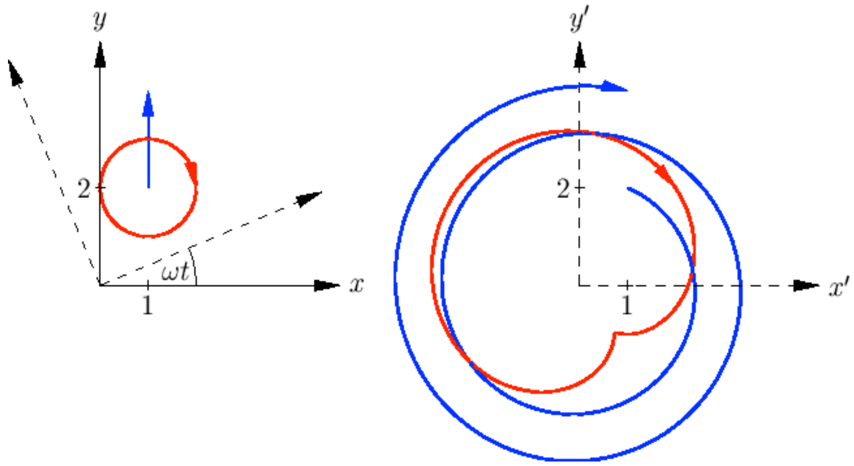
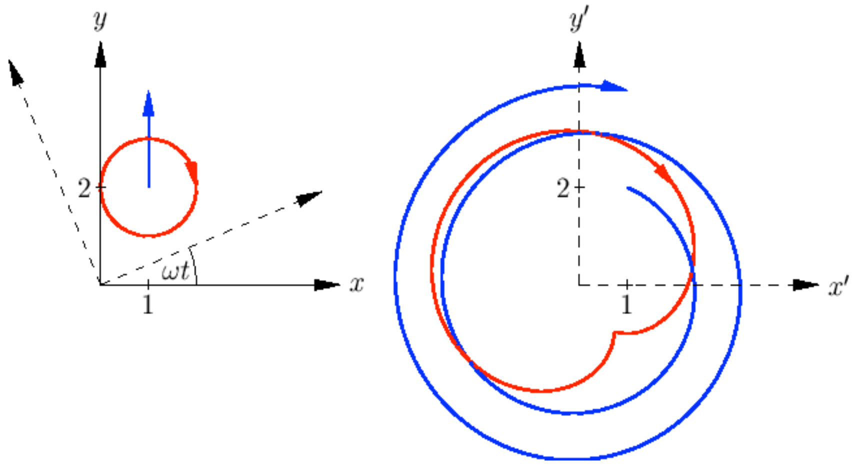
وکتورشمیرنه



ډاکتر ماخان شینواری

وکتورشمیرنه



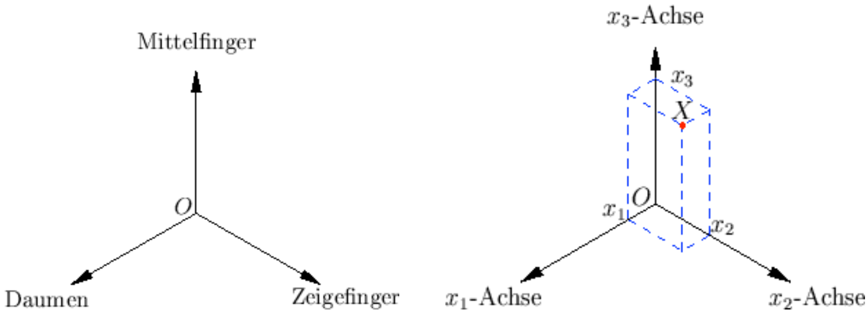
د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړې: ډاکتر ماخان شینواری

وکتورشميرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايي کواورديناتسيستم له درې په سرچينييز ټکي O کې يو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چې لوريزوالی يې د ښۍ له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواورديناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرپوستون ارزښت سره سم کره کيدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ايندکس يا پيژندنخښه ونه کارول شي،نو

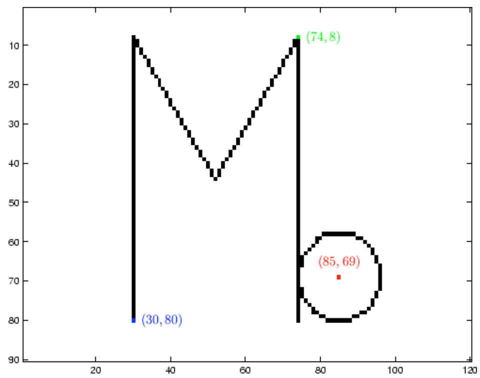
کواوردينات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګڼونمخور د x, -y- او z - محور په

نخښه کيږي.

په ورته توګه د هوارې کارتيزي کواورديناتسيستم پيژنو يا تعريفوو.

پيکسل – يا د چوخونې کواودينات Pixelkoordinaten

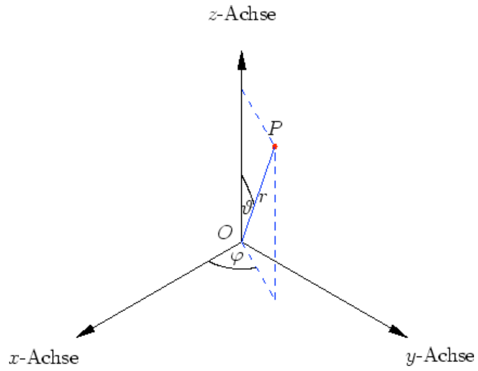
په يوه ګرافيکي کړکۍ کې شيان د پيکسل- چوخونوکواودينات (Pixel خورا کوچني ځيره شوي ټکي) له لارې ورکول کيږي.. دا انځور شوی ولاړګوډيز يوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردينات پروت دی د ځيرې ګوډ په ګوته کوي .



د غونډاري (غونډوسکې) يا کرې کواوردينات

يو ټکی $P = (x, y, z)$ کيدی شي د سرچينې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج φ ټيک تر د 2π

زیاتځلي پوري ټاکلکیدی شي. د ستاندارد په څیر په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کیدی شي یا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځایونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسي

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

د کوم سره چي د x, y او z نیوني سره سم د ارکوستانجنت یوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

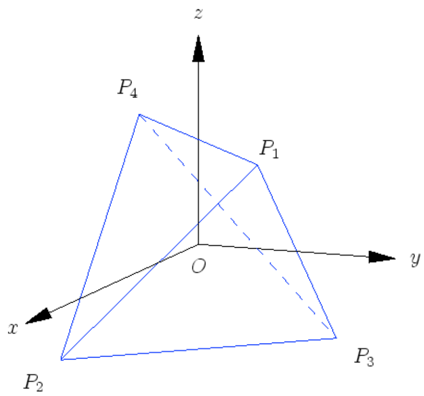
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

لیکونکي:اپ، هولیګ

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيتراايدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د درونډ ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r, ϑ, φ) کې ګوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

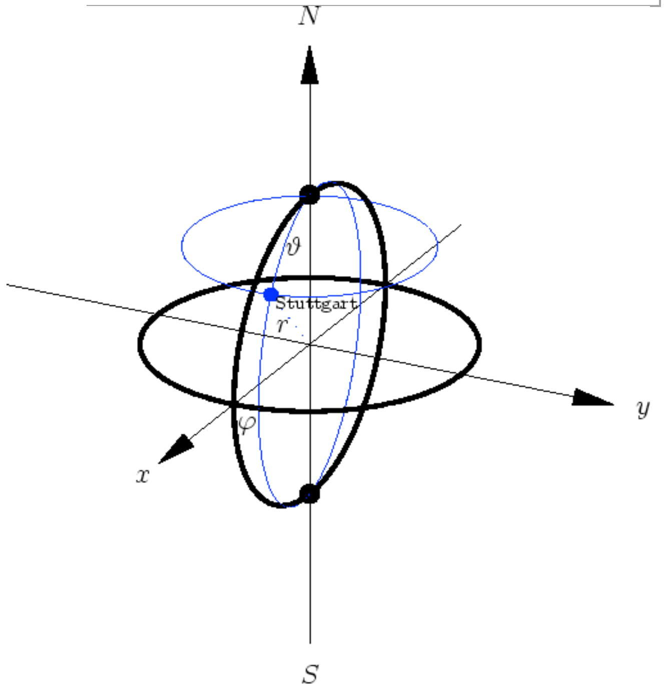
$$P_1' = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P_2' = (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4), \qquad P_4' = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يوائې بل ډول کونجورشو ګالني (کونجساحې) کارول کيږي:

ختیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots \pi$
لویدیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots -\pi$
شمالي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$
جنوبي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$



په خيره کې ابکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کبنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجي شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجي جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درحي ختيزې اوږدوالی ، ۴۹ درجي جنوبي سور) تېرېږي

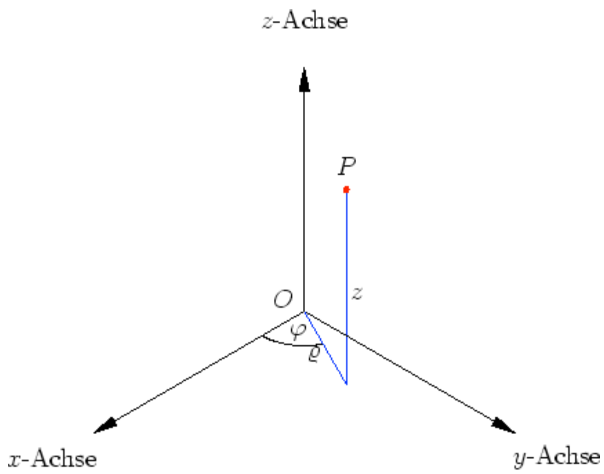
او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختيز نيم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لويديز نيمغونډاری په نخښنه کوي

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P=(x,y,z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -محور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ ټیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi\in(-\pi,\pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi,\quad z=z$$

همداسې

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan(y/x),\quad z=z\,,$$

د کوم سره،چي د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت يوه څانګه ټاکل کيږي.

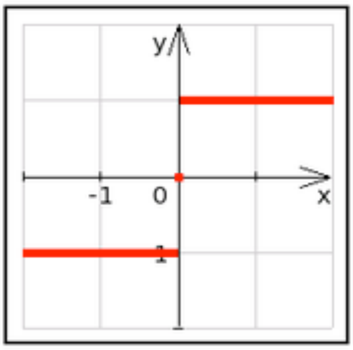
د اصليڅانګي ـکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کيږي

$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$	د $x > 0,$ لپاره د $x = 0,$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سيګنوم (لاتين : Signum نخښه) فنکشن په رييل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف

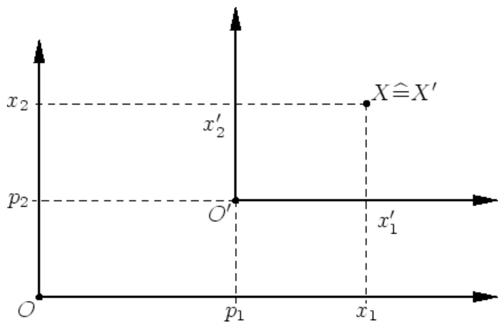


د رييل ګنونو څيره ونه ده په ډېرى {-1,0,1} کې

وړل (سيده يا سم کرښيز خوزښت يا انتقال) Translation

د سرچينې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتيکيدونکي لور سره د يوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردينات په لاندې توګه تغير خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)\,.$$



خوزنده يا متحرک نسبي سيستم

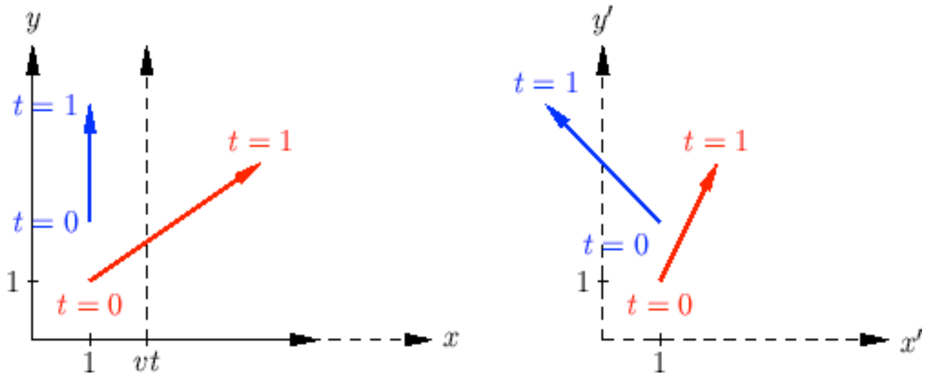
د يوه د x -محور په لور د v چټکتيا سره ځغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نيسو ، نو کواوردينات يې په لاندې ډول تغير خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی يوه بله چټکتيا ريښتوني نيسي يا بله چټکتيا ګوري



د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون(واحد) کې د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د رېښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

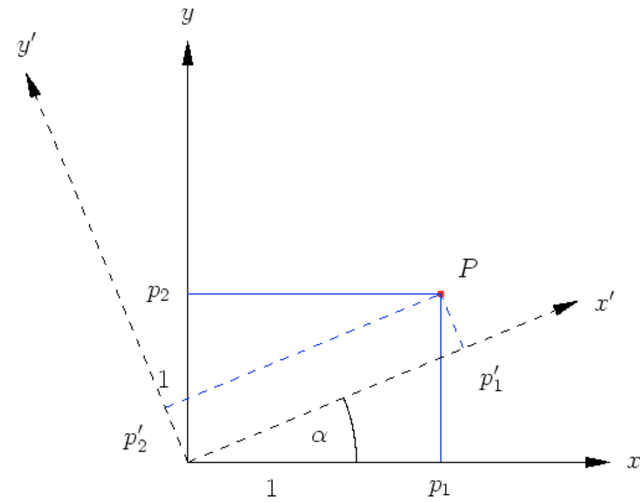
له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

لیکونکي: اېپ، هولیګ

څرخون Rotation

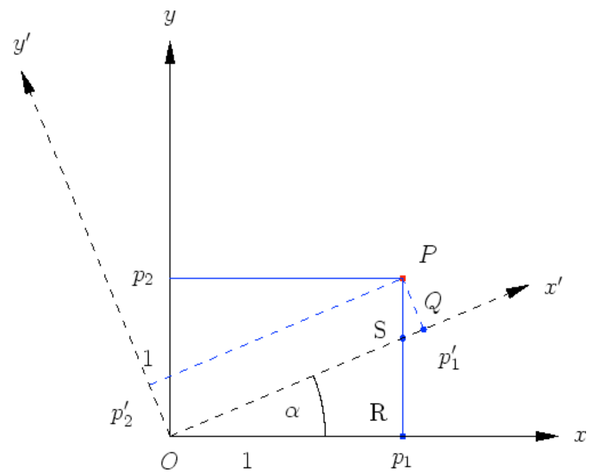
د xy -هوارې یا سطحې څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

$$p_1' = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p_2' = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هولیګ



لومړی پېژنو، چې

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha\,,$$

داپه دې معنا چې ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$
ورته دي.

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha\,.$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha\,|\overline{PS}| = \cos\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha\,p_2 - \sin\alpha\,p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\alpha + \sin\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,p_1 + \sin\alpha\,p_2$$

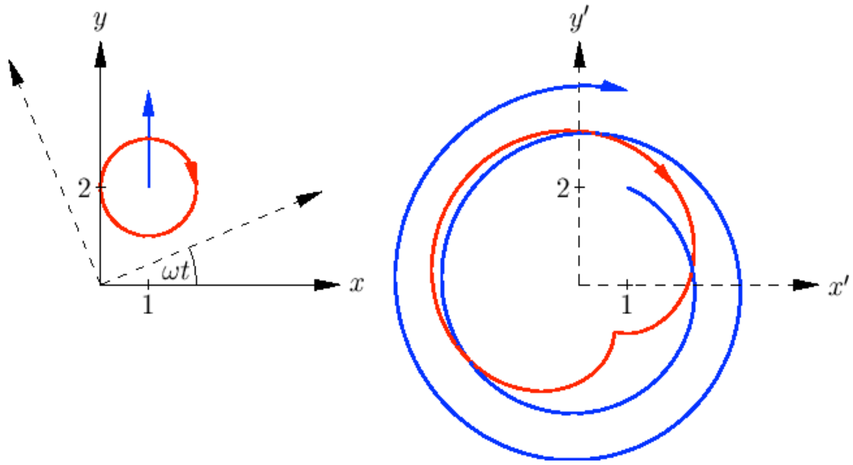
ليکونکی: اپپ، هولير

څرخنده   يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

$$G: \quad (x, y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x, y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.$$

بني لور ته دواړه منحني يا کرږ ديوهکونج سره ځرخيدوني نسبي سيستم انځورو ي،
دا په دې معنا چې داسې لکه په يوه کاروسل (هغه ځرخيدوني شيان دي، چې کسان په
کې ګرځي) کې يوه کتونکې ته برېښي.



د کواوديناتو ترانفوميشن يا بدلون د سيده کرښيز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

يوه شپيرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضريب د جګيدونکي t سره
لويږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه   وخت انټروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودينات ښخه د $\omega = 1$ سره د دايره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

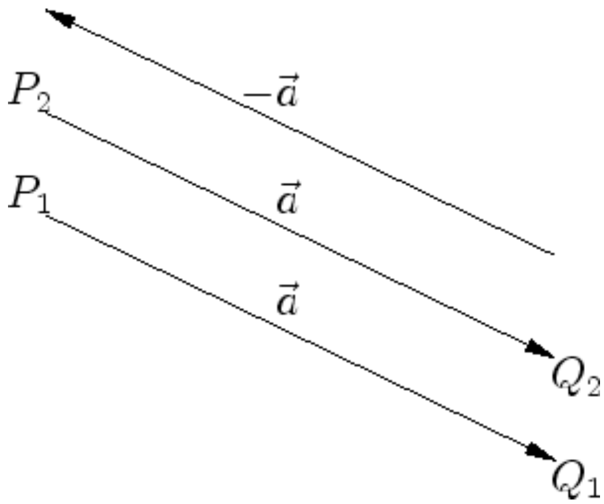
په ځرخون سیستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسي تړلي پېژندل کيږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغير شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په ځرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښايي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د ځیرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و شمیرل شي. بالاخره د

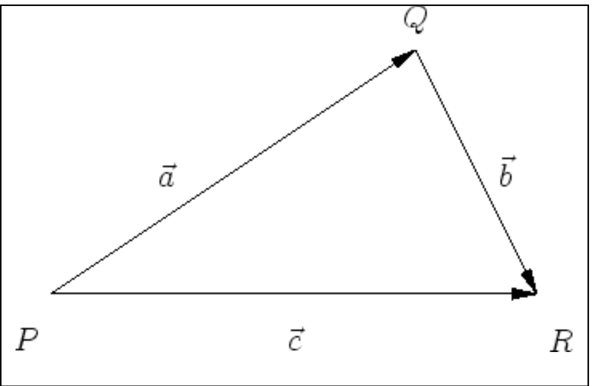
$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$$



د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

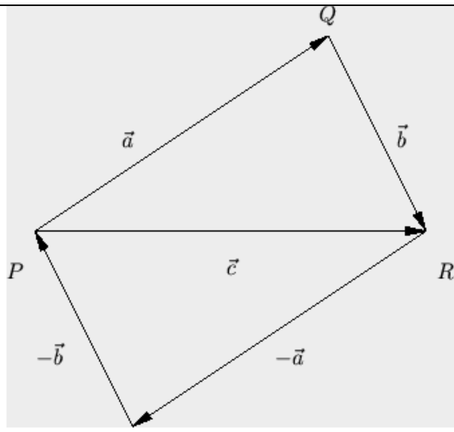
د

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په څټ(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښنه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)



د ټکو

$$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$$

لپاره وکتورونه

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

او

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$$

شميرلکيږي

لکه په څيره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \qquad \qquad \frac{-\vec{c}}{}$$

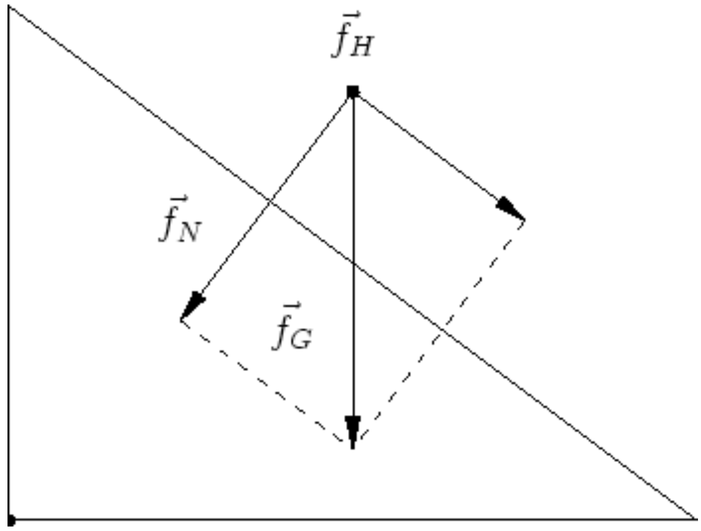
(ليکونکي: هوليک، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيره ييزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



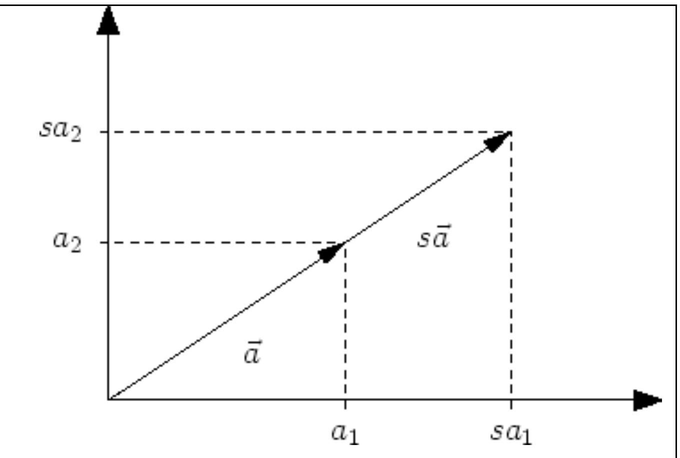
(ليکونکي: هوليک، موخ)

سکالار ضرب :

وکتور $s\vec{a}$ يو s - واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې

$$s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$$

په ځانګړې توګه $0\vec{a} = \vec{0}$ دی.

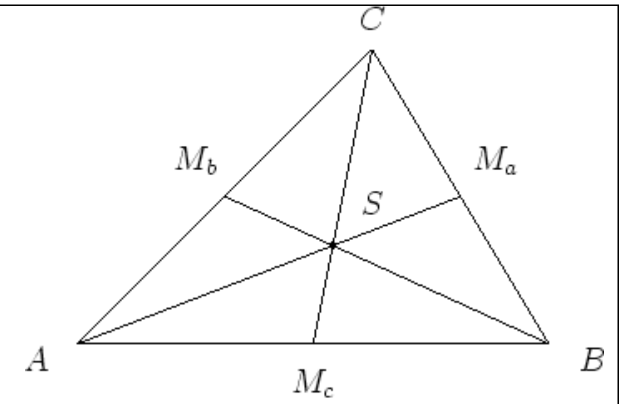


(ليکونکي هوليک، موخ)

د اړخنيميو غوښتکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

د يوه درېګوډي(مثلث) اړخنيمۍ يو بل په دروندتکي(مرکزالثقل) S کې سره غوڅوي.

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) .$$



د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنيمۍ په تکو ليکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0,1] .$$

د لپاره دی، نو دروند ټکی $\overline{AM_a}$ په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنيميو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

(مطلق) ارزښت

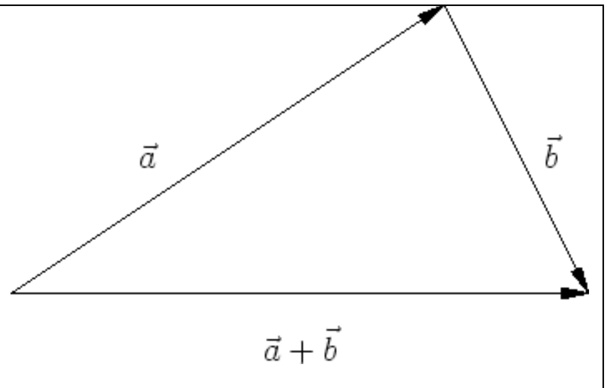
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګې توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

يو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره يوونوکتور (واحدوکتور) بلل کيږي.

درېګوډيز (مثلثاتي) نامساوات :

د دوه وکتوونو د جمعې (زياتون) لپاره باور لري $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ د برابروالي سره تيک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې	

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- کموتاتيو قانون Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- اسوخياتيو قانون Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- دېستريبوتيوقانون Distributivgesetz:

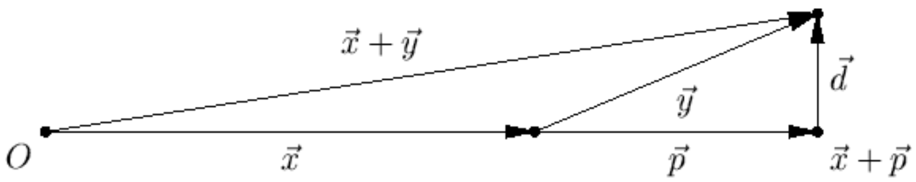
$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .



که پروت محور د ختيز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ ياوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتيا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتيا ښايي.

د يوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتې. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود يا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو ټوليزه چټکتيا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختيز لور ته او دريفت څخه

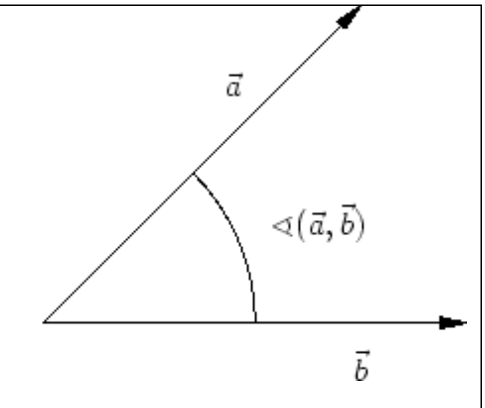
د شمال لورته

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليک، اپپ)

کونج يا زاويه :



د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د

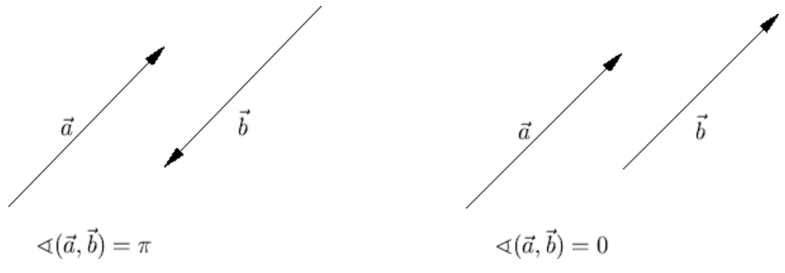
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$

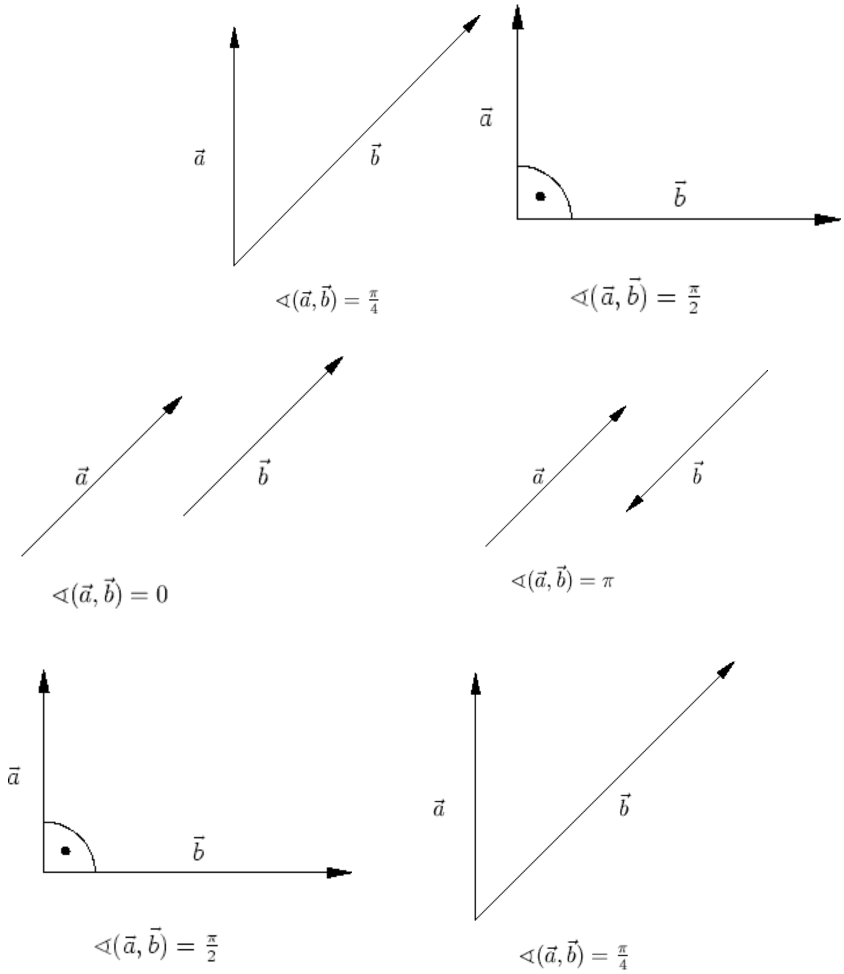
د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ دربېدلی.

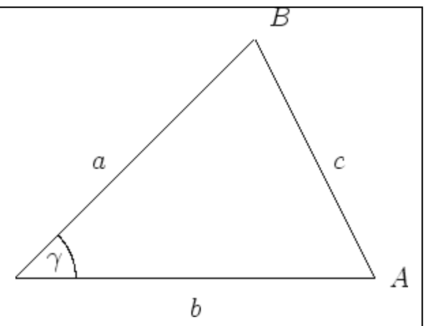
(ليکونکي هوليک، موخ)

لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.





د کوساین جمله :

	په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پيتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(ليکونکي هوليګ، موخ)

د ښووني لپاره يي د پيتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري

$$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$$

همداسې

$$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$$

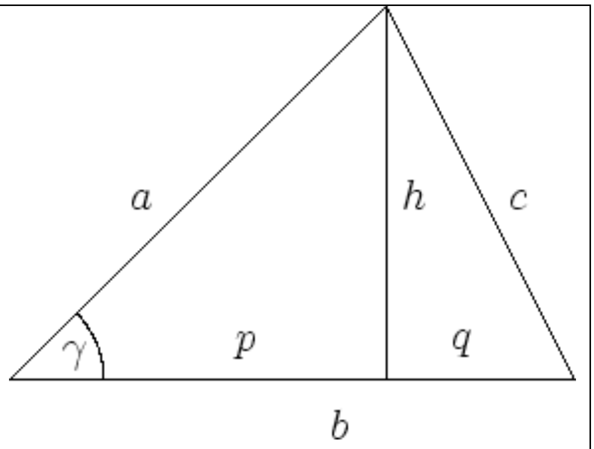
له دې سره لاس ته راځي

$$c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

څه چې د ښوولو وو.

(ليکونکي هوليګ، موخ)



سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

د سکالار صرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

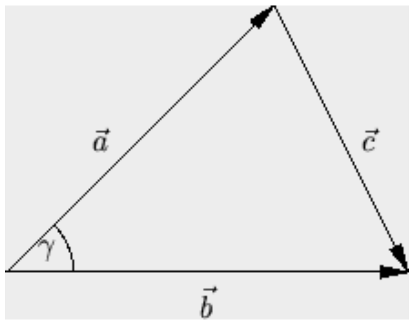
همداسې

$$\left(s\vec{a}+r\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = s\vec{a}\cdot\vec{c}+r\vec{b}\cdot\vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې کيڼ لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

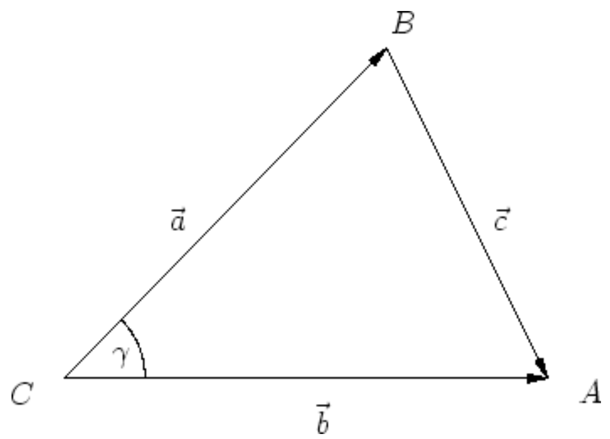
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې یو بل سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره یو بل سره سر خوري.

دا ځېره شوی مثلث لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترټلي له کواورديناتونو څخه د ليدني دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساين جمله هم وشمېرل شي. باور لري

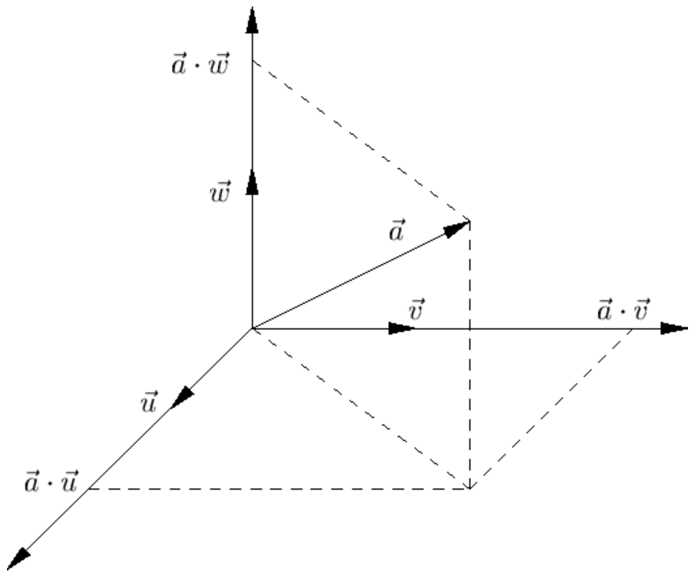
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي يا سر خوري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

اورتوګونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



لکه په ځيره کې چې کښل شوی دی، کيدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زياتوونو (د جمعي برخو) د بنسټيزو وکتورونو توليد شوی پرېوستونونه دي، او د ضريبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي يعنې يو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتيزي کواوردينات سيتم د کانونيکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(ليکونکي هوليک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

له لارې انځورېدلای شي،   هندسي تړلی ليدل کيږي

د ضربيونو د ټاکلو لپاره   د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1, \quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کربنيزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصديقيږي. د ضريبونو د مربع جمعي فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\,.$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه ليدل کيږي، چې پرپوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر يو په   اړونده بنسټ وکتور باندې عمود يا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(ليکونکي هوليګ، موخ)

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{w}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\vec{e}_x+2\vec{e}_y+4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\vec{a}\cdot\vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\vec{a}\cdot\vec{v}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\sqrt{3}$
$\vec{a}\cdot\vec{w}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\sqrt{6}.$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u}+\sqrt{3}\vec{v}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب:

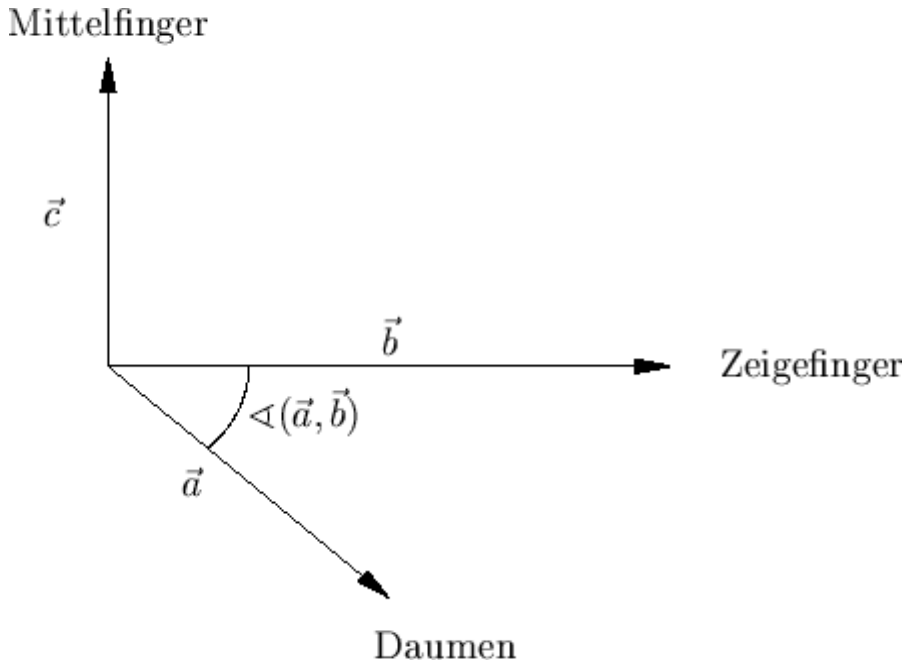
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوريز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ځيرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



شکل کې الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ د $\vec{a}\|\vec{b}$ لپاره او $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$
د $\vec{a}\perp\vec{b}$ لپاره .

بدیل یي وکتور د

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

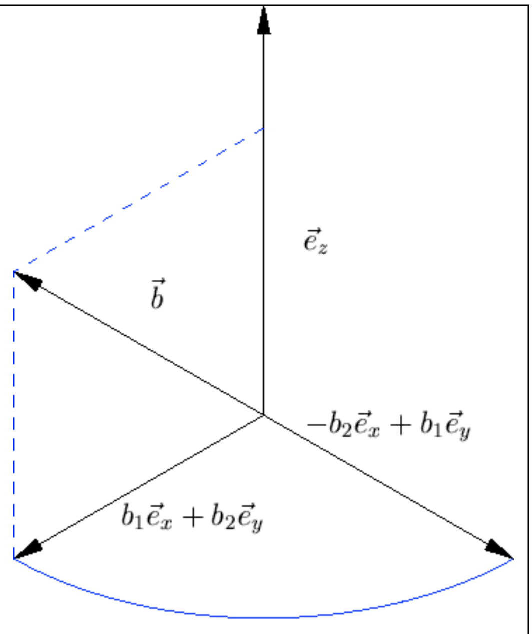
سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)

د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زغمورې دي.
د کواوردینات انځورنې لپاره کیدی شي دا ترلې پسې وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره څرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z\times\vec{b}=\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



لکه له ځيرې چې ليدل کيږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پربوستل شي او بيا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پربوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دويمه کمپوننت کې د سيده پسې شمېرنې کرښيزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بې د ټوليز محدوديت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حيث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسيا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونيکي بنسټ وکتورونو کمبينيشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د تعريف يا پيژند د څرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شميرل کيږي.

يو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

كوم چې همدا اوس ټيک لوريزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بديله توګه په ساده توګه تحليلي تعريف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: کلاوس، هوليک)

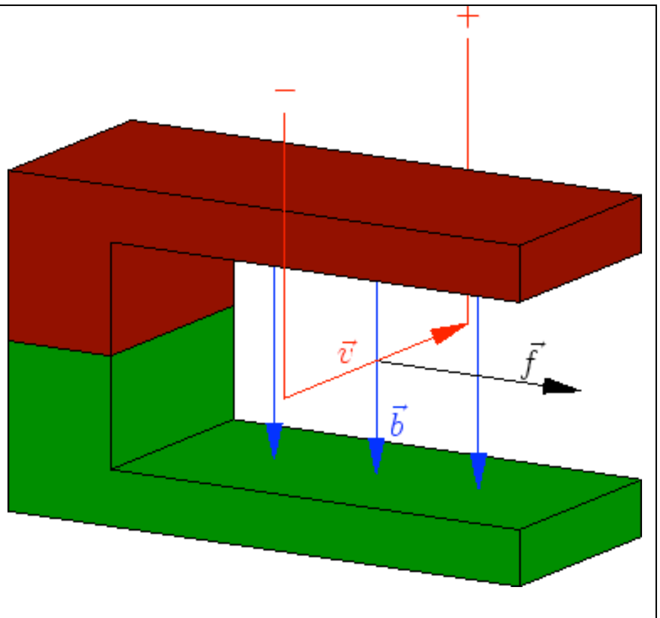
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\begin{array}{lll}\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.\end{array}$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوريزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هوليک، ايپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft

په یوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتيا سره په يوه مقناطيسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي يا حرکت کوي، د لورنځ زور اغيز لري $\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$ دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د بربښنا جريان تيروني د $\vec{f}$ په لور لوريزه اغيزه لري..	

(ليکونکي : هوليک، ايپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

- Antisymmetrieاسوخیاتیو قانون

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

- Linearitätکرښیزوالی

$$\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\right) \times \left(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2\right) = \alpha_1\beta_1\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_1\beta_2\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\right) +$$

$$\alpha_2\beta_1\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_2\beta_2\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\right)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع ډ سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کتمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کتمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه تړلی لیدونکی دی.

د کټمتوالي د ښووني لپاره کيدی شي بې له ټوليزو بنديزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په $\vec{b}$ کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅيړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمتوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کيڼ اړخ د ګاسمن کټمتوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره يوغږيز کيږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$)

کې د لاګرانژ کټمتوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 \,,$$

هم ټيک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دليل راوړل کيږي.........

کرښيزوالی کيدی شي د غبرګيزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې يي بيلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاگرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توگه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیايي. د بېلګي په توگه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیگ)

د ایپسیلون - تنزور Epsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\},$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,,\\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,.\end{aligned}$$

نو دا د ځیکلیکي پرموتیشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت (تغیر نه خوړونکی) دی او د پېژندنخښنو یا ایندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د ‒تنروز په مرسته کیدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه ولیکیل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

شپات ضرب

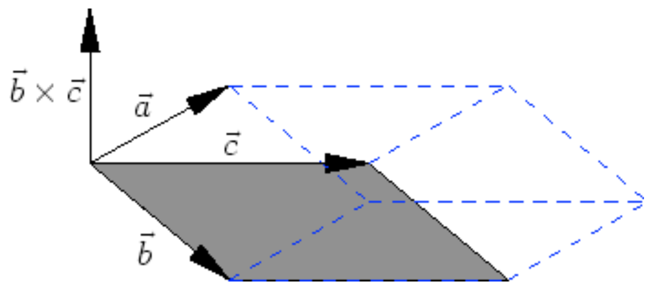
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښې پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ څخه غزول شوی شپات ډکي یا حجم سره یو غبرېز شي یا برابر شي.

(غبرګ سطحیز)



د $\varepsilon-$ تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخواييز يا شپات ضرب په لاندې بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

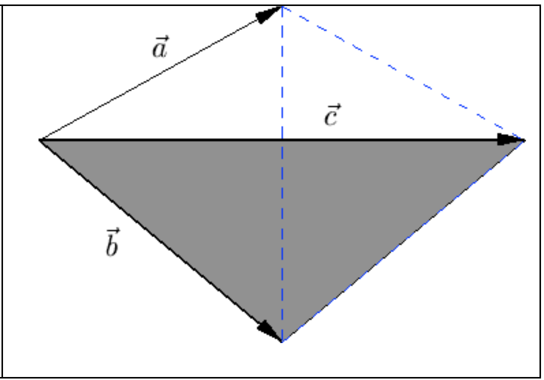
د $\vec{d} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$ سره

$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a}\cdot\vec{d}|$$

د شپات يا غبرګ سطحيز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b}\times\vec{c}|$ د کربنيز شوي غبرګ اړخيز د سطحې خونديونه ده، د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right)\right| |\vec{b}\times\vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| \,.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders



د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم V دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$

(لیکونکي: ایپ، هولیک)

د یوه تیترایدر(څلور سطحیز) ډکی V داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز V_{Spat} په مرسته .

(لیکونکي: ایپ، هولیک)

د څلور سطحیز V ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرګسطحيز يا ذوذنقي خويونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحيز ضرب په هر Argument کې کربنيز دی او سربيره پردي دا لاندې نور خويونه لري

- خيوکليکي – يا تل بيرته راګرځيدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کربنيز بلواکوالی يا تابعيت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

- لوريزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو ريښتونی غبرګهواريز(سطحيز) غزوي، نو يو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کيدی شي د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځير انځور شي د لاندې ضريبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}\,.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \quad = \alpha\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

همداسې

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو رينتونی غبرګسطحيز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښيز کمبينشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

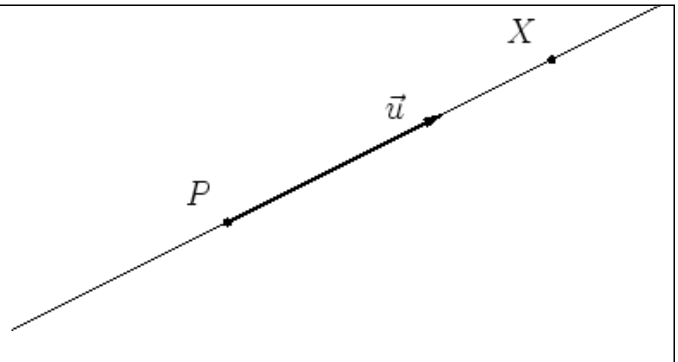
$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

او له دې سره

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\
&= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w} \,.
\end{aligned}
$$

(ليکونکي اپپ،هوليک)

ټکي – لور – بڼه:

	په يوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.

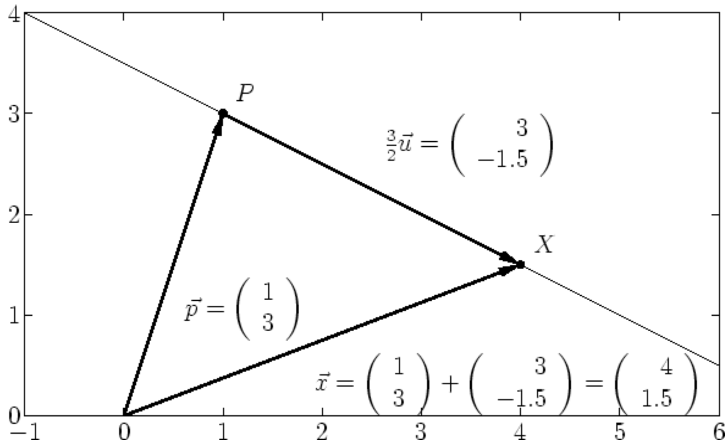
په ورته توګه باور لري

$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواورديناتو لپاره.

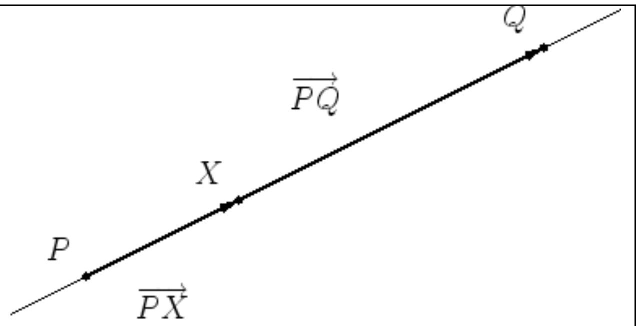
(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

ځېره د يوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د ليدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.



(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

	په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د $t \in [0,1]$ پارامتر ارزښت ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.

په ورته توګه

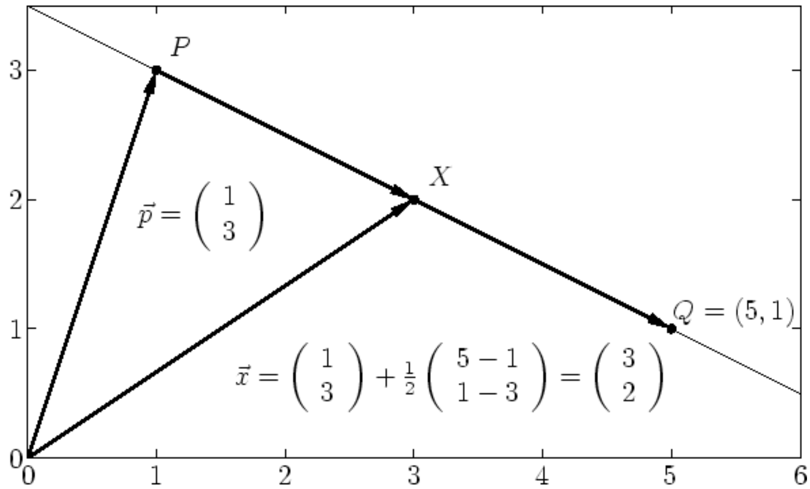
د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t : (1-t)$ نسبت ویشي.

په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



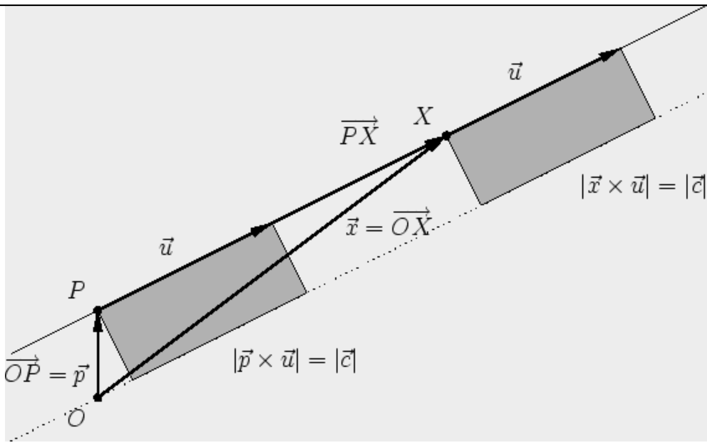
(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

په بنه ولیکل شي.



په ورته توگه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

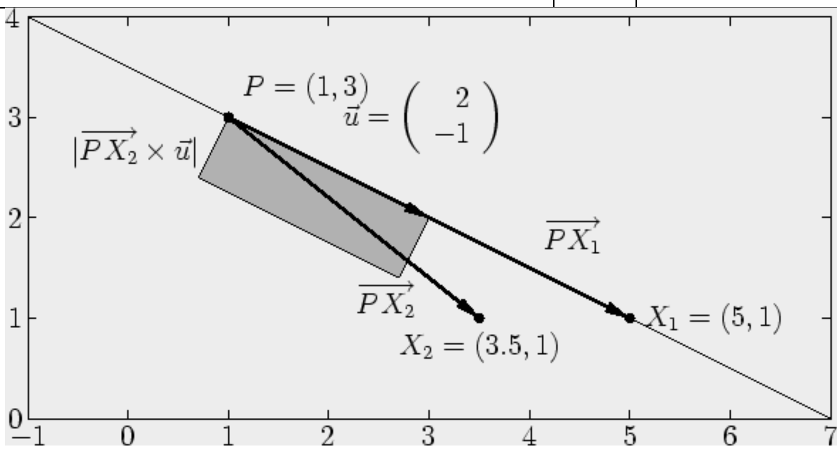
(لیکونکي ،هولیگ،هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی –بنه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلگې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} = & \quad \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= & \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= & \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}\,.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

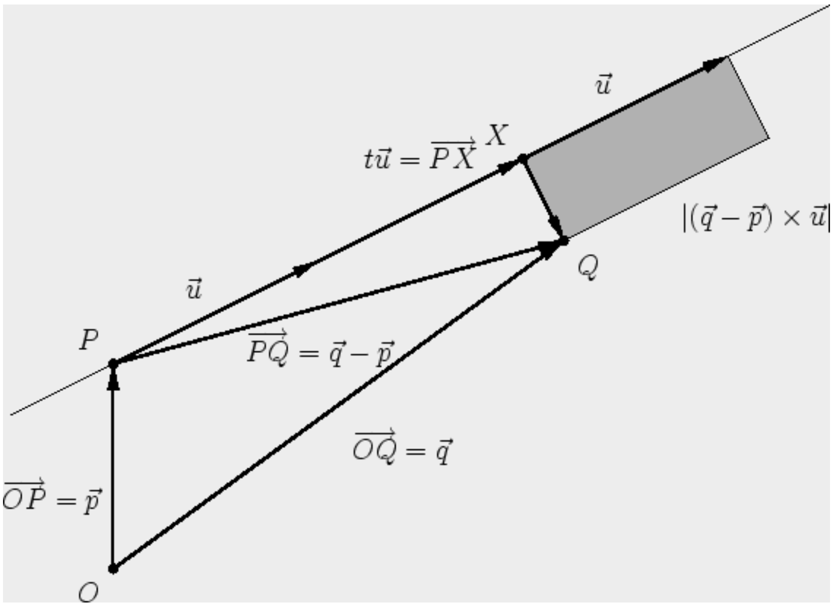
په یوه کرښه د یوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تیریږي د لور سره لاندې پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$

واټن لاس ته راخي .



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

په کرښه د ټکي Q پربوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} = (\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

$$d = \quad \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ},\vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\ |\vec{u}|\ \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ},\vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q}-\vec{p})\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

که ټکی $Q = (3,3,3)$ په کرښه پرېیستل شي

$$g:\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حیث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} \quad =$$

$$= \quad \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{1^2+1^2+1^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

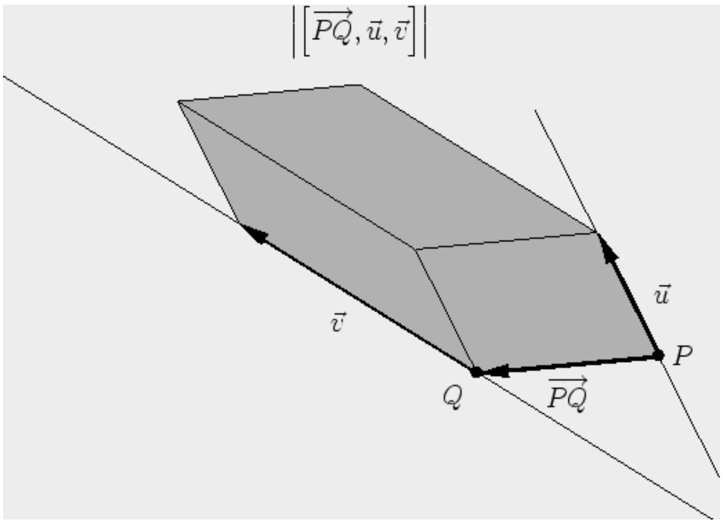
د دوه کرښو واټن :

د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \,.$$



دوه کرښې بادمايلې windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ   وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v} \,.$$

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کربښتوتو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د ځګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کربښتوتو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدنې الوتنلار ده

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

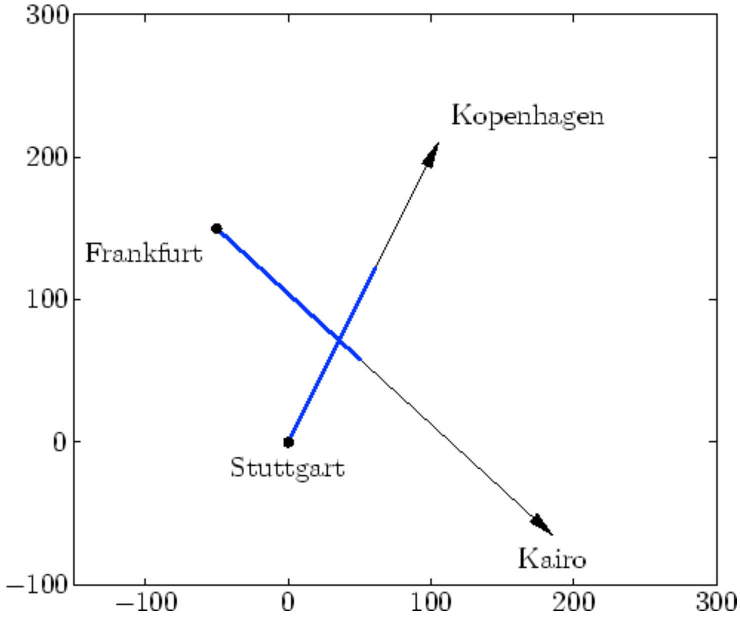
او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3] .$$

که د کواوردینات پیل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 . \end{aligned}$$

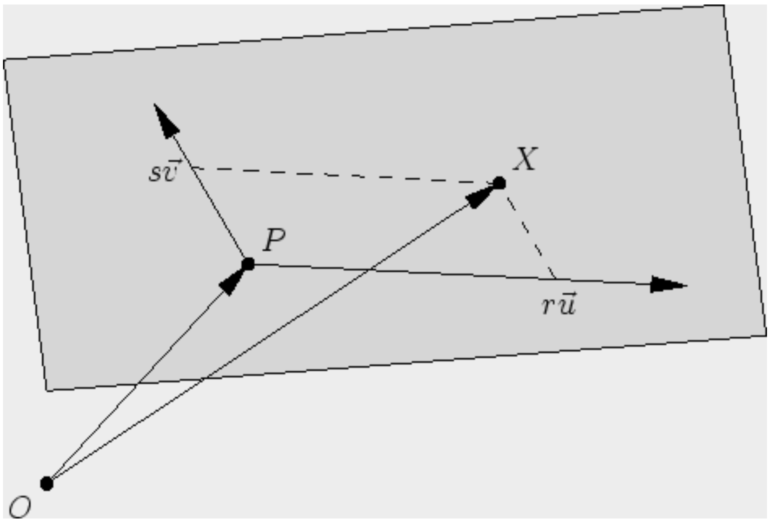


(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

يوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ دی او د مساوات سیستم

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

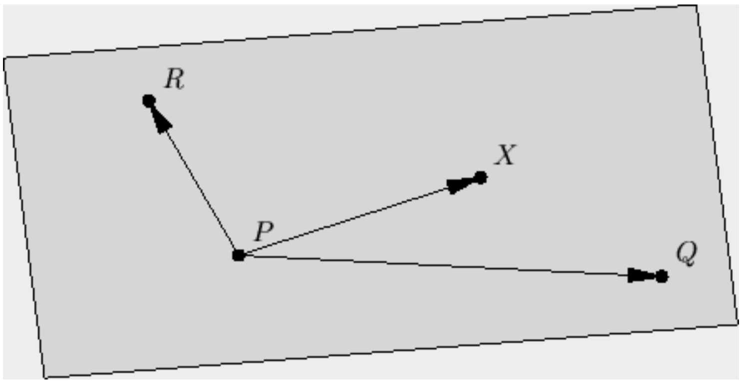
حل نه لري، که لومړۍ او دويمې ليکې ته وګورو .

د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په يوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو P, Q, R, تېرېږي او يو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب ورکيږي   .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$



(ليکونکي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

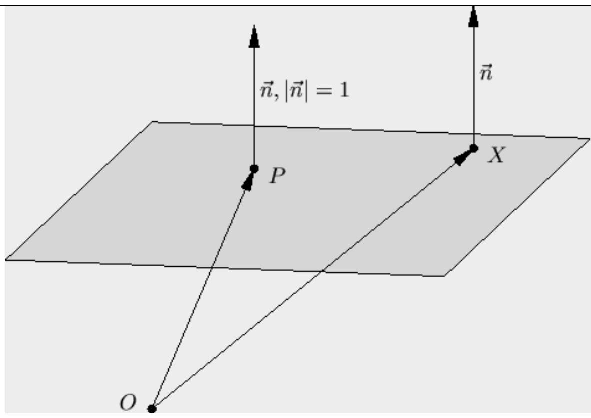
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6=-2\neq 0$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼهHesse-Normalform einer Ebene

 (ليکونکي:هوليګ، وايس)	په يوه سطحه د يوه ټکي X ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په P کې اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n}=d,\quad d=\vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نيول کيږي چې $\lvert\vec{n}\rvert=1$ او $d\geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچينې ته

يوه سطحه E دې د ټکي $P=(1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دې معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په   سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سړی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعني $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} ,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو P, Q او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} .$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کږمه کې چې دوه کرښيز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود يا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ يو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شميرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شميرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6} \, .$$

ځکه چې $d = \vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

$\sigma = -1$

او له دې سره

$$\vec{n} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \, .$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4 \, .$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

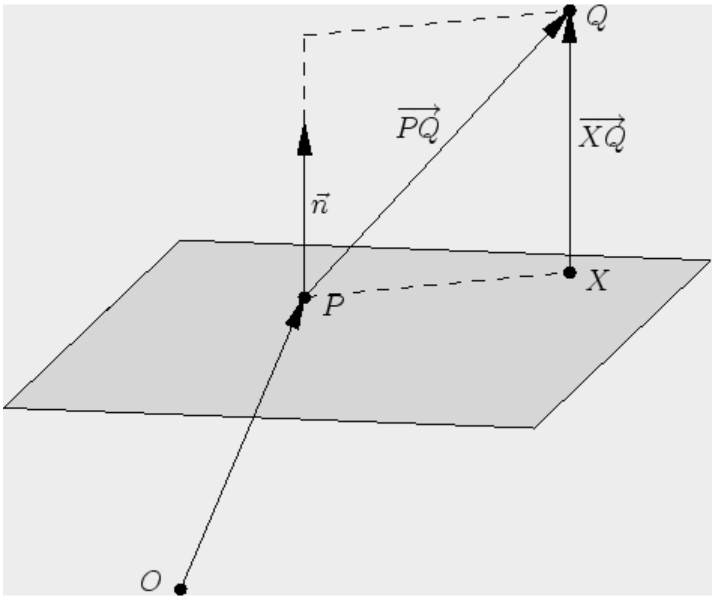
د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و تکي Q ته.



(ليکونکي:هوليک، وايس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha|\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

څخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحي ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښایي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښایي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېیره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د $Q = (3, 2, 3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

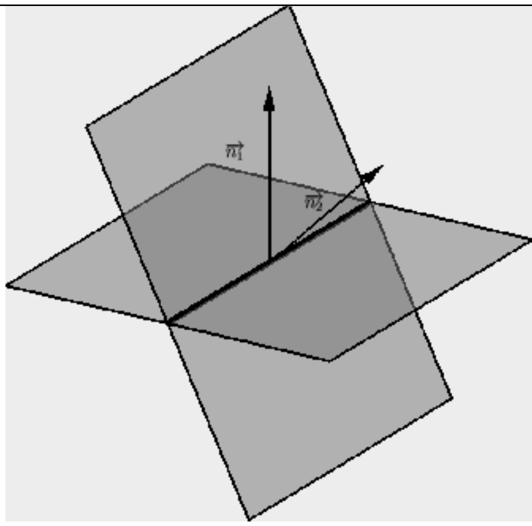
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کیږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج یې د $\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$ له لارې یو اځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکربنې لور ده.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

د دوه هوارو لپاره، چې هره يوه يې له ټکو $P_1 = (1,2,0)$, $P_2 = (0,1,3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعريف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکربنې سره جوړ کونج(زاويه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکربنې لور ده.

د دې لپاره چې يو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشميرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S = (2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x} = \vec{s} + t\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تترايد(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1 = (1,0,0), \quad P_2 = (-1,0,0),$$

$$P_3 = (0,1,\sqrt{2}), \quad P_4 = (0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1, P_2, P_3 همداسې له P_1, P_2, P_4 جوړې وي یا تېرېږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دي سره دی:

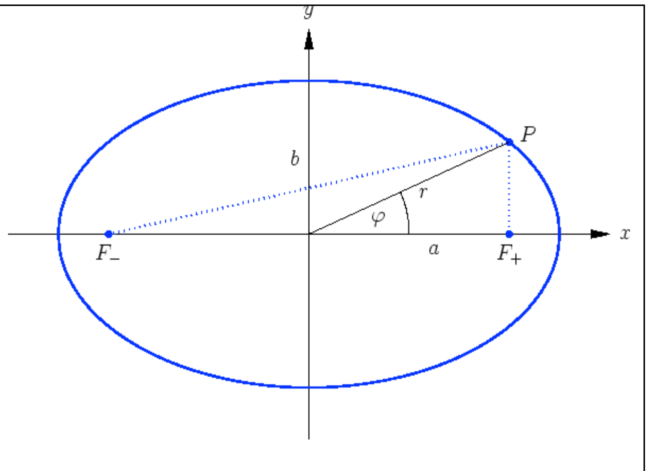
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

هګۍ (بيضوي) Ellipse

په يوې ايليپسي يا بيضوي د تيکو $P=(x,y)$ د د دوه سوزونتيکو $F_\pm$ څخه واټن ثابت يا همغه دی: $\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert + \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = 2a$ د $2a > \lvert\overrightarrow{F_-F_+}\rvert$ سره .	

که وي $F_\pm = (\pm f,0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2=a^2-f^2\,,$$

او

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

د $t\in[0,2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}|+|\overrightarrow{PF_+}|=2a \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2=a^2-f^2$$

مربع (څلورئ) کوو

$$\underbrace{2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2}}_{>0}=\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

او دې کېن مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0}=4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2+2xf+\frac{f^2}{a^2}x^2=x^2+2xf+f^2+y^2\,.$$

د بدلون $f^2=a^2-b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کونې

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2=(x^2+y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

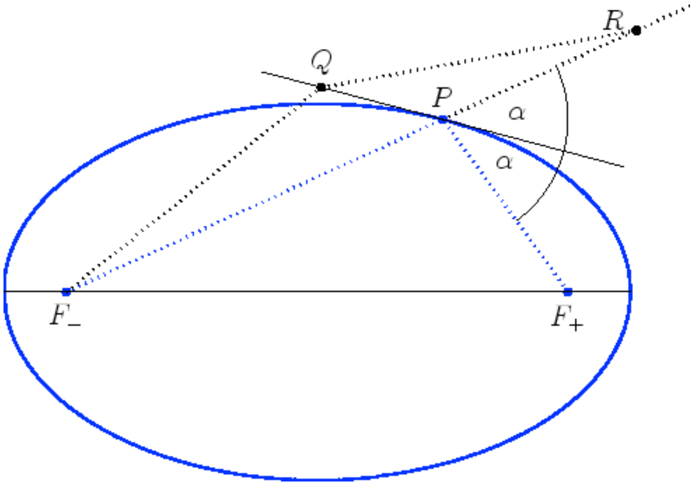
$$x^2+y^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2$$

او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردینات بڼه.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګې (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښووني لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوي ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| \,.$$

که د توټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \,,$$

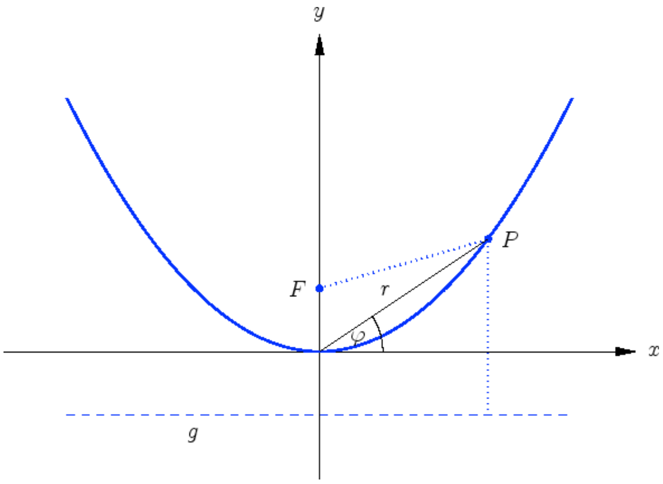
او پسې یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دی سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

دا هندارون خويونه د پختورګو تيګو تونه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي F_- کې د يوې راديال (د وړانګې په لور) سرچينې څخه وړانګې کېدی شي د يوه هګۍ ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکی F_+ کې کوده شي يعنې سره غوڅ کړي..

(ليکونکي:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول د ټکی $P=(x,y)$ د سوزونټکي F او يوې وړونکي کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F=(0,f)$ او $g:\ y=-f$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$4fy=x^2$$

او

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اینووني له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

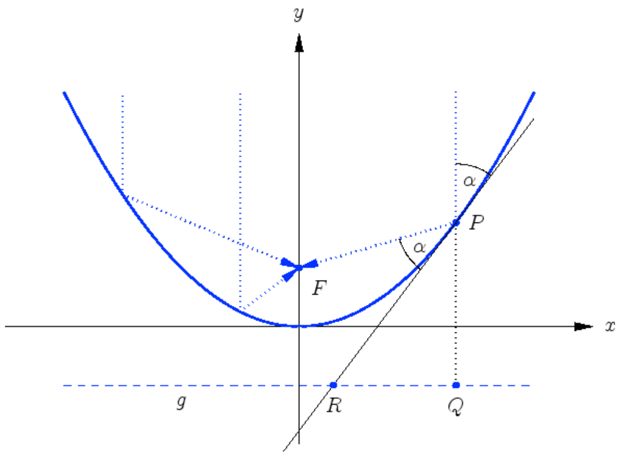
بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د ساتلایت تلویزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکې کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.



د ښوونې لپاره په پام کې نیسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي Pt ، $\begin{pmatrix}1\\ x/(2f)\end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبرګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوښتکی دی د g سره.

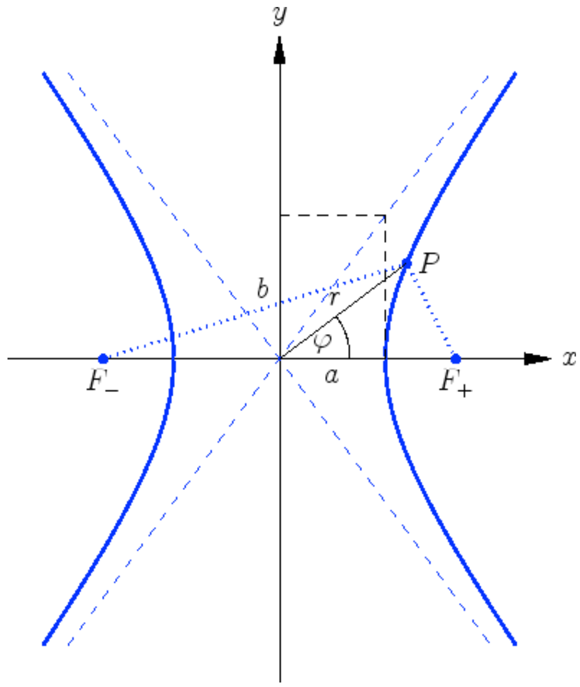
(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

های پاربول Hyperbel

په یوه های پابول د یوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_\pm$ سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپټوتې $\pm b/a$ جګوالی لري.

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a\cosh t,\quad y = b\sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2+y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

مربع کوو او دې و کیڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بڼي بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کي نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

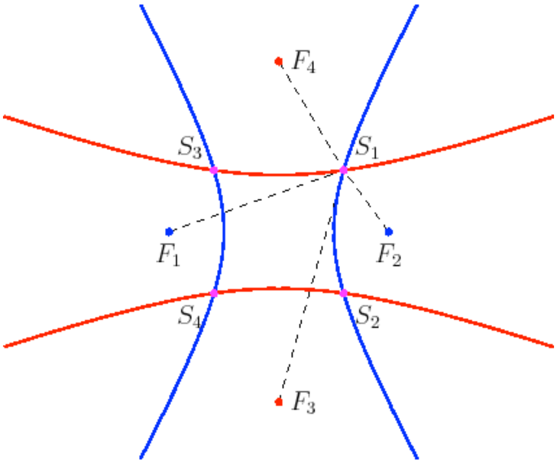
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼّ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

ناویګیشنNavigation

د یوې کیشتۍ ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو ستیشنونو F_i څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوښتکي په څیر لاس ته راړل شي.



یوه ځرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هایپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د ځللر غوښتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې ښخه چې ه م لیدل کیږی، ځلور اوبیونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کینښتی نږدې یا ت قریبأ چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د کټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنی   انګریزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهني الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهني فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)