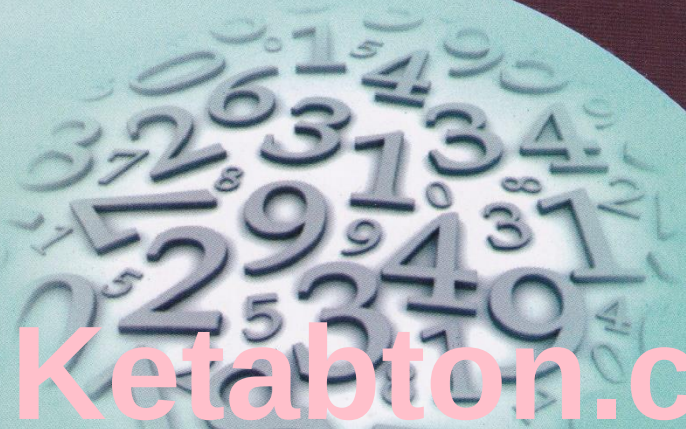
شمېر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

لومړۍ برخه

دویم غځېدلی چاپ

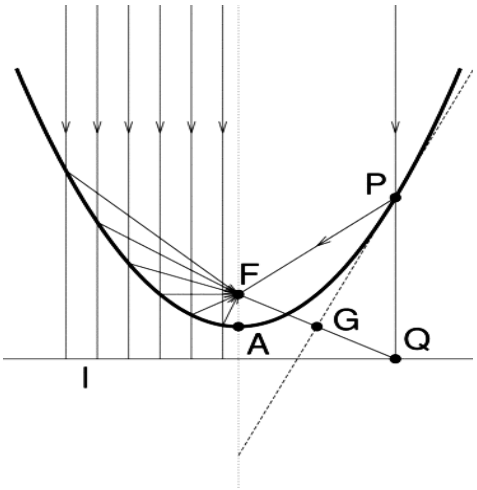
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېرۍ) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرزي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميړی،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړې سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمېر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګاڼه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګاڼه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۰۱	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱۰۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۲۰۱	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱۰۳۰۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۲۰۲۰۱	وینا	۵
۳۰۲۰۱	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۴۰۱	وینا فورم یا ۰بنه او کوانتورونه	۱۳
۵۰۱	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۶۰۱	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۷۰۱	برابرون او نابرابرون	۳۳
۸.۱	تمرینونه	۳۸
۰۲	ډیر ی پوهنه	۳۹
۱۰۲	د ډیرۍ پوهنې کلیمه	۴۰
۲.۲	د ډېریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخډېرې	۴۶
	د يوې ډېرې توان يا تواندېرې (توانست)	۴۸
۳ ۰ ۲	په ډېرې کې کارونې يا عمليې(۱)	۵۰
	غوڅډېرې يا متقاطعډېرې	۵۲
	د يوې ډېرې يا ست کمپليمنت	۵۷
٤ ۰ ۲	څيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۰ ۳	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۱ ۰ ۳	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۱ ۰ ۱ ۰ ۳	پيدايښتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پيدايښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پيدايښت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرويشونې(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رييلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشميرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د رییلګې اکسپوننت یا جګګې سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ٥	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ٥	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ٥	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
۱ ۰ ۱ ۰ ٦	ټکی او کرښه	۱۶۹
۲ ۰ ۱ ۰ ٦	کونج	۱۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ٦	درېګوډی	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
٥ ۰ ۱ ٦۰	ولاړکونجیز دریګوډی	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردی کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٥ ٠ ٦	تریګنومتریکي کټمټوالی	٢٠٥
٥ ٫ ٦	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	٢١٥
٠ ٧	کمپلکس ګڼونه	٢٢٢
٠ ٨	د ښوونې یا ثبوت متودونه	٢٣٥
١ ٠ ٨	سیده ښوونه	٢٣٥
٢ ٫ ٨	ناسیده ښوونه	٢٣٧
٣ ٠ ٨	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	٢٣٩
٩	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	٢٤٣
١ ٠٩	لاینیز برابرون	٢٤٤
١٠	کومبیناترویک، د بینوم جمله	٢٦٦
١ ٠ ١٠	فاکولتیت یا فاکتوریل	٢٦٦
٢ ٠ ١٠	د بینوم ځله ونه	٢٦٧
٣ ٠ ١٠	د بینوم جمله	٢٧٠
٤ ٠ ١٠	کومبیناتوریک	٢٧٤
١ ٠ ٤ ٠ ١٠	پرموتیشن	٢٧٥
٢ ٠ ٤ ٠ ١٠	واریيشن	٢٨٠
٣ ٠ ٤ ٠ ١٠	کمبینیشن	٢٨٦
٤ ٠ ٤ ٠ ١٠	د پرموتیشن، واریيشن او	٢٩١
٠ ١١	لانیز الجبري برابرونونه	٢٩٥

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د گاوس الگوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲ . ۴	د گاوس لگوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د گاوس الگوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۲۰ . ۱	د دوه په جگ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانگړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤ ۰ ۱۲	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱ ۰ ۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲ ۰ ۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۳ ۰ ۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱ ۰ ۱ ۰ ۱٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱ ۰ ۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲ ۰ ۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱ ۰ ۲ ۰ ۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲ ۰ ۲ ۰ ۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰۱۵	د بلواک خویونه	۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦	د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ...	۴۶۶
۱۰۱٦	کرښه	۴۶۶
۲۰۱٦	ګردۍ	۴۷۵
۳۰۱٦	ایلیپسې	۴۸۲
٤۰۱٦	هیوپربول	۴۸۷
٥۰۱٦	پارابول	۴۹۲
٦۰۱٦	ټولګه	۴۹۴
۱۷	وکتور شمیرنه	۵۰۲
۱۰۱۷	د وکتور پیژند یا تعریف،	۵۰۲
	په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه	۵۰۲
۲۰۱۷	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۵۰۹
۳۰۱۷	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۵۱۲
٤۰۱۷	غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۵۱۷
٥۰۱۷	په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو	
۱۰٥۰۱۷	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۵۲۱
۲۰٥۰۱۷	د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه	۵۲۴
٥۰۱۷	د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه	۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۱۰	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د څپرکي ټولګه	۶۱۶
۲۰	دفرنځیالشمیرنه	۶۲۶
	د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت)	۶۲۶
	په یوه ټکي کې د تابع ګراف ...	۶۲۸
	د لحضوی(سترګورپ) تغیر...	۶۳۰
	کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟)	۶۳۱
	دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق	۶۳۳
	کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه	۶۳۶
	د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق	۶۴۳
	د تانجنت پیژند او خویونه	۶۴۷
	د تانجنت او عمود یا ولاړ تولیز مساوات	۶۵۰
	په بیدیا کې جګوالی	۶۵۲
۲۰. ۱ ۰ ۱	الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی	
۲ ۰ ۲۰	د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې	۶۵۶
	د درېګوډیزو یا مثلثاتي	۶۶۲
	د اکسپوننشل یا په جګ توابعو....	۶۷۰
	د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې	۶۷۶
	د ایمپلیځیت توابعو مشتف	۶۸۳
	د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول	۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ټولګه	۶۸۸
	د یوې تابع د مشتق قابلیت	۶۹۱
	د معکوس- - یا په څټ توابعو مشتق	۶۹۸
۲۰ ۳.	د بنسټیزو بلواکو رابیلیدنه	۷۰۱
	د رول قضیه	۷۱۰
	د وایرشتراس قضیه	۷۱۱
۲۰ ۰٤.	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی	
	د دفرنشل منځ ارزښت قضیه	۷۱۲
	یوعږیزې توابع	۷۱۵
	ځای اړوند افراطي ټکي	۷۲۰
	د انعطاف – یا اوړونټکی	۷۲۴
	د کوې یا منحني بحث یا خبرې	۷۳۳
	ناټاکلي حدونه یا پولې	۷۴۶
	د برنولي او د لو پیتال	۷۵۰
۲۰ ۰ ۵	د غټو ګټو پرابلم	۷۵۷
	تمرینونه	۷۶۷
	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	۷۷۸
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۷
	پیلراوړنه	۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !

یو څه چې پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مړښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، ځکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی ځموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوې په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.

موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اساتنیاوې پیښوي. له کومه ځاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعاً افراد ملامت نه دې، بلکه ځموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چی ځموږ په هیواد کی ځموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژژبه دې څه کار وشي.

ګرانو لوستونکو !

داکار ځکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځی، په علمي توګه په المانی ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګی لري. دا چی ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمرینی ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چی پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنې مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسې لیکنې څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې ځمونږ د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلې د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم

-د لیکونکي راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول

-دداسې کتاب لیکنه په هغه وخت کې شوني کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنې د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسې وګټم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه مې په سیاسي هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس مې خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلې ټولنې او د خپلې ټولنې د خلکو سره مینه ولري او په همدې ډول، د خپلې ټولنې او د ټولنې د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځې د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسې کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځې په پوره مینه په غاړ واخستلې او دا کار مې په پوره مینه سر ته ورساوه.

-په دې برسیره لیکونکی دې وظیفې ته هم باید شعوري وي، چې دې ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسې لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غږوالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځې د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پریښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپریښوولو حق څوك نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په څټ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالي کولو استعداد خان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات رانتوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو ولیکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږی، چی څوك د ژبی سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسی یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونی نه ده.

دلته غواړم چی دې ته هم ګوته ونیسم، چی د نومونو په ټاکلو کی ما کله کله دوه نومونو کارولی، چی هغه مي په ټول کتاب کي شاید اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چي په هدف کی ستونځي نه پیښوي لکه د بیلګي په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلی وه، چی وروسته می شمیر پوهنی باندې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کي مي نه وي شمیرپوهنه کړي. دریګوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چی دا هم شاید د کتاب په اوږدوکي نه وي اصلاح شوی، داسی نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چي د پوهیدلو لپاره دا کومی ستونځي ه پیښوي.

۲ – تخنیکی ستونځی:

د ګرانو لوستونګو پام به دې ته راوګرځی، چی ځموږ لپاره د داسی کتاب لیکلوپه لار کی تخنیکی ستونځی هم خورا زیاتی دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنی د فرمولونو لیکلو سره ستونځی لرودي، نو له دې امله می د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتی کړې او دلته می سریښ کړې، چی کله کږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چي دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چی د رااخستلشووکتابونو لیکونکی او چاپوونکی به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښی څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چی املایي غلطی به شوي وي، خو په پوهیدلو کی به ستونځي پیښي نه کړي، د هغي بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چی ډیر ورسره ستړی شوم.

ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چی زه دې داسی یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړې دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنسټیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنسټیز کتاب په ځیر د شیفر–جورج–ترپپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځیړل شوی.
ځما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه ځمور په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که ځما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خدای(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی څخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.

زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.

که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځې لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما څخه لټ بل څوك نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	خ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ى

يوناني الف بی

Α α	Α α	Alpha
Β β	Β β	Beta
Γ γ	Γ γ	Gamma
Δ δ	Δ δ	Delta
Ε ε	Ε ε	Epsilon
Ζ ζ	Ζ ζ	Zeta
Η η	Η η	Eta
Θ ϑ	Θ ϑ	Theta
Ι ι	Ι ι	Iota
Κ κ	Κ κ	Kappa
Λ λ	Λ λ	Lambda
Μ μ	Μ μ	My
Ν ν	Ν ν	Ny
Ξ ξ	Ξ ξ	Xi
Ο ο	Ο ο	Omikron
Π π	Π π	Pi
Ρ ρ	Ρ ϱ	Rho
Σ σ	Σ σ	Sigma
Τ τ	Τ τ	Tau
Υ υ	Υ υ	Ypsilon
Φ φ	Φ φ	Phi
Χ χ	Χ χ	Chi
Ψ ψ	Ψ ψ	Psi
Ω ω	Ω ω	Omega

الماني الف بي

A a	𝒜 𝒶	𝔄	𝔞
B b	ℬ 𝒷	𝔅	𝔟
C c	𝒞 𝒸	ℭ	𝔠
D d	𝒟 𝒹	𝔇	𝔡
E e	ℰ ℯ	𝔈	𝔢
F f	ℱ 𝒻	𝔉	𝔣
G g	𝒢 ℊ	𝔊	𝔤
H h	ℋ 𝒽	ℌ	𝔥
I i	ℐ 𝒾	ℑ	𝔦
J j	𝒥 𝒿	𝔍	𝔧
K k	𝒦 𝓀	𝔎	𝔨
L l	ℒ 𝓁	𝔏	𝔩
M m	ℳ 𝓂	𝔐	𝔪
N n	𝒩 𝓃	𝔑	𝔫
O o	𝒪 ℴ	𝔒	𝔬
P p	𝒫 𝓅	𝔓	𝔭
Q q	𝒬 𝓆	𝔔	𝔮
R r	ℛ 𝓇	ℜ	𝔯
S s	𝒮 𝓈	𝔖	𝔰
T t	𝒯 𝓉	𝔗	𝔱
U u	𝒰 𝓊	𝔘	𝔲
V v	𝒱 𝓋	𝔙	𝔳
W w	𝒲 𝓌	𝔚	𝔴
X x	𝒳 𝓍	𝔛	𝔵
Y y	𝒴 𝓎	𝔜	𝔶
Z z	𝒵 𝓏	ℨ	𝔷

او میګا
پښتو دینه

په الماني دینه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي	$=$
نامساوي (نوروکتابونو کی)	$\neq$ ($=$)
کوچنی له	$<$
لوي له.....	$>$
کوچنی یا مساوي له	$\leq$
لوي یا مساوي له	$\geq$
ډیر کوچني	$\ll$
ډیر لوي	$\gg$
ورته یا متناسب.....	$\sim$
کونګروایتخ	$\simeq$
همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي	
کتمت.....	$\equiv$
غبرګ	$\parallel$
ناغبرګ.....	$\nparallel$
ولاړ په	$\perp$
دریګوډی	$\triangle$
ګردی	$\bigcirc$
نیمی یا قطر.....	$\oslash$
کونج	$<$
د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج	$<$ (g,h)
کرښه، له A و B ته	$\overline{AB}$
له A و B ته لوریزه کرښه.....	$\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	لینده.....	AB
	مطلقه ارزښت د	$\|a\|$
	ایماجینار یوون (واحد).....	i
	د اویلرګڼ = ...2,7182818	e
	پي د لودولف ګڼ π = ...3, 14149	
	د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي	$\rightarrow$
	ناپای.....	∞
	د x فنکشن یا په واك چې بلواك مو بللی	f(x)
	(لوستل یې (f د x یا د f, x لنډ : fx)	
	د x څیرونه په f(x) : لیکو:	f(x) $\rightarrow$ x
	دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن	h(x); g(x)
	لیمس یا پوله.....	lim
	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت.....	cot
	ارکوس ساین.....	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot
	لوګاریتم و بنسټ a ته	$\log_a$
	لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته	$\lg_{10}$
	دیکادیکي لوګاریتم.....	
	لوګاریتم و بنسټ e ته	ln
	طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم	

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ګڼونه.....	$\mathbb{C}$
ریبلګڼونه	$\mathbb{R}$
ټولګڼونه	$\mathbb{Z}$
نامنفی ټولګڼونه یا	
طبعي ګڼونه د صفر سره	$\mathbb{N}^*$
طبعي ګڼونه	$\mathbb{N}$
تعریفډیری	D
ارزښتډیری.....	W
حلډیری	L
د ډیري A پوتنځډیری	P(A)
ډیري.....	M,N,A,B
تشډیری	$\emptyset$
برخه ډیری.....	
پورته یا لویډیری (چی بل ډیری خوندي لري)	
ټولنډیری.....	$\cup$
غوڅډیری	$\cap$
د A کومپلیمنت	CA , A'
د ډیریو ورته والی	A~B
د ډیریو ځل.....	A × B
لوستل B اتیران A یا - ځل -	
توپیرډیری : A بي له B ده	A\B
دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي	a | b
د a او b غټ ګډ په ویشونی (لنډ : غ ګ و)	ggt(a,b)
د a او b کوچني ګډ زیاتځله (لنډ : ك ګ ځ)	kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی	$a \in M$
او a د M توکی نه دی	$a \notin M$
ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري)	$\forall$
د موجودیت نخښه: یو x موجود دی	$\exists$
کونیونکشن A او B لیکو	$A \wedge B$
دیسینکشن A یا B لیکو	$A \vee B$
(کله کله الترناتیو)	
ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي	$A \Rightarrow B$
نیگیشن یا نه والی	$\neg$
د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت	$A \Leftrightarrow B$
له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.	
ماتریکس..... A نورو کتابونو کی $\|A\|$	
دیترمینانت	$\|A\|$
د a څخه n–امه ریښه	$\sqrt[n]{a}$
د x اکسپونتشلبلواك	
د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$	$n!$
بینومخلووني	$\binom{n}{p}$
لوستل:n په p باندې	
له a تر b واز اینتروال	$]a,b[$
	$=\{x \mid a<x<b\}$
له a تر b بند اینتروال	$[a,b]$
	$=\{x \mid a\leq x\leq b\}$
کیڼ واز اینتروال	$]a,b]$
	$=\{x \mid a<x\leq b\}$
ښی واز اینتروال	$[a,b[$
	$=\{x \mid a\leq x<b\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتوننخښه داسی وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

ځلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دی او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خونديونې(متن) لرودی شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشونې ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځای کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودو څخه ګټه اخلي۰

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده۰

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي۰

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي۰

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۲۰۱ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱۰۲۰۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځورېږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(ټل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π, e او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډېرۍ یا سټ (په ډېرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چی د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډېرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښې : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی تري منځ ته راځی۰

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(2a + 1) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x).((12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفست هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټست یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه ست یا - ډیرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چیرې اووښتونې یا واریابلې د پیژندډیرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: T, T_1, T_2) په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او لیکو: T=126 + 3/4 یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې یا متحولې x لري یانې T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټډیرې یا –ډېرې دې یا د طبیعي اعدادو ډیرې°Nوي

تعریفډیرې د بنسټډیرې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی x پۀ ځای یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دې : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دې چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو ۰ د اووښتونو یا متحولو بنسټډیرې دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو ستN وي, نو د x لپاره تعریفډیرې N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼوندیرې°N تعریفډیرې لپاره ترم نه دې تعریف یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دې تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده: T(2,3) = (2+6) / 2 = 4

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼوندیرې ورکړ شوي دي۰

۲۰۲۰۱ وینا Aussage

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چی وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځانښیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځانښیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایې لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چی د یوه شی حالت (ځانښیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دی۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیړل کیږي۰

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنی افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتماً باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځانتیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي۰

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دی

تکرار : هره جمله، چی « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«ریښتیا وینا ده۰

ب : 3 + 4 = 7 ریښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناټیک وینا ده۰(د اعدادو

په برخه کې لومړنې اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورې یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښايي

د دي پرڅټ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیداینتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بې له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنۍ ښار دی

$5 < 3$ پنځه له دریو کوچنۍ دی

ټول لومړنې اعداد یااګڼونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو۰

په لاندې کې به وڅیړو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څیر په ځان کې خوندې(لنډ : خوندي) لري۰ داسې ویناوو ته یوځایشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړې ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بیلګه راوړو » کهٔ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګې په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو څرنګوالي له لارې مخ ته پروت دی یا رامنځ ته شوی دی۰ په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنی وینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق ستپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي۰

بیلګې

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي۰

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمې ولید۰

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځای شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځای غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه۰

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځای ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یوائځی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري۰

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬ په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬ نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

Pنه یا ¬	P
F	w
w	f

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

¬¬p	¬p	p
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغې لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیداینښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي۰ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی۰ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی۰

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 > 3 ,, وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده۰

تړنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: تړنه، دلته د « او (and)» تړنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څټ یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی۰

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي۰ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا۰ دا له دې امله وینا نه ده۰ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ۰ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي یې نور د پیدایښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناریښتیا ویناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټیزی یا بنسټ سټ څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتونې د خپلواک یا ازاده اووښتونې(متحولې) په نامه یادیږي۰

پیژند :

یوه وینابنه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتونې تړلو څخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو څرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی۰

د « او» تړنه او نخښه یې /\

پیژند ۱ ۰ ۳ :

p/\q دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې p اوq دواړه رښتیا ارزښت رښتیا ولري۰ که له دې څخه یوه وینا هم ناریښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه ناریښتیا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تړنې نخښه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p

موږ د « او » تړنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w رښتیا او f نارښتیا په معنا دي

p	q	p/\q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » تړنې ته بیلګه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا : ,, 7 > 3 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی رښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: موږ ګران لوستونکي به سره یوځای فکر وکړو، چې دا پریمګڼونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړیږي۰ موږ به یې زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا تړنه یا کنجنکشن، چې مختلف رښتیاارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 ,, ,, 7 > (رښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی (نارښتیا)، نو A/\B وینا : چی ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتیا) ده۰ دا ویناتړنه ویناارزښت نارښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» تړنه دA وینا: 7 < 3 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعدددی» یوه نارښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » تړنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادې) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » تړنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنۍښار دیهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونیدی

په ټولیزه توګه د « او » تړنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا تړنه کې کیدی شي زیاتې ویناپرخی سره په تړنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» تړنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative التر ناتیو یا د » یا « تړنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله تړنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»تړنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا \/ د یا تړننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	Q	p\/q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » ترنه p\/q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » ترنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي۰ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p\/q هم نا رښتيا دی۰ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي۰ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا۰۰۰ او يا ۰۰۰» ليکل کيږي۰

بيلګه (د « يا » ترنې ته):

د دوه رښتينو ويناو د « يا» ترنه د A وينا: ,, 3 < 7,, اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه رښتيا وينا A\/B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»۰

د دوه ويناو ترنه، چی مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 3 < 7 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 3 =7 ,, (نارښتيا) ، نو A \/ B ده، چې 3 < 7 يا 3 = 7 دا وينا ترنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 < 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دی یوه نارښتیا وینا A\/B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنخ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي۰

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دی» د الترناتیو په نامه داسې دی « ۳ یا له ۷ کوچنی دی او یا یو لومړی ګڼ دی» نارښتیا دی۰

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا اوf(Falsch) د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي ټولګڼ دی	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دی	W
D	π پي له دری کوچنی دی	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π تولګې نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A\/C	π تولګې او له صفر لوي دی	f
B/\C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A\/C	π پي تولګې یا له صفر لوي دی	W
A\/D	π تولګې یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغهٔ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او څیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« تړنې«
ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه تړل شوي دي،

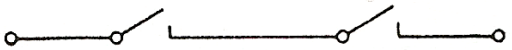


Bild 7.1

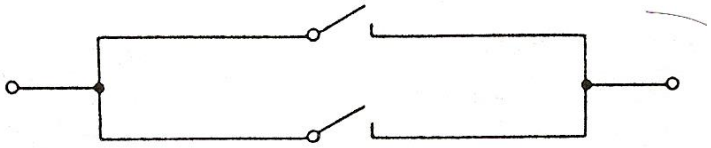


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس رښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستیبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدی شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (رښتیا - بلواک یا رښتیا فنکشن » نهp \/ p دی۰ د دې لپاره هم د رښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي۰ د رښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا pنه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وینا نه والی

نهp\/pنه	نهP	p
W	f	w
w	w	f

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکې نه ده یوه وینا نهp\/p تل رښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې رښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) رښتیا دی(دا په دې مانا، چی که د ویناؤوښتونکي یا واریابلې ته هر رښتیاارزښت ورکړ شي یانې رښتیا یا نارښتیا تل د رښتیا ارزښت رښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو رښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دی (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهq\/نهp رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q).....\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w.....w.....f.....f.....f.....f \\
w...f.....w.....f.....f.....w.....f \\
f...w.....w.....f.....w.....f.....f \\
f...f.....f.....w.....w.....w.....w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویې‌نې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو ـوینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول « له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته ناربښتیا دی، چې پریمیسس ربښتیا او کونکلوزیون ناربښتیا وي۰ په بل ډول ربښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB ټیک هلته یو ناربښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا ناربښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا وییني په دې ربښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه ناریښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا ناریښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله ناریښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: q د p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې q او p خپله تړنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي۰ د ایکویوالنت سومبول دی ≈ د دواړو ویناو p او q ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≈ q په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ۰ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له q څخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې ناریښتیا وي۰

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په څټ دې په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په څټ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا –فنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو تړنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د تړنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	.....W
w	*f*	f	f	*w*	.....*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.....F
f	*f*	w	w	*w*	.....*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

(p <=>q) <=>(p => q) (q => p)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ویناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو ۰ له دې څخه پیچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کیږي۰

د دې ورته والی ویناتړنې غوره بیلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1).....\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2).....\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

۱ ۰ ٤ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده ټولیز کیدی شي۰ د بیلګې په توګه که مختلف شیان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځاي د وینافورم څخه خبري دي، یا غږیږو ۰ دا داسی ژبنی وینې یا افادې دي، چې د شیانو لپاره واریابلی یا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته یوه وینا شي۰ بیلګې یی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ویشونی دی »

دویم : » z یو هوار څلورګوډی(ځلورضلعي) » دی۰

دریم : «u له v څخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي۰ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی۰ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل۰(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي۰

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼي څخه وینا جوړوي۰ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي۰ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو۰یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو۰ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیدایښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلورۍ (مربع) هوارې ډیرګوډۍ یا کثیرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه $\exists$

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکوني وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دی (یا د ټولو ۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰ ۰ ۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چی کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابنه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې$x+1=0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو ست R توکی دی او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یوx له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$\exists x \notin R: x^2+1=0$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنی هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي۰

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دی » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا ست (ویناوو‌ښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ) تړنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$(1).....\forall x \in G : 2 \mid x$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دی)

$(2).....\forall \in R, x^2 > x$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$\forall x \in R : x^2 > x$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $0 \leq x \leq 1$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B («که A نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – وینا A : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی۰

۲ - وینا A : "n > 7"

وینا B :وي دې :n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو ریبلګې ن له ٦ څخه لوي دی۰ که اړیکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې ریبلګیونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي۰ د بیلګې په توګه ٥ ،٦ یا شپږنیم

د ب) فرمولبندې وایي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چې وینا A باور ولري۰

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ۰

بیلګی د اړیین(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګې n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګې پر3 ویشونی وي۰ یو ګې، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی۰

۲ - وینا A : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي۰

د برابروالي یا برابرارزښتي (ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وایي، چې A د B لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی۰ « دا وایي، چې A ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – وینا A : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکي وي۰

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري۰

۱ ۰ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلې او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي۰ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده۰

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د ټیک څرګندې پوهنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې رښتونې ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري ۰

اکسیوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته رښتینې وینا ته اکسیوم وایي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې(فرضیې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی (پیانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښه د پیښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجیز وي، نو(پس) د پیتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده (که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې (هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دی)په څټوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د رښتینوالی څخه دې د جملی په څټوالی یا تضاد هم رښتیا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ٢٪ هم (رښتیا)

جمله: که ٢ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په څټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځې او یواځې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کیڼ ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه T^ او T° د برابروننخښی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: T° = T^ ۰

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, < , > او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي۰

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتونې یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیزې ګڼونه ولیکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفیزې څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي۰

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وینابڼه پیژند - یا تعریفیزې پورې اړوند وي او دا وینا رینښتینې کوي، اوبیډیزې یا حلډیزې L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره رینښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرۍکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي٠

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	T° < T^ T^ > T° 2x < 6 6 > 2x	T°=T^ T^ = T° 3x=5y 5y = 3x
۲) که وینافورم په دواړو خواووهمغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندڼیرې خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	T^ < T° =>	T^ = T°=>
	T^ ± T° < T° ± T^	T^ ±T° = T°± T^
یا تغیر ونه خوري٠	3y < 4x ⇔	2z = 8 =>
مخامخ یا کینې لوربیلګه	⇔ 4y±2x < 4x±2x	2z ± 3 = 8 ±3
کې تفریقڼیرې تغیر خوړلی		

پر څټ بیلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزیات شوي

ترم 3-zنه دې تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې z - 3 یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دې

۳) د وینافورم دواړه T^=T° ⇔ T^.T > T°.T ⇔ T^ <T°

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې $T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T = T^\circ.T$

له همغه مثبت ترم سره $T^\wedge:T > T^\circ:T \Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$

ځل او یا په همغه ترم که $T > 0$ که $T > 0$ وي

وویشل شي $3y - 12 < 30z - 90$ $4x+2 = 10x-6$

$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$ $\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$

$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$ $\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x-30$

٤) د یوه برابرون $T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$ $T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$

دواړه خواوې کیدی شي، $T^\wedge < T^\circ$ $T^\wedge.T = T^\circ.T$

چې له یوه منفی ترم سره $\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$ $\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$

ځل شي یا دواړه خواوې په $T < 0$ $T < 0$

همغه ترم وویشل شي، $-2y < -4$ $3x = 12$

که په دې فورم کې $\Leftrightarrow y > 2$ $\Leftrightarrow -9x = -36$

نابرابرونه وي نو د $\Leftrightarrow 10y > 20$ $\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندۀ توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د ربښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د ربښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناترا او منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپیوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوولـه لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرۍ پیژندل کیږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوړي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیرۍ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیرۍ۰

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرۍ له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیرۍ څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډیري پوهنې (سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیرۍ پوهنه

ودانې دي۰ نن شمیرپوهنه بې له ډیرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي۰

پیژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرۍ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرۍ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پیژندلشویو اصولو یا کرکترپین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې (یوځایټولولو یا مجموعې) ته ډیرۍ وایي او هر شي ته، چې ډیرۍ یې جوړه کړې یا ډیرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډیرۍ – یا سټ توکی وایی۰

(Set and elements of set ډیرۍ او د ډیرۍ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیرو۰

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي۰ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي۰

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د ځنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه A,B,.. او یا M,N, X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,... او m,n,x,v,...

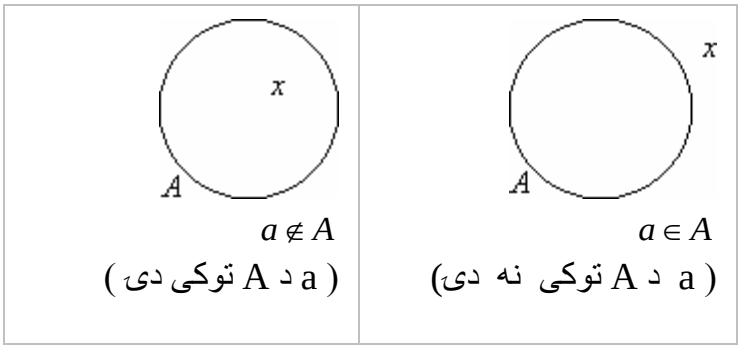
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توګی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي۰ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم۰دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یی لیکو

A = { a,b,c,d,e,f,g,h}

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایې۰ هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځای ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغهٔ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي۰ زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی۰ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګوروچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل Mایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وایي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدی شي یا ورکول کیدی شي۰

M = { x | د خوویونو ۰۰۰ سره x}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) M = { x | د ټولو x سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دی }

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)\ldots\ldots\ldots M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشډیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\emptyset = \{\}$

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\} \neq \{\} = \emptyset$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 \ , -3/2\}$$

کوم ټولګې یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګیونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګیونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دویمې نیمایې میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میږو ، غواوو او وزو ډېرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغو ګڼونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وایو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیدایښتې یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4....\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو۰

۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیونې یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي۰

پیژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرۍ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي۰

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېرۍ M_2 برخډیرۍ (لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده,، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ M_1 هر توکی دسټ یا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

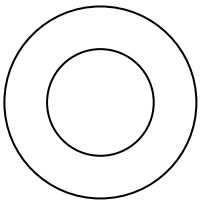
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده۰

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

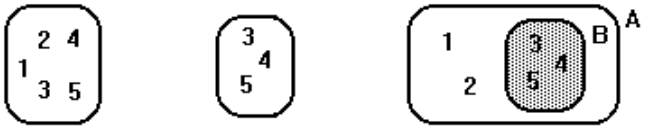
یا دا پیژند :

$A \subseteq B$ که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بیلګه:

$A \subseteq A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{3,4,5\}$ B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیرۍ، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیرۍ بلل کیږي او داسې یی لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیرۍ او تشډیرۍ سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:

$\{\} = \theta \neq \{0\}$

د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیرۍ M د ټولو برخډیریو ډیرۍ پوتنځډیرۍ یا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:P(M) په تواندیرۍ توکي لري، چی هر یو یی بیا خپله ډیرۍ ده۰

بیلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډیرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټیک n جګ 2n توکی لري یانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی (حل-) کیدی شي(لومړی برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یې۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیرۍM زور |M| لاندې د ډیرۍ د توکو تعداد یاګڼون پوهیږو ۰ که دوه ډیرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیرۍ وایو او داسې یې لیکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خوندې ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزې) اړیکیreflexivity

هغه اړیکې، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتونې ویناوې ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیرۍ د خپل ځان اصلي برخډیرۍ یا برخست نه شي کیدۍ۰

ب) سیومتریکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډیرۍ او M_2 د M_3 برخډیرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډیرۍ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکې یا خویونه دي

۲ ۰ ۲ په ډیرۍ کې کارونې یا عملیي

ټولنډیرۍ (د اتحاد سټ)

پیژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډیریو M_1 او M_2 ټولنډیرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته وایو ده:

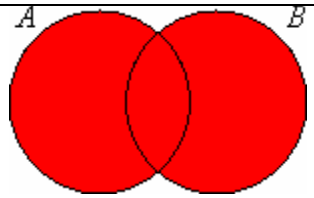
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسی پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډیرۍ یا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ –مه برخه د یا سره پرتله) یانې دا د ټولنډیرۍ توکی د M_1 یا M_2 او یا د دواړو توکي دي۰

یا لاندې دیاګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A ? B$ $A \cup B$ (B ټولنه A) (x د A سره B اړیکې لري	

بیلګې

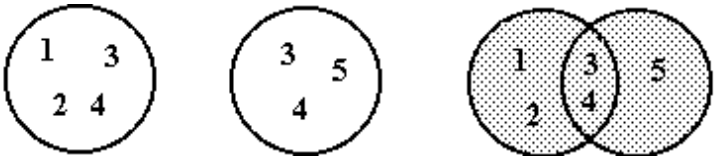
الف) M_1 دې د ځوانانو ډیرۍ وي، چې بکلوریا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډیرۍ وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیرۍ ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري۰

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیرۍ وي د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | x∪A
∪A={1,2,3,4} B={3,4,5} A
B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکیډیرۍ ټولنډیرۍ په ګوته کوي۰

پ – څیره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکیډیرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکیپردۍ دي۰ ب) ګډ ټکی لري۰

پ) اړیکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څیرې په لاندې کې په بیلګو کې راغلې دي۰

د ټولنې لپاره کموتاتیو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډیریو په ټولنه کی رول نه لوبوي

یادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ۰۰۰ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعه کړو لکۀ

$$1 \ , \ 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4+, 1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړیپرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زیاتو ډیریو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري۰

اسوځیاتیو قانون باور لري۰

$$(M_1 \cup M_2) \cup M = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډیرۍ (د ډیریو غوڅی یا –متقاطع سټ) intersection

یادونه : دا کړی شو، چې د ډیرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټیکوالی په کې نه شته)

پیژند:

ډیرۍ M د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 غوڅډیرۍ یا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1 غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډیرۍ M ټول توکي د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکی وي۰

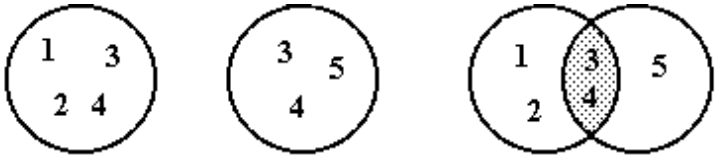
د غوڅډیرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکي دي (د ۱ –مې برې د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅۍ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3,4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښه کوو۰ یوه بله ډله ، چې په M_2یې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډیرۍ

$M = M_1 \cap M_2$

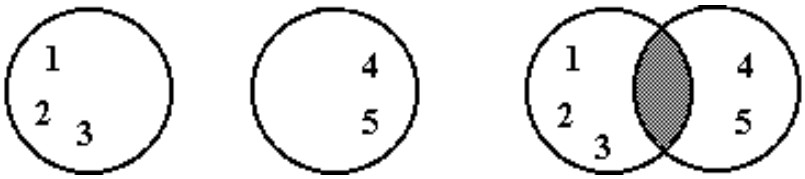
د پکتیا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

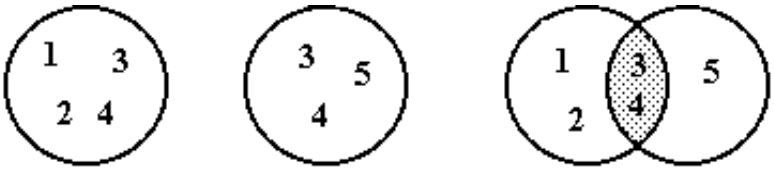
دویم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \ = \{r, l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښايي، چې الف) ګڼون پردي دي



ب) یو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړیکی

$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ټکو باندې ټکي شوې ډیرۍ اصلي برخډیرۍ ده

دوه ډیرۍ، چې غوڅډیرۍ یې تشډیرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوڅډیرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډیرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډیرۍکارونو یا ډیرۍ عملیو یانی ټولنډیرۍ او غوڅډیرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند :

کمونډیرۍ یا تفریق سټ M_2 د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M کموالی یا فرق دی او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډیرۍ کمه شوې

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیرۍ M_1 توکي نه وي۰

لیکندود یالیکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A اوB توپیرډیرۍ یاکمونډیرۍ یا تفریقډیرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دی

بیلګې :

لومړی : په یوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارینه وو زده کړو ډیرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډیرۍ (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

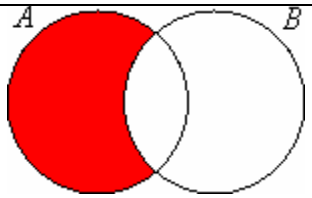
د هغو زده کړو ډیرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیرۍ ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A\backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړیکې لري)

دویم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګې را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

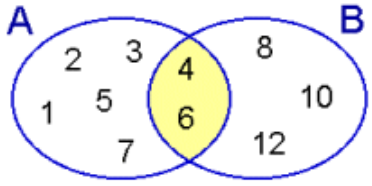
د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

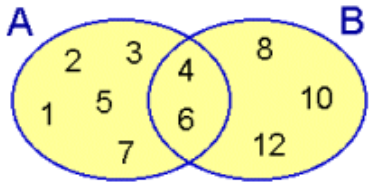
موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅی، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

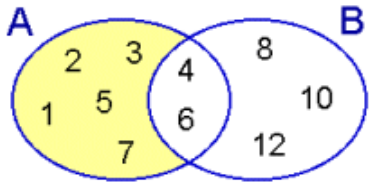
(c) ketabton.com: The Digital Library



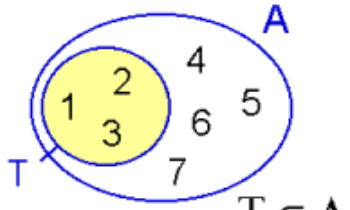
A ∩ B



A ∪ B



A \ B



T ⊆ A

پېژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ ټیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي۰

دوه ځله کمپلیمنتډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي۰ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي۰

۲ ۰ ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړی د ډیرۍ ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو۰

پیژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډیریو M یو او M 2 ډیریضرب(اټیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره ځلیږي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیرۍ ده۰

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې ځل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو ریيلګنونو ډیرۍ وي۰ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیرۍ۰ RxR د ټولو ریيلګنونو جوړو ډیرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیرۍ ده۰

پیژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څیرونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیرۍ $M_2 \times M_2$ برخډیرۍ پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې څیره شي۰

داسی هم ویلی شو: د M 1 توکي د M 2 په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا څېره کیږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y څیره توکی بلل کیږي۰

د ټولو اصلي توکو ډیرۍ پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژندډیرۍ یا تعریفډیرۍ بلل کیږي او د ټولو څېره توکو ډیرۍ د څېرونې ډېرۍ، ارزښتورشو یا ارزښتډیرۍ بلل کیږي۰

بیلګی

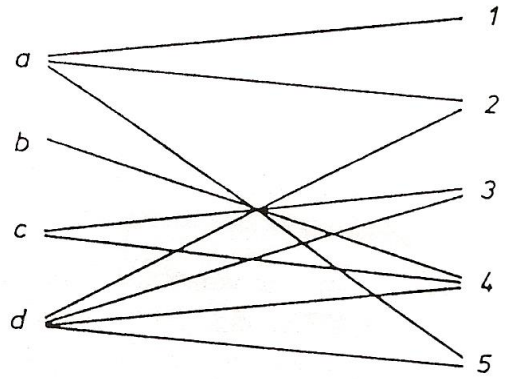
$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه د M یو توکو څېرونه ونه یا څېره کوونه د M دوه په توکو

اصلي توکه یا څیره کوونکی توکی		څېره توکی
a	----------→	1 , 2 ,5
b	----------→	4
c	----------→	3,4
d	----------→	2,3,4,5

یا دا لاندې:

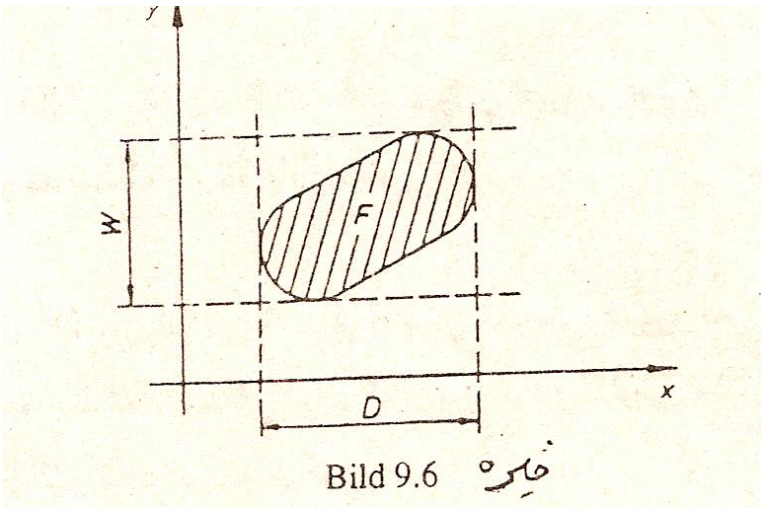
(c) ketabton.com: The Digital Library



څیرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیرۍ)



دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څیره کیږي۰ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې څیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ٠ پیژندډیرۍ یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونوډیرۍ ده او ارزښتډیرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرۍ ده٠

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېړونه ده٠ د ښوونکو ډیرۍ د ځانګړو ټولګیو په ډیرۍ کې

موږ د څېړه ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د M 1 ، چې تعریفډیرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي٠

له یوې څیرونې Fغږیږو د M 1 په M2 باندې٠ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غږیږو له M1 په M2 کې (دلته دې « په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیږو د M 1 په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راوړل شي٠

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غږیږو له M1 په M2 باندې٠ دلته څلورمه بیلګه د بیلګې په توګه راوړو٠ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي٠

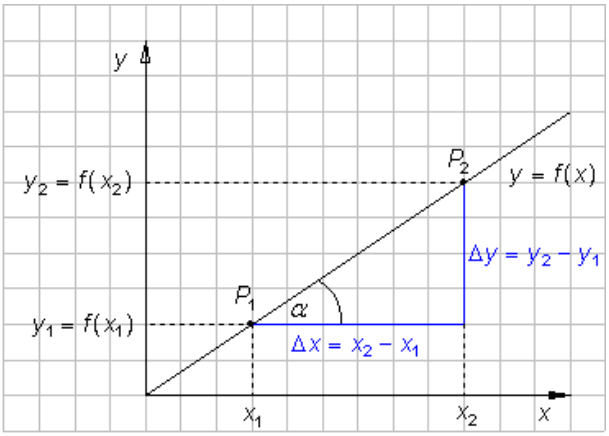
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دج۰ زج مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلې ده۰

بیلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره یا سطحه کې څرګند شوي کړی د ډیریځل RxR په څیر د برابرونونو له لارې رانیسو(R د ریبلګنونو ډیرۍ د ګنګرښې ټکي دي(ګنونه دې وکتل شي))۰

الف) y = 2x یوه څیره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

D=W=R



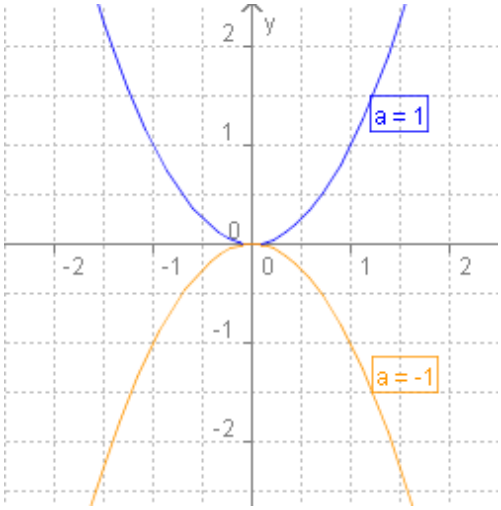
یادونه : په پورته څیره کې برابرون y = ax+b دی.

ب) $y = x^2$

یوه څیره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

D = R , W = [0, ∞]

(c) ketabton.com: The Digital Library



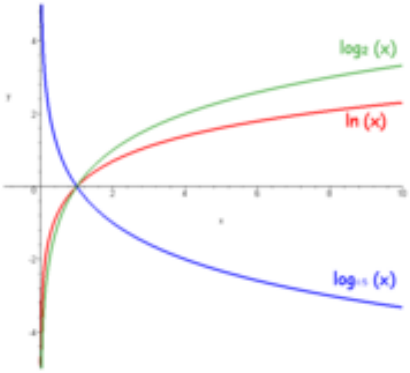
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې $b = 0 , c = 0$ او $a = 1 , a = -1$ ایښول شوي دي۰

پ) $y = \log x$

یوه څیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري۰

$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$

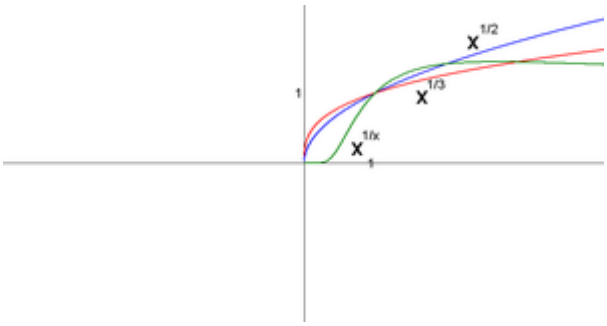


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0,\infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي۰

پیژند ۲ ۰

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي۰ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې څیره شي۰ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

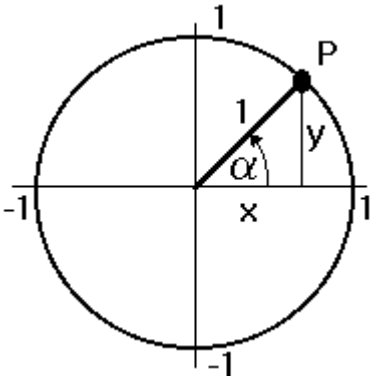
تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي۰ یوه یواځنۍ څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي۰

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنۍ څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې ټولې څیرونې فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر څټ لاندې برابرون (یوونګردۍ یانې ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [-1,1]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یانې که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړۍ) بدله شي، نو یوې پرڅټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅټ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیرۍ ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنۍF او F^{-1} یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیرونې نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي.

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرې یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړئ

الف {x لومړی عدد او $x < 20$ | x} (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرې یا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x|x^2+x-6=0$ او $x > 0\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رییلګنې او $x^2 + 1 = 0\}$ د ستر ظهر له بهنی وګمیني لور ته ولولی

۲ – د توکو x , y , z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیری

$x = 4 , y = 5 , z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیډیری)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0 , y = 2 , z = 3$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,-3] کی پراته دي

$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$

ت) M د رییلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,-3] کي پراته دي

$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسړیکی پرتی دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډیرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو–) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګڼو ډیرۍ چې پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د ټولو ګڼونو ډیرۍ چې په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د ټولو ګڼو ډیرۍ چې په ۱۲ ویشل کیږي!

۴ – د ډیرۍ { a,u,t,o } ټول برخډیري ورکړئ!

۵ – د لاندې ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ټولډیري جوړ کړئ !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l\}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1= \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$, $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړئ!

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدې ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړئ!

۸ – وي دې $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړئ : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړئ

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

پ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\}$,

$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$

$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}$, $M_1 \setminus M_2 = \emptyset$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال ټکي ډیري:

$M_1 = [-3, 3]$, $M_2 = [1, 7]$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ خل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$

$F_2 = \{(1,a),(3,a)\}$,

$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$,

$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\}$,

$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$

په ټولو حلمونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په څټ ځیرونه ورکړی

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقیقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(تړنی، کارونی یا عملیي)

۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبیعی اعداد یا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده۰ له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیرۍ (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیرۍ پوهنه هم څیړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیرۍ تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال(طبیعیت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی(کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د ریښتینو شیانو څرګند څومره والي (کمیت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰۳ ۰ ۱ ۰ الف د طبیعي عددونو(پیداینتي ګنونو) جوړښت

پیژند (تعریف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبیعی اعداد د ډیرۍ په څیر یوه ټولګه جوړوي او د طبیعی اعدادو ډیرۍ یا سټ په نامه یادیږي یا یې طبیعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره یې په نخښه کوو۰

ډیر پای طبیعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد هم شته دی (یعنی په هرڅومره لوي طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کیږي)۰

ب) دطبیعي ګڼونو(اعدادو) اکسیوماتیکیAxiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چی اوبیونه (حل) نه غواړي اوهمداسی منل کیږي۰ دا چی جمله ، اکسیوم څه دي په لومړۍ برخه یانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبیعی عدد کلمه د جیوسیپې پیانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توګه تعریف کیږي:

۱ – د صفر ګڼ یو پیداینتي ګڼ دی

۲ - د هرطبیعي عدد یا ګڼ m لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسي یا ترلی ګڼ یا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چی پسی راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډیرئ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډېرئ یا –ست یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Ziffer وایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لږ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګن نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعې سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنګ ليکو چې کم ځای ونيسي لکه د بيلګې په توګه: CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټيز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کيڼ لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بيلګې په توګه: XC = C - X .

بيلګې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځايسيستم: په ځاي سيستم کې هره بنسټيزه نخښه يو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئيز ځاي سيستم (پوزيشن سيستم (Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئيزځای سيستم کې په دې ډول ده چې د يوه ورکړشوي ستې په بنسټ ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې خانګړي ډول انځوريدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټيزې ګڼنخښې a_i، g دa $i = 0,1,2,\dots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي يا اړتيا ورته شته.

ليکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدليدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسیز سیستم (ګڼځای ارزښت) باندې کیږي، چی تل داسی نه وه، لکه په افغانستان کي چی دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چی څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کی ګڼځای «ارزښت» لري چی انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چی کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی –) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چی زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واری) په یو ګڼ کی پرله پسی یا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M, خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنسټیز نخښه I, X او یا .....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونه(Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: 1098 = MXCVII مګر نه IMIC

۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښی په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چی موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چی عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی،چي په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر(۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چی

څیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چي دلته ترې بنسټیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چی ګوته مو ورته ونیوه،زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چی د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱ . ۱ ب : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نخښه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چي له انځورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښی، لکه د مخه مو چی انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنسټیزه نخښه ده. دا چی نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسی (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼتخښو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، ځموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري(set , die Menge) ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غړو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي:۱،۲،۳،۴، او داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه n . ... ,a ,b,c . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (څیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + ..+ a_2.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو څیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (څیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني ګڼونه یو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئیز سیستم	لسیز سیستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټولیزه توګه(عمومي توګه) دلته یو څیفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \,,\; a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ : $59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیرۍ یا سټ داسی په نخښه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعی ګڼونو ډیرۍ $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

دپیدایښتي ګڼونو ډیرۍ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1, 2, \ldots. \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه ځیرو۰ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خونې یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بیا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیدایښت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د اندول (نظم يا ترتيب يا لوي واړه ترتيب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی يا د نخښی خوله کی عدد يا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج يا لوي کونج >که نخښه يا داسی کونجکی يا څټ يا ککره کې ليکل شوی عدد کوچنی دی. که ګڼونه يا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لويواړه اړيکی داسی ليکو، ياني که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګنديږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړيکو څخه ټيک يوه اړيکه باور لري»

a < b , a = b , a > b

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری وليکو هم a = a به وي اينه ونه يا هندارونه يا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سيومتري، اندول، ورته واي Symmetry)

د انعکاسي (ايينه ونيز – يا هندارونيز) برابروالی يانی که چيري دا عددونه وراينه يا هنداره يا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بيرته سره برابر دي يا برابريږي. که انعکاسي(اينه ونيز)برابر نوم ورته کيږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به يې همغه سيومتري وبولو.

٤ ـ له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c(ترانزيتيوTransitivity)

ترانزيتيو ګورو، چی يو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه يو د بل سره په واکوالي تړلي يا له يو څخه وبل ته ځی يا وړل کيږي.

٥ – له a < b او b < c => (لاس ته راځی) يا a < c يا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړانديز : که چيری دا پورته وي يا لغاتونه يا نومه ونی په همغه لاتين نومونو وليکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده۰

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څۀ ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۲۸ = ۱۸ + ۱۰

په پورته کي ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتیدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a اوb لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a’ = a او b’ = b څخه لاس ته راځي: a’+b’ = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدوني $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په N° کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي٠ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې نااړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی٠

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونوموو:

$20 – 10 = 10$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونوa اوb لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیرۍ کې تل یو ځلa.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم لیکوab په پورته کې aاوb ځلوني (ضریبونه) اوab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوني اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له a = a´ او b = b´ څخه لاس ته راځي a´b´ = ab (یواځیتوب)

۳ - لرو ab = ba کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوخیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغږیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونوa اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګن(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي۰ ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی۰ دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګڼونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا ست کی شته، چې وي : $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انګریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)۰

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی۰ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ۰

ټولګڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي۰که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانی ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چی ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیدایښتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی۰یا 80 – 100 = -20

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له تربکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه یې طبیعي عدد نه دی۰ اوس یوه د اعدادو بلې ډیری پیژند ته اړ کیږو، چی هغه د ټولګیونوډیری ده او دا د طبیعي عددونو او د طبیعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره یوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډیری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګیونو ډیری ده او داسې یی لیکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{....-3,-2,-1,0,1,2,3.....\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پیدایښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پیدایښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه یا منفي نخښه باندې سنبالوویاني (کیدی شي زموږ هیوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زیاتی یا کمی ښایې د ګڼ کینې لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنخښه لیکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په Z کې هم باور لري

د ټولګیونوډیری

$$Z = \{ .... -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیدایښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګیونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین (پسی یا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګیونو یا تام اعدادو a او b لپاره یو ټولګې x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ویش تیوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ . ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنسټیزو څیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (۲٥ ، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنسټیز څیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیز څیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (۲٥، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونخښو(څیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 9=6+2+1

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چی پروت کمون هم ورته وایی له بنسټیزو څیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زیاتون کمون پوهیږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37| 20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلګې : 7|(604-37)⇔ 7 | 567 ځکه چې 7 | 37604

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پیداېښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت یې هر ګڼ وي او که پېداېښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتي یاني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ . ۱ . ۲ت) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیوګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو یې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ یې ټیټ یا کم وي . یاني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یاني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یاني د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. یاني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته ,,خورا

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

Greatest commom divisor(g c d)(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

تري راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
Least common multiple(l.c.m.)(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» (او یا هم a د bپرویشونې دی او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دی) که یو ټولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپرویشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیرې کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) 1 ± او a± ویش (دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرویشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 یواځی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او a|c <= b|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ٠که c |= 0 وي ، نو د دې په څټ هم باوري دي٠ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري٠د ګڼونو لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څټ ac| bd لنډه لیکنه یې(که ن ج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x اوy لپار

(۹) ټیک هلته a|b کله چې وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي - | b| < a < |b|

حل (اوبی) : (۱) له a = (-a)(-1) = a1 لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي 0 | a , نو یو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي 0u = a او له کومې چې لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$, نو ټولګېونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس یو ټولګې u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \mid = 0$ لپاره دا اخرخنخیر په څټ کیدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د ټولګېونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ یا $u=v=\pm 1$. په لمړي حالت کې د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کې $a = \pm b$ دی.

(۸) د ټولګېونو u , v لپاره دې $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د ټولو ټولګېونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a \mid |a|$ او $b \mid |b|$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په څټ: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $|a| \mid |b|$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \mid = 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د ټولګېونو a,b لپاره د $b \mid = 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسې د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي)، چې لرو $a = bq$.

په ټولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الگوریتم): a اوb دې ټولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي ټولګنونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \quad \wedge \quad |0| \leq r < b$

هر یو ټولګې کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې ټولګې زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادۀ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګې، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګنې د پیدایښتي ګنونوتوکی دی۰

هریو ټولګې، چی لومړنی ګنې نه وي د لومړنیو ګنونو په ځلونو(ځله وونو)(ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

$$240 = 24 . 10 = 3 . 8 . 2 . 5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 2^4 \cdot 3 . 5 \qquad - 1$$

$$2310 = 2 . 1155 = 2 . 3 . 385 = 2 . 3 . 5 . 77 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \qquad -2$$

$$3750 = 25 . 15 . 10 = 5 . 5 . 3 . 5 . 2 . 5 = 2 . 3 . 5^4$$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګنې ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $6 = 2.3$ برسیره پردې ګنې ۵ هم نو $30 = 2.3.5$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ٠ګ٠پ دی

پېژند ۳ ٠ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ٠ګ٠پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ٠ګ٠پ) بلل کیږي٠

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پرویش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر وویشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم٠ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي٠

یادونه : که چیرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پېژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d^*, d \geq 0$ له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ . ۳ :
په خوښه ټولګيونو a او b لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګيونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبي): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چی د (a , b) تعريف په a او b کی سيومتريك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونيسو.
موږ اوس رکورسيف (rekursiv (دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی يعني ورپسی غړی لاس ته راوړلکيږي)
ټولګيونه $r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots$ او $q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots$ په لاندې ډول تعريفوو : وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره ټولګيونه q_i , r_i داسی تعينوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کيدی شي . بايد يو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بيا يوه نه پای د طبعي ګڼونو لويدونکی يا کميدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شيما ته لاربښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$
$$b = q_2 r_1 + r_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1}\,,\ r_n \mid r_{n-2}\,,\ \dots\ r_n \mid b\,,\ r_n \mid a$$

دا په دې مانا چی r_n د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$$t \mid r_0\,,\ t \mid r_1\,,\ t \mid r_2\,,\dots,\ t \mid r_{n-1}\,,\ t \mid r_n$$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a اوb غ گ و دی.

هر د دې گڼونو r_i د ($-1 \le i \le n$) سره، په ځانگړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول au + bv , چی u او v ټولگڼونه دي.

د $r_{-1} = a$

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لاری غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus" د یوې گنیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

d = ax + by اکسپلیځیتExplizit (لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه (1764 , 2124) = d . د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

2124 = 1 . 1764 + 360

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاریږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بې له اوبیونې وړاندې کړم، دا جملې په ختې کې د ګڼونتیوري دنده ده، چې په ګڼونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ بر ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېري پورې اړه لر او دلته یې نه ښایو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې ټولګڼونه وي، د a اوb هر ګډ پرویشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دی چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱(جمله ګی)(اویکلید): په خوښه ټولګڼونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف ۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګڼونه وي ($n \geq 1$), او d دې یو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسی لیکو ($a_1 , ... , a_n$).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_1 , ... , a_n$ لپاره د داسی غ گ و یواختتوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۱۳ . : د خوښي ټولګنونو $a_1 , ... , a_n$ لپاره ($n \geq 1$) غ گ و موجود او d د $a_1 , ... , a_n$ خطي (لاینی) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو ټولګنونو $x_1 , ... , x_n$ لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه ټولګنونو $a_1 , ... , a_n$ د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1,...,a_n$ غ گ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې څیړل شوي دی.

بیلګې:

۱ - ګڼونه 240 او 3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ گ پ دی: 17 . <2>2 = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ گ پ د ګڼونو او غ گ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک گ ز) کلیمې په څیړنه پیل کو ۰ دا کلمه و غ گ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پیژند ورکوو

تعریف ۲ . تې : $a_1, \ldots, a_n$ دې ($n \geq 2$) ټولګڼونه وي، او v دې یو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i \mid v$ د $i = 1, \ldots, n$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د $i = 1, \ldots, n$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1, \ldots, a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله(لنډ : ك گ خ) بلل کیږي او داسې یې لیکو

$$v = [a_1, \ldots, a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې ټولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) v|a او v|b

(۲) له a|w او b|w څخه لاس ته راځی v | w

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

v = [a,b]

جمله :

په خوښه ټولګڼونو a,b,c,…,n لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دی

[a,b,c,…,n]

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو :
دټولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1 , \dots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\dots,a_n] = [[a_1,\dots,a_{n-1}], a_n]$
او هم $[a_1 , a_2] = |a_1a_2 |$ (a_1 , a_2)

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملې په څیر دی): د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره باور لري: له a | c , b | c او (a,b) = 1 څخه لاس ته راوړو ab |c

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژنده :

یو ټولګې $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري۰

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \ldots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \le i \le n$ سره.

حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي ,نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \le i \le n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینتي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس۰ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي۰

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي) د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پرویشونی $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پرویشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرویشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د ځل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیوګڼونو د ځل په څیرلیکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د یو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو $r - 1 = s-1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتیب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي $n = \prod_p p^{\nu_p}$ ($\nu_p \ge 0$ ، $\nu_p = 0$ یواځې د پای ډیرو p لپاره). (ν نیولی شئ کیږ) چیرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګیدونکي لړی پرلپسې کې ځغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,c) = (a,b) = 1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخی ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} \quad , \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چی $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b) = 2^2.3^2 = 36$

او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چی ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چی له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \quad , \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$

او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا خواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي خواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , ...,p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چی موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دځینې متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
		~~15~~	~~16~~	17		~~18~~	19	~~20~~	~~21~~		~~22~~	23	~~24~~
~~25~~		~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31		~~32~~		~~33~~	~~34~~	~~35~~ ~~36~~
37		~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~ ~~50~~
~~51~~		~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~ ~~64~~
		~~65~~	~~66~~	67		~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~		79	~~80~~	~~81~~		~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89 ~~90~~ ~~91~~
						~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~ ~~100~~

۳ . ۱ . ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چی دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راڅیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی.

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چیa په b ویشل کیږي. که ولرو≠ نود نابرابروننخښه ده. دا په دې مانا، چی b له 0 سره برابره نه ده. د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش b : a (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګیونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګیونو ډیرې ماتګیونو(کسر) ډیرې ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وییني b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګیونو په څیر نیسو او په ټولګیونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګیونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګیونه وایو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ او b| a د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګیونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګیونو ماتګیو b/a چې $a \neq 0$ او a او b د ټولګیونو له ډیرې وي، د ټولګیونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ت : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګیونو a، $a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات $ax = b$ پوره کوي

راشنل ګیونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګیونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

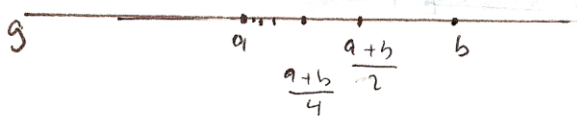
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ . ٤ - رییل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ریښتوني شته یا موجود)

د ریشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تیوریکی اړتیاوي چی د شمیرعملیو بی بندیزه (نامحدود) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتیاوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ریشنلګڼ له لارې کیدی شي چی د کرښی اوږدوالی ټیك ورکړ شي یا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زیات ګڼونه، چی په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



ګڼونکرښه چه څه راکوښی کیدی شی

د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ریشنلګڼ په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ریشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ایریشنلګڼونو»په نامه یادیږي، کیدی شي د یوه پریودیکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شلیږي) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.

د بیلګي په توګه د مربع د نیمي(قطر) x اندازه چی د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چي په ریشنلګڼ وښوول شي. د پیتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګې کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولې» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څیړنې لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راڅرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلګنډیرې R چې په ریشنلګنډیري د ایریشنلګنډیري ورزیاتول دي چې له ۱ . ۱ . ۲ تر ۱ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بسټزقوانین په کې باور لري. د رییلګې له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نیول کیدی شي. په دې ډول رییلګنونه ټولې د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رییلګې حل یا اوبې نه لري. دلته د دې ګنونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګنونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر څیړنې لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

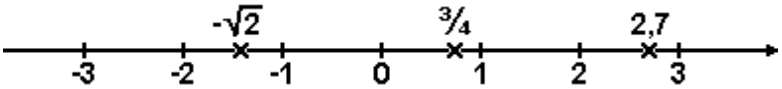
موږ ګنونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګنونه نه دي یانی که موږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي۰ داسی ګنونو ته ایراشنل ګنونه وایو۰

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني Period, د ګنونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته ریيل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د ریيل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیړو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په ریيلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (ویینی) سره شمیرنه (نوکان ایښوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلوني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندې (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفريق (زياتون او کمون)

د زياتون او کمون بنسټيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a \;,\; . \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \ldots -c - d - \ldots) + (e + f + \ldots - g - h - \ldots) = a + b + \ldots - c - d - \ldots + e + f + \ldots - g - h - \ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چيرې د نوکانو دباندې زياتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ويستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ايستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدليږي۰ يانی کموننخښه زياتوننخښه او زياتوننخښه کموننخښه کيږي۰ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a + b + \ldots - c - d - \ldots) - (e + f + \ldots - g - h - ..) = a + b + \ldots - c - d - \ldots - e - f - \ldots + g + h + \ldots$$

په همدې ترتيب کيدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چی په ګڼکرښه د صفر څخه د يوه رييلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی ليکو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بي اړيکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او کميزه نخښه يا مثبت او منفي نه ليکل کيږي يا يون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټيک او ټيک يو ګڼ ښايج او بس۰

$$|a| = a \;;\; a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a| = 0 \;;\; a = 0$

$| a| = -a \;;\; < 0$

يانې که a زياتيزه يا مثبت وي،نوa پخپله ليکواو که a کميزه يا منفي وي، نوa- ليکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخبنی قوانين باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چيرته ډير نوکبندونه راګرځيدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بيلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټیک دي.

دا په لاندې ډول کارولکیږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2v)(4u - 2v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د a = 0 لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي۰ په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سړی د ګډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې څایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{لپاره } ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعې وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلې له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \quad \text{لپاره } a \neq -b. >$$

بیلګه ۳ . ۷ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad \text{لپاره } a \neq -b. >$$

بیلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad \text{لپاره } ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ لپاره $a \neq b$,

بیلګه ۱ . ۱۰

$$:(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}\,v)=4u-\sqrt{2}\,v \text{ Rest } v^2$$ پاتې $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \mid = -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال وړ د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دې انډول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولینوم درجه د ماتلاندې پولینوم درجی لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

موږ نیسوچی: $a_n \mid =0,\ b_m \mid =0$ او $Q_m(x) \mid =0$.

د دواړو ویشو« توټه ویشو» (پارڅیالویش(Partialdivision)) دا دی چی دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom 1}+\frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – ټوټه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د ټوټه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۳ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$ $6x^3 -4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) -(a_3 /b_1) x^2Q(x) =$	$9x^2 -3x +1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x +1) : (3x - 2)$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ : د ټوټه ویش بیلګه ۱ . ۱۱د F (x) غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) = (9x^2-6x)$$

پاتي $= 3x+1$ یاباقي

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

یاباقي $= 3$ پاتی =

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یووړ شي .

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = \overset{(1)}{2x^2} + \overset{(4)}{3x} + \overset{(7)}{1} + \overset{(۱۰)}{3/(3x-2)}$$

(2) $6x^3-4x^2$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $9x^2-6x$

(6) $3x+1$

(8) $3x-2$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

$$(18x^4+15x^3+0x^2-2x+1):(3x^2+x-1) = \overset{(1)}{6x^2} + \overset{(4)}{3x} + \overset{(7)}{1} + \overset{(10)}{\frac{2}{3x^2+x-1}}$$

(2) $18x^4+6x^3-6x^2$

(3) $9x^3+6x^2-2x+1$

(5) $9x^3+3x^2-3x$

(6) $3x^2+x+1$

(8) $3x^2+x-1$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګیونو m,n څخه د ریشنلګیونو انځورونو لپاره تعریف شوې۰ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رییل ګیونه دي، وغزول شي۰

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګې په توګه:

ویش(a/(b-c) ټیک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي۰ ماتګې a/b همدا ګې بنایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګې هم هر ماتګې کیدی شي او هم دواړه۰ دا باید دلته هم په پام کې وي، چی هیڅ یو ماتلاندې ګې باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګې هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو۰

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په څو واره ماتګې کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{a}{\frac{b}{c}}\neq\frac{\frac{à}{b}}{c}$$

هریو ماتګې b|=0, a / b په یوه ګې c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګې c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي ګې کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګې لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګې ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې b≠- c وي نه شي لنډیدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 ∨ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیرې پرخټ یا برعکس ماتګنونه a / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو٠ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی٠ د بیلګې په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا٠م٠ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ٠ ل ٠ م ٠ ا

کیدی شي، چی ا٠م٠ل٠ د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3٠. 3.٠2٠36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ یا لوړ جګګڼ یا لوړ طاقت لومړي ځلوونې رانیول کیږي٠ چې ګڼل خورا ساده کوي٠

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یی ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \cap b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره ياني

$$ab(ab)(a^2b).(ab^2) = a^3.b^3$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

a = a

b = b

ab = a b

$a^2 . b = a^2$ b

ab^2 = a b^2

دا ا٠م٠ل٠ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا٠م٠ل٠- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دېپه دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},b\neq\cap d\neq\Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c};b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0\Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0,a\neq b,a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,\forall\,|\,a\,|\neq|\,b\,|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی۰ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل۰ د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

او په دې کڼونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه۰ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

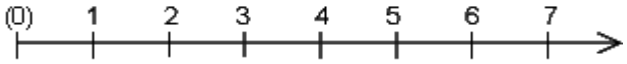
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي۰

ګڼونډیرې (لنډه ټولګه)

پیداینتي – یا طبیعي ګڼونډیرې

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیداینتي ګڼونو انځورونه

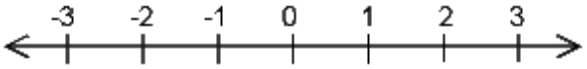


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګنونو ډیرې

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

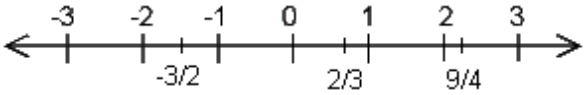
د ټولګنونو ډیرې انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګنونو ډیرې

$$Q = \{\frac{p}{q} \mid p, q \mid Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګنونکرښه راشنلګنونه د ټولګنونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیکی ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

د ماتو سره شمیرنه

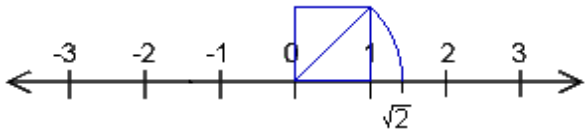
د دوه راشنلګنونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګنونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګنونه یا ځایونه هم شته، چې ګنونه په کې ځاي دی او دې ګنونو ته مو ایراشنل ګنونه وویل ۰ لکه چې یو راشنلګڼ نه دی

راشنل او ایراشنلګنونه رییل ګنونه جوړوي

د رییل ګنونوډیرې یا حقیقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګنونو ډیرې د ګنونکرښې ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګنونکرښه کې روښانه ده



په رییلګنونوکې بې له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګنونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوړی

Addition:زیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوځیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بې اغیزه یا ناپیلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b – a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$.

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوځیاتیو قانون$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت$a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$ د بیلګې په توګه

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا ستې کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونی یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی یا مفروق او پروېشونی یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه پیز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوتۍ وني له لارې په نږدې ۵ ځایونړ ټیک پیدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او څلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړی

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16\,(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)\,(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)\,(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4\,(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وييني يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24\,b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وييني يا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b\,(a + 1)$
d) $8\,(7a - 5b) - 5c\,(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسی!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوی.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسی، کوم چې $a,b,\ldots$ يې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج یعنې د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا ځلوونو له لارې لنډ کړی

a) $\frac{6\ 732}{20\ 196}$
b) $\frac{2\ 730}{5\ 005}$
c) $\frac{20\ 520}{2\ 280}$
d) $\frac{69\ 069}{138\ 138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پیدا کړی

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابرمخرج کسرونو شمیرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو کسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې کې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ ـ د نابرابر نوميزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفريق(زياتون او کمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره يو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړیاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره يوځای کړی! بيا په توليزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړی او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$ b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$ c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$ d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=1,2,3 سره د a=3,4,5 سره د a=2,3,4 سره د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا کسرونو ضربونه(يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعکس يا په څټ ارزښتونه پيدا کړی.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$

c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$

c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$

c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$

c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات (b² - a²)/ (-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وبینه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ریښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر یا ریښې قوانین ترڅیړنې لاندی نیسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې یا استعمال چټکتیا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کیږي، چې ریښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - یا جګعدد یې نسبي یا راشنل وي۰ د دې فورمال ټیک کره د ګڼلو قوانینو په څنګ کې د باوري کیدو لپاره باید په نیونو(فرضیو) هم ژور فکر وشي۰

د ریښې پیژند د خلاف یا پر ځټ عملیو مخه باید نیول شوي وي، چې د هغې له مخې رادیکاند (ریښه ویستونی یعنی هغه ګڼ، چې ریښه یی وېستلکیږي یا نیول کیږي،د ریښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ریښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکمیز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ریل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی یا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نیونه یا فرضیه شوي وي۰

٤ ۰ ١ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼیز یا تام عدد په جګ یل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ٤ ۰ ۱:

د یوه په خوښه ریل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهیږو ۰ د دې لپاره لیکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,...

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) او b د پوتنځ یا توان ارزښت بلل کیږي ۰

د بیلګې په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

د $a^\circ = 1$ لپاره کره ټاکل کیږي $n = 0$ د (4,1) د $a \mid = 0$ سره

د پیژند یا تعریف پر بنسټ (اود څه بندیزونو په څلوردیوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کیدی شي، چې د خوښی یا زړه پورې ریبلګنونو $a, b \in R$ او $m, n \in N^*$ نامنفی ټولګنونو اکسپوننت یا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;.....(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;.....(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};.....(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;.....(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};.....(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړیکې د ټولګنیز مثبت جګې یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدی شي، چې ټولګنونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو ریبل بنسټونو یانې د $a \mid = 0$ او $b \mid = 0$ لپاره باور ي دي .۰ په (4,5) کې بیا بندیز $n \geq m$ اړیین نه دی۰

د توان قوانین کیدی شي په بنه بدلونکو افادو یا وینو وکارول- یا استعمال شي۰

بیلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y]^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بیلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ----------

پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي۰

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپیر وشي۰ پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنخښې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري۰

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ۲ – ریښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ٤ ۰ ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ریښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0.....(4,9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا ګڼ، چې ریښه (جذر) یې نیولکیږي(موږ دا

ریښه نیووني یا ریښه ویستونی بولو) او n دریښې جګ(اکسپوننت) اوb د

ریښې ارزښت یا ریښه ارزښت بلل کیږي.

باید پردې ټینګار وشي، چې ریښه یواځې د نامنفی رادیکاند یا ریښه ویستوني (ریښه نیوني) $a \geq 0$ راوستل کیږي یا نیول کیږي او پخپله په لاندې توګه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کونې لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,\ldots$ لپاره د $a<0$ سره ریښه b په رییلګنونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی.

۲ – د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرون $b^n = a$

په ختیه په ریښتوني دوه رییل اوبیونې یاحلونه لري د بیلګې په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځنې یو منفی اوبی یا حل لري۰ یانې $b < 0$ د بیلګې په توګه دا $b^3= -8$ یواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه $n=2,4,6\ldots$ ګڼونو لپاره $a\geq 0,b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو۰ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو۰ له بلې خوا به ریښی د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ریښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ لیکو٠ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots (4,10)$$

څلورې ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګڼونو a لپاره تعریف شوي٠ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) ښول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یانې د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (4,11)$$

$$= \{ -a \quad , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د ریښې یا جذر له پیژند (4 , 9) , (4 , 8) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولیکل شي د.... $n = 1,2,3$ او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots (4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,).(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پیژندل کیږي، چې د ریښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m .....(4,16)$$

لپاره $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ د

د بیلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0.....(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n اوm لپاره د پوتنځقوانین (4 ,2) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې a>0, b>0 نیونه شوې وي۰

د ریښې شمیرلو لپاره باید اساسآ د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او ریښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیوني تل و ازمایلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پاي کیدډول وښایو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت a = 0 لپاره شته دی یا باور لري، د a|=0 یا $a\neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یاa- پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ۷

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5}}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ۸

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې $(m , n > 0)$ $m < n$ او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي$(N^*|= 0 , a > 0)$

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},.....(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورۍ- یا مربع ریښې زیاتون یا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له a > 0 او b > 0،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقیقي – یا رییل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بندیزه ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعنې a,b>0 ، برسیره پردې دې باید توان $a^{\alpha};a>0$ د ناریښتوني یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخي سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;}a'_n\}$. دلته $a_{n;}a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}\,;a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غړي یې (۴،۲) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412<2^{\sqrt{2}}<\sqrt[10000]{2^{14143}}}}$

٤ ۰ ۳ ټولګه : د a>0, b>0 ریبل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ بیلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیین وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو

۴ . ۵ . تمرینونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفریق یا زیاتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څیر یې ولیکئ

a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a)\cdot(a-b)\cdot(a-b)$ d) $-(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b-6ab^2-15a^2b+6ab^2-7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4-x^4(2b-3a)+x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2+2(b-a)^2-3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3-3(1-a)^3-15(a-1)^3+4(1-a)^3+3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+1}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^x\cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^0\cdot a^n\cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x}\cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x}\cdot b^{2n-x}}\cdot\frac{x^{3n+2}\cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3}\cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}}:\frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3\cdot x^{n+1}}{36c^3\cdot y^2\cdot z^{n-3}}:\frac{70a^3b^2\cdot x^{n+2}}{54c^2y^4\cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}}:\frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3\cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3\cdot 30x^n(a+1)^2}:\frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګې یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع – یا څلورې ریښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ریښو جمعه او تفریق)زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ریښو یا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$

c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ریښې ریښه وپستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$

c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$

c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅېړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وې څېړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څېړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څېړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وې ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^c = a \,;\, a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2 = \log_x 36$ د $x^2=36$ سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، یوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له $(5,1)$ او $(5,2)$ څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,3)$$
$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او lna ته پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم وايي(e وروسته څیرو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y, ...(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log\ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b(x+y), ...(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, ...(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, ...(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه څټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کیڼ اړخ کې لوګاریتم ځای لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې c > 0 (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کیڼ اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځای په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه ۵ ۰ ۳ کې کیڼه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بیا $a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، b لپاره هم باور لري،د کومو لپاره چې پورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي a > b , a > - b له امله هم و a >|b| ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي ----------

ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیر اوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), \ldots\ldots\ldots\ldots(5,15)$$

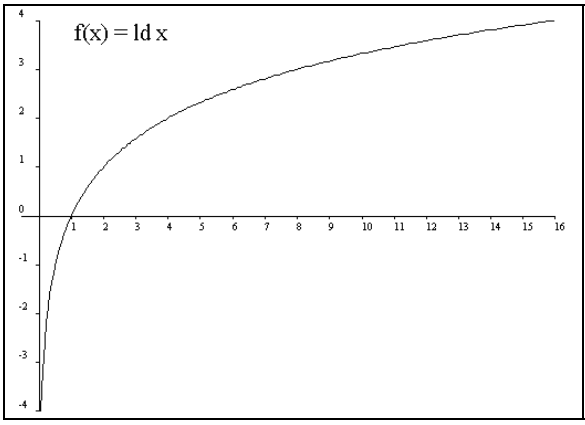
د

لسیز لوګاریتم اړول په پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

$$Lga = (lge)(lna); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

$$Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;\ldots\ldots(17)$$

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429\lg a, \ldots\ldots\ldots\ldots(5,17)$$

	د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

dezimal	binär	
0,5	0,1	2^{-1}
0,25	0,01	2^{-2}
0,125	0,001	2^{-3}
0,062.5	0,0001	2^{-4}
0,031.25	0,0000.1	2^{-5}
0,015.625	0,0000.01	2^{-6}
0,007.812.5	0,0000.001	2^{-7}
0,003.906.25	0,0000.0001	2^{-8}
0,001.953.125	0,0000.0000.1	2^{-9}

۵ . ۳ تولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څټ بلواک دی

$$x = \log_b n \iff b^x = n$$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, 3, ...$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم

قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n \lg (a+b) + n \lg (a-b)$

c) $\lg a-\frac{1}{2}\lg b+\frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوگاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات Gonometry)

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چټکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ ۱ ۰ بنسټیزه هندسه

٦ . ۱ . ۱ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابستركتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه ليدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پيښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی يی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پريښول کيږي يعني نه انځوريږي، که دا مو و ناريښتياو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کيدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څير ونيوله شي) څيرې په غور وګورئ

وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه يا ټوټه کرښه Line segment

A B

دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بيلګې په توګه لاندې ويناوې باور يا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې يوه کرښه ټاکل کيږي(پورته څيره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي يا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په يوه هواره کی پرتی کرښی يو بل ټيك په يوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته څيرو کې کتل کيږي)

يوه وړانګه s_1 له يوې لور په يوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او يوه پايکرښه له دوه ټکو A او B بنده يا راګير کرښه ده)

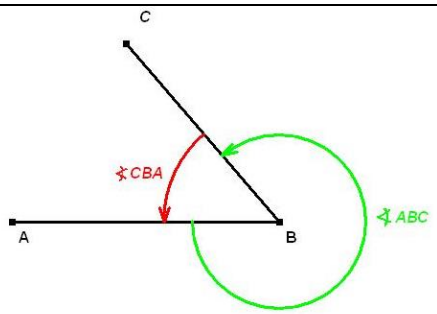
(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښی او په همدې ډول S د کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

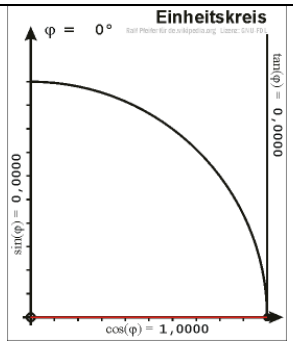


کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$

په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې څیره ، که نورېڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځورو ړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د °360 کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي٠.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي٠

بیلګه .٦. ۱ :

کونج "a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چی ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12'=720"

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه 720’+36“ = 756“ له دې لاس ته راځی

1’=(1/3600)° (<=)

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12’36“=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ۳) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته څیرې راځي، خو د دې څیرو په ځای به موږ په پورته څیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ۲ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځای ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701° د 0,701° اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

0,701° = 0,701.60' = 42,06', 0,06' = 0,06.60=3,6“

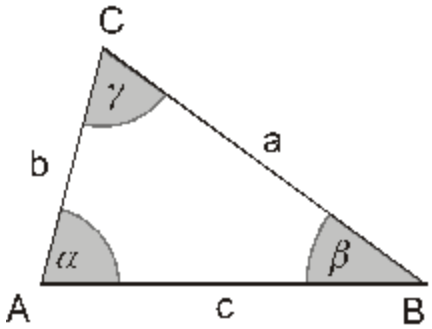
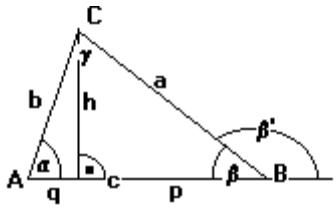
پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6"$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۳ . ۱ . ٦ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنۍ یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که ځوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي	 

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کيږي

- په دريګوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دې يا π دې
- يو دباندنې کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون 360° يا 2π دې٠
- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمي په يوه ټکي کې يو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دريګوډي » دروندټکی يا دثقل مرکز « دې. اړخنيمي يو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځانګړونه يې۱ :۲ ده) په څيره کې وګورئ) د يوه دريګوډي منځولاړې

يو بل په يوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپير ګردي) هغه ګردې يا دايره چې دريګوډې په خپل دننه کې نيسي يا بهتره، د دريګوډي خونديګردې(منځټکی دې)٠

د يوه دريګوډې کونجنيمي يو بل په يوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردې) ګردې چې د دريګوډي

په دننه کې ده يا ګردې يا دايره کې خوندي دريګوډې (منځټکی دې) لاندې کې بې څيره شته) د يوه دريګوډي جګې يا د ارتفاع کرښې په يوه ټکی کې سره غوڅوي.)
څيرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې څيرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري٠

د جګيو غوڅټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

Umkreismittelpunkt (*U*) circumcenter ·د دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

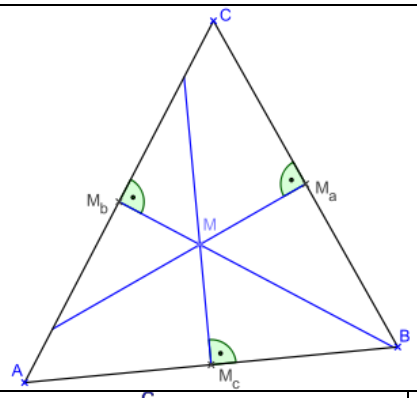
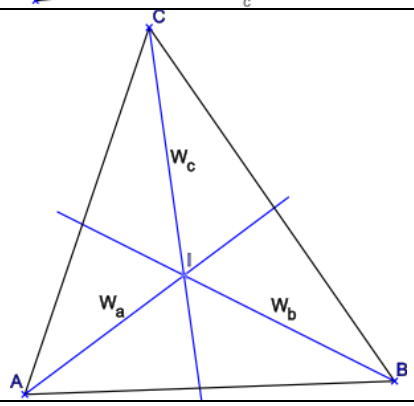
Seitensymmetralen), seid symetry ·د اړخسیومتریو غوڅټکی

Inkreismittelpunkt (*I*) inscribed circle, incircle den ·د دننه ګردی منځټکی

Winkelsymmetralen r · د کونجسیومتري

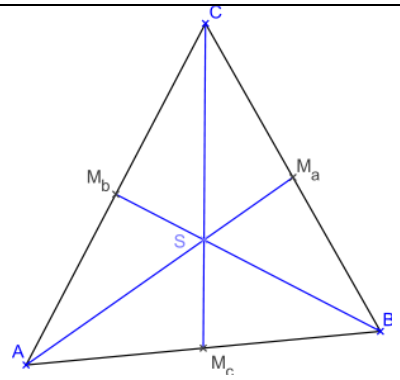
Schwerpunkt (*S*) r centroid · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median ·اړخنیمی

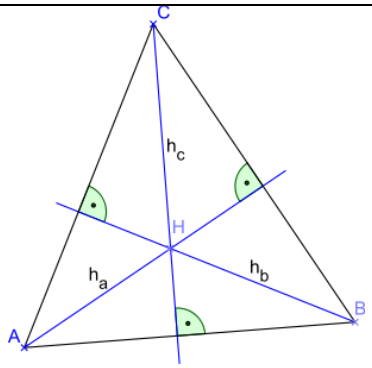
مخامخ ځیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي	
دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته ځیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)	

(c) ketabton.com: The Digital Library

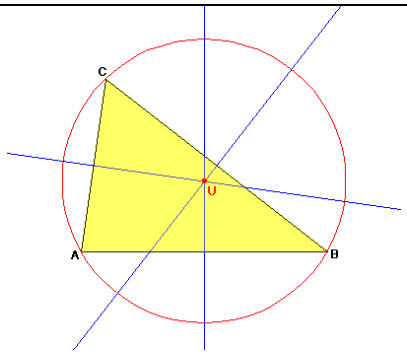
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي۰ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو۰

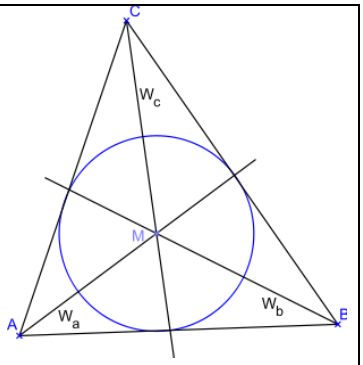


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي۰ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي۰



په پورته څیره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی





(c) ketabton.com: The Digital Library

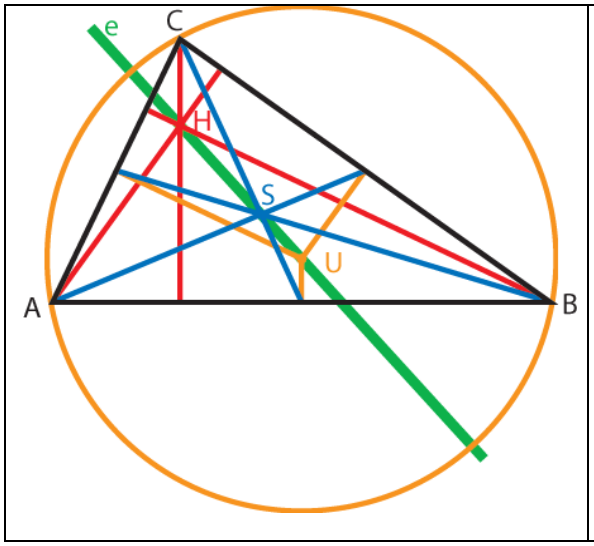
په پورته کیڼه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو ګردیز یا چاپېرګردیز منځټکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوڅټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردیز کږه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردیز د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډیز تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډیز ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردیز په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډیز پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډیز دباندې پروت دی۰

که درېګوډیز ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپېریالګردیز منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځانګړنه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې څیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$



۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهتCongruence and Similarity

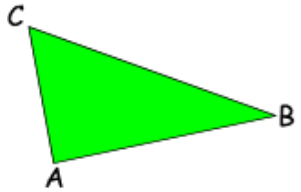
دوه دریګوډي ABC او 'A'B'C یو بل سره کونګروانټ یا برابر پټوني دي

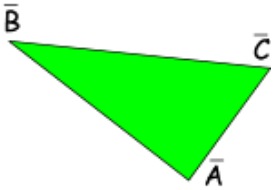
یانې برارباارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ABC \equiv A'B'C'$$

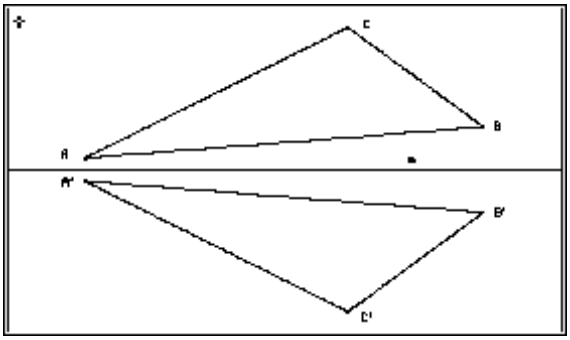
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې څیر)





که دریګوډي سره کونګرواینځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

.په څټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګرواینځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW،

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګرواینځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګرواینځ دي. د کونګرواینځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګرواینځ جملو کارونی په څیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځانګیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګرواینځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

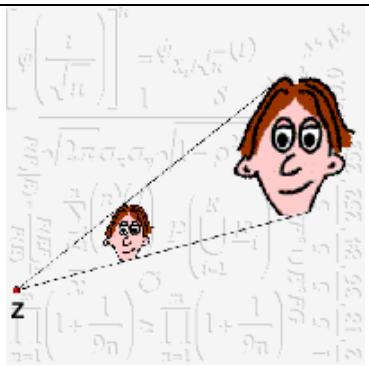
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځانګیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

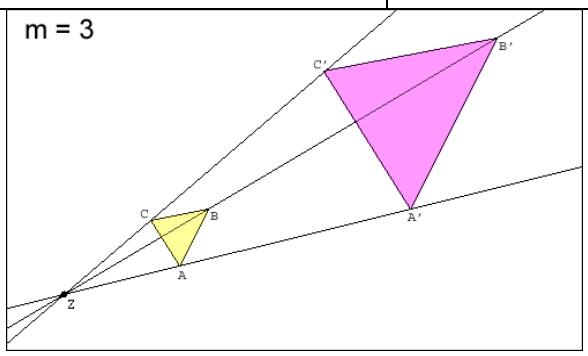
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ څیرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غښګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګوډي لاس ته راځي

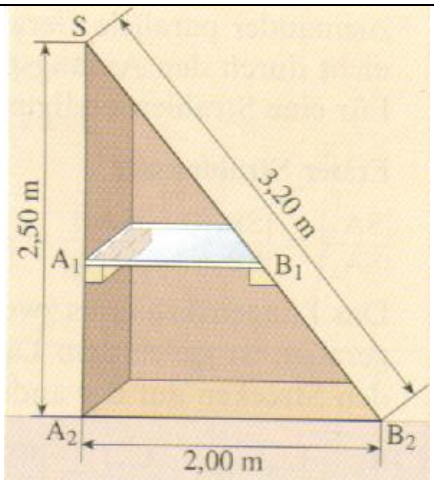


په لاندې څیره کې کښل شوي دریګوډي ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:

$\Delta ABC \square \Delta A'B'C'$



د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:



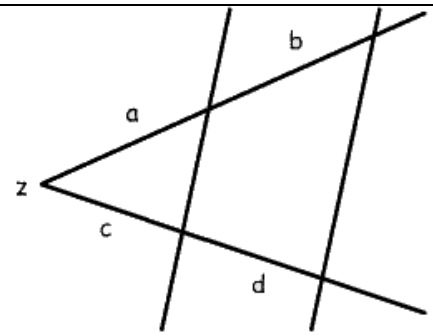
په دې پورته څیره کې درېګوډي یو بل ته ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰

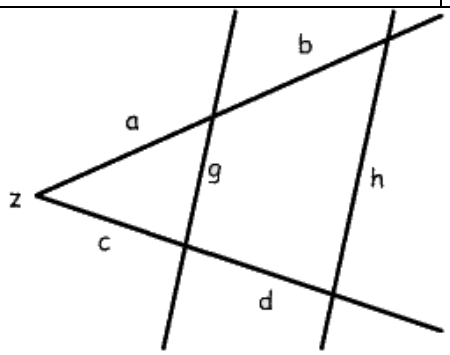
$$\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$



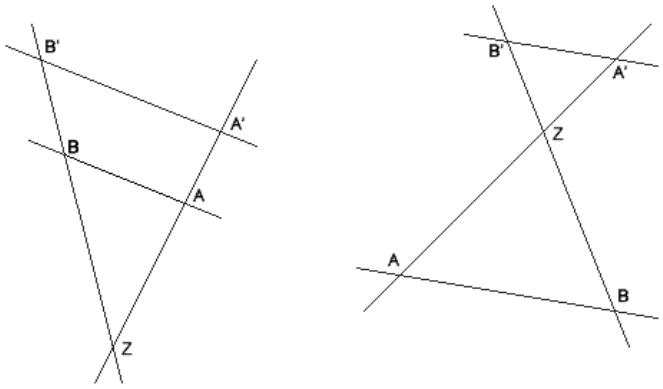
د وړانګې دویمه جمله:

که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$$



یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښې g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګې په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2 . 1

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتې ورته برخی په مساوي تناسب یا ځانګیونی سره پرتی دي:

A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2 . 2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتې ورته برخی په مساوي تناسب یا ځانګیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3 - ۳

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښې په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځانګیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړني لاندې نیسو

a >c - 1

موږ کاږو AB = c او په ټکي A کونج الف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوځوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

a < c - 2

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږئ)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي، په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی.

۲ . ۲ : ګردلینده د α ازاده پښه لمسوي.

۲ . ۳ : ګردلینده د α اندازه پښه نه غوځوي .

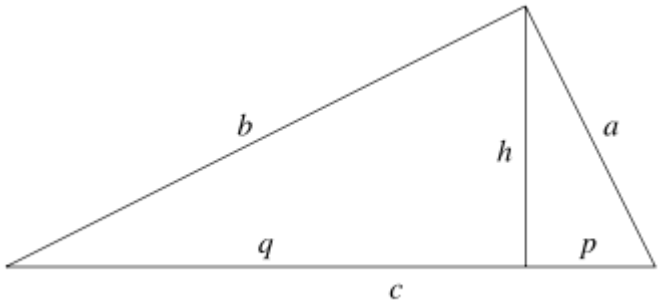
a = c (۳

ګردلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو a > c نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ .۱ . ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیړنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ
هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت ( ) Katheten بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلی



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتیت او (په کونج) پروت کاتیت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

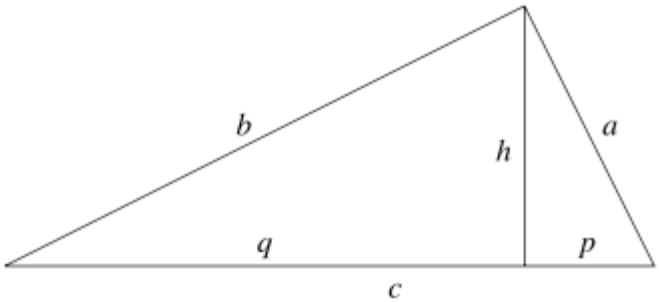
$$a^2 = p.c \ , \ b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلي ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \ . \ p \qquad (6.\ 7\ )$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

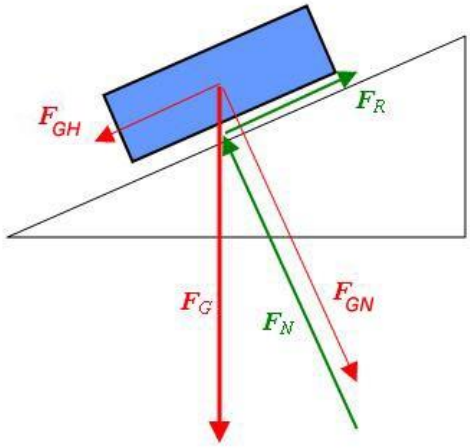
د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (څیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي٠ دا یوه فزیکي دنده هم ده(څېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې څېرې سره داسې بدلوو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی

$$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$$

ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

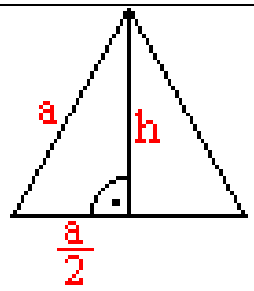


(c) ketabton.com: The Digital Library

داچی G||AC ځغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چی $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل ته ورته دي۰

یادونه : داسې بیلګې، چې څیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې څیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي۰ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم۰

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی دې (لاندې څیره) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو(جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې دریګوډي کې وکاږی)



$h^2 = a^2 - (a/2)^2$

$h^2 = a^2 - a^2/4$

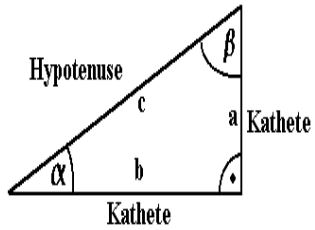
$h^2 = (3/4)a^2$

$h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي(لاندې څیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت gegkathete a د مخامخ اړخ په څیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانتیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګڼجدولونه پوره دي یا بسیا کوي .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; .....(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; .....(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; .....(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳.۰۶ په یوونګردی کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو Konkrete(اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که α د خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لارښودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو ځموږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شني کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیړنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :360°) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180°) لري .

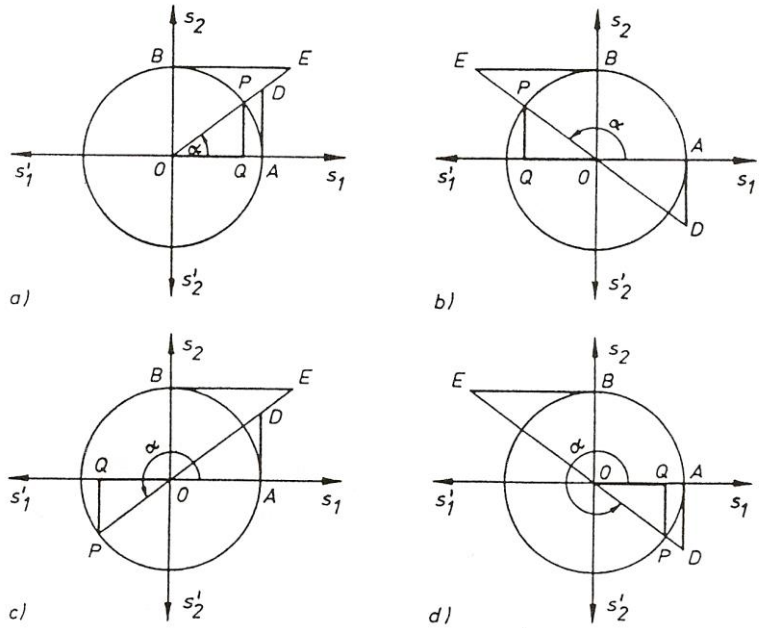


Bild 4.17 تجربه

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.14)$$
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

په

ټولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګټونو $k = ..-3,-2,-1,0,1,2,3....$ لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړئ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446^\circ$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشمیري اړونه ده، پهٔ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سمو او بیا لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چیα_0 په درجه اندازه یا لینده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin] 2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan] 4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α_0 هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي یا څنګیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چی :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د x ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$
$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$
3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلګه ۴ . ۹: لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ N \cdot \sin 28° = 700\ N \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ N.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ N \cdot \cos 28° = 700\ N \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ N.$$

۴.٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چې په تولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

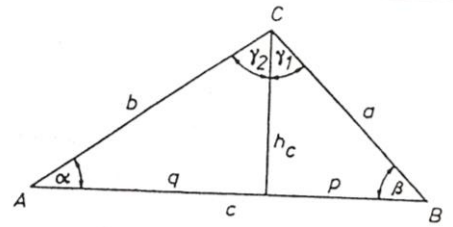


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{4.17}$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د څیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$
$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$
$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \qquad (4.18)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه اړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = aاو ss' =180° - ss معلوم دي، α

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos ss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180° - ss')$$

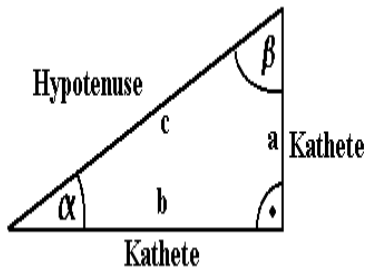
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

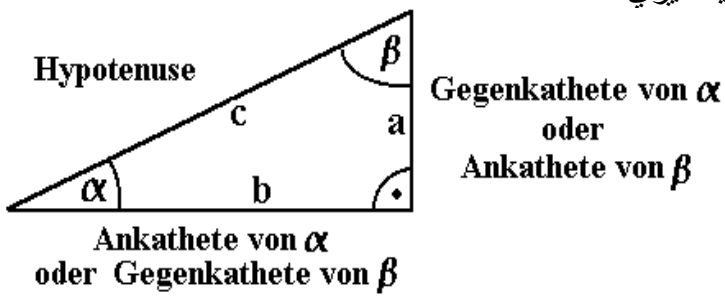
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې دریګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

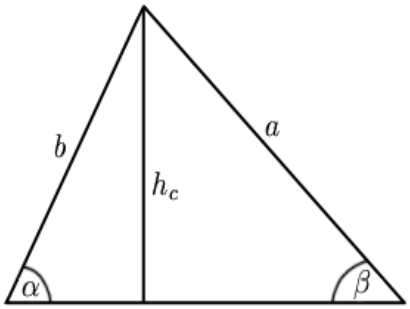
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا څیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې یې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

د برابرایښوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیدایښتي توګه جګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کارونې بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\text{cm} \text{ ، } b = 3,8\,\text{cm} \text{ ، } \alpha = 73^\circ$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو ترمنځ اړیکې ښایې ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

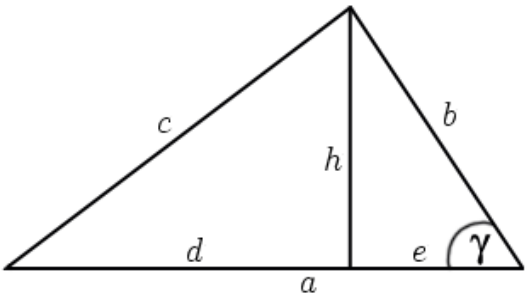
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د دریګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وییئه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلورئ یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیروییني یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b}(\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b\cdot\cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، جې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9$ cm ،

$b = 2{,}8$ cm

$c = 3{,}5$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identities زیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کي ګتمتوالي

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګتمتوالی

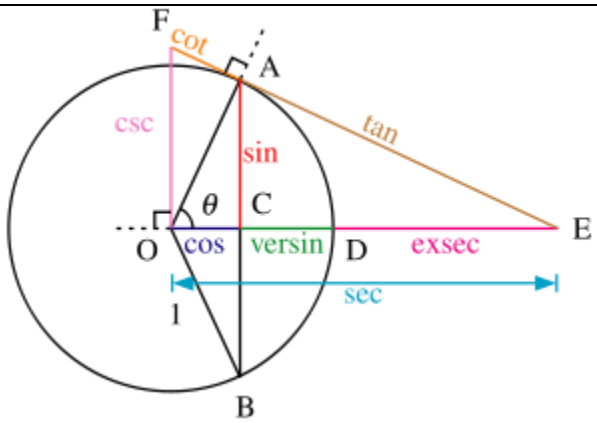
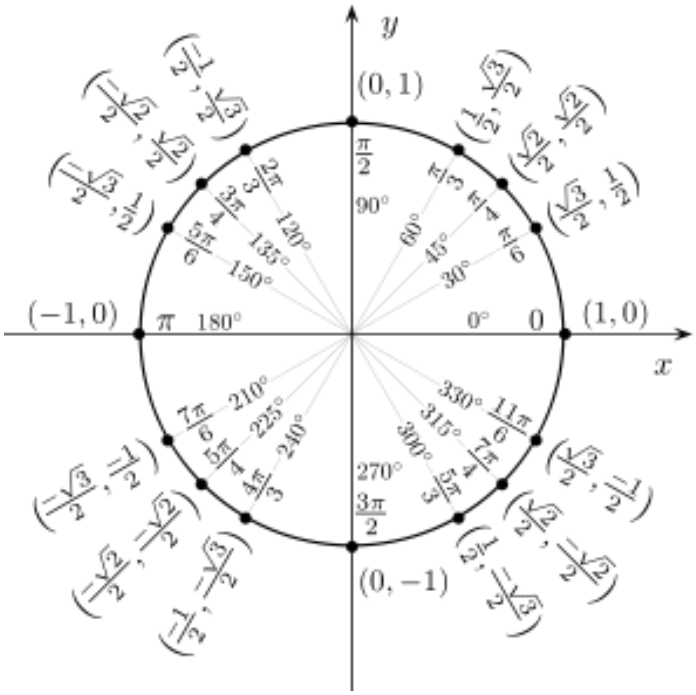
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تریګونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

	نوره ژوره څیرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي
	د یوه کونج θ ټول تریګونومتریکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کیدی شي (یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي) مخامخ: یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی) The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنښه

دا لاندې لیکنښه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډونې لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي $\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

په یوون(یووالي-) ګردی یا دایره کې ساده لیدل کیږي:

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردی یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتري

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{array}{lll}
\sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\
\tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\
\sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\
\csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x)
\end{array}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{array}{ll}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\
\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\
\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\
\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\
\csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x)
\end{array}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کیڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کیږدو د پیتاګوراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

Half-angle formularد نیمکونج فرمول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښې لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زیاتون ته کتمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کتمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi=\text{half circle},$ =که

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$ *نو یا* او

$$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

Trigonometric conversionsتریګونومتریکي په څټوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري۰ داسي اړیکی د په څټ اړیکو له لاري افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوي جوړي نمایندکی وکړي ، او arcψ دي د ψ په څټ وي، داسي چي $\psi(\arcsin\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\arcsin\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر ووبلی شي یا افاده شي۰

داسي فرمولونه د لاندي جدول له لاري ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندي جدول پوهیدی شو

φ \ ψ	sin	cos	Tan	csc	sec	cot
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
Cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
cot	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$

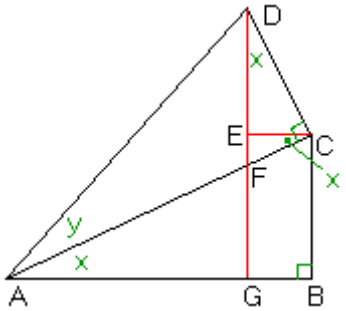
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs

sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*) په مخامخ څیره کې کونج x د ولاړکونجیز درېګوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېګوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی	

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

کونج CDE= x EG = BC.

$$\sin(x+y)$$
$$= \frac{DG}{AD}$$
$$= \frac{EG+DE}{AD}$$
$$= \frac{BC+DE}{AD}$$
$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$
$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$
$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$
$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

د پورته څيرې څخه کار اخلو:Using the above figure

$$\cos(x+y)$$
$$= \frac{AG}{AD}$$
$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي y- کیږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي y- ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راتول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;.....(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;.....(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;.....(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};.....(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};.....(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};.....(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

موږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته څو، او ځاي په ځای کوو $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$
$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وییني یا افادې دې ساده شي

a) $y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ ist.

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مساوات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړی شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) 15°	b) 225°	c) 105°	d) 277,5°
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) 4,24°	b) 70,9°	c) 31° 17' 20"	d) 228,1923°
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو دریګوډی له $a = 4,5$ cm , $b = 12,2$ cm او $c = 11,7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا دریګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسې یې ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې دریګوډی جوړ کړی

a) $a = 11,7$ cm , $b = 9,2$ cm , $\gamma = 43,5°$

b) $c = 16,1$ cm , $\alpha = 84,6°$ $\beta = 51,9°$

وښایې چې ولې دواړه دریګوډي ورته د:

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز دریګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز دریګوډی A'B'C' داسې په دننه کې ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ خغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (څیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

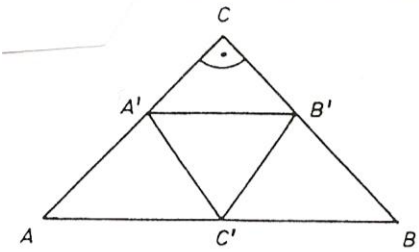


Bild 4.20 څیره

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د
څیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول
په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع
اړخونه وشمیری
الف) له کانتو څخه
ب) له هیوپوتینوزیبرخو څخه

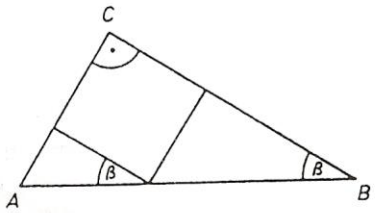


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15^\circ$, b) $\alpha = -390^\circ$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج ß دې د $\sin ß = a$, $\cos ß = a$, $\tan ß = a$, $\cot ß = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90^\circ$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ازښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90^\circ$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لویې موږ ته معلومې دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43^\circ 36'$ $\alpha = 18^\circ 55'$ $ß = 59^\circ 29'$

۳ . ۳ – وشمیری ! h_c, A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = ß$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8^\circ$, $\gamma = 33{,}3^\circ$ $\gamma = 48{,}2^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

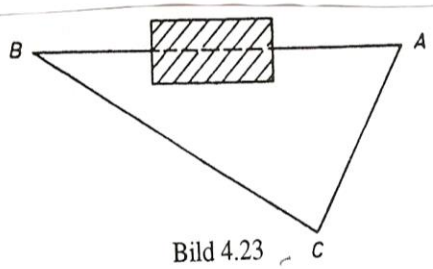


Bild 4.23

جګړه

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي. که $\overline{BC} = 75{,}25\ m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45''$ وي (څیره ۴ . ۲۳)

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولګیږي. (څیره ۴ ، ۲۳ وګورئ).

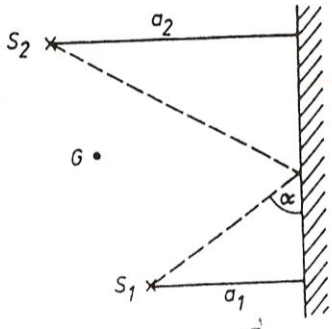


Bild 4.24 جګړه

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\alpha = 42°$ ولګیږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا درېګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan\alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3 \alpha - 3 \cot\alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \dfrac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبې یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1) د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0$ (7,5)

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلورې (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=>لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره ریېل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف ریېل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي.

که $P^2 < 4q$ وي، نو ریېل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرې په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي٠ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ ایښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

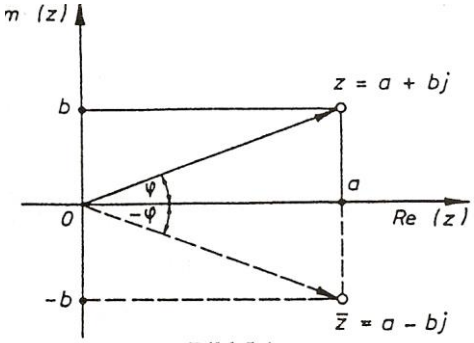


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطحې رییلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یې‌ایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$| z_1 | = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

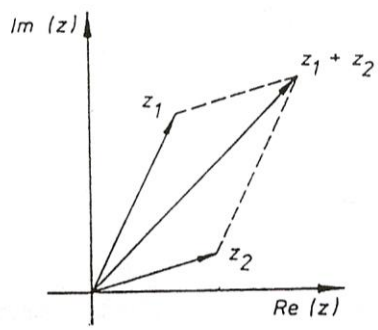


Bild 5.2 7.2 څېره

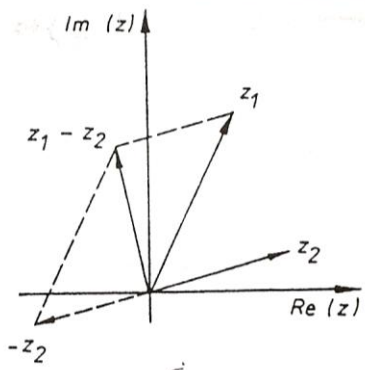
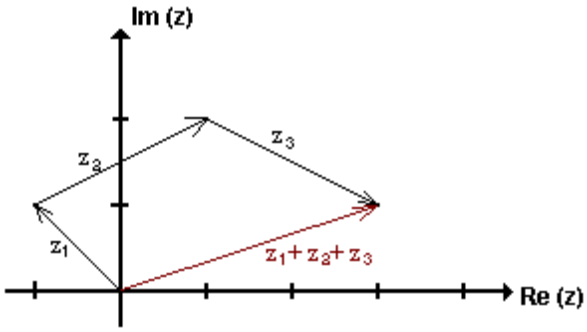


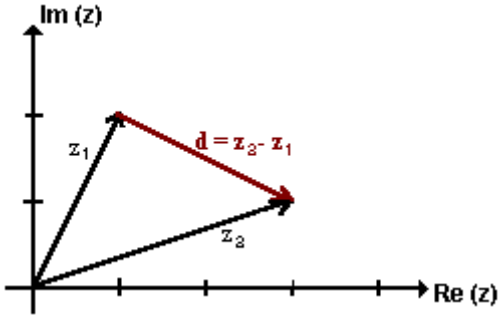
Bild 5.3 7.3 څېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

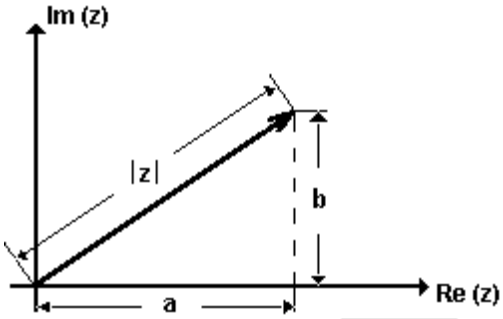
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانګړنه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$=> \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7 , 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ . ٤ :د او Z1 لپاره له Z2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}\, i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63+16i}{4+3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته راځچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کې د دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ –م جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی $3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$6x + 3 \geq 3x+6.$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو $b \geq 0, a \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداِه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې ناربښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم ناربښتیا دی، ځکه چې له یوې ناربښتیا نیونې څخه یوه ناربښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې ربښتیا نیونې څخه د یوې ناربښتیا ثبوت لاس ته راوړنه ناربښتیا ده۰ (د ثبوت د ربښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی ناربښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې ربښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورۍ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره صربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورۍ وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کمونې څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کیڼه لور د څلورۍ ۰ مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنۍ کیدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دې یا غلط دې، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دې ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ریښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دې

اوبیونه یا حل : د غوښتنې نفیې ده، چې : د ۲ ریښه $\sqrt{2}$ ریشنل ګڼ دې (د ریشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل ګڼونه p ,q, د $q\neq0$ سره شته وي، چې دا باوري شي: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه((جفت) ګڼ دې۰ نو له دې امله p هم یو جوړه ګڼ دې، ځکه چې یواځې د جوړه ګڼ مربع یا څلورۍ جوړه کیدی شي $p=2p'$ له مربع یا څلورئ کولو او پر ځاي ایښوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو څلوری یا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی۰ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي۰

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي۰ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي۰

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1)= n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کې‌لیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي۰

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له V => B : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

۱ ۰ د n = 1 لپاره باور لري 1 = 1° = 1

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ V => B ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښې خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کهٔ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د تړنې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼې دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)\,(n+1)\,n}{6}$.

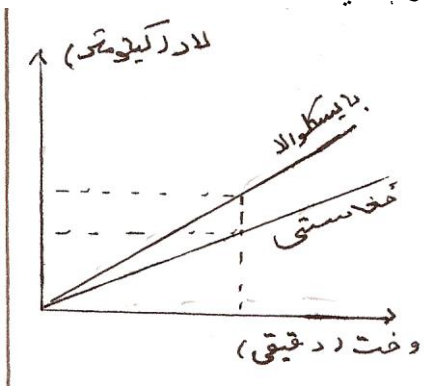
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړی کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړی کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقیقه (په t ښایو لار) کیلومتر(په s ښایو د لارانځورونی څخه په ګراف کی څرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دی. دا کلیمي به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کی پوره تر څیرني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې ښایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعآ زیاتیز یا مثبت دی ورته دپلي چی په lیې ښایو وهلي لار هم ټاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي.
وهل شوې لار :
د بایسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$
د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقیقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبیونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9,2)$$

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی،که په څټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څټوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریيلګنونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه x = (bel پس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه (۹ .۲) لريد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریيلګې x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د 2 . II بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x-b_1x-a_2x+b_2x=c_2-d_2-c_1+d_1;.....(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کیڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی لیکو

$$A=a_1-b_1-a_2+b_2;a=c_2-d_2-c_1+d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x=\frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x=\frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x-b^2}{a}-\frac{a(b-ax)}{b}+\frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x-b^2)-a^2(b-ax)+b^2=a^2b$$

$$a^2bx-b^3-a^2b+a^2x+b^3=a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx+a^3x=a^2b+b^3+a^2b-b^3$$

$$a^2(ax+b)=2a^2b$$

د $a\neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a+b\neq 0,(a\neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیوني یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتي بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګې به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتې بیلګې راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون (x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c =1 یواځې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: 6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$
$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$
$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لایني مساوات (۹ . ۱) بنسټېنه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر ریيل کې x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د څیړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي ځل لپاره څلورې برابرون یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلورې(مربع) غړي لري. د یو له بل ځلولو یا ضربولو وروسته څلورې غړي له منځه ځي. یو لاینی مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x-\frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3}-\frac{a^2x-\frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc}+\frac{abcx-\frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2}=0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\text{.....} = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یي له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي .

بیلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټیك د دې نیونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.:

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.....2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.....2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$.....x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره(دا د نیونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کښونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

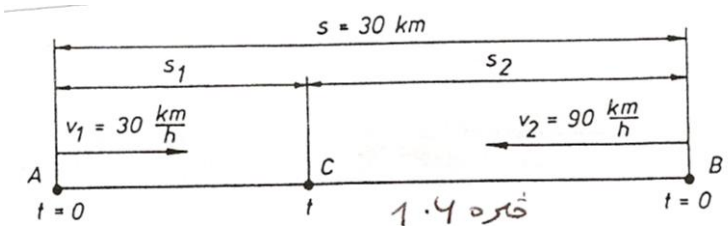
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه Aاو B یو له بل km30 لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانګړني لپاره څیره وکاږئ



پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1) یا د Bلریوالي وC څخه(د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدونې یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \quad , s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x$, $4x = 30$ $x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5$ km , $s_2 = 22$, 5 km , $t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x$, $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22,5$

$s_2 = 22,5$km , $s_1 = 7,5$ km , $t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90$ $x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4$, $t = (1 /4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30 /4$ km=7,5km

$s2 = 90\ t = 22,5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د 0,25 h= 15 min حرکت وروسته په 7 , 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځې هلته هدفمند دی چی $|x| = 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $|x| = 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $|a + b| = c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $|a + b| = c$ لپاره یواخنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیرنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټیک د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.گ.خ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 .5^3 .a . b^4 .c^3$

$2880a^3bc = 2^6 .3^2 .5.a^3.b . c$

$5400\ a^2b^2c^2 = 2^3 .3^3.5^2.a^2b^2c^2$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6.3^5.5^3 .a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2\cdot\left(b^3c^2x-\frac{1}{a^2}\right)-225b^3c^2\cdot\left(a^2x-\frac{1}{b^3c^2}\right)+120ab^2c\cdot\left(abcx-\frac{1}{ab^2c}\right)=0.$$

د نوکانو یو له بل څلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په څلونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2}+\frac{b}{a^2bx+b}=\frac{a^2bx}{a^2bx-b}+\frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2}-1$$

ټیک د دې نیونو سره صدق کوي: $|x| \neq 1 / a^2 \ , \ ab \neq 0$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$a^2(2bx-1) + b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1) + b^2(2ax-3) - b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 + b^2$$
$$2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $a \mid= b$ او $ab \mid= 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنسټیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي (یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

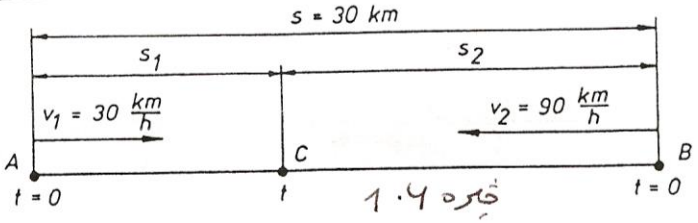
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \mid= (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. د B څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , s_2 = 90\,t \ , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونو پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولی s_1 , s_2 او t دی د دري مساواتو سره چی حل به یی په ۶ الف او یا همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s_1 , s_2 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x , 4x = 30$$

$$x = 7,5$$

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, \quad s_2 = 22,5 \text{ km}, \quad t = \frac{7,5}{30} h = \frac{1}{4} h = 15 \text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, \quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22,5,$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, \quad s_1 = 7,5 \text{ km}, \quad t = \frac{22,5}{90} h = \frac{1}{4} h = 15 \text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\,x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{4} h = 15 \text{ min}.$$
$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7,5 \text{ km},$$
$$s_2 = 90\,t = 22,5 \text{ km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴ . ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$

b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$

d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$

b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$

d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات يا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ . ۱ – که د يوه ګڼ څلور څله او ۱۴ زياتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۲ – که د يوه ګڼ څلورڅله او ۴ زياتون ددې ګڼ او ۱۴ زياتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د يوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلورېرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چی ۴ تري کم شوی او ۱۱ لاس ته تري راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی. لکه د د ي ګڼ دري څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی. لکه ددې ګڼ دوه څله او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ څله او د ۵ کمون یا توپیر چی ددې ګڼ په څلور څله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱. ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته تري راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسی په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر یی ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یي ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کی بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښی په څیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه تاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی تاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چې درې میاشتی پخوا یې خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اوپاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي:« که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا ټوپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه څله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګونی مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷ . ۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متآسفانه په افغانسان کی د فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) 1000Ω , b) 2000Ω

یو مقاومت 4000Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) 12kΩ, b) 300Ω وي؟

. ۲۱ . د دري غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) 12kΩ

ب) 300Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چی د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري. څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته څومره لویي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسږکلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په څغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني څغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره څغاستی د منډې ډله په څغاسته پیل کوي. څغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو څومره والښاي او که څو ګڼونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت (بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب پوهیږي، یعنی n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n برسیره پر دې تعریفوو: !0 = 1

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی (n+1)! = n!.(n+1) لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله ووني،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف n! : د n = 5 لپاره په دې ډول دی: 5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120

ب : په دې ډول دی : 0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48

پ: په دې ډول دی: 5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20

ت : په دې ډول دی

(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)

= n.(n+1).(n+2)

ټ: داسی دی

2.n! = 2.(1.2....n),

(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله ووني یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیدایښتي یا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد ښایي،په مات لاندې کې د لومړیو k پیدایښت یا طببعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور n - 1 ، دریم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك دیوه بینوم پوتنځ یا توان شمیري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د یوا-
ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځله ووني ویل کیږي.

بیلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ، } \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k}=0$

که n یو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنۍ وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سړی د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کښې اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده یا وینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په ځیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سړی د دوه توکو (ګنونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښایي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیداینتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په ځیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$(x+y)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x+y$$
$$(x+y)^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=\ldots\ldots\ldots\ldots x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=\ldots\ldots\ldots x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=\ldots.x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ...1 , 0

د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، k = 0 , 1 , ..., n کی ولاړ ضریب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
څیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډی د اویلر سومبول استعمال په څیرولیکل شي نو لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{0}{0}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}\ldots\ldots$$

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}\ldots$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلي ښکاریږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیخینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال دریګوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیخینته سره مساوي دي. داچی هر کو- ایفیخینت ورباندې پورته کوایفیخینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)

د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په استعمال

د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبښونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$
$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتې) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرې د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی درې ډولونه توپیروو(Komplexion هم ورته وایي)، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیرل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱۱ پرموتیشنPermutare

(لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن (ځاي بدلون)بي له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی چي n غړي په یوه د زړه پورې ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځایبدلونونو په مانا ده

بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

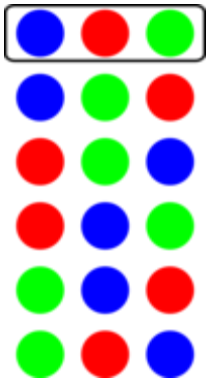
uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج گ دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجگ	تاجگ	جاتگ	گاتج
اتگج	تاگج	جاگت	گاجت
اجتگ	تجاگ	جتاگ	گتاج
اجگت	تجگا	جتگا	گتجا
اگتج	تگاج	جگات	گجات
اگجت	تگجا	جگتا	گجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلگی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کټ مټ« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړۍ مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکښطبعی يو په بل پسي). دبيلگي په توگه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنگه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، گ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاگج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاگ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته دري غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوبونه : د پوره ایندکشن له لارې :

دایندکشن پیل : $P_1 = 1! = 1$: $(n = 1)$

د ایدکشن نیونه : $P_k = k!$: $(n = k)$

د ایندکشن غوښتنه : $P_{k+1} = (k+1)!$: $(n = k+1)$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\ (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شی) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي
. د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... +n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړوa , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b درې ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

aabbb	ababb	abbab	abbba
baabb	babab	babba	
bbaab	bbaba	bbbaaa	

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګڼونه دn ایندکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو !n پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره !ni پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په n_i! باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دویم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، $n \le k$) هر له k غړو یوځانګول (یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړو a,b,c وارییشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

ab ba ca
ac bc cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دي

dab cab bac abc

dac cad bad abd

dba cba bca acb

dbc cbd bcd acd

dca cda bda adb

dcb cdb bdc adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریيشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51 41 31 21 12

52 42 32 23 13

53 43 34 24 14

54 45 35 25 15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برااابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو وk -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په

ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریشن لپاره، په

دې واریشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0

غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو د k+1 ټولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $V_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یود k+1 ټولګي واریشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ (3= n = 4, k = 2 , k) باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واریشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واریشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واریشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ca ba aa

cb bb ab

cc ba ac

۲ - څلور غړو a , b , c , d د دویم ټولګی واریيشنونه د تکرار سره دي:aa

da ca ba

db cb bb ab

dc cc bc ac

dd cd bd ad

۳ - د دري غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واریيشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتیب له کیڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

311 211 111
312 212 112
313 213 113

321 221 121

322 222 122

323 223 123

331 231 131

332 232 132

333 233 133

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د وارییشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$ د تکرار سره دی: $V_{W_n}^{(k)} = n^k$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n وارییشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی وارییشنونه د nk وارییشنونو چی k0 – امه درجه وارییشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوي ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ وارییشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د وارییشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د وارییشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د دري غړو و دریم ټولګي ته ض واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه دري او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دی

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) یو کمبنیشن هغه دی چی هر یو له k غړو یوځاي درووولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریيشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د دري غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

bc ac

ac ٠٠٠٠٠

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دی

cd bc ab

bd ac ٠٠٠٠٠

ad ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کیڼ لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اورییشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو !k پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي

له دې امله لرو : $C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه نوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ ټیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چی یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰۰۰۰۰۰

cc bc ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

cc bc ac ۰۰۰۰۰۰۰۰

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندې لیکنه باید له کیڼ لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکیڼ لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دځلورو غړو و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریییشن،کمبینیشن ټولکه

دااا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریییشن	پرموتیشن
د تول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو واریییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریییشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیری

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړی

a) (n+1)! / (n-2)! b) (2n)! / n! c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیری!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیری!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وګنی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a +4y)^3$

d) $(x/2 -y/3)^4$ e) $(2 \quad a +3 \quad b)^2$ f) $(x^2 +y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړی!

a) $(-1+a)^2 -(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2 -(a^2-b^2)^2$

c) $(\quad ab -1)(-a- \quad ab) +ab$

۷ – د بینوم په یو څل یی بیل (تجزیه) کړی!

a) $25a^2 + 10 ab + b^2$ b) $(49a^2 -42a + 9$

c) $169a^2 -130 ab + 25b^2$ d) $2x+2. \quad 6xy +3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳ ،۴ پرموتیشنونه په لکسیکوګرافي نظم ولیکی!

ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دې چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر » دی.

۹ – الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟

ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟

پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.

ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګنی!

۱۱ – څومره تنظیم شوې جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د

الف) بې له تکرار

ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرڅونو چي هریو لس سوري لري، جوړ د16 څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درڅ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،

الف)۲۰ي له تکرار

ب) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځاي نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خاممواد جوړ نلونه . د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وټړل شي کی یواځې پنځه ځایزه نمره موجود وي؟

څومره تلفون ټړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یي د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .»
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چی n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چی m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چی د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چی د حالتونو توپیریدنه یې اړیینه ده٠
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي٠
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څیړې پوهیږو، چۀ دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا کۀ غواړی انګریزي یې لاین نومولی۰ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره یې توپیر وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو۰

۱۱ . ۱ . لاینیز برابرون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سرهکیدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کیدی شي چی ناپیژندونکی لویې x او y په خوښه ریيل ګڼونه وي چی یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت : x او y واریابلی(اووښتونکی یا لنډ: اووښتونې) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاینیز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څیره په y,x کواوردینات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 یا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي یا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نایژندونکو یا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ددې مسیئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبیونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډیرې ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)\,x + c/b \qquad (11.2)$$

کیدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډیرې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځی یعني د اوبیونې ډیرې یا اوبیډیرې L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)\,x + c/b \} \qquad (11.3)$$

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډیرې ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی یا حل y = -(a/b)x+c/b ،د خوښی x ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعاً کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندي کی موږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددي په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:

لاندي برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دي مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

x_2 په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; .....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د 0 = b =0.x2 +0.x1) 0 = b = a2 =a1(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په څټوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چی د ناپیژندونې یا مجهولی

x_i

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I.....a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$

$$II.....a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;.....(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چی په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

∞^1

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چی فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي.

۲ - یو د بل پر ځاي کیښولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .

دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.....a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;.....a_{11} \neq 0$$

$$II.....a_{22}x_2 = a_2,.....a_{22} \neq 0;.....(11,9)$$

دلته نو

$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانی ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښانی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چی برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چی II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي ایښوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.....;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$
$$-(7/2)x_2 = -7$$
$$x_2 = 2;\Rightarrow$$
$$x_1 = 2-(3/2).2$$
$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کیښولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي۰

$$II':;.....x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$
$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$
$$7x_2 = 14$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (2-) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2x_1 + 3x_2 = 4$$
$$(-2)II: \ldots\ldots\ldots -2x_1 + 4x_2 = 10$$
$$I - 2II: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7x_2 = 14$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_2 = 2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I: \ldots\ldots\ldots\ldots 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3.II: \ldots\ldots\ldots\ldots 3x_1 - 6x_2 = -15$$
$$- -$$
$$2.I + 3.II: \ldots\ldots\ldots 7x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots = -7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته ایښول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي ایښوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چی
x2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
x1 = 2 - (3/2)x2 او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,
په II کی ایښول کیږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8
8-6x2+6x2 = 8
0.x2 = 0 x2
په خوښه له II' لاس ته راځي
I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
2.I 4x1 + 6x2 = 8
II 4x1 + 6x2 = 8

II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
x1 = 2-(3/2)x2
x2په خوښه
په همدي ډول:
x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,
دلته x1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

I' : $x1 = 2 -(3/2)x2$

II' : $x1 = 5/2 -(3/2)x2$

$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$

$0.x2 = 1/ 2$

دا یو په ځټوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: I' : $x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

II': $4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$

$8 - 6x2 + 6x2 = 10$

$0.x2 = 2$

دا مخامخوالی یا په ځټوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$2 . I \quad 4x + 6x = 8$

$II \quad 4x + 6x = 10$

$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$

په ځټوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بنه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$

$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $|a| = |b|$ وي، یعنی $|b| = a$ او $|b| = -a$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود تړلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له (a+b)/ 1 او II ځل له (a-b)/ 1- څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له (a+b)/ 1 او IIله (a-b)/ 1- سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمور د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

1. a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

2. a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په څټوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی
3 . $a=b=0$
دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلونې په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$
او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$

$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

$37u=37$

$u=1 \Rightarrow v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5 , y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چی(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجټري یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، تري کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنټري(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجټرې یا قطر د توکو ځل ځخه د څنګ یا فرعي دوه کونجټرې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بنه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماځخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا مټه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 ولیکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه یا نمره دې) ١١،١٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ١١ . ١ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو یا ضریبونو دیترمینانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم (11 . 8) یواځنی ټاکلی ځواب لري
x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)
په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شمیرل کیږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ١١ . ٢ :
که په (١١ . ١٣) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي
0 = D (11,18)
او د کم له کمه یوې ډیترمینانتD1 یا D2 لپاره په (11 ,14) یا (11 , 15) باوري وي
D1|=0 \/ D2 |=0 (11,19)
نو (11 . 8) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

D=D1=D2=0 (11 . 20)

نو یو له برابرونونو I یا II زیاتي دی) دواړه برابرونونه یو بل ته اړ دی یا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعمالیدلی شي یا کار ترې اخستل کیدی شي.

د ښوونبیلګو په څیر دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بیلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سیستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په دیترنمنانتو ځواب کړي، که چیرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بیلګه ۱۱ . ۶ : د سیستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس یواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0;\ D_2=\begin{vmatrix}24\\ 1-5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بیلګه۱۱ . ۷ :

د سیستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}23\\ 46\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}43\\ 86\end{vmatrix}=24-24=0;\ D_2=\begin{vmatrix}24\\ 48\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بیلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بیلګه ۱۱ . ۸ : د سیستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0 له شمیرلوکیدی شي، چی تیرشو)

بیلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بیلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسیستم ته د دیترمینانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شمیرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $|ab| = 0$:

دلته دیترمینانت $|D| = 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}.\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله)

دوم ۱ حالت $|a=0,b=0|$: دلته $D = 0$ مګر

$|D1 = D2| = 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

۳۱۲ ۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي څیړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که 0 =| a22 وي، نو لاس ته راځي:

الف) x2=a2/a22

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

۲ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که 0= a22 او 0 = a2 وي، نو ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – څیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b2 |=0 , b22 = 0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریگوډیخیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پرېږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 - (3/2)\ x2 = -1$

بیلگه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (څیړو. دلته د لمړۍ لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی گورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلگي په توگه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
	1.	2	1	-1

اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
	2.	-1	2.	2

څلورم وایانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
	2	1.	-1	1.	-1

دریم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
	2.	2	2.	-1

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوې، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

x2= -7 / (-7/ 2) =2

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ (له II' لرو: x1 = -1
ت) له I څخه لرو: x2 = 2
واریانت (امکان) ۳
ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي
ب) له I' څخه دې x1 وشمیرل شي
پ) له I' لرو x1 = -1
ت (له II لرو x2 = 2
واریانت (امکان) ۴
ا) له II دې x1 و شمیرل شي
ب) له I' څخه دې x2 وشمیرل شي
پ (له I' لر x2 = 14 / 7 = 2
ت) له II لرو:
x1 = -5+2.2 = -1

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګټونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره هره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځي په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a) I x1 + 2x2 = 3 b) I x1 + 2x2 = 3
II 2x1 - x2 = 1 II 2x1 - x2 = 1
III 3x1 + x2 = 2 III 3x1 + x2= 4

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b څخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په a) کي :1.1+3.1 = 4 |= 2, په b) کی : 1.1 + 3.1 = 4

نو سيستم a) ځواب نه لري او سيستم $\hat{b}$) يواځني ټاکلی ځواب لري

يعني x1=x2=1

بيلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بيلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوات اوس د ګاوس د الګوريتم له لارې ځواب کوو.

a) x1 x2 RS b) x1 x2 RS

I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پيژندلکيږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته يا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' څخه لرو:

x2 = 1 او له I څخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاينيزبرابرونتسيستم د دري ناپيژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ يو برابرون د دري ناپيژندونکو سره

مو ږ يو مساوات د دري ناپيژندونکو سره تر څيړني لاندې نيسو:

a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 (11 . 21)

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

I . a11=a12=a13=0 (11 . 22)

دلته x1 , x2 او x3 يو له بل پوره خپلواك ټاکل کيدی شي. ويل کيږي چی ناپاي ډير ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

2. a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 (11 . 23)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 |= 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. (بي د ټولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې a11|=0 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3) په خوښه x1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

a11x1+a12x2+a13x3=a1 (11,25)

a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,25)

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په ځیر وي (ناپاي ډیر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ځټوالي یا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم (د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې (x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپاي ډیر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

	x1	x2	x3	RS		
1	1	1	3	I	x1+x2+x3=3	
				II	x1+2x2+3x3=6	1 2 3 6

II'=II-I 0.x1+x2+2x3=3 0 1 2 3

له II' لاس ته راځي

x2 = 3 -2x3

له I څخه لاس ته راځي

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
x1=x3,x2 = 3 -2x3, x3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیرو

I a11x1+a12x2+a13x3= a1 (11 . 26)

II a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,26)

III a31x1+a32x2+a33x3= a3 (11,26)

له دې سیستم څخه کیدی شي چی د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,27)$$

لاندې سړی لاندنی رییلګې پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_{1}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});\ldots\ldots\ldots\ldots(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه) 28. 11 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او متې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{22} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجې دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 , Dx2 = D2 , Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; .....(11,30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$x1=D1/D$; $x2=D2/D$; $x3=D3/D$ 11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di \neq 0$ کم له کمه د یوه i (i = 1,2,3) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندي ځواب شي (وړاندیز دی چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندي سیستم

I $x1 \quad -x3 = -2$

II $x1 \; +x2 \; -x3 = 0$

III $2x1 - x2 = 0$

کی دی

$$D = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 11-1 \\ 2-10 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 11 \\ 2-1 \end{pmatrix} = -1-0-1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -20-1 \\ 01-1 \\ 0-10 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 01 \\ 0-1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1-2-1 \\ 10-1 \\ 200 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 4:$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10-2 \\ 110 \\ 2-10 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 11 \\ 2-1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} &I \quad x1 + x2 + x3 = 0 \\ &II \quad x1 \quad -x3 = 0 \\ &III \quad 2x1 + x2 \quad =1 \end{aligned}$$

کې دی.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 |=0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11 . 34) \\ &II \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

بنسټیز حالت : که $a11|=0,b11|=0$,$c11|=0$ وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3|=0,c33=0$ وې، نو یو په څټوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.

- که $c33=c3=0$ او برسیره پر دې $a11|=0, b11|=0$ وي، نو x3 په خوښه ټاکل کیدی شي او x2له II او x1 له I چی x3 ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b2|=0$, $b22=b23=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11|= 0$ کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي، او x1له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی x2 او x3 ته اړ (په واك کی یا تابع) وي (ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دري ناپیژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دی
لومړی پل (قدم) : نیسو چی په (11 . 2 6)کی a11 |= 0 دی. دا د نمري بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11.35)\\ &II \quad b22x2+b23x3=b2\\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

دویم پل (قدم) : د b22 |=0 نیوني سره په II' او III' باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی II' بي تغیره پریږدي اولهIII' دا b32/b22-ځله د II' کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11.37)\\ &II \quad b22x2+b23x3=b2\\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

x3 = c3 / c33

x2=(1/b22)(b2-b23x3)

x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سيستم ۰(مقايسه بيلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوريتم سره په لاندي ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0	2	6	

x3=6/2=3

x2=2……

x1=-2+x3=-2+3=1

بيلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوريتم په مرسته په لاندي ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III"=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سيستم نه اوبی کيږي يا حل نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۰: (مقايسه يا پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I x1 +x2+x3 =3

II x1+2x2+3x3=6

III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندي ډول د ګاوس په الګوريتم اوبيونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III" = III'-II'	0	0	0	0

x3= په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ . ۳ په خوښه ډير مساوات ، په خوښه ډير ناپيژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاينيز سيستم برابرونونو په لار ښونی پيل کوو m (برابرون د nناپيژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1.....(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
.....
.....
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پریږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ . ۳ . ۱ د n - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};.....(11,38)$$

لاندې سړی لاندني رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکی i - مه لیکه او k - م درځ ، مټه یا ستن (لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیټیږي .

په ځانګړي توږه د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn (11 . 42)

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

D |= 0 (اصلي حالت) (44 . 11)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. (11 . 45)

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

I $x_1 + x_3 = 0$

II $2x_1 + x_2 + x_4 = 0$

III $x_2 - x_4 = 4$

IV $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}\right|=4-2+2(-2+4)=6$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2
x3=1/2(4+3.(-2))= -1
x2=0+(-1)(-2)= 2.....
x1 = -(-1) = 1 .....

بيلګه ۱۱ . ۲۳:
دا برابرونسيستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4
II x1 -x2 -x3 +x4=0
III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل يا اوبيونه ی نه لري، لکه د ګاوس له شيما څخه چی ليدل کيږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په څټوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I	x1 +x2 +x3 +x4= 4
II	x1 -x2 -x3 +x4= 0
III	3x1 -x2 -x3 +3x4= 4
IV	x1 +2x2 +3x3 +4x4=10
V	3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیونې لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي٠

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

I a11x1+a12x2+a13x3= 0.....

II a21x1+a22x2+a23x3= 0 (11. 46

III a31x1+a32x2+a33x3= 0……..……

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

x1=x2=x3=...=xn=0 (11. 47)

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي بيلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژين برابرونسيستم

I x1 +x3=0

II x1 -x2 =0

III x1 +x2 +x3=0

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه x1=x2 =x3= 0 لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګين مساواتسيستم

I x1 +x3 = 0

II x1 +x2 = 0

III x1 +x2 +x3 = 0

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1	x2	x3	RS			
0	0	1	I			1
0	II			1	-1	0
0	III			0	1	1
II'=II-I				0	-1	-1	0
III' = III				0	1	1	0
II'' = II + III'				0	0	0	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx2=-x3 او له I څخه لاس ته راځي x1=-x3نو x1= -x3نو X3 په خوښه او x2 = -x3 نوx3 په خوښه

تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعي قانون او همداسې د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$

b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$

b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$

d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$

b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$

$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$

$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$

$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$

$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a)

$3x_1+4x_2 = 8$

$5x_1-2x_2 = 9$

$7x_1-8x_2 = 10$

b)

$6x_1-x_2 = 1$

$9x_1+2x_2 = 5$

$3x_1-x_2 = 1$

c)

$5x_1-3x_2 = -3$

$3x_1+5x_2 = 5$

$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$

$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d)

$2x_1-3x_2 = 10$

$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$

$x_1-1{,}5x_2 = 5$

$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a)

$x_1+x_2 = a$

$ax_1-x_2 = b$

b)

$3x_1-2x_2 = 5a$

$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2 + ab + 3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شميرنه

۱ . ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورئ کمون(تفريق) يې په ۱۰۰ لوييږي، په داسې حا لې چې ضرب يې په۳۲۵ زياتيږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه يا زياتون دومره لوي دی، لکه د تفريق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزيات شي او له دويم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفريق يې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویی په 2 لویوي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسی لاس ته راغلی ګڼ څان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره څل یا ضرب شي، نو د څلونو زیاتون یی 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یی د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چی له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال، چی 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللاري لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له څوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد څوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د څوي عمر لري اوس پلار او څوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 2 , 40 الماني مارکه (DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا دری؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په څټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کې څومره واټن تې کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپیري یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکې. د واړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ؟ ی ؟

۲

۲ . کرښیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 18 \\ x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6{,}6 \\ x_1 - x_3 &= 2{,}6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ 3x - 2z &= 1 \\ 20y - 16z &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 3x - 4y &= 3 \\ 5y - 6z &= 9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x + 24y - 42z &= 30 \\ 4x + 8y - 14z &= 10 \\ 6x + 12y - 21z &= 15 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z &= 20 \\ 2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z &= 5\tfrac{2}{3} \\ 1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z &= 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - y &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x - z &= 1 \\ -\tfrac{2}{3}y + z &= 2 \end{aligned}$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2c \\ x_1 + x_3 &= 2b \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(a + b) \\ x_1 + x_3 &= 2(a + c) \\ x_2 + x_3 &= 2(b + c) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax + by - z &= 1 \\ ax - by + z &= b \\ -ax + by + z &= a \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښي زياتو مجهولو سره

a) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

b)
$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 1$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10$
$6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$

d)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1$
$6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$

b) $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

c) $20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$
$-12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$
$8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

d) $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته $F (x)$ په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي وییینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره یې مساوات باوري کیږي .ددې په څټ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونې بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څټ يا برعکس (12 . 2) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی يا اوښتونی دی.

د (12 . 2) برابرون يا مساوات اوبيونې يا حل ته د برابرون د (x) F صفرځای يا د مساوات F(x)=0 جذر يا ريښه هم وايي.

هغه برابرون يا مساوات چی په (۱۲ . ۲) فورم نه دی ورکړ شوی کيدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګې په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

f(x)=g(x) او $\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونډه (اختماميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريکو (numerischen Methoden) متودونو يا وريسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينيز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي يا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چي اوبيونې يی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح يا روښانه ، افاده شوی، اکسپليڅت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم يا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 .....(12,3)$$

دلته په (12 . 2) کی يو نالاينيز بلواک يا – فنکشن (x) Fد يوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره يواځی رييل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چي ځلونه يواځي رييل وي، يواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کيږ اړخ ته n - م درجه پولينوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 .....(12,4)$$

ته ټول ريشنل (- ريښتونی) بلواک يا فنکشن هم وايي، ځکه چی د ريشنل شميرله عمليو زياتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واريابلی او ai د رييل ضريبونو، ځلونو يا فاکتورونو باندې د ويش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټوليز برانرون يا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 .....(12,5)$$

کيدي شي په bn|= 0 ويش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاينيزفنکشن يا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واريابلي يا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمير کارونې يا عمليي او بالاخره دويش کارونه وکارول شي يا اجرا شي او رييل پارامتر (Parameterپه شميرپوهنه کي ثابت (همغۀ او يا مرستندويه لوي ده) تشکيل شي نو فنکشنونو ته بيا مات ريشنل فنکشنونه ويل کيږي. دا تل د دوه پولينومونو يا ريشنل فنکشنونو د ويش په څير انځورورِ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; .....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) يا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا بايد په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره يواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چيرې د نالاينيزبلواک يا - فنکشن جوړولو کی د ريشنل شميرعمليو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) يا پوتنځ کول او جذر نيولوته هم اجازه ورکړل شي نو بيا سړی د الجري فنکشنونو څخه غږيږ يعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ويل کيږي او (۱۲ . ۲) برابرون بيا الجبري برابرون بلل کيږي ، دا ډول مساوات هم کيدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ريښه يا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د G(x) افادې يا وييني له منځه وړل کيدی شي, که چيرې څوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو يا معلومو بيلګوځيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځيړنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څيړني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلورۍ(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی څلورۍ يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,8)$$

په b2 يې ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,9)$$

ددې حل د څلورۍ پوره کونې يا مربعتکميل څخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2_1}{4}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a1/2]^2=(a1^2/4)-a0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a1^2/4)-a0>0 \iff a1^2-4a0>0 \iff a1^2>4a0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلورې یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه ریيل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونی څلورې برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;\ldots\ldots\ldots\ldots(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې ټیك یو ریيل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ /2;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیونې (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;...../12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};.....(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};.....(12,21)$$

نو لاندې جمله یی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلورې یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیونې فرمول) د څلورې- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د څلورى - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسى د (۱۲ . ۸) اوبيوني وي نو باوري دى

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2;.....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2);.....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کى سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کى باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کى لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کى باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجييز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,25)$$

چيرته چي x1 او x2 د څلورې برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راهڅول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره رييل اوبيو څخه خبرې وکړو(وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

څيرو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ریبلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی یې لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)

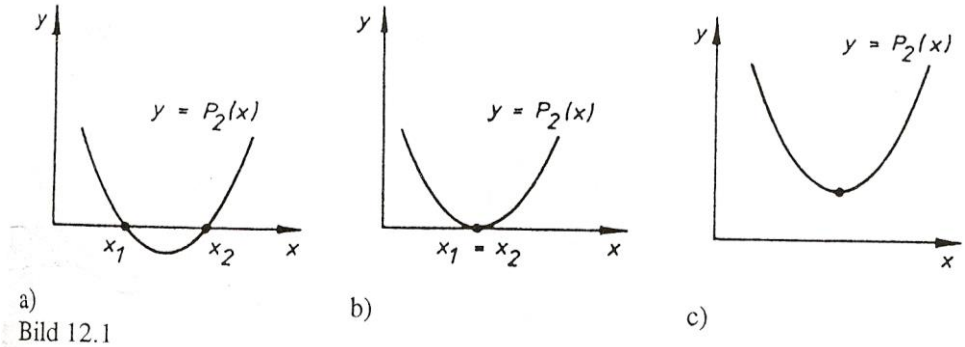


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پوري به په دري ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، ۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1$, $a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندي فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندي لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز ریبل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱ څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی
$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$
د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کيږي، که يو ځلی a0 اويا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$
$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ ځلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه مخ ته نه دي پراته

که يو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو بايد په دې بڼه واړول شي.

بليګه ۱۲ . ۴ :
$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$
$-x^2-2x-4=x^2-8x$
$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$
$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول يا ناپيژندلی يا اوړيدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو بايد په صفر ويش ناممکن يا ناشونوالی په پام کي ونيول شي.

بيلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$
ټيك هلته مانا لري، چی وي $2x^2+2x-4 |=0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چي ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$
$$-x^2 = -4$$
$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ،

چی په څلورۍ يا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د څلورۍ برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي٠ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- مي درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; .....(12,28)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$
$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; .....(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دی
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو څلورى - يا مربع برابرون دی، چې د جملې ۱۲
. ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري x = 0 چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته
کيږي x3 = x4 = ... = xn=0

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; .....(12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت
- وي

n = 2k (12 . 33)

او فقط (ټيك) ځله ووني يا کوايفيڅينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; .....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; .....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلورۍ برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12,36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,38)$$

ټولې اوبيونې وڅيړلی شي، چی د k = 1 لپاره ساده دی، د k = 2 لپاره(بيکوادرات برابرون) (د څلورۍ څلورۍ يا د مربع مربع) يا د رييلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توګه ستونځی لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کيدی د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورۍ برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بيرته بدلون(-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$x^2 = 4$, $x^2 = -9$

لاندې اوبی يا حل لري

x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چې بيرته په څلورې برابرونونو بد ليد لې شي

يوه د نالاينيزو مساواتسيستمونو لړۍ کيدی شي چې په څلورې برابرون يا مربع مساواتو بيرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلګې راوړو.

بيلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12 , 39)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12 , 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، $y= 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی ايښوول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$
$$x^2 +1-2x+x^2 = 13$$
$$2x^2 -2x -12 = 0$$
$$x^2 - x -6 = 0$$
$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4+6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$
$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاينيز برابرون لاندې اوبيونې لري

$x1 = 3 , y1 = -2$ او $x2 = -2 , y2 = 3$

بيلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سيستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی يواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \qquad (12,43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ايښول کيږی يا ځای په ځای کيږي

$$1-ax+x=x(1-ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري يا په څټوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » $0 = 1$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) څخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \qquad (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه بايد په پام کی ونيول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a > 4 \quad \text{او} \quad a < 0 \qquad (12,46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \qquad (12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \qquad (12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم *لرو* $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
x1 , y1 او x2, y2 .
د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کټمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کټمټ دی (له دې امله په څټوالی یا تضاد) .
نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګيري کمپلکس اوبيونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots(12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots(12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي يا راټوله توګه لرو:
برابرونسيستم (۱۲ ، ۴۱) د a = 0 لپاره اوبی نه لري، د a < 0 , په همدې ډول a > 4لپاره دواړه ريل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د a = 4 لپاره رييل ډبل ګڼلي اوبی (۱۲ ، ۵۱) او د 0< a <4لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات يا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملی د دريمی درجی مساوات لپاره ځيړو.
د دريمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنسټيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بيړه جګيږي او بيا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کميز يا منفي هم وي نو y به د لويو x- ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچي x^3 د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول
x->-o د y -> -o
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت يا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څيړل کيږي .د يو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کيدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود يوx - ازښت) چی خورا لوي هم کيدی شي) ، د کوم لپاره چی $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ بايد د مساوات (۱۲ . ۵۶) يو رييل اوبی پروت وي.

په ډيرو لاندې بيلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائيلي حلونه پيدا کړي، په عمومي توګه بيا هم بايد وشميرل شي.

ددې لپاره يو څو بيلګی:

بيلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:
د پولينوم
$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12$ (12 , 58)
لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي
X = 0 , 1 , -1 , 2
Y = 12 , 6 , 12 , 0
په دې توګه يو رييل صفرځاي پيدا شو
x 1 = 2 (12 , 59)
په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شيما په بنسټ يو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بيا د مټ(توان= لوړولو ته اړتيا نه پيدا کيږي او پولينومونو د فنکشن ارزښت ساده پيدا کيدی شي يا شميرل کيدی شي

بيلګه ۱۲ . ۱۱ الف:
دا برابرون
$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$ (12,60)
لاندې نورمال فورم يا -بڼه لري
$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0$ (12 . 61)
د صفرځاي پيداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتيب شي وشميرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:
X = 0 , 1 ,1 / 2
Y = -9 , 16 , 0
نو
x1=1/2 (12 , 62)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) يو رييل صفرځای دی

بيلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$x^3-9x^2+27x-27=0$ (12 , 63)

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رييل صفرځاي لاس ته راځي

x = 3 (12 , 64)

بيلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$x^3 -9x^2 +27x -27 =0$ (12 , 65)

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

x = 1 (12 , 66)

په ټوليزه توګه کيدی شي په کلکه څرګند شي ، چی د دريم درجی برابرونسيستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل يو رييل اوبی ياحل x1 شته دی. دا يو واقعيت دی چی بي له ښوونی يی ليکو، چی دا پولينوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاينيز فاکتور (x - x1) ويشل کيدی شي او يو دومه درج پولينوم ترې لاس ته راځي:

$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه يو رييل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.....(12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورې برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون درې اوبيونې يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12,68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

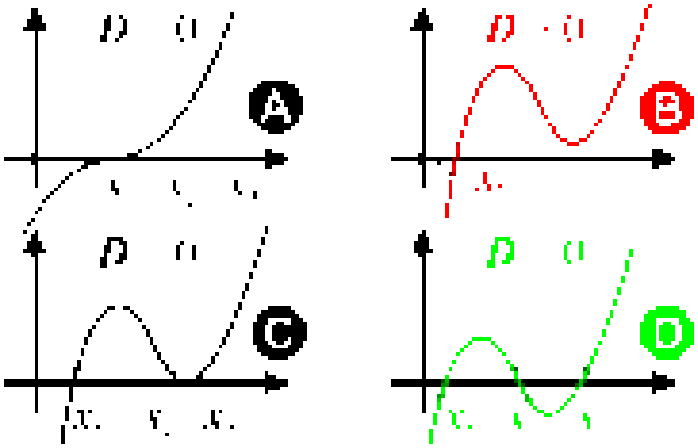
۲ - يو رييل حل x1 او ددې سره مختلف يو ډبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه کونجوګيرت کملکس اوبيونې يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د ښي اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی يا اندول له لارې کيدی شي د دريمی درجي پولينومو لپاره د وييتا جمله تصديق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دريمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبيوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$
$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$
$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بيلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبيوني ولټول شي.

بيلګه ۱۲ . ۱۰ ب :
(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-(ويش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$
$$..\underline{x^3+2x^2}$$
$$.....-x^2-4x+12$$
$$.....\underline{-x^2+2x.....}$$
$$.....-6x+12$$
$$.....-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$
$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره
$x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$ ،
او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x +12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو , $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب x1 = 1 لري، او داسی دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه رییل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی ځنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي. دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي رییل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} = 16; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \ldots\ldots\ldots (12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3 = 16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;.....(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5;2x+19=5;x=3;.....(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت x = 3 د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل x + 19 2>0 دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښايي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دی چي ګوندې ټیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دی .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلورۍ یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلورۍ یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ریښی نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,.....(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.....(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون يا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1,$.....(12,83)

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|=0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د x = 3 لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله x = 3 د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د x2 = 1, او x3 = 0

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱) اوبی حل x = 3 (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سيتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي يا بيايي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چې په مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضريبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضريبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

---

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسی نيسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زياتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نوميږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د دري يو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيوګڼونو د مربعو زياتونونه دا ګڼونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لس څله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم Ω 30 لوييږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V (وولته) شپانونګ په پنځه امپير (1,65A) کوچنی شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چی مقاومت يی Ω 60 يو له بل توپير لري، يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 لري. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درينيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلوونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلوونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو, نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې څغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي څغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دی دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچينه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نزدې وو؟

ت) د ګادي يو لاين د موټرڅغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزيدلی. د يوه موټر څغاستي پيل کې د يو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشينونه په همغه جګوالي دي، که موټرڅغاستی منظم تعجيل او يو تعجيل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او 72 km / h دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لايپځيږ څخه د ديساو په لور بايسکل څغليدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له ديساو څخه د لايپځيږ په لور راتلونکی بايسکل څغاستی سره مخامخ کيږي. ورستنی ۱۰۰ دقيق د مخه ديساو ته راځي لکه دوم ولايپځيږ ته. د ديساو او لايپځيږ ترمنځ لريوالی يا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجيز دريګوډي کې ، کاتيټې څانونه داسې يوبل سره نيسي لکه 3:4 ، هيپوتينوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتيټې څومره اوږدې دي؟

ب) د يوه ولاړکونجيز دريګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتيتو زياتون يې ۱۷ سانتيمتره اود يوې کاتيټې او هيپوتينوزې زياتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د يوه سمکونجيز (ولاړکونجيز) دريګوډي کاتيټې څومره لويې دي، که د هغوي زياتون ۴۲ سانتيمتره وي ، د دريګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د يوه ولاړګوډي نيمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نيمي اوږدوالی ۱۰ سانتيمتره لويږي. د سمکونجيز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاراړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګردۍ کې دننه څاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څوندي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمې باید څومره لوي، که له دننه منځشوي مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یو ې ګردۍ نیمې (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچینې نیمې څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمې څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشډکی یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . رېښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مسااتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – رېښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا ځلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\dfrac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{7}-\dfrac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\dfrac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\dfrac{16-\sqrt{x}}{2}-\dfrac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\dfrac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\dfrac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\dfrac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ – ريښه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\ (b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\ (d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \dfrac{b}{\sqrt{b - x}}$ b) $\sqrt{x + a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x + a}}$

c) $\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x + a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$
$\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$
$x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$
$x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$
$xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$
$x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$
$y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$
$y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا - مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسڅندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیوني په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وځیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

د بنسټ b = 10لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\,\mathrm{og}_b\, x = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بنې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\ f(x) = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,5)$$

دلته f(x) یوه الجبري وییئه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$(همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.....(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګوری، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.....(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log\left[(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلورې یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $b = b^1 = \frac{2x+3}{x-1}$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل ویینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $(b+3)/b-2)>1$ وي.

د $b>2$ یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-3>-2$ دا د ټولو b لپاره پوره دی

د $b \leq 2$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $3 \leq 2$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې ویینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه y1,y2,.. په (۱۳,۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳,۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳,۹) کی کیښوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په څلورۍ برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y1 = 2$ او $y\ 2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$x_2=10^{-1}=\frac{1}{10}$ او $x1 = 10^2=100$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چی د اصلي ماتلاندې $(\lg x-1)(\lg x+1)$ سره څل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$, \ 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورۍ بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \ , \ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وییني یا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13.16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دي.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې څلورې برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي.

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کی کیدی شي چی ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډول مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشي.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} . a_2^{f_2(x)} .....}{b_1^{g_1(x)} . b_2^{g_2(x)} .....} = c; .....(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - ..... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چې د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وییه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 ; .....(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو ..... $y_1, y_2, y_3;$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3..... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \;;\; i = 1, 2, 3 ..... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1}-1} = \sqrt{2e^{x^2-1}-1} .....(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} .....(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};.....(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

ټيك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad .....(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاريتمولو څخه تعقيبيږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پيلبرارون پوره کوي٠

برسيره پر دې بايد وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره يوه د مساواتو ټوله لړی حل کيدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاريتم يوځاي رامنځ ته کيږي.

بيلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بيلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاريتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کيږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلورې برابرون يا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بيا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتريکي- يا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څیره لري

$$\sin x=a\ ,\ \cos x=a \qquad (13.29)$$

$$\tan x=a\ ,\ \cot x=a, \qquad (13.30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $1 \geq a \geq -1$ باور ولري، نور ارزښتونه $\sin x$ او $\cos x$ نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشمیرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

cos a F sin a F

د (۱۳،۳۰) لپاره

tan 1/x a tan a F

دا چي $\tan x$ او $\cot x$ پریودې همداسی 180^oلري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180^oلري د(۱۳ ۳۰) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x_0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشمیرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ...-3,-2,-1,01,2,3,...;.....(13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^o + k.180^o$$

د کونجونو فنکشنونه $\sin x$ او $\cos x$ پریودې(تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;.....(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;.....(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;.....(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;.....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,\ 833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k\ .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیرونی سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k\ .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59{,}999988° = -60° = -1{,}04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1{,}04718° + k.3{,}14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4{,}843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11{,}666677^o = 11{,}67^o = 0{,}203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11{,}67^o + k.180^o = 0{,}203675 + k.3{,}14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چی تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13.37)$$

دلته کیدی شي چی $f(x)$ الجبري او یا ترانسڅیندنته افاده وي‌که بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a , \cos y = a \qquad (13.39)$$

$$\text{Tan } y = a , \cot y = a \qquad (13.40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې y3, y2, ,y1 , ... وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیونې (حل) سره

$$y_k=30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 =y_k$ اوبونې (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k +120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x_k} = 3y_k +120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګې په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad \text{usw.}$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۴۲ . ۱۳) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۴۲ . ۱۳) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x),....) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۴۲ . ۱۳) ، (۴۴ . ۱۳) سره ځان په ریښه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1+y^2-2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۵۰ . ۱۳) او له دې سره سم برابرون (۴۹ . ۱۳) تل پوره دي. د دې په څټ یا خلاف y1 فقط د (۵۰. ۱۳) حل دی ، که د ریښی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یواځي هلته مخ ته پروت دی، چی cos x>0وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۵۱ . ۱۳) سره برابرون (۴۶ . ۱۳)حل یا اوبی شي او

حل یا اوبښونه یی په (۴۹ . ۱۳) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \; k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کیښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کیښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ \ y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60^o \\ 180^o \\ 300^o \end{Bmatrix} + k \cdot 360^o = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتني سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$

c) $x^{\log_5 (5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$

c) $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3-x)}$ d) $x (\lg 5 - 1) = \lg (2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2 [2 + \log_3 (x + 3)] = 0$ b) $\log_5 [\log_2 (\log_4 x)] = 0$

c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg (x + 1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a (a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5} (a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1}-3^{x-1}=7^{2x+3}-3^{x+1}$ b) $2^{x+1}-3^{x}=2^{x+3}-3^{x+2}$

c) $3^{2x-1}-5^{3x-2}=3^{2x+1}-5^{3x+2}$ d) $5^{2x}-3\cdot 5^{x}+2=0$

e) $5^{4\sqrt{x}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x}}+5=0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-2=0$

g) $3^{x+1}-2=9^{x}$

h) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

i) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$ j) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}$

k) $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$ l) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3}+2\cdot 5^{x-2}=5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}}+0{,}5+9=28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x}-17\cdot 2^{-(x+2)}+1=0$

e) $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$ f) $12^{2x}\sqrt{3}-\sqrt[x]{3}=27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}}-7\cdot\sqrt{3^{x-60}}=162$

i) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

2.8. a) $\frac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x+1}-1}=\frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x}-4^{x}}=6$

c) $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x}=x$

۳ – گونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x=\frac{1}{2}$ b) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x=\frac{2}{5}$ d) $\tan x=-1$

3.2. a) $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=0{,}309$ b) $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{10})=0{,}809$ d) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}=\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 7x=0$ l) $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x-3\sin x\cos x=0$ b) $4\sin^3 x-8\sin^2 x-\sin x+2=0$

c) $\tan^3 x+\tan^2 x\ \ 3\tan x-3=0$ d) $\tan^3 x-\tan^2 x+\tan x=1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0$ b) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$ d) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$

e) $1-\sin x=\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2})$

g) $1-\cos 2x+\cos 6x-\cos 8x=0$ h) $\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0$

i) $\cos 4x+2\cos^2 x=0$ j) $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$

k) $\cos 3x+\sin 3x=\cos x+\sin x$ l) $\sin x\cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$

m) $\sin x+\cos x=\frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x}=1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښی<, ≤,> او ≥ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه رییلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښایي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګندي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c,$ (14,1)

$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$ (14,2)

$a:b<b:c$ (14,2)

$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c$ (14,3)

$a:c> b:c$ (14,3)

$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c$ (14,4)

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په څټ کیږي یا که غواړی برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $3 -> 4$ -
ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو < سره باور لري دا په دې مانا چی $a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$a.b>0 \Leftrightarrow$ (14,5)

$\Leftrightarrow a:b>0 \ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0),$ (14,5)

$a.b<0 \Leftrightarrow$ (14,6)

$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0).$ (14,6)

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توییریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0)$ (14,7)

$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0)$ (14,8)

۱۴ . ۱ الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :
یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د ریبلګڼونو R برخه ډیر) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښې یوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کې دننه وي یا خوندې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لري، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیرې په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \le b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول ریبلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیرې
11. $\varnothing$ تشډیرې

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیرې هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیرې ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notationپورته ته الترناتيو یا بدیلي لیکنښه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$$

$$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$$

$$[a,b[= \{ x \mid a \leq x < b \}$$

$$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\leq b\}$

کښ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\geq a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیښ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : $\{x$ د ګنکرښی ټکی دی$|x\}=(-oe$، $oe)$)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنسټیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 =1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژندڼیرې ده:

$D1 = [\ 2\ ,\ oe)$

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژندڼیرې ی ده: $D2 =(-oe,7\ )$

د برابرون دپیژندڼیرې لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty,7] = [2,7]$$

لاندې څیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)

$D2=(-\infty;7]$

$D1=[2;\infty]$

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځورېږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$ دواړه خواوې په -4 ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$

د اوبیونې ډیر یا اوبیډیرې : $L=(-5/2,oe)$

که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ښی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوڅډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نمایینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x <2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty)\bigcap(-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو رښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د x - 2 < 0 له امله د (۱۴ . ۳) له مخی پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چی په دریم حالت کی راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبیدیریو ټولنی څخه ټول اوبیدیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چي لرو: 2< x < 3
په لاندې بیلګو کي نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 2x+4|=0له مخی، دا په دې مانا چی x |=2 د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره (2x+4)<2

سره سم یواځي دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

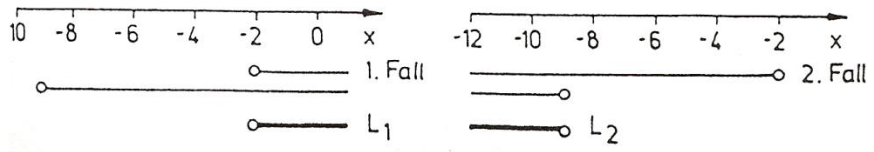
$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څیره ۱۴ ۱ الف: دا څیره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیرې روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰



a) b)

Bild 14.1

څیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګڼونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیرې روښانه کاږل شوي دي۰ ، که څیره مې ونه کاږله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپیر لري۰ دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$
;

$$x^2 - 5 < 0$$
;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$
;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي۰ ښول کیږي، چې اوبیدیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره اړیین شرایط کوم دي۰

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري۰ که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ 1.9:1(اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست یا اوبیدیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2(اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرني پل کي دې دې ته پام وي ($\sqrt{x^2} = |x|$.) د روانه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کي $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کي $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$\iff \quad x \le 15, \quad 2x - 5 \le x + 10$$

$$\iff \quad 2x \ge 5 \quad \iff \quad x \ge \frac{5}{2} \qquad 2x - 5 \ge 0$$

(i) که وي $2x - 5 \ge 0;$ نو دی $|2x - 5| = 2x - 5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \le x \le 15.$$

(ii)نو دی $2x - 5 < 0.$ $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$\iff \quad -3x \le 5 \quad \iff x \quad \ge -\frac{5}{3}, \; -2x + 5 \le x + 10$$

$$\iff \quad 2x < 5 \quad \iff \quad x < \frac{5}{2}. \; 2x - 5 < 0$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \le x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیرې له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړی

$$\frac{3}{x+5} < 2 \quad , \qquad (i)$$

$$\sqrt{x^2+x+2} > x \quad , \qquad (ii)$$

$$|x+5| > |x-2| \quad . \qquad (iii)$$

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x|=3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د ځل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کومولہ مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6>\vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم ښهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x<-6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6, 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله وونې یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3) \ldots (mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6) \ldots (mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$:

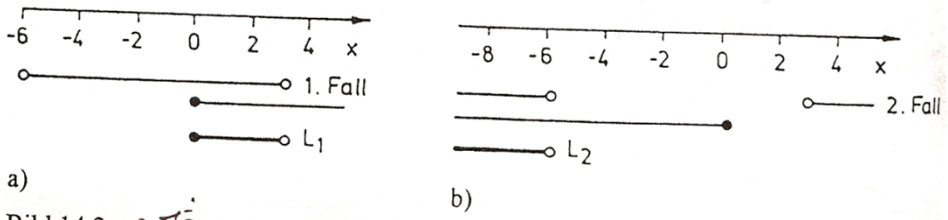


Bild 14.2 خاکره

د څلورې برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلورې ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلوونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنخښې په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرۍ : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کږې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\ne\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \ \wedge\ x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \ \wedge\ x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرۍ یا حل ست: $L=[-5,\frac{2}{3}).$

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیرۍ ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: Lدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I.-2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II.\frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بنی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

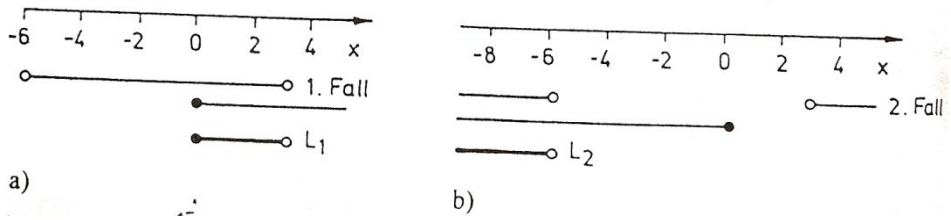
.....I.....II

$1.Fall^{(1)}$	$-2x+2<4x-10$	$4x-10<3x-3$
$x\in(1,\infty)$	$\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$	$\Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$
	$L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2.Fall^{(2)}$	$-2x+2>4x-10$	$4x-10>3x-3$
$x\in(-\infty,1)$	$\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$	$\Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$
	$L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$
	$=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$=(1,7)$

د LI او LII غوڅډیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیډیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرې د یوه اوبیډیرې $R^2 = R\times R$ برخډیرې ده، چې د هوارې په ځیر د لیدنې کیدې شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیرې په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کې مساعد دې. په دې برخه کې به موږ یواځې د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0 , <0, \leq 0) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a,b,c \in R$

سره د شرایطو a|=0 v b |=0 سره سم تر څیړنې لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښې برابرون ax+by+c=0 لاس ته راځي، کومه چې د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چې ټیك په یوه له دې دوه هوارو کې باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کې ښوول کیږي. د اوبیډیرې په هواره کې د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدې شي. که په نابرابرون کې برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کې نه وي ځاي شوي، نو راټولونکې کرښه د اوبیډیرې پورې اړه نه لري او کیدې شي یواځې ټوټه ټوټه کرښې (پرې لاین یا غوڅکرښو) په ځیر په نخښه شي، لکه څنګه چې د ډیرې ګرافیکي ښوونه ورځنې یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرې پورې اړه لرونکې برخې په ځیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

2x+5y-10>0

که نابرابرون د y په لور اوبې شي، نو دې ته ورته نابرابرون y>-(2/5).x+2 لاس ته راځي، کوم چې په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دې نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چې د کرښې y=-(2/5).x+2 څخه پورتنې نیمې هوارې ټول ټکې اوبیډیرې L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کې تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کې د مخه نیسي چې b|=0 دې. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دې، چې د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیرۍ پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه څیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیرۍ ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیرۍ ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه ي د یوګونو اوبیډیریو غوڅډیری نیول کیږي یا جوړیږي.

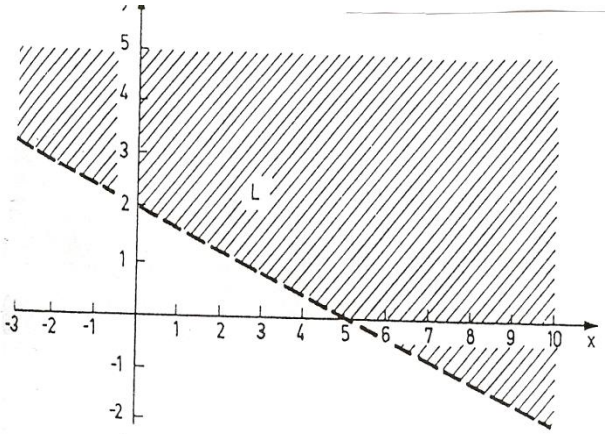


Bild 14.4 څیره

بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . 2x+y<6

II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (0 , 1) کیښول شي، کوم چی د په څټوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبیډیرې LII کې نه دې پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیرې L ښايي چې له دوه نیمکرښو بندیږي یا له دوه نیم کرښومحدودیږي.
د وړاندیزارزښت لري چې د تمرینونو په خپلواك کار کولو کې د غوښتونکو اوبیډیریو L د یوګونو نیمهوارو غوڅډیرې حتي تر غاړې پورې رنګینه یا کرښې کرښې راوکښل شي، چې په دې ډول یې یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

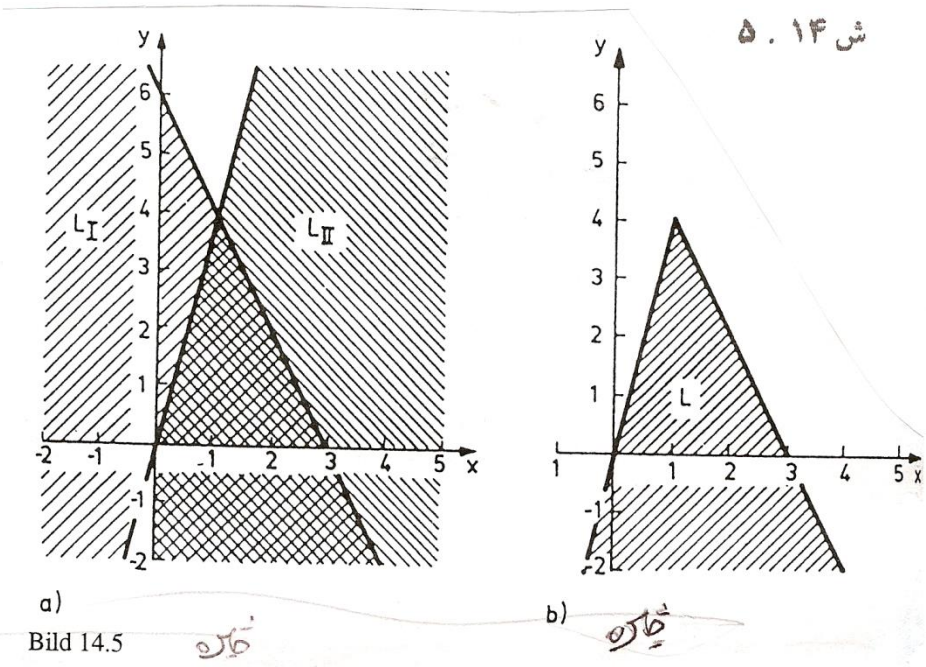


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$ II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبیډیرې په ش ۱۴ . ۶ کې انځور ۱۲ کرښې
د پورته نابرابرونسیستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کیږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه یې اوبی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

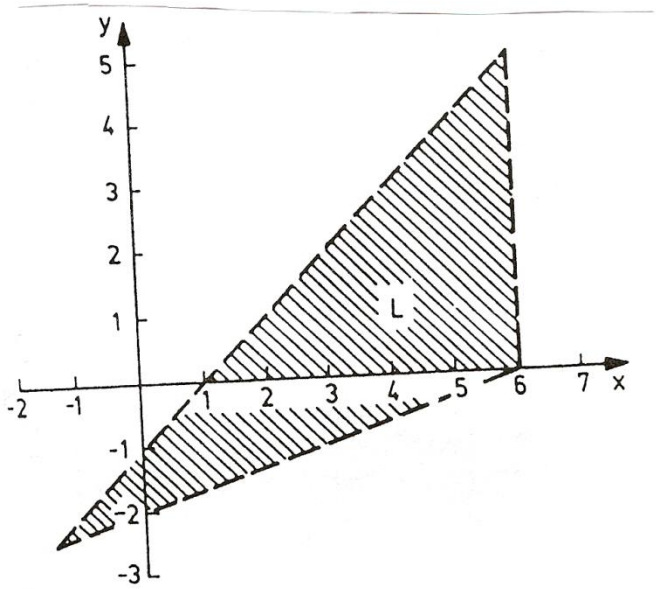


Bild 14.6 خاکره

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه برارون یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په ځیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه ځرگنده ده چی د یوه رییل گڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینخیپ کی دوه حالتونه توپیریږي.
داسی دی:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)

$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$|a . b| = |a| . |b|$

$|a : b| = |a| : |b|$ د $b| = 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یواځي د اوبي په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیونې اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا اندول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوڅتکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$|x+1|=(x/2)+2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

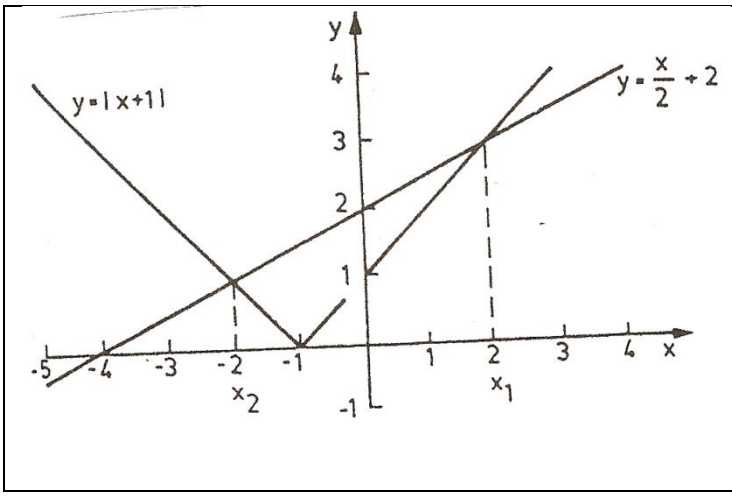
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د بنی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.

اوبی : کیدی شي په څ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګڼوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|1-x|-|2x+3|=1$

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د $x<1$ لپاره $|1-x|=1-x$

د $x>1$ لپاره $=-1+x$

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د $x>-3/2$ لپاره $|2x+3|=2x+3$

د $x<-3/2$ لپاره $=-1x-3$

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر نظر

	$x<-3/2$	$-3/2<x<1$	$x>1$
$\|-1+x\|$	$1-x$	$1-x$	$-1+x$
$\|2x+3\|$	$2x+3$	$-2x-3$	$\|2x+3\|$

له دې امله د برابرون اوبي کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_1=-3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_2=-1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبدیږی : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کیڼ اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تیرشوي شمیرنو په ډوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

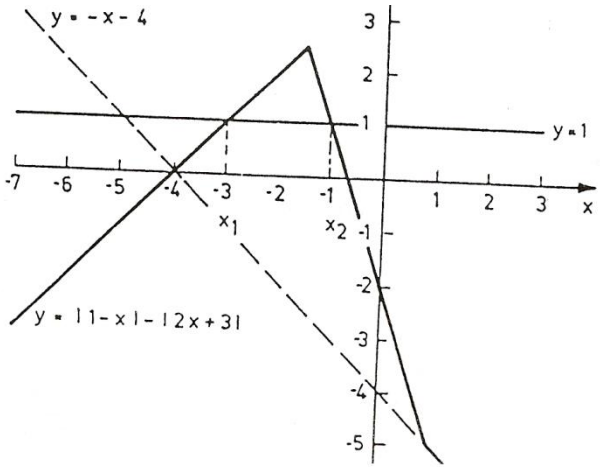
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي څیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کږي ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$ لپاره ریښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرښتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په څیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی څیره (شاید داڅیره هم څیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه څیره باید ریشی او یا راغلی وي، یا راغلې وی.



که د مطلقه ازښت نخښی په یوه څلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي څیرنی چي په برخه .۱۴. ۱ . .۲ کی تر څیرني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5,\infty)$, $x_2=3-\sqrt{7}=0,35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

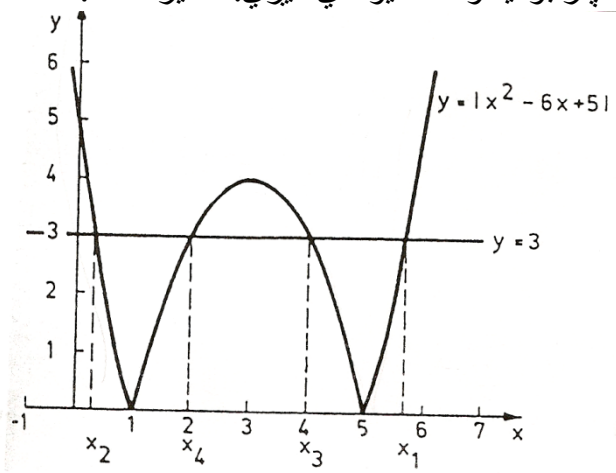
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1,5)$, $x_4=2 \in (1,5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L=\{3-\sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

څیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کین لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. څیره ۱۴ . ۹



څیره ۱۴.۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبدي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دی ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$د تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x) > 0$ او یا $T_i(x) < 0$راکوي، یعنی د دوه توکو د واریشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰) قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې $x_1,x_2,x_3,.....$ ولرودی شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

$T1(x)=1-x, T2=(2x+1)$

سره، په لاندې $4 = 2^2$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3) = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3) = 1 \Rightarrow x_2 = -3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3) = 1 \Rightarrow x_3 = -5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3) = 1 \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د$x1=1, x2 = -3$لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرون ونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دی

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : $|7-3x|>2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \square \quad (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بې له ارزښتنخښنی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5	
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لارښودوي، چې په دې حالت کې کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چې: L1 = O/

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow x-5 < x+1 \Leftrightarrow 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \Leftrightarrow x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \Leftrightarrow -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21|=x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow x^2-4x-21<24 \Leftrightarrow x^2-4x-45<0$

$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21<24 \Leftrightarrow x^2-4x+3>0$

$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا ټوټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګنلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1 \leq x < 1$	$x>1$
$\lvert 1+2x \rvert$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff$

$x \in [-2 , oe)$

$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$

دویم حالت $x \in [-1/2,1)$:

$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$

$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو ست(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۳ ، ۱۴) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c)$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بنی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1|>x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1<0$ لپاره $= x + y -1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff -x-y+1>x-2y-4 \iff -2x+y+5>0$

$L1=\{(x,y)|-x-y+1 \geq 0 ,-2x+y+5>0\}$

دوم حالت: $x-y+1<0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff x+y-1>x-2y-4 \iff 3y+3>0 \iff y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0\ ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیډیرې دوه نابرابرونونو غوڅډیرې ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیډیرې بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیډیریو ټولنډیرې ده۰ (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وینې د (۱۴ . ۱۳) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

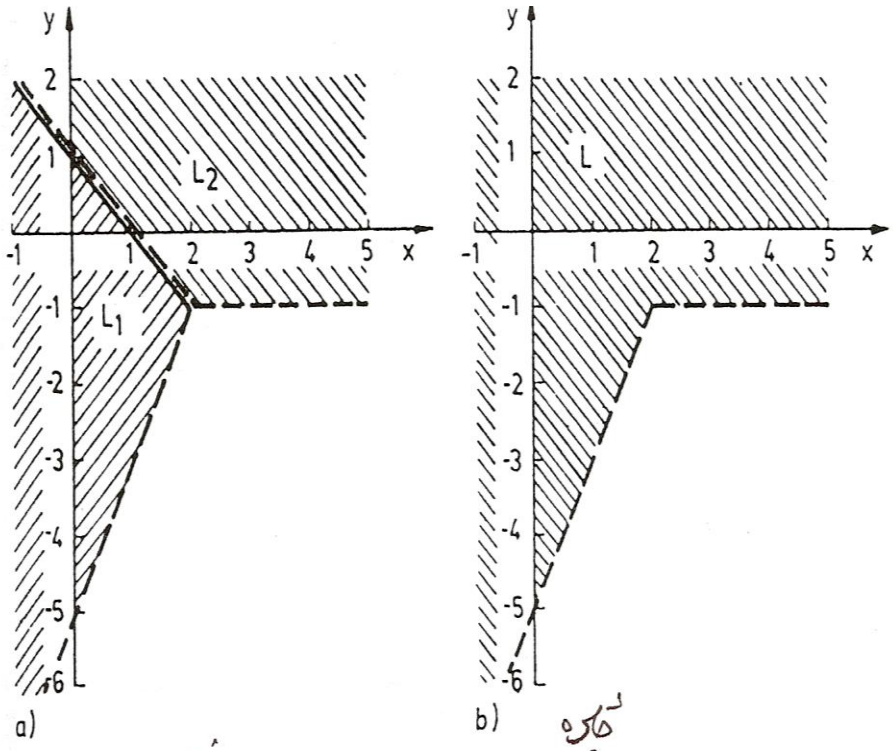


Bild 14.10 څیره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرې پیدا کړې

1. a) $8x - 3 < 2x + 9$ b) $5 - 7x \le 3x - 10$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$ d) $3(3x - 2) \ge 4(3 - 2x)$

e) $\frac{8x-5}{5} \le \frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9} + 6x \ge 2(\frac{5}{6} + 3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$

2. a) $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$

b) $(8x - 9)(3x + 2) \ge (2 + 7x)(2 + 3x)$

c) $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$

d) $(5 + 2x)(7 - 5x) \le (10 + 4x)(2 - 3x)$

e) $x^2 - x - 6 \le 2x + 4$ f) $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$

g) $x^2 + 3x \ge -2x - 6$ h) $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$

3. a) $\frac{3}{2x-4} \le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x} \ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$ d) $\frac{5x+3}{x} < -2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2} > 5$ f) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1} \ge 12 - \frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4} \le \frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x} > \frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1} \le \frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x+1}{x-2} > 4$ f) $\frac{x-3}{1-6x} - \frac{2x+1}{4x+3} \ge -\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} \ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x - 3)(3x - 2) < 0$ b) $(x + 3)(7 - x) \le 0$

c) $x^2 + 4x + 3 \ge 0$ d) $x^2 - 8x + 7 \le 0$

e) $x^2 + 4x + 5 < 0$ f) $x^2 - 6x + 10 > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرې وټاکې

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x - 3) \ge 2(x - 3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x + 2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x - 1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاډېرې په کارتیزي کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکي انځور کړئ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاډېرې د شمیرلو او همداسې ګرافیکي لارې پیداکړئ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرې پیدا کړې

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرې په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړې او ا نځور یې وکاږې

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی رییل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د رییلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیری چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x اوy د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیخیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیخیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیخیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیخیت شنینیزه بڼه (ایمپلیخیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیخیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیخیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	....-2	-1	0	1	2 ....
Y	2	0,5	1	1,5	2 .....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X	....-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y	3	2	1	0	1	4	9 ...

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

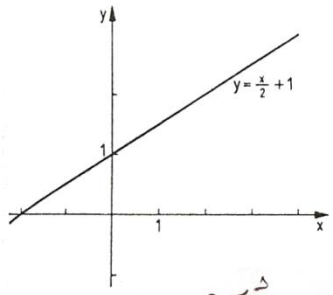


Bild 15.1 خیره

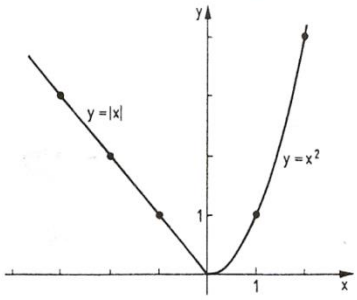


Bild 15.2 خیره

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او دواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

خیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال]a,b[کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د $x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال]-a,a[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

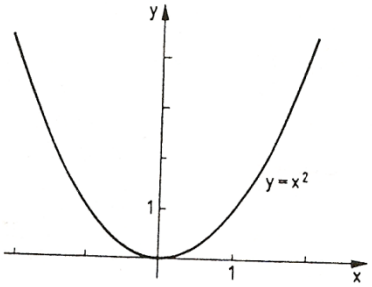
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

$(-x^3) = -x^3$

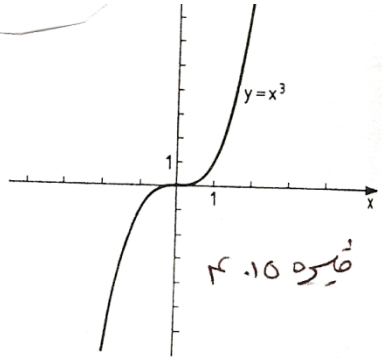
بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$(-x)^2 = x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۱۵. ۳



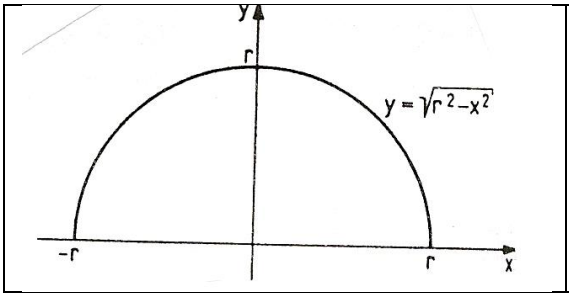
څېره ۱۵. ۴

د بیلګې ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پېژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ ټیك هلته په D (پېژندېږی ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$	

پېژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کږې د غوټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګې ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\, x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

بیلګه. ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم څیر ۱۵ . ۶)

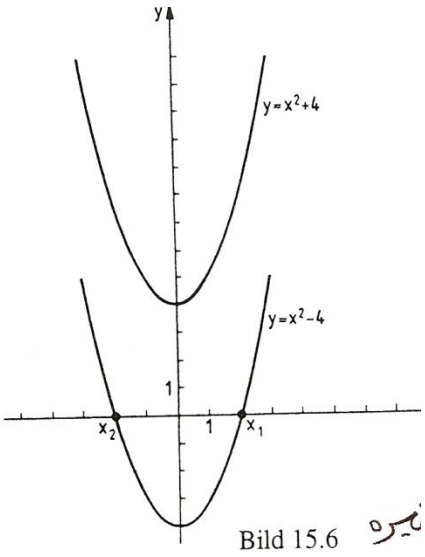


Bild 15.6 څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (= y f(xیو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په څټکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی. د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی څیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده.

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

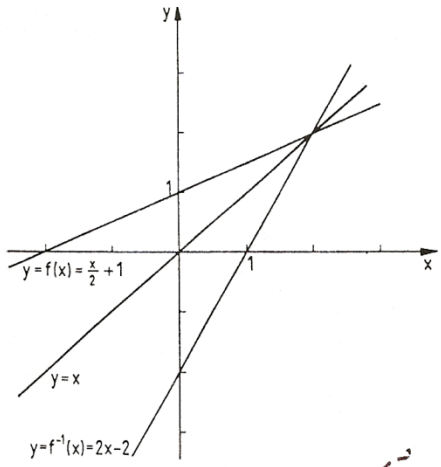


Bild 15.7a څاګره

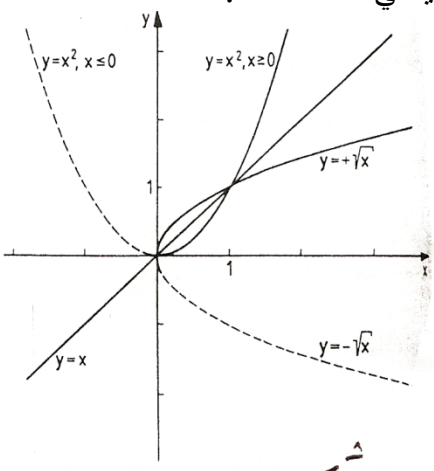


Bild 15.7b څاګره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$,

څیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ $[0,oe]$= پورې دوه $x \in D$ $= [-oe,oe]$ اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونګی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq 0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y = x$ -دی. (څیره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او څیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خویونو له مخی وڅیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وڅیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړډوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n \in N;\ a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینی فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

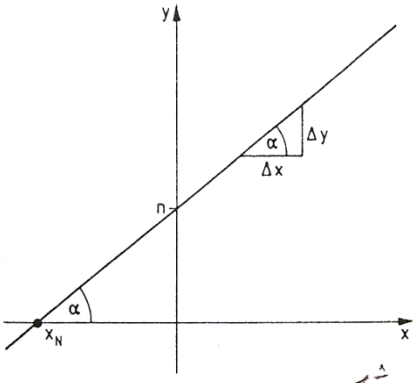


Bild 15.8 څاګره

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غړځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه تولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \neq 0 \qquad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q)$ (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورې - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px \ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \qquad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(خ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0, c = 0$)

د ککرې (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پړسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

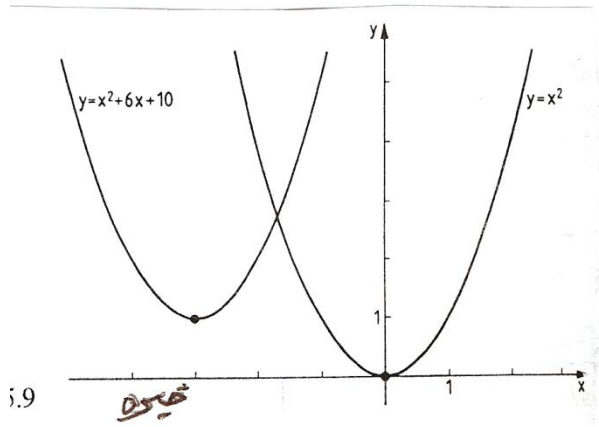
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ش . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرې (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



ش.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)

دککرې کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چې $a = -1/2$ دی، نو پارابول پړسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

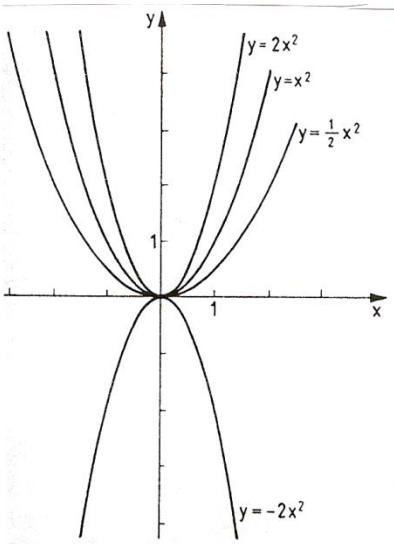


Bild 15.10 ثمره

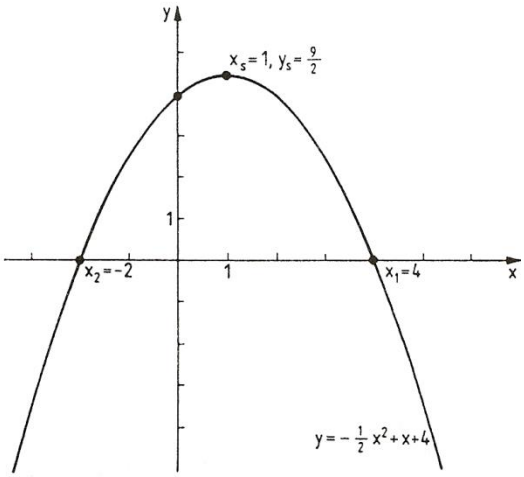


Bild 15.11 ثمره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیوني دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (څ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون ریبل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بنې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 لهx1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

خلونه یا ضریبونه	a_2	a_1	a_0	
منځنی ځلونه	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	
منځنی زیاتون	a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنی د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).
اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0=f(5)$

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لایني فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f(x1)=0$ چی د $(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلوری – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لایني فنکشنونو د ځلونې په ځیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5=(x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2,,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیڅینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ درې صفرځایونه
$x_1=x_2=2, x_3=-2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5\ 2)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-$
$2i\ )(x+1+\ 2i\ )$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چې د دفیرنځیالشمیر له مرستې کار واخلو ، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګې په توګه دا مانا لري چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره f(x)تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe دx -> ±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};.....(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که n ≥ m ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د x = x0 لپاره یو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:
$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$
د $x=x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب) که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چی د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کږه داسيمپتوتي کرښې $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: ($y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ریيل اوبيونه نه لري) او د $x \to \pm oe$ لپاره د x- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

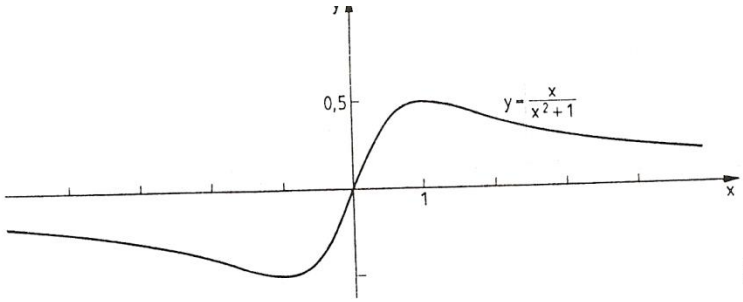
ب: ($y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x-3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3=0$) په $x1=-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3=-2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x=-2$ اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کړې د تعریف ډیری($D = (-oe,oe$، د ارزښت ډیری($W=(0,oe)$او ګډ ټګی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره($D = (-oe,oe)$ او($W = (-oe,oe)$ دي او (1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰



څیره

Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

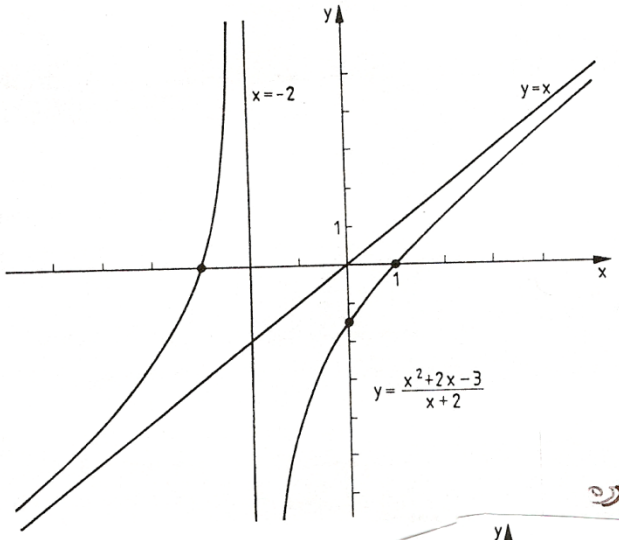


Bild 15.13

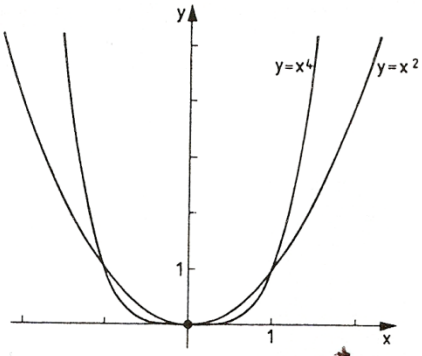


Bild 15.14a

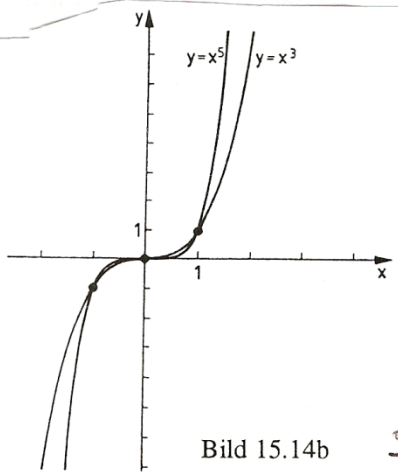


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) n لپاره ټولی کږې د پیژند ډیري
D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)
؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(-1،-1) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

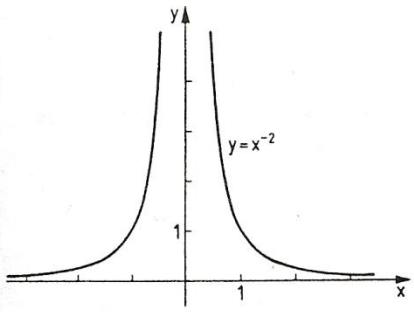


Bild 15.15a

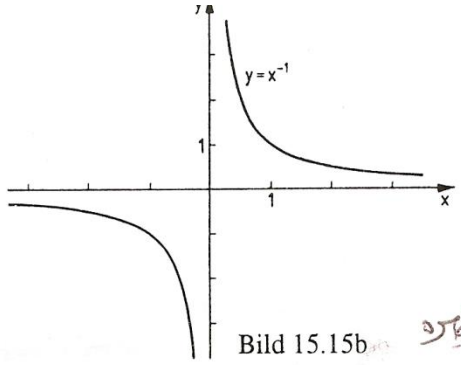


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کیڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او ریښه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځټ بیرته پوتنځ فنکشن دی.

تولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګنونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha}\ ,\ \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}\ , x \geq 0$$

لاندې چپه - یا پر څټ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\ , x \geq 0$

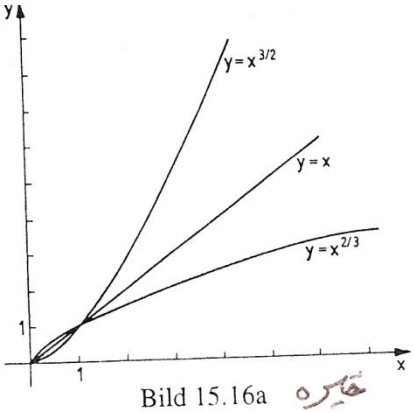


Bild 15.16a خیره ب)

(څیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x},\ x > 0$
څیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2\ , x > 0$$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یواځی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرځټ فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفډیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په څټ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندډیری($D = [0,oe$ کی پر څټ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرځټ فنکشن د $D= (-oe,0]$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a > 0, a \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جگ(لنډ »جگ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جگ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

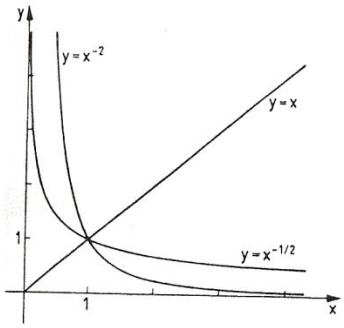


Bild 15.16b

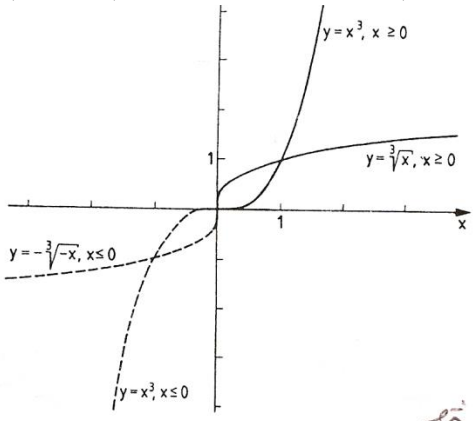
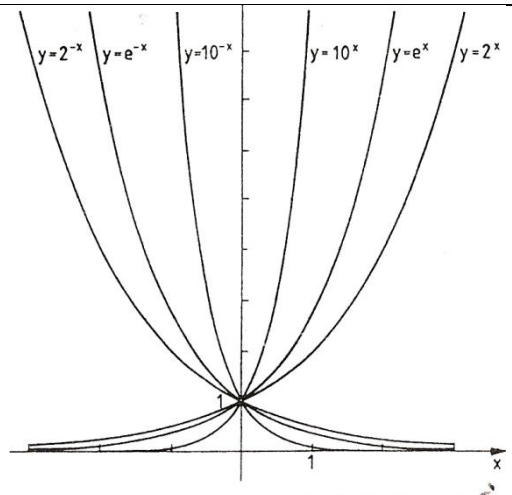


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پېژندېږی(D=(-oe,oe او ارزښتېږی(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو گډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجگیدونگی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي . د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلگې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10) په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي	 Bild 15.18

پېژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څټ فنکشن دی

$$y = \log_a x \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګوری) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندډیری ($D = (0.oe$ او د ارزښتډیری($W=(-oe,oe$ لري.

د $y = \log_a x$ کږې د ګږو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی(1,0) د ټولوکږو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

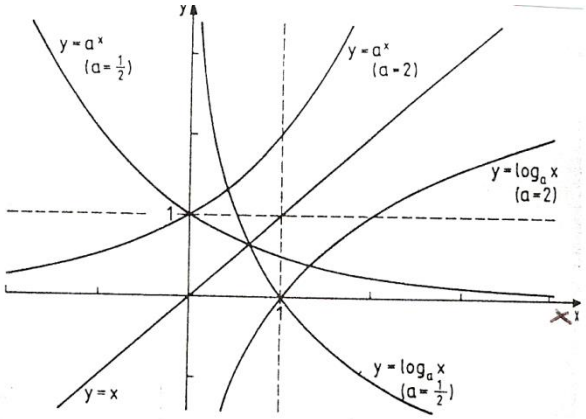


Bild 15.19 څیره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x->0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x> 0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څټ یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \ , \ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

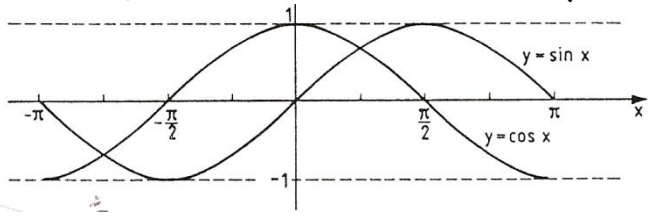
$y=\sin x$;$D=R, W=[1,1]$.....$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$.....$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$.....$(15,11_d)$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x$, $y=\cos x$پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$; $\cos(x+2k\pi)=\cos x$, $k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
$y=\tan x$, $y=\cot x$. دا په دې مانا چي

$\tan(x+k\pi)=\tan x$, $\cot(x+k\pi)=\cot x$, $k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y=\cot x$, $y=\cos x$
لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y=\tan x$
په $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y=\cot x$ په $k\in Z$, $x_k=k\pi$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

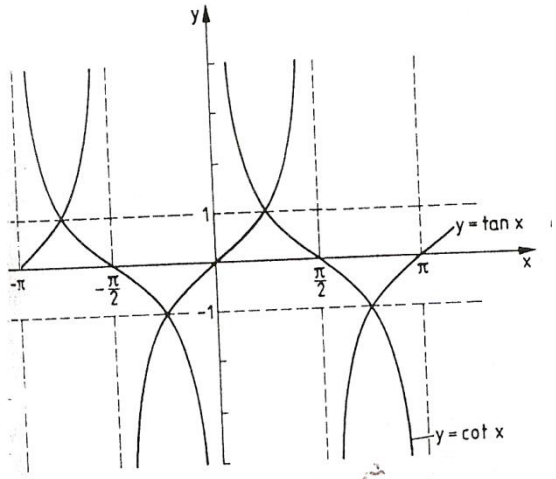


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودي کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی.

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دي امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی ترلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيړني لاندې نيسو چې د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږښيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a < 0 لپاره په t - محور يوه
اينه ځيرونه هم منځ ته راولي (څيره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.

څيره شته

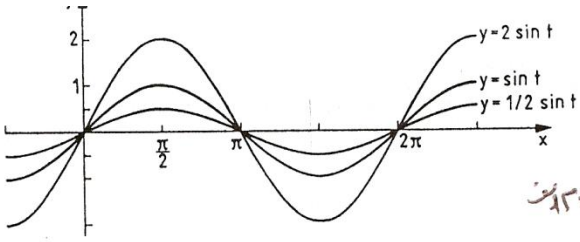


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن y = sinω t کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که |ω|<1 يا پړسول که|ω|>1 وي تاثير اچوي.چيرته چی د ω < 0 لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن y = sinω t يوه فنکشن ارزښت، y = sin t د خپلواك ω -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او y = ω t پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

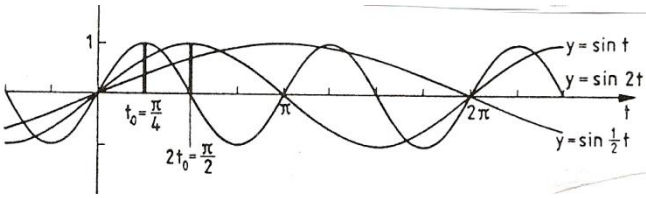


Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کیښی لور $\varphi > 0$ او یا له ښي لور $\varphi < 0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠

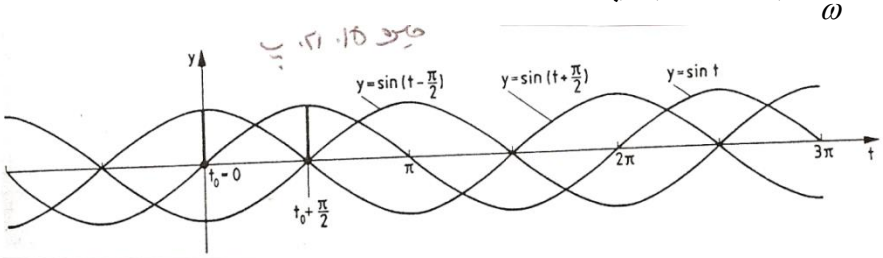
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

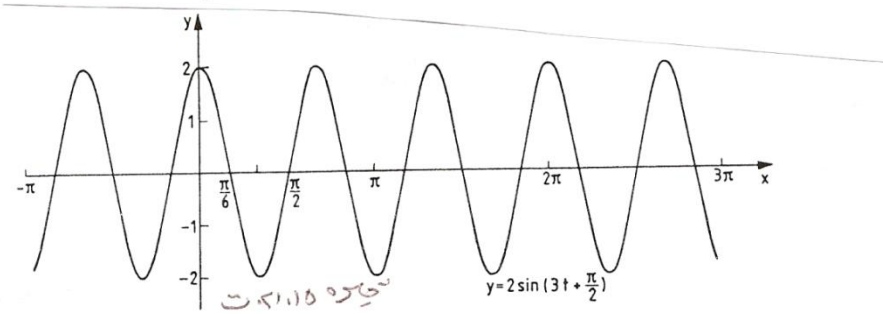
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a \,.\, \sin\omega\,(t + \frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازي نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





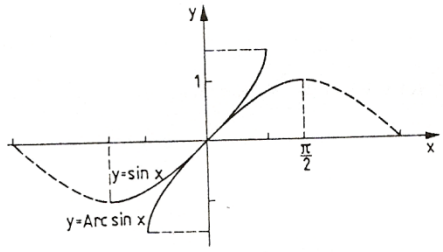
(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin(3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودي یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کي د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

څېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په څټوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: څیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



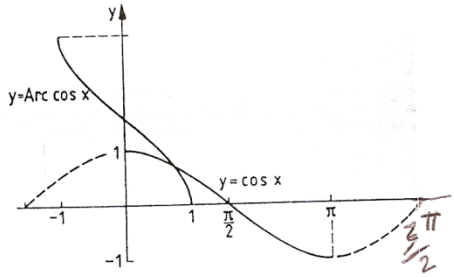
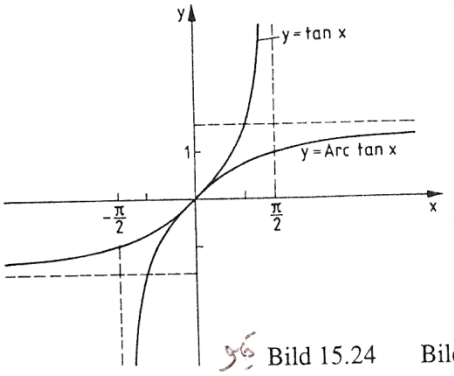


Bild 15.22 Bild 15.23



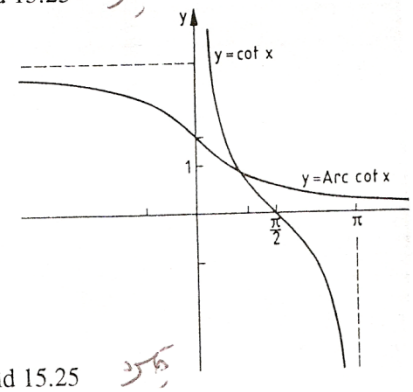


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; W = [-1, 1]$ (15.12a)
2. $y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1]$ (15.12b)
3. $y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \; W = \mathbf{R}$ (15.12c)
4. $y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرځت یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \text{Arc}\sin x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)
2. $y = \text{Arc}\cos x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi]$ (15.13b)
3. $y = \text{Arc}\tan x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)
4. $y = \text{Arc}\cot x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$ لپاره یو فنکشن $y = f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي.

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره

او $y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$
سره تړلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په تړلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}\,1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\, w$دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او
$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$
$y=\mathrm{Arctan} w=\mathrm{Arctan} 1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که($f(x)$ له رییل ګڼونواو بستیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنخ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول Arc cosf(x تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3 \ (x \geq \sqrt{3} \ v \ x \leq -\sqrt{3})$

نو لرو $D =(-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2 \ x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي .$x1=2,x2=-1$

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفډيری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفډيري وي يعنی د D1 او D2

غوڅډيری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \backslash \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5)$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیخیت توابعو ایکسپلیخیت انځورونه ورکړی

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ – لاندی فنکشنونه په مونوتوني وخیری، او که ممکن وي نو مونوتونر اینتروالونه په تعریفډیریو بیل(تجزیه) کړی، یا لهو ته کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، تاجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر خایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څې فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W=[0,\infty)$, d) $y=x^3/2$, $D = [0,\infty)$, $W=[0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) و / (3,7) c) (-1,0) و / (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2/4 + x +2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دې د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 -x^2 -(13/2)x -5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2\ 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګڼل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, $D = R$, $W=(0,\infty)$ b) $y = 2^x -1$, $D = R$, $W =(-1,\infty)$

c) $y = \log_3 x$, $D = (0,\infty)$, $W = R$ d) $y = \ln(x-1)$, $D =(1,\infty)$, $W = R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y =(x-1)^2$ b) $y = x^2 -1$ c) $y=(x+1)^2 + 1$

d) $y= x^2 -4x +5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 +x/2 + 1$

۱۴ – تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w)$, $w = h(z)$, $z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=\left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی (د تعریف- او ارزښتلیري باندي تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc\,cot}\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندي شنیزویا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفلیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc\,cos}(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګټونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ ــ د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولې.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

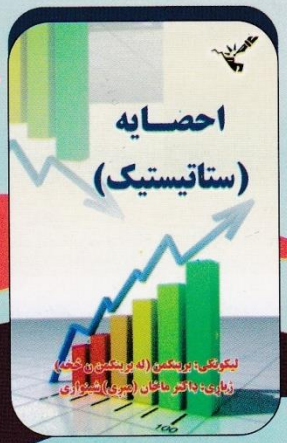
ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

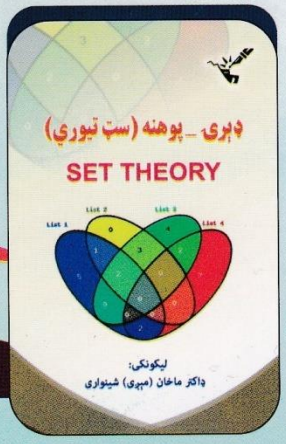
دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

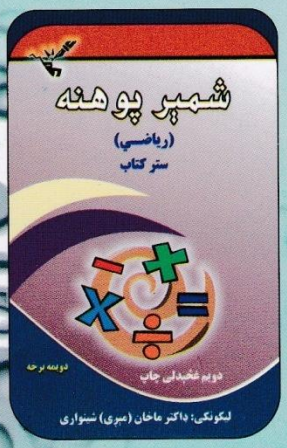
ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېړی) شینواری







د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه ـ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library