

حُمکچپو هنه (هندسه)

Geometry

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میری) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن بندار

سرلیک

حُمکچپوهنه (ښه)

لیکونکی:
ډاکټر ماخان (میری) شینواری

ناچاپ

خُمکچپوهنه (بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره (سطحه)
نیمه – یا نیمهواره ٧

۱

کونجکليمه ۱۱

خرخونپروسه: خرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

ځمکچپوهنه (بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره (سطحه)

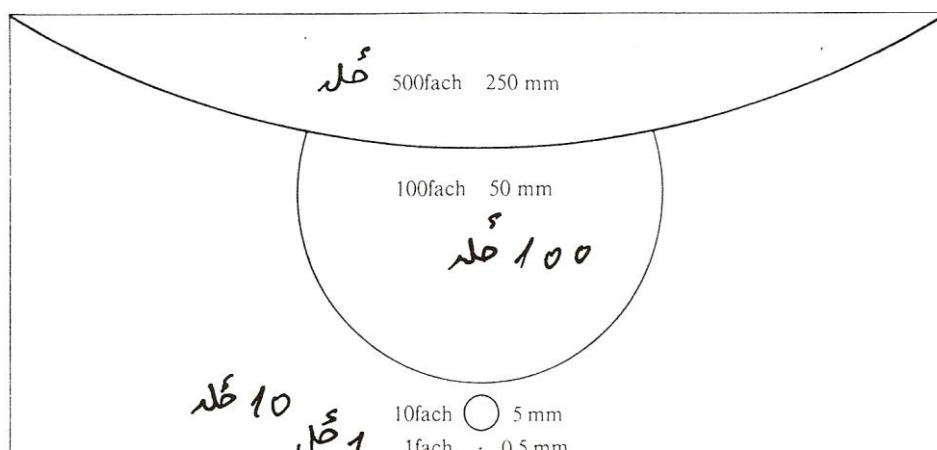
پېژند(تعريف): اویکلید(Euklid) اویکلید وایي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددې پېژند ستونځی په دې کی دي، چی بیا نو د داسی واره شي څخه ځنگه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو ځنگه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیري؟ یا یی که مایکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لارې گورو چی ټکی څرگند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه ځنگه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:

په لاندې کې گورو، چي ټکی د همدې شمیروني له لارې څومره غټیدلی شي

پادونه : هندسه ځمکچ ته وايي، نو که هندسه ځمکچ پوهنه وبلل شي، د لمړنيو پوهيدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي. همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کې ډيرڅه ليدلکيدی شي او د رانيولو وړ دي).

لنډ: شيان يا ليديدونکي «رانيولور» (يا شي ډوله څرگنديږي، همدومره ستونځی ليدل کيږي، چې نومونه اړوند (ترلی) کره وټاکلی شو، او همداسی يې دا اړونده کره ټاکنه روښانه يا فکور کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چې گوندې دا شکلونه ليدوړ او نيولور دي، ساده ښکاري، مگر په خپل دننه کې (خپله خټه کې) خورا پيچلي دي چې يواځی وړ نږدې پيژند(تعريف) يی کيدلی شي او په لاندې کې به راته روښانه شي:

-مور په لاندې څيره کې د ټکی غټيدل يا لوييدل ښايو



گورو چې ټکی هوارې او کرښی ته پراخيدلی شي يعنې عملي څيره ښوونه يا شکل نڅښوونه يی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تيوريکي کره (ټيک) ښوونه يې ضرور ده، يا نه پريښودونکی ده. دا پرابلم په مقايسوي- يا د پرتلي په توگه- ساده له منځه وړل کيدی شي: په لاندې کې د تشرېح شوو شيانو يا ليديدونکی لاندې د هغو تيوريټيکي ادیاله(خيالي) څيره پوهيږو او نه د هغه عملي ريښتينوالی يا رياليزه کوونه. د دې لپاره، چې ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی ډيري کنځيت ته لارښودوي. د پورته شکلونو سره سره، د هندسي جوړځتونو (څيرو) لاندې، د ټکو ډيري پوهيږو. يعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بې د ټکو له ډيري داسی تعريفوو: لنډ: ټکی او کرښه

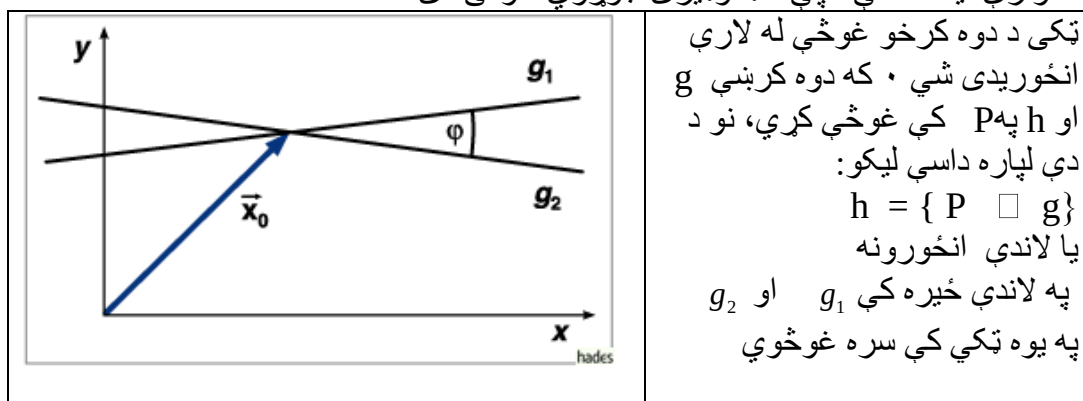
پیژند(تعریف) :

یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرې په څیر کلکه نیسو، چې توکی یې ټکی بللکیري. او په غټو لاتین تورو یې ښایو لکه $A, B, C, P, Q, \dots$ ، په هواره کې یوه برخدیرۍ په نڅښه شوې ده، چې توکي یې کرښی بلل کیري او په کوچنیو لاتیني تورو $a, b, c, \dots$ سره ښوول کیري

یا په بل ډول: یوه هواره E د ناپای ټکو ډیرۍ ده. د هوارې هره برخه (چې پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کیري.

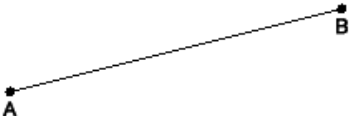
د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول) لکه د بیلګې په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندی لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یې صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه ډیمینزینال ده (دوه اړخیز یا دلته ښه دی چې د اړخ په ځای خوا ووايو، ځکه چې اړخ مو n -ګوډیو لپاره کارولی دی. دلته یې د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی. (په دې کتاب کې او بیا دې موضوع کې له ورو څرګندونو تیریرو او هغه څه چې خورا مهم دي هغه دلته راوړو).

لنډ: ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرۍ جوړوي، توکی دی.



پیژند :

ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) AB د ټولو ټکو هغه ډیرۍ ده، چې له ټکي A او B ته د هوارې یا سطحې په دننه کې لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعنې که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کې د هوارې په دننه کې سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعنې ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي داسې لیکو:

	$A \in AB; B \in AB$ يا هغه کرښه، چې دوه ټکي په لند وائڼ کي سره وتري بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښي توکي دي
---	--

که بند کرښه د «ځير کرښي» په څير ونيسو او يا د کاغذ پرمخ کرښي (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو.

کرښه د ځمکچپوهنې بنسټيزه کليمه ده. ليدوږ د اويکلید جيومټري کي دا يوه ناپای غزیدلی کرښي ته وايي، چې ناپای نری وي، د لاندې خويونو سره:
 که په يوه کرښه دوه يو له بل بيل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه يو لند وائڼ په نڅښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه يا بند کرښه وايو.

دا کليمه ټيک زموږ پيژند نه راکوي. اوس هندسه په اکسيومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکي داسي ورکړ شوي، چې مخ د مخه يې پيژند څرگند ورکړ شوی او نيول شوی يانې موږ يې پيژنو.

پيژند يا تعريف :

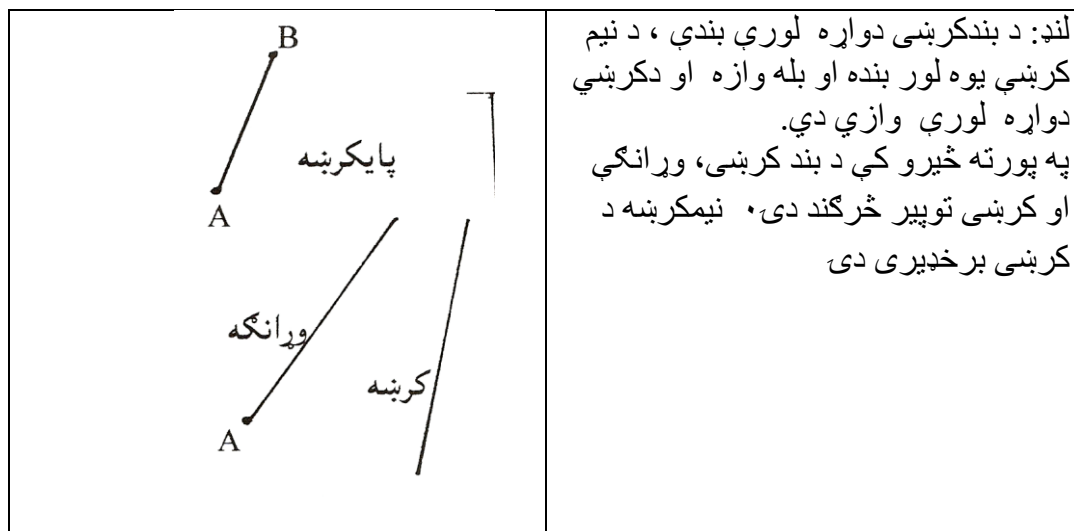
د بندکرښي (پای AB) - دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپاکرښه) AB يا g ويل کيږي. بندکرښه نو بيا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخدیري ده.

په نڅښونه يې g (برخدیري) AB □

طبعاً کيدی شي، چې کرښه په يوه لور و غزول شي

پيژند :

که بندکرښه يواځي په يوه لور ناپای و غزول شي، (ناپای) نیمکرښه شي (ناپاي) نیمکرښه يا وړانگه (شعاع) بلل کيږي. نیمکرښه يا وړانگه يوې لورته بنده او بلې لور ته ناپای غزول کيدی شي، يعني پيل لري مگر پای نه لري.



لنډ: د بندکړنې دواړه لوري بندي، د نیم کړنې یوه لور بنده او بله وازه او دکړنې دواړه لوري وازي دي. په پورته څیرو کې د بند کړنې، وړانګې او کړنې توپیر څرګند دی. نیمکړنه د کړنې برخدیری دی

که په یوه هواره کې په یوه کړنه g ټکی P کینډول شي، نو وایو چې P د اینځیدیر (inzidiert) کیري یا ټکی P په کړنه پروت دی یا g له P تیریري او g د هوارې E سره اینځیدیرت کیري، په دې حالت کې د اینځیدینځ اړیکو (inzidenzrelationen) یا «پروتوالی اړیکو» څخه غږیږو.

که په همغه کړنه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار (kollinear) کوپلنار (چې په همغه هواره یا سټخه کې شته وي) (komplanar) وایي. که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کړنو g او پروت وي نو دا د g او h غوڅټکی بلل کیري او داسې یې لیکو:

$$h = \{ P \cap g \}$$

د پام وړ: ټکی د ډیری نوک کې { } لیکل کیري (یا د ډیری غیر کې نیول کیري)، ځکه چې ناپاکړنې g او h د ټکو ډیری دي او ټکی P د غوڅدیری توکی دی. که چیرې ډیرې ناپاکړنې په یوه ټکي کې سره غوڅی کړي نو کوپونکتال (kopunktal) بلل کیري، کوپونکتالی ناپای کړنې د ناپاکړنو غونچه (Büschel) یا بهتره ستوری جوړوي.

د کړنو کوډه (څېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

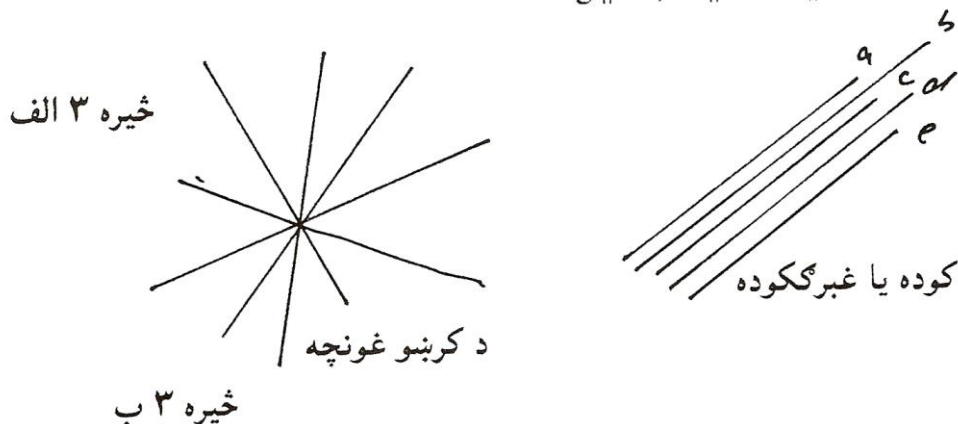
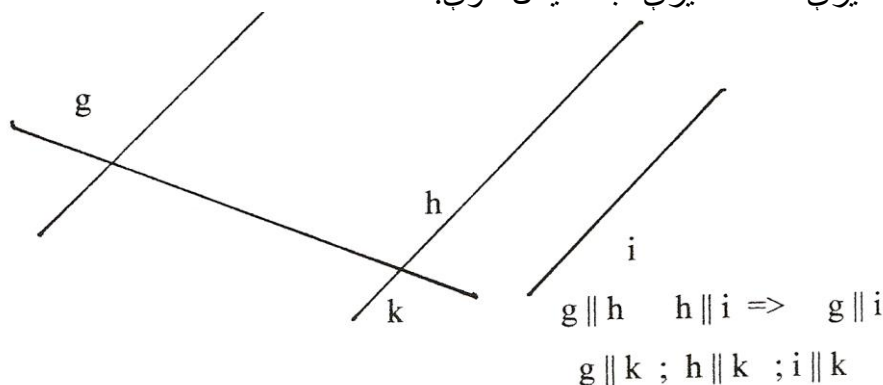
پیژند(تعریف): کړنې g او h یې له گډو ټکو یا بهتره: بی له غوڅټکو غیرگړنې (موازیکړنې) بللکیري، لیکدود (مطلب د شمیرپوهنې لیکدود) یې د $g||h$

کړنښی د ناپای ډیرو غوڅتکو سره کټمټ یا (ایډنټیک *identisch*) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چې یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کړنښی سره غبرگی دی.

ددې لپاره لیکو: $g = h$

ناغبرگی کړنښی g او h په نڅښونه کی داسی په نڅښه کیږي: $g \parallel h$ (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرگ کړنښو لیکډول دی یا لیکدود).

د لاندې څیری شننه د څیری کښته لیکل شوي:



هندسی څیره: یوه هندسي څیره یوه ناتش ټکیډیری ده.

هغه لاین (یوخوايز یا یو ډیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونې) 1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کړښه پروت وي او ټکی نه وي.

پیژند(تعریف): هغه هندسي څیره «هواره» (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي. هواره یا سطحه دوه پراخیدوني یا ډیمنزیونال (2 Dimensional) ده.

په پورته کي د کړښو کوده یا د کړښو ډله سره غبرگی هم دي.

سرلیک

دلته $A < B$ په دې مانا ده چې « A په یوه کرښه g د B تر مخ یعنی څمور په بلد دود، کین لور ته پرته ده » دا په دې مانا چې په کرښه g ځغاسته باندې لمری د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکې له لارې لوریزې کرښې ته راځو. دا په دې مانا چې داسې کرښې لوریزې کرښې دي. یعنی په هغه پخوانۍ ډول سمت یا لور یې څرګند دی. منځ اړیکې $Wz(ABC)$ دا مانا لري چې یا $A < B < C$ او یا $A > B > C$. دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدي شي یعنی سمت یې ټاکل کیدی شي.

تعریف: g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخه ډیري ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخه ډیريو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګې منځ ته راځي. A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څې وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیل ټکي A او له دې توپیر ټکي $P(P = A)$ له امله یواځنۍ (یواځنۍ شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کې زیاته کاروول

کیږي. دا په دې مانا، چې بل نه شته (ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګې توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څې وړانګه په AP ښوول کیږي. تل باور لري:

$$AP^+ \cap AP^- = \{A\} \text{ او } AP^+ \cup AP^- = Zw(AP)$$

که وکتلی شو چی د پای کرښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کین لور ته پرته وي نو کرښه په AB بڼایو د کرښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو. یعنې: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په خټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

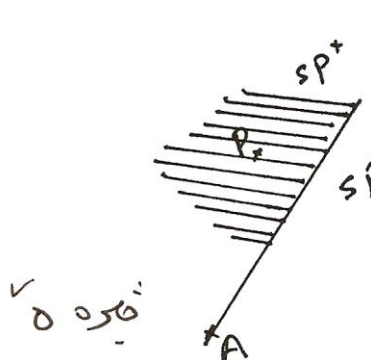
تعریف: هره کرښه g په هغې کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهواره باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته، ټیک او ټیک هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده. د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په خټ نیمهوارې بلل کيږي.

که ټکی A او B له g پیدا شوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیدا کرښي او یوه ټکی P له لارې (چی په ژیکرښه g نه وي پروت) یواځنی ټاکلی ده، یعنې له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

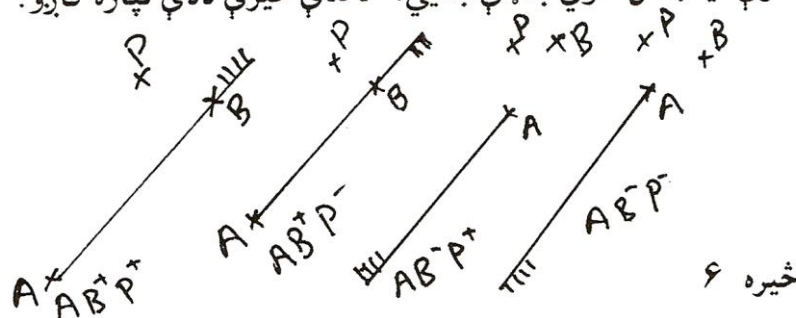
یو ټکیډیږی، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګې، داسی په نامه هوار جوړوونکی وړانګی، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کيږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګي وړونکی کرښه بلل کيږي.

سرلیک



وړانگه د جنډې ژيورانگه ، ددې پيل ټکي
د جنډې پيلټکي بلل کيږي. يوه جنډه f
د ژيورانگي s سره او په دې وازه هواره
پراته ټکي P سره په sp^+ بنسټول کيږي.
جنډه د همغې وړونکې وړانگي يا
ژيورانگي s سره ، چې د sp^+ سره مخامخ
يا په خټ ده ، د sp^- سره ښايو. (خيره: ۵)

که په sp^+ همداسې sp^- سومبول، په پورته د وړانگي s لپاره ايښوول شوی
سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسې AB^- بدل کړو يا کيږدو، نو د
لاندې سومبولونو AB^+P^+ ; AB^+P^- ; AB^-P^+ ; AB^-P^- سره کرکټرستيک يا بنسټول
شوي يا ټاکل شوي جنډې ښايي. لاندې څيرې ددې لپاره کارو:



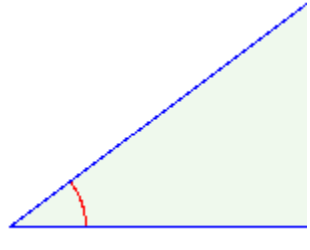
دلرژ څيرو بيرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- يو بل سره مخامخ دي، ځکه چې وړونکي
وړانگه او نيمهوارې يو بل ته مخامخ يا يو بل ته په خټ دي (پام دې وي چې
مخامخ او په خټ همغه مانا لري يعني همغه يو ډول شميرنيزې کليمې دي).

دوه بيرغونه f_1, f_2 د همغه پيل ټکي A سره) وپيل ټکي A ته همغه لوريز يا
مساويلوريز بلل کيږي، د کوليناري ژيورانگو سره، که $f_1 = f_2$ يا f_1 و f_2 ته
مخامخ يا په خټ وي.

سرلیک

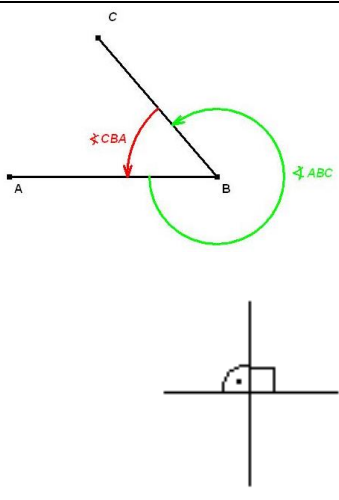
جنډې ABC او DEF همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولايڼي دريگونټکو (A, B, C) څرخونموڅی لاندې د جنډې ABC لوريزټولگی پوهيږو.

کونجکليمه

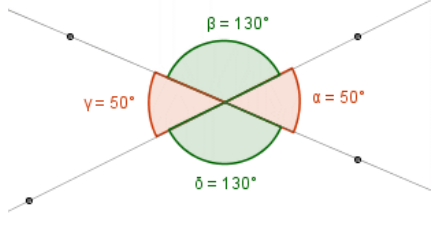
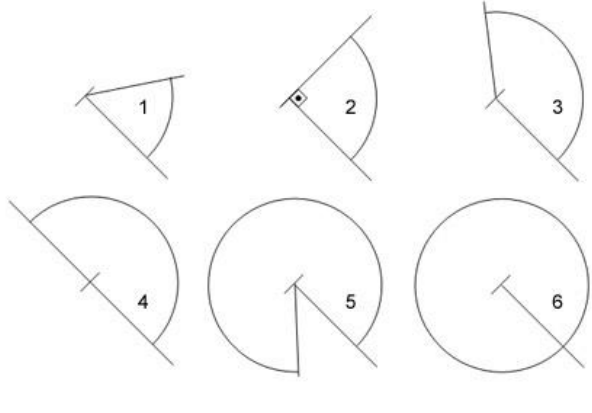
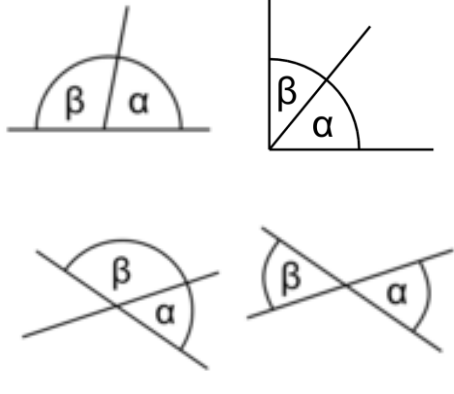
	پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چي دوه وړانگي S_1 او S_2 يانې $S_1 \wedge S_2$ د پيل غوڅتکي S ولري په هواره يا سطحه E کي کونج β جوړوي. وړانگي د کونج پښي بلل کيږي او پيلټکي S د کونج $<$ ککره (لند: کونجککره) بلل کيږي.
---	---

لند: دوه کرښي، چي په يوه ټکي کي سره غوڅي کړي، کونج جوړوي، چي کرښي د کونج پښي او غوڅتکي يې د کونج ککره يا (راس الزاويه) بلل کږي. پورته څيره دې وکتل شي. گونجونه په گراد (لاتين پل يا لاقدم) کچيږي

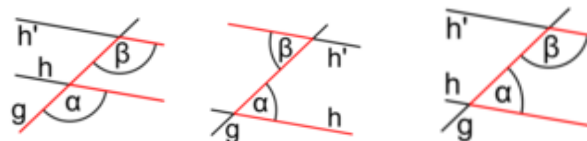
د کونجونو رسمونه او نومه ونې

	هغه کونج، چي له 180 درجو کوچني وي هغي ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چي له 180 درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تيره کونج، چي له 90 درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چي پوره 90 درجي دی، پڅکونج، چي له 90 درجو لوي او له 180 درجو کوچنی دی، غزيډلی کونج، چي 180 درجي دی، له پڅ زيات- يا د پڅ په څنټ- يا له پڅ اخوا کونج، چي له 180 درجو لوي او له 360 درجو کوچنی دی، پوره کونج، چي 360 درجي دی. دا دې په گوته وي، چه صفرکونج صفر دی.
---	--

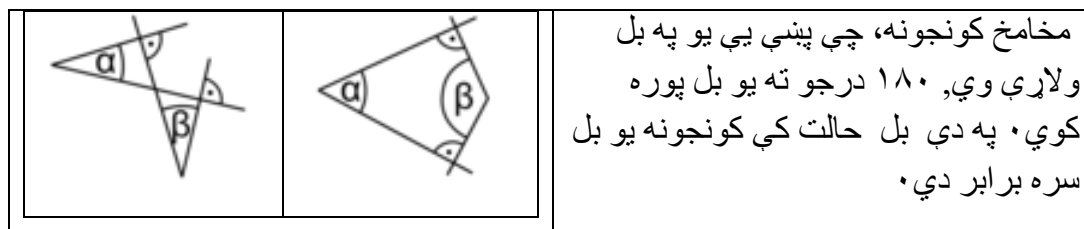
يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، گران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

	مخامخ څیره : ککر په ککر کونجونه یورنگیز دي، بدلرنگیز کونجونه گاوندی بلل کیږي •
	لاندې کونجونه پخپله ونوموی کړی •
	کمپلیمینټ یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه (مخامخ څیره دې وکتل شي) • په څنگ کې یې سوپلیمینټ یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه • مخامخ څیره • مخامخ گونجونه بنی لور ته : ککر په ککره کونجونه • کین لور ته : گاوندی کونجونه

له کین څخه و بنی لور : پوریز کونجونه ، ردبلکونجونه



سرلیک

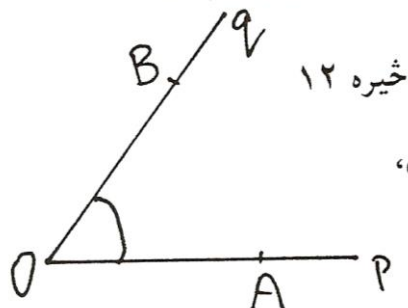


يادونه : گران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زياتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه يم بلد، ځکه چې په محدب، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهيږم، يواځې له قايم الزاويه څخه پرته.

يو گراد Grad لاتين: پل يا قدم

لاندې کونجونه سره توپير کيږي، چې ايا د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلي او ايا د کونج دننه په نخښه شوي دي او که نه.

د کونج دننه په نخښه شوي نه دي: د پښو لړۍ پرلپسې کره نه ده ټاکلې



بنسټيز کونج:

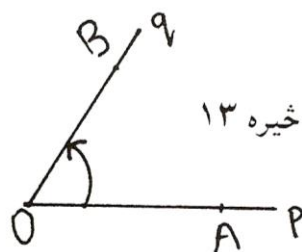
د وړانگو p, q (نامنظمي) جوړې،

د گډ پيلټکي O سره، د (p, q) سره،

يا (ABC) په نخښوني

د $A \in p, B \in q$ سره.

دلته O ککرتکي دی، p او q د کونج پښې دي.



د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلې ده:

لوريز بنسټيز کونج: د وړانگو p او q

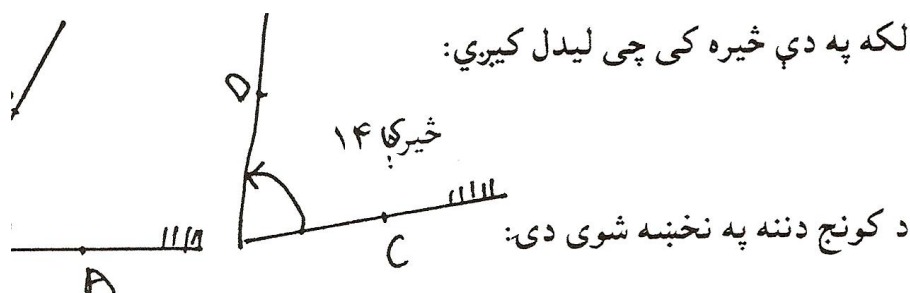
منظمه جوړه د گډ ټکي O سره د (p, q) سره،

يا AOB په نخښوني د $A \in p$ او $B \in q$ سره.

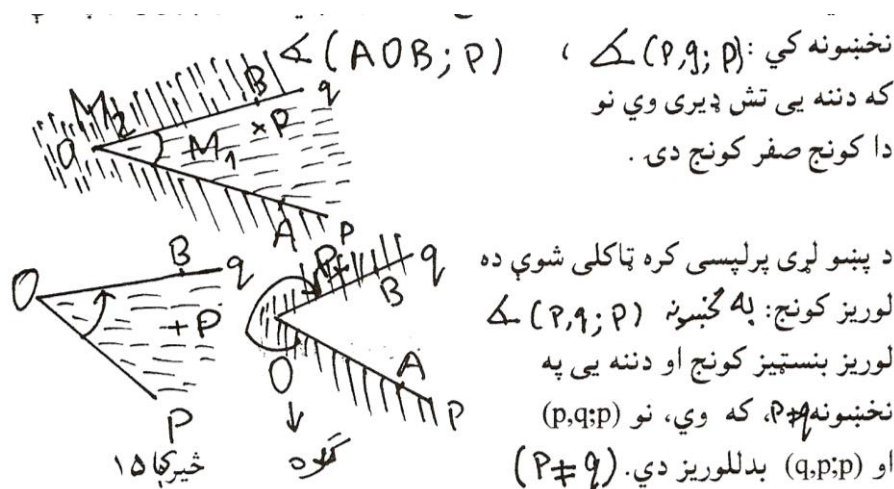
دلته هم لکه د مخه O ککرتکي، p لومړۍ پښه او q دويمه پښه ده. دا کونج په

شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخو مخامخ یا په بل ډول په خټ خغلی مثبتلوریز او هغه چی د ساعت څرخو په لور خغلی مفي لوریز څرخون بلل کیږي. دوه کو نجونه ټیک هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

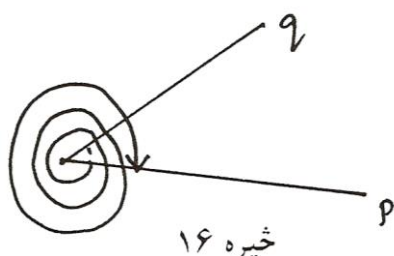


د کونجونو لړۍ پرلپسې یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کوڼ بنسټیز کونج هواره په دوه برخه یو M_1 او M_2 ویشي. په نڅبنه برخه بیلگي په توگه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي (د کونجهوار،



که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $(p, q; p) = 0$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



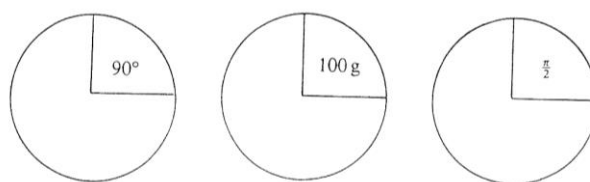
لوریز کونج، که د کونج په همغه لور
د یوه طبیعي گڼ یا پیدایښتي گڼ په
اندازه چی یوه پښه یی ځای په ځای
ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی
تغیر نه راځي.

گراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یی: یوون) یا واحدونه (یو یی: واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه گردی کی کښل شوی- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي. (سکتور او گردی لپاره دې، د گردی لوست ځای وکتل شي) (و رسره بلد یا مروج یی په 360° مساوي برخو ویشنه ده) پیژند: $1/360^\circ$ د یوه پوره کونج 1° (په تورو: یوه درجه، لاتین یی = gradus پل قدم) بلل کیږي. گراد نور هم په 60° کونج دقیقو ویشل کیږي ($1^\circ = 60'$ او کونج دقیقه په $60''$ کونج ثانیو). ($1' = 60''$)

«د» گراد یا درجی «لاندې» زړه درجه «(زور گراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریگونومیټري یا کونجکچ کی کونج برسيره پردې په لینده کچ یا - اندازه باندې هم اندازه کیږي او په گیودازي (Geodäsie) د اندازه کولو تخنیک، - پوهنه یا- علم (په نوي گراد یا گون gon) اندازه کیږي چی دلته گردی په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي. دا په جېشمیری کی مودوس "GRAD" «دی. څیري :

د گردی څلورمی انځورونه



څيره ۱۷

زور گراد DEG

نوی گراد GRAD

لینده کچ RAD

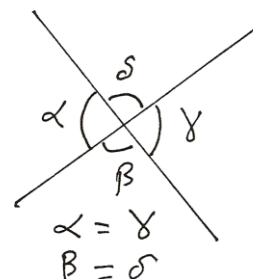
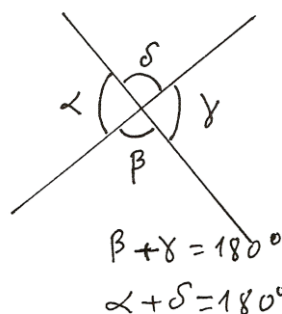
د کونج مثبت- او منفی - یا زیاتون - او کمونځنځي د کونججوړونکي یا کونج تولیدونکي څرخولوري څخه لاس ته راځي. کين څرخون (د ساعت د څرخي په څنډ څرخيدنه) مثبت- زیاتونمځنځنبه مخ ته يعنی کين لور ته لري او بنی څرخون (د ساعت د څرخولو په لور) منفی - یا کمونمځنځنبه مخ ته لري يعني کين لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسې یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځای ارزښت یا ځیفر ارزښت دی، بی له مځنځنځي. د مطلقه ارزښت همداسی ځای ارزښت لپاره دې ځما د شمیر پوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي. (په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلگه: $|-5| = 5$, $|3| = 3$ دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په ټولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفې لوي وي. د بیلگي په توگه که له غوڅکونج غریزو نو موخه به مو وړوکی کونج وي.

پيژند: که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کې پرېکړي، نو څنگ په څنگ کونجونو ته گاونډي کونجونه وای، چی دوي یوه پښه گډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نځبه کله کله کين لور ته لیکل شوي، خو دا په پوهېدنه کې کومي ستونځي نه رامنځ ته کوي).

کونجونه چی ککړي یی سره نښتی یا په بل ډول ککړه په ککړه وي، هغو ته ککړیکونجونه ویل کیږي. ککړیکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو گډککړیتکی لري او پښی یی یوه یوه په گډو کربنو پرتی دي.

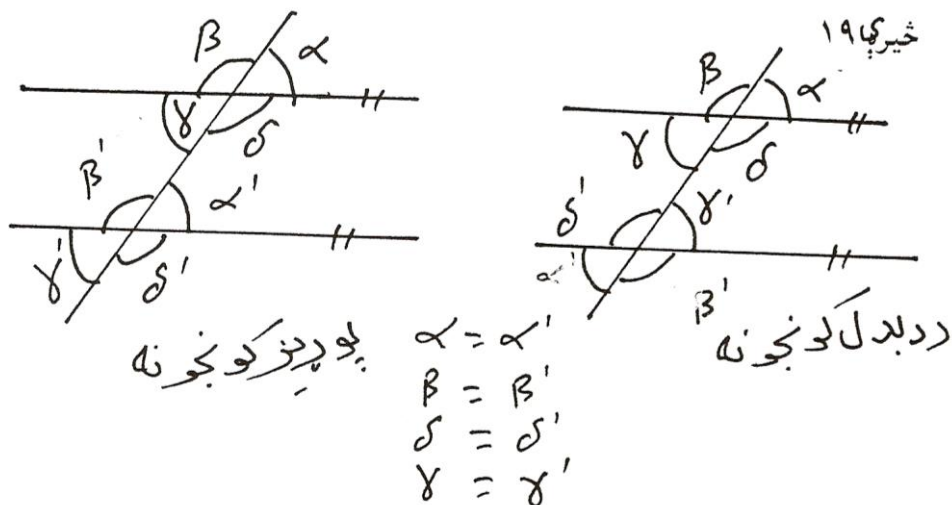
څيره ۱۸



سرلیک

څیره کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سولیمینت (Supplementwinkel)
 بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینت کونجونه
 (Komplementwinkel) بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چی
 راشي پوره کونکی کونجونه وایي. که دوه غبرگی کرښې g او h د یوې بلې ناپایکړښي k
 له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي • دوي د g او h تر منځ،
 او د k په مختلفو خواوو (او څلور دباندې پریکونجونه) نه د غبرگکرښو g او h تر منځ،
 بلکه له دوي دباندې (د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه
 پوریز کونجونه بلل کیږي، دوه دنننی یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو
 لورو پراته وي ردبدل کونجونه بلل کیږي (څېړې پورته ورکړ شوي دي) •

جمله: پوریز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو (غبرگی کرښې، چې له دې کرښې
 غوڅی شوي دي) کې سره برابر دي

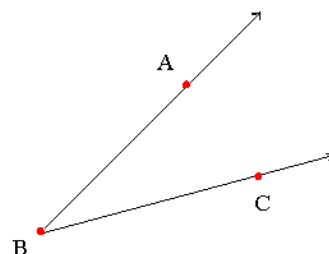
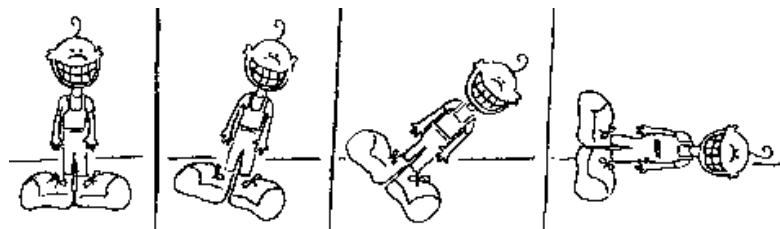


کونج کلمه

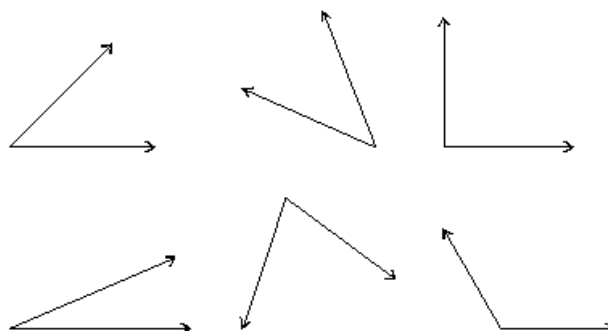
What is an Angle کونج څه شی دی ؟

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري •

دوه وړانگی، چې یو پای لري او سره غوڅی کړي کونج جوړوي • وړانگی د کونج پښې
 یا اړخونه بلل کږي او هغه ټکی، چې هلته کرښې غوڅوي ککرتکی یې بولو •



Example: دلته د کونجونو ځنې بیلگی راوړو .

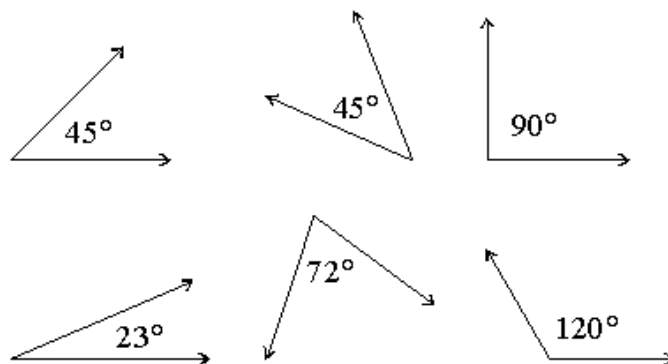


	که توري د کونج په خوله کې راشي ښه به وي، خودا هم د لیکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهگریوان یم . $\angle ABC$ کونجونه داسې ښایو Example: د همغه کونجلیپاره بیل بیل نومونه لرو دی شو لکه $\angle WBA, \angle CBP, \angle PBW, \angle PBC$,
--	--

سرلیک

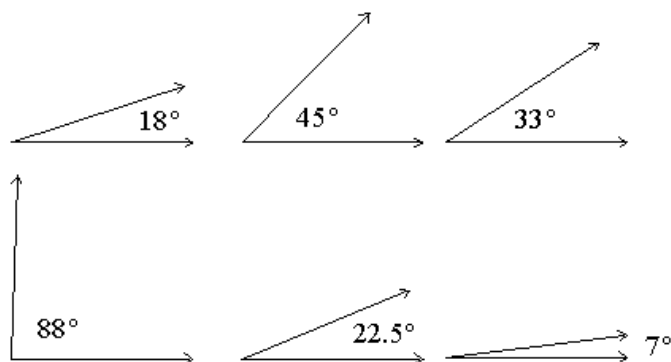
Degrees: د کونج کچونې یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیري

Example په لاندې کې ځنې بیلګې :



تیره کونج ، چې د صفر او 90° درجو ترمنځ وي **Angles Acute**

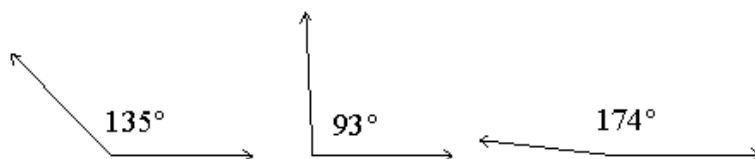
Example لاندې کونجونه تیره دي .



پخ کونجونه **Obtuse Angles**

پخ کونجونه ، چې د 90° درجو او 180° درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کیري.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



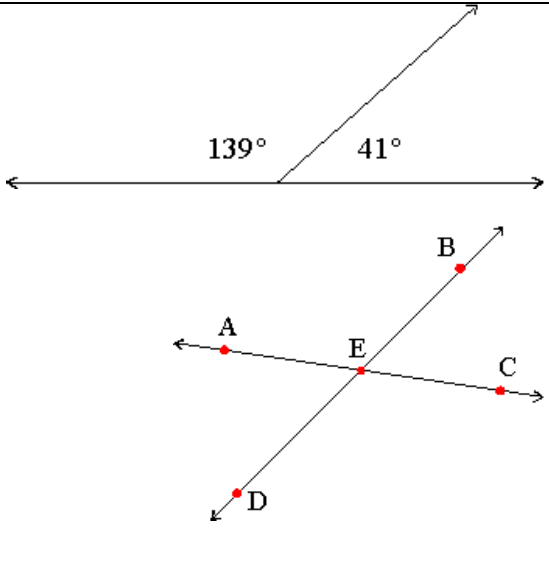
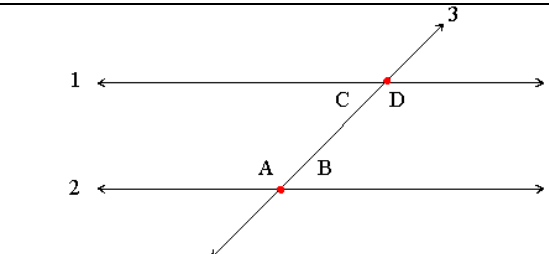
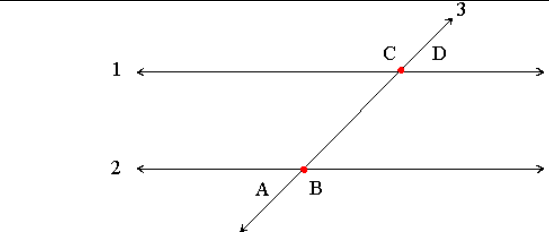
	Right Angles ولار کونج: هغه کونج، چې 90° درجې وي لاندې دواړه کونجونه ولار کونجونه دي: Example Complementary Angles کمپلیمینټ کونجونه: هغه کونجونه، چې یو بل و 90° درجو ته پوره کوي. کمپلیمینټ کونجونه بلل کېږي. یو کونج د بل کونج کمپلیمینټ بلل کېږي بیلگه: Example دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمینټ کونجونه دي دوه کونجونه، چې داسې سره یوځای شي، چې یو ولار کونج جوړ کړي، نو دا کونجونه یو له بل سره کمپلیمینټ دي!
--	---

Supplementary Angles سولیمینټ کونجونه :

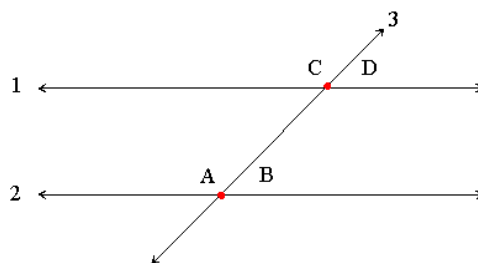
هغه کونجونه، چې 180° درجو ته سره پوره کوي سولیمینټ کونجونه بلل کېږي

بیلگه Example: لاندې دوه کونجونه سولیمینټ دي



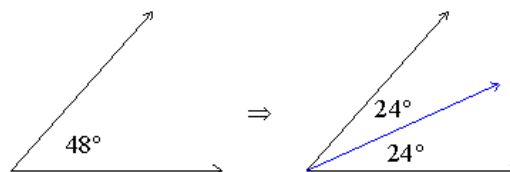
	داسې دوه سره تړلي کونجونه، چې ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Angles ککړ په ککړ کونجونه: چې دوه کرښې داسې سره غوڅې کړي، لکه په لاندې څيره او کونجونه، همغه ککړه ولري ککړ په ککړه کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده ، $\angle AEB$ او $\angle DEC$ کونجونه او همداسې $\angle AED$ او $\angle BEC$ ککړ په ککړه کونجونه دي.
	Alternate Interior Angles رد بدل دننه کونجونه: په لاندې کې کونجونه $\angle A$ او $\angle D$ همداسې $\angle B$ او $\angle C$ رد بدل دننه کونجونه او سره برابر دي. $\angle A$ او $\angle B$، $\angle C$ او $\angle D$ گاونډي کونجونه دي.
	Alternate Exterior Angles رد بدل دباندې کونجونه: په لاندې کې کونجونه $\angle B$ او $\angle C$ رد بدل همداسې $\angle A$ او $\angle D$ رد بدل دباندې کونجونه او سره برابر دي

پوريز کونجونه **Corresponding Angles** دا کونجونه $\angle A$ او $\angle C$ همداسې $\angle D$ او $\angle B$ پوريز کونجونه دي او يوله بل سره برابر دي

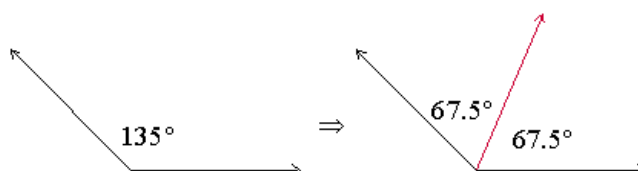


Angle Bisector کونج نیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونج نیمی یې بولو

بیلگه Example: د ښی کونج شنه کرښه، د کین کونج نیمی ده



په ښی کونج کې سره کرښه د کین کونج نیمی ده .



	Orthogonal or Perpendicular Lines ولارې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولارې وي پرېنډکیولار نومېږي (زما وړاندیز: نیغې ولارې کرښې)
--	---

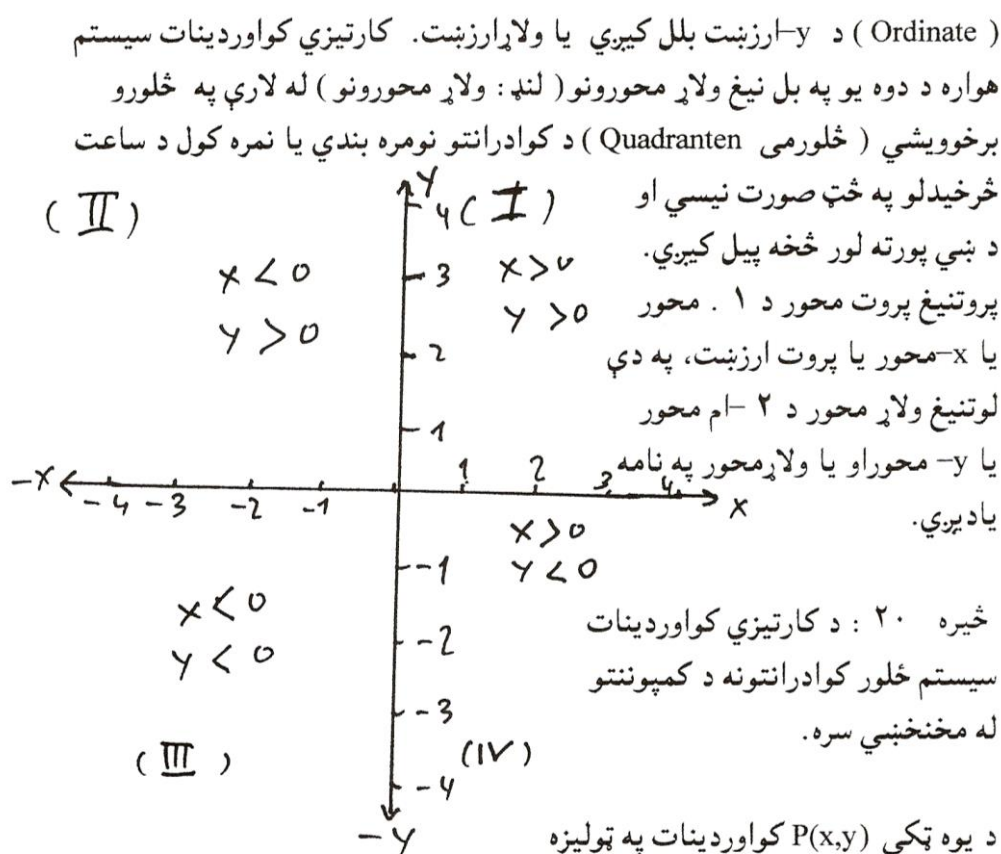
نښلونه:

کوارډینات سیستم

یادونه: کوارډینات سیستم څخه څمور موخه پروتولارسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسې یادېږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولې، هیله ده چې ستونځې به پېښې نه کړي.

د شمیرپوهنې او همدا ډول د تخنیک په ډیرو څانگو کې د کوارډینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کوارډینات سیستم کې د هواړې هر ټکي P د خپلو دواړو کوارډیناتو (x,y) ورکولوسره کره یا ټیک ورکړ شوی دی. لمړۍ کمپوننت یا اېسزیز (Abszisse) د x - ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

سرلیک



د دريگوديز ناخپلواکو (تريگونوميټريکي

مثلاثاتي فنکشنونو) (چي وروسته

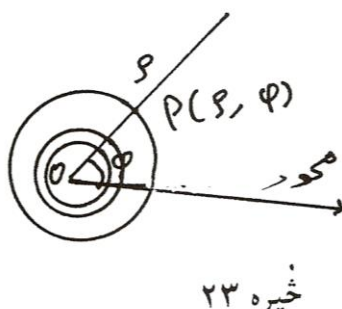
راغلی) او همدارنگه ديپتاگوراس

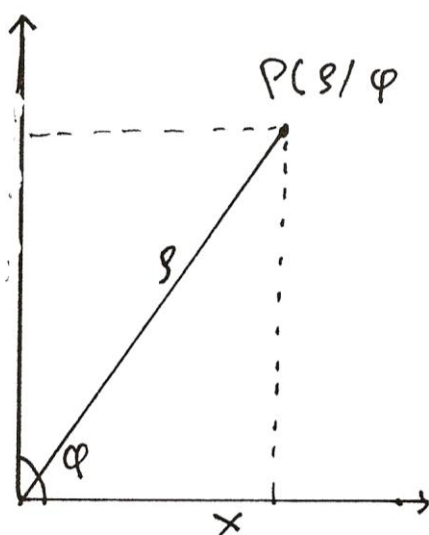
له بنسټيزی جملی شميرارونی

(څيره ۲۳) کولی شو چې د

کارتيزي کواورديناټ څخه و پولار

کواورديناټ ته راشو او سرچپه هم.





څیره ۲۴

جمله : د پولارکوارډینات بدلون یا

ترانسفورمیشن (Transformation)

لاتین : شکل اړول یا بدلول) و

کارتیزي کوارډینات ته

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

د کارتيزي کوارډینات بدلون یا

ترانسفورمیشن و پولارکوارډینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

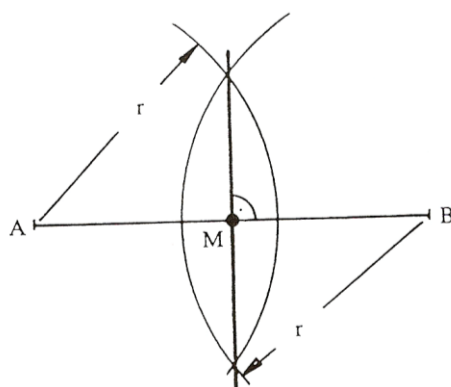
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اړونده نه څیرم، خو دومره غواړم چې په گوته کړم، چې تراوسه مو یو څه د هندسی ځنې بنسټیزې کلیمې تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چې څنگه ځنې بستیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کې چې له موږ سره گردونی یا څرخي (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چې ځنې ستونځی مو له منځه لرې کړي وي باید له دې څیرو یوه لیږد ونکی څیره ولروچې دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

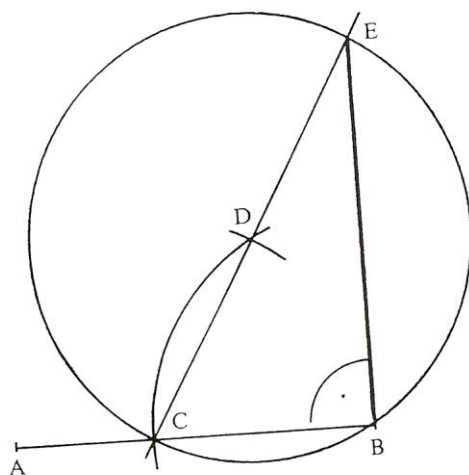
سرلیک



څیره ۲۵

- ۱- د AB کرښی نیمول او
 ۲- د منځ ولاړ کرښی کښل
 د A او B په هر ټکي یوه گردۍ د
 وړانګی $r > (1/2)|AB|$ سره ووهی
 (سیومتری دوه گردۍ څیرې)
 د دواړو ټکو تر لګرښه په غوڅټکي M
 کی په کرښه AB منځ ولاړ کرښه ده
 او دا کرښه په M کی نیموي.
 ۳- د یوې کرښی په سر ټکي کی د
 ولاړ کرښی جوړول (یا کښل). په B

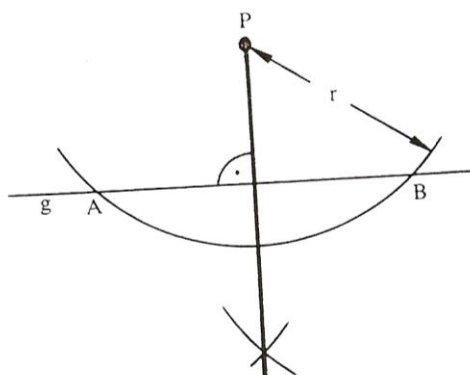
یوه گردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، ورپسې
 بیا په C یوه گردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې گردیلینده په D
 کی پرې کړي. D د دریمې گردۍ منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$



څیره ۲۶ (۳- یو دې اړوند)

سره. چی CD غزول شوې تر گردۍ
 په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه
 ولاړه ده. (تالس گردۍ دې وکتل شي)

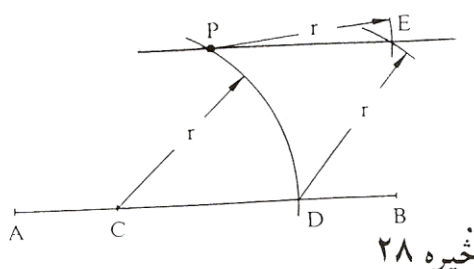
- ۴- د ټکي P څخه په کرښه g باندې
 یوه نیغه ولاړ کرښه واچوی ($P \notin g$).
 په P کی په وړانګه r یوه گردۍ ووهی،
 چی هغه د g له فاصلی (واټن) لوي
 وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.
 اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:
 لکه د (۳) لاندې په کرښي او هندسي
 دریګوډي.



څیره ۲۷

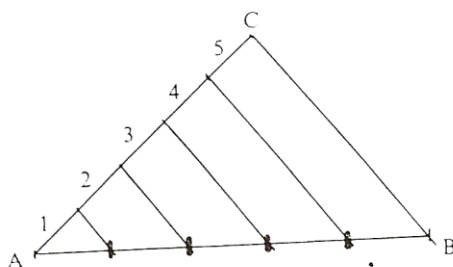
۵ - د AB کرښې سره ټکي $P \notin AB$ یوه غبرګرښه جوړول (کښل): د خوښي په یوه ټکي $C \in AB$ د وړانګې $r = |CP|$ یوه گردۍ ووهی چی کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چی یو بل سره د E په ټکی کی غوڅوي. دا د PE کرښه د AB کرښې سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوډي جوړول دي).

الترناتیو: لکه په (۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسی نیغ - یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.

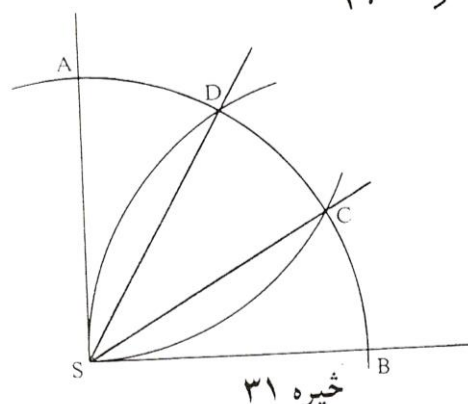
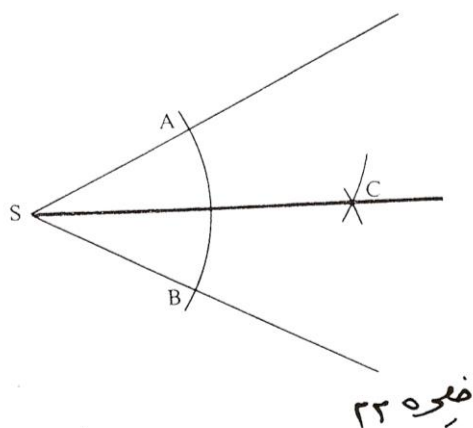


څیره ۲۸

۶ - د یوې کرښې AB ویشل په n مساوي برخو (د بیلګې په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښې وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n - ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښې ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښې سره غبرګی کرښې وکارزی، دا غبرګی کرښې د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.



څیره ۲۹



۷- د يوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه
چی د کونج پښی په A او B کی
پرې کړي، بیا په A او B په همغه
وړانګه یو د خوښی گردیلینده ووهی
چی یو بل سره په C کی پرې کړي،
پرېتکی د S سره وتړی.

۸- یو ولاړ ګوډی په درې

مساوي برخو هره 30° وویشي
په ککره S باندې یوه د خوښی
گردیلینده وباسی چی دواړه پښی په
او B کی پری یا غوڅی کړي او له

دې وروسته د څرنښوونکي په همدې

بیرته والي یا وازون د A او B ټکو

څخه گردیلیندی وکارې، اوس د S

څخه د C او D په لور وړانګی وکارې،

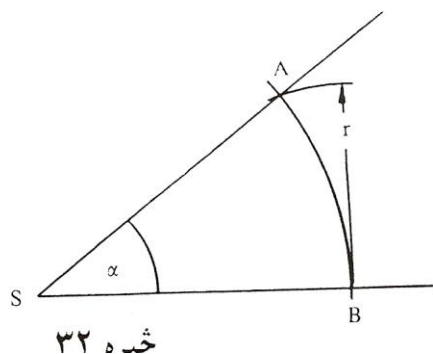
دا دوه وړانګی دا ولاړ- یا نیغکونج

درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابر

برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخي او

کرنبي باندې په درې مساوي برخو نه



ویشل کيږي، ددې لپاره بیا الجبري مواد په کار دي.

۹- د μ کونج په یوه ټکي P

وغزوی، د ورکړشوي کونج په

ککړه S باندې یو گردیلینده

ووهي چی پښی یی په A او B

کي پرې کړي، بیا نو په همغه

گردی ووهی چی خرخی د $|AB|$

په اندازه وي. اوس نو دا پریټکی

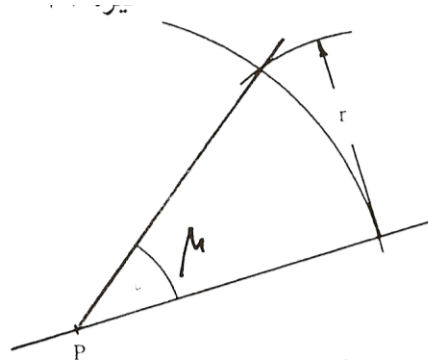
د P سره وتړی.

۱۰- د مساوي اړخیز درېگودي

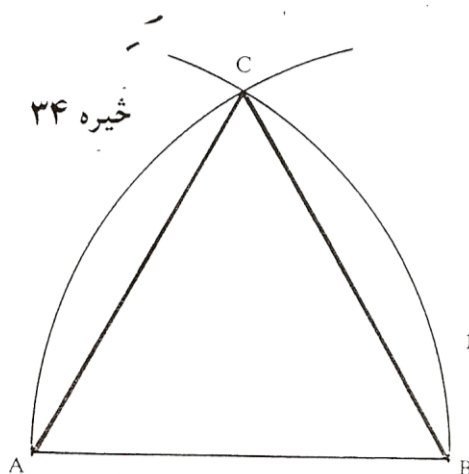
کښل: په A او B باندې یوه

گردیلینده ووهی چی وړانگه یی $r = |AB|$

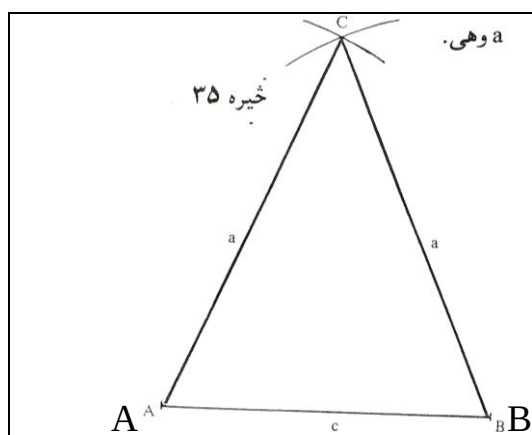
وي، چی یو بل په ټکي C کی پرې کړي.



څیره ۳۳

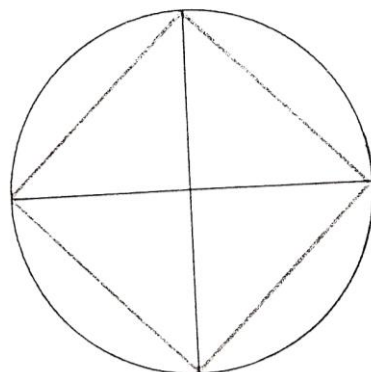
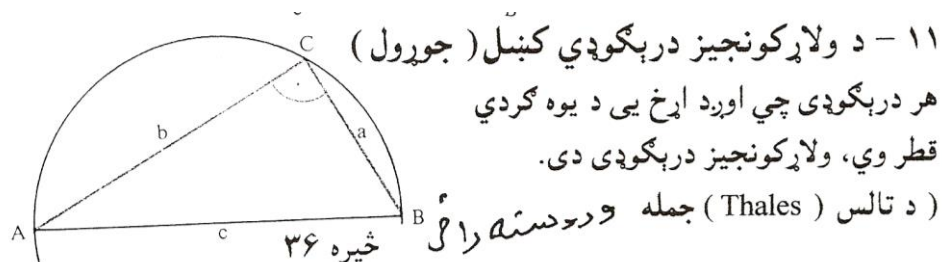


څیره ۳۴

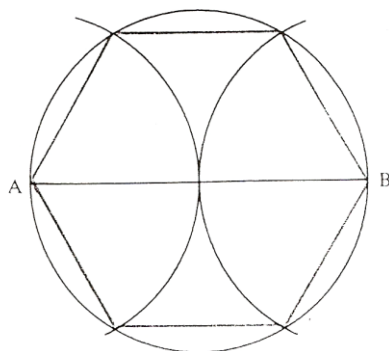


څیره ۳۵

بیانونو C او A او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېگودی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښیز درېگودی انځور یز یزي، د ورکړشوي بست $AB=c$ سره. په A او B یوه یوه پښه وه،

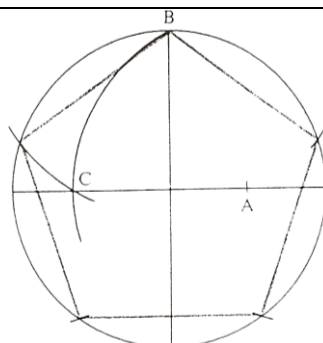


۱۲ - په گردی کی د یوې مربع کښل
د گردی په منځتکي باندې لکه په
(۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي
(قطرونه) وکارې او هغه ټکي
چی گردی پرې کړی سره ونښلوی.



۱۳ - په یوې ورکړ شوې گردی کی
د منظم پنځه څوډی کښل: د گردی
وړانگه په A کی نیمه کړی، له A
څخه کرښه AB تر C وکارې، |BC|
د پنځه څوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(خیره ۳۹)

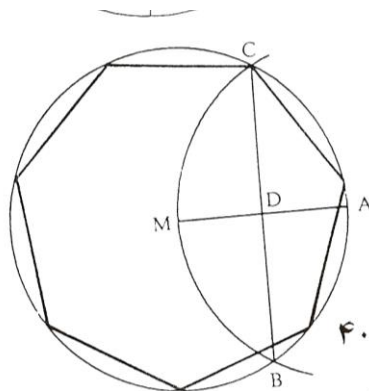
۱۴ - په گری کی د منظم درېځوډي
کښل:



د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د گردی
وړانگي په اندازه گردی لینده ووهی. د
دې ټکو چي گردی پرې کويیوځای کول
منظم شپږ څوډی چوړوي.

۱۵ - د مساوي اوه کړنځي

جوړول يا کښل:



د ورکړ شوي د نيمې اخر ټکي A

خځه د AM وړانگه په اندازه گردیلینده

ووهی چی گردی په B او C کي پرې

کوي. د BC کرښه د AM وړانگه

په D کي په ولاړ کونجې غوڅوي،

پس |BD| د مساوي اوځه پدیز د اړخ اوږدوالی دی.

څیره ۴۰

تمرینونه

۱ - په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف - ټکی A په کرښه g پروت دی.

ب - کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ - کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت - ټکی C په کرښه. چی له A وېه B

ته ځغلي، پروت دی،

۲ - په څیره ۴۱ کی څومره ناپاي کرښی،

کرښی او وړانگي پرتی دي؟

۳ - کومی کرښی غبرگي، او کومی یو په بل

ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو

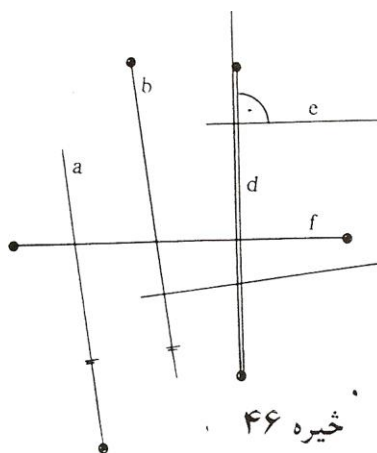
وکاروی (څیره ۴۲)

۴ - هرې کرښي ته جوړ کړی:

الف - یوه ولاړه

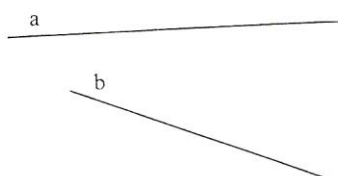
ب - په ورکړ شوي ټکي کی یوه غبرگه

(څیره ۴۳)



څیره ۴۶

P



څیره ۴۷

- ۵ - د اسمان کومى لورې يو په بل ولاړې دي؟
- ۶ - داسى کرښه لار (چې يو بل سره تړلي وي) وباسى، چې له ټولو په څيره $\frac{1}{2}$ کې ورکړ شوو ټکو تيريري. دا کرښو تلنه يا کرښو څيره ۴۸

خوزيدنه يا تلنه (حرکت)

- د يوې هوارې په خپل ځان يوواځنى څيرونه تلنه يا خوزيدنه (حرکت) بلل کيږي او په φ بنسټول کيږي، که چيرې دا لاندې خويونه ولري:
- ۱ - د يوې هندسي څيرې (کرښې، هوارې، وړانگې ناپايکرښې، نيمهوارې) څيره ډيري لاندې، يوه هغه هندسي څيره پوهيږو، د کومى چې په غوښتونکى څيره ډيري ژيکرښې پيلټکي، پايټکي په ژيکرښې، پيلټکي، پايټکي باندې څيره شي.
- ۲ - که f_1 او f_2 دوه جنډې وي، نو ټيک يوه تلنه شته نو ټيک يوه تلنه φ شته، د $\varphi(f_1) = f_2$ سره.
- ۳ - که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو يوه تلنه φ شته د $\varphi(A) = B$ او $\varphi(B) = A$ سره.
- ۴ - که p او q دوه وړانگي وي، د گډ پيلټکي سره، نو يوه تلنه φ شته د $\varphi(p) = q$ او $\varphi(q) = p$ سره.
- ۵ - د تلنو يا خوزيدنو ډيرى، د يو په بل پسى څيرونو ته يو گروپ جوړوي (د الجبر برخه يا د ليکونکي الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنو يا خوزيدنو (حرکت) ځانگړي ډولونه دي :

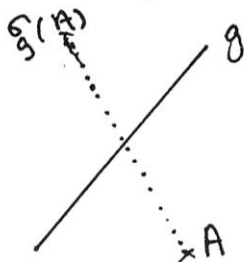
- راکښنه ، چي د $\mathcal{H}$ سره يې ښايو
 - ايښونه يا هندارونه، چي د $\mathcal{K}$ سره ښايو
 - خرخون چي د $\mathcal{K}$ سره يې ښايو
 که يو ټکي همداسي يوه کرښه ، چي په خپل ځان څيره شي ، نو دا ودې څيرونې ته

يا نسبت ودې څيرونې ته فيکسټکي ځای په ځای ټکي او همداسي فيکس کرښه
 يا ځای په ځای کرښه بلل کيږي.
 راکښنه $\mathcal{H}$ يوه تلنه يا خوزيدنه ده د لاندې ځانگړو خويونو سره

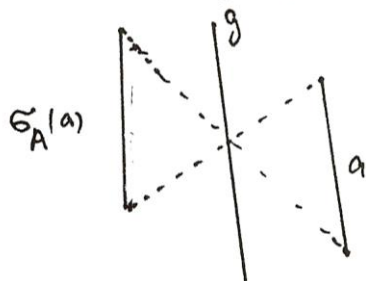
تلنه ۱ (V) : د يوې په خوښه کرښې څيره و هغي کرښې ته غبرگه کرښه ده.
 تلنه ۲ (V) : که څيرونه کټمټ څيرونه نه وي ، نو هر څيره ټکي د خپل اصل
 ټکي څخه توپير لري .

ايښونه يا هندارونه . د ايښونې دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ايښونه $\mathcal{K}_g$ په يوه کرښه g ، چي کرښې ايښونه ورته ويل کيږي ، يوه تلنه
 ده ، د لاندې خويونو سره
 س ۱ : د کرښې g هر ټکي فيکسټکي يا په خپل ځان
 څيره ټکي دی ، له دې سره کرښه يوه فکسکرښه ده.
 س ۲ : دواړه د کرښې g وازې هوارې يو له بل
 سره بدليدلې شي .
 څيره ۵۲



دوم: ايښونه $\mathcal{K}_A$ په په يوه ټکي ، چي ټکي ايښونه بلل کيږي ، يوه تلنه ده ، د
 لاندې خويونو سره : (څيره ۵۲)

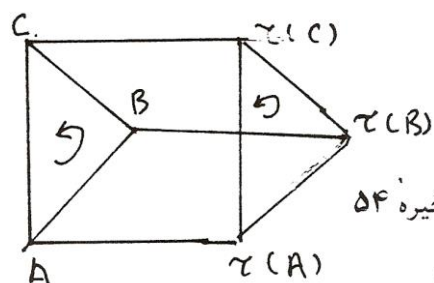


پ ۱ : هره کرښه چي له A تيريزي په خپل
 ځان داسي څيره کيږي ، چي دواړه
 له A پيداشوې وړانگي يو له بل
 سره بدلي شي .

سرلیک

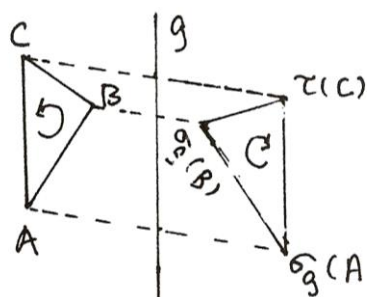
۱ څیره ۵۳

پ ۲: هره کرښه و دې کرښې ته غبرګی
کرښې باندې څیره کیږي. (څیره ۵۴)



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

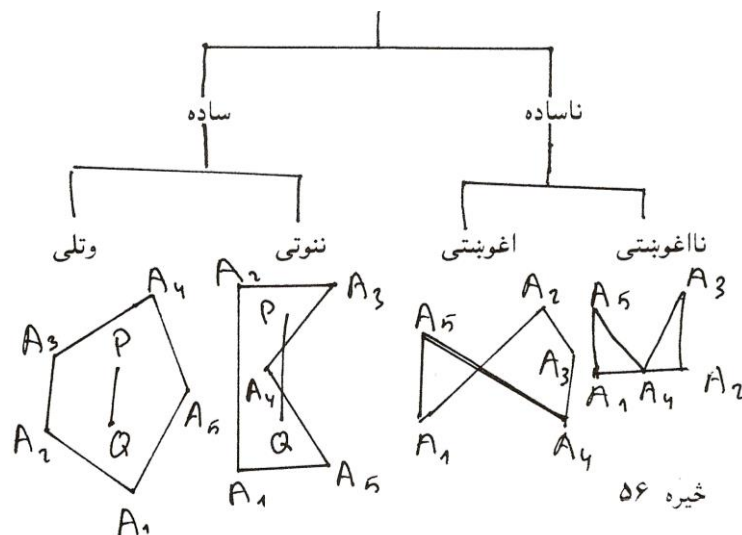
یوه تلنه $\mathcal{Q}$ همغه لوریزه ده، ټیک هلته
یا هلته او هلته، کله چی هره څیره $\mathcal{F}$ څیره ۵۴
د $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ سره همغه لور ولري یا مساوي



لوریز وي.

یوه تلنه $\mathcal{Q}$ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز
ده، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چی
هره څیره $\mathcal{F}$ و $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ ته مخامخ یا په
څیره ۵۵ خټ لوریز وي.

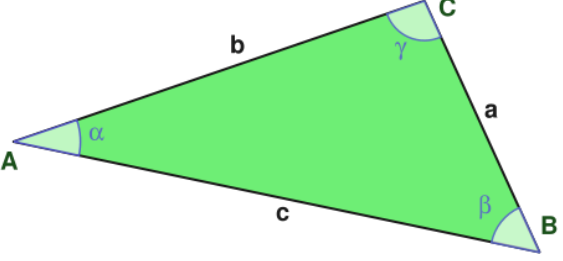
ډېر ګوډیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډیز)



څیره ۵۶

یو وتلی n - ګوډۍ منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

درېګوډۍ (درېګوتی، مثلث)

 ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او گاما دي او اړخونه a, b او c دي. په څیره کې ګوډونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A, B او C ګوډونه دي.	دا چې د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د څیری د ګوډټکو په څیر ونیول شي، نو درېګوډی لا سته راځي. کرښی، چې درېګوډی په کې راگیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېګوډي اړخونه یا هغه عربي یی ضلع بولو.
--	---

ولې درېګوډۍ ؟

مور وایو، چې سپین می د برگ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برگ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه څیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی ګوډ. کندهاریان وایی ګوټ. دا پروا نه لري، که څوک یې ګوډ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوتی او که درېکونجی بولي، خو ماته یې درېګوډی نوم ښه بریښي. پام دی وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا څیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډۍ وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځککچپوهنې مینه والو خوښه.

د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

سرلیک

نامنظم	برابر پښیز	برابر اړخیز
کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابر دي.	ټول اړخونه او کونجونه یې برابر دي.
تیره کونجیز- درېګوډي		
ټول کونجونه یې تیره دي یانې له 90° درجو کوچني دي.		
ولار کونجیز		
درېګوډی، یو کونج یې ولار کونج دی		
پڅکونجیز		
درېګوډی یو کونج یې پڅ دی یانې له 90° درجې لوی دی. ($>90^\circ$)		

د کونجونو الفا، بیتا او گاما (α, β, γ) او اړخونو a, b, c له مخې د درېګوډیو مختلف تیورونه سره بیلیدي شي.

په پورته څیرو کې پورته بنی لور ته درېگودي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانې د یوه درېگودي پښی دی نابرابري وي. تیره کونجیز درېگودی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابر کونجونه لري، دوه کونجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابر او نا برابر کونجونو سره. هغه درېگودی، چې دوه کونجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابر کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي. دا لاندې ښه څیرل شوي دي، د څیرو سره

د درېگودي یو له بل بیل ډولونه

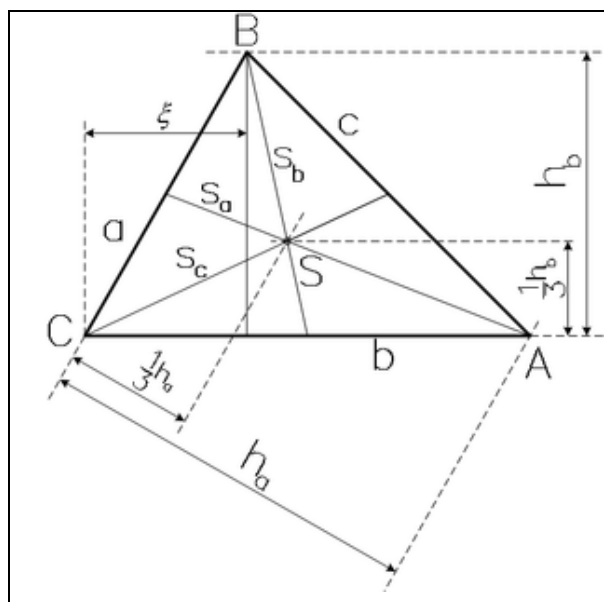
د درېگودي د پام وړ ټکی

- د درېگودي هر درې یوډوله کرښی، یو بل په یوه ټکی کې پرې کوي

- اړخنیمي په S کې

- د کونجینیمي یا نیموونکی په W کې-

- اړخنیمي د منځ ولاړې (کرښی) په M کې: دا هغه کرښه ده، چې د درېگودي د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو

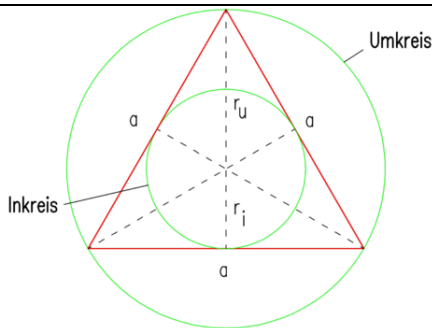
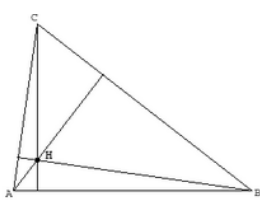
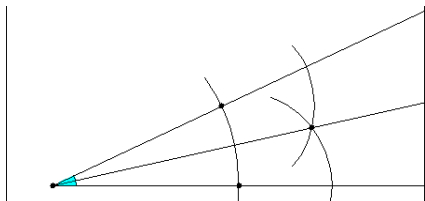
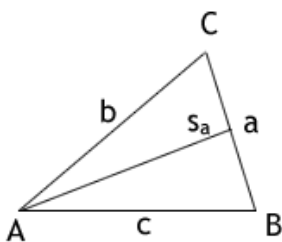
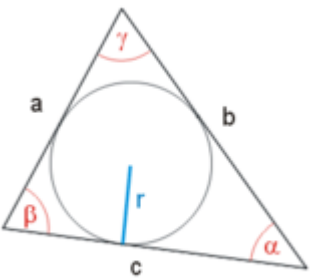


- جگړښی یا جگي په H کې

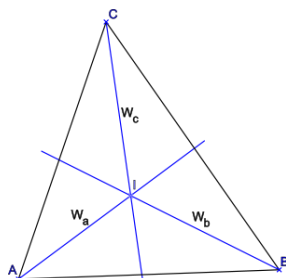
دا ټکی د یوه درېگودي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي څخه S دروندټکی (د ثقلمرکز)

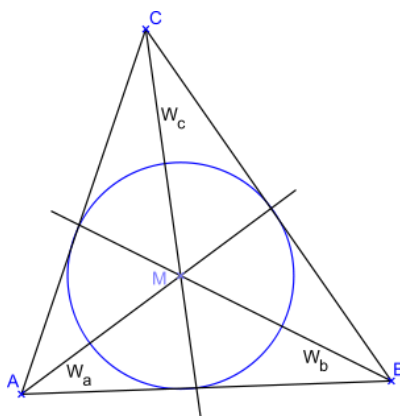
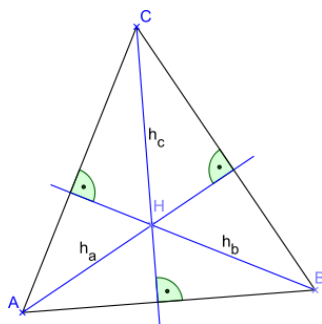
له دوي څخه W د دننه گردی منځ ټکورانگه او M د دباندې یا راگردی گردی یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالگردی منځ ټکی دی (وړانگه) r ، چاپیریالگردی منځټکی

    	دلته هڅیرو، چې څیری راوړو، د څیرنې سره یې : ای یدرگي دنوخ Inkrei Umkreis دهراتو-یا په راتلوگردي په لاندې څیره کې جگي کرښې وینو . دا هغه کرښې دج، چې را په گوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جگي لري او دا کر په یوه ټکی کې غوڅوي . په مخامخ څیره کې کونجیمی گورو او وینو، چې څنگه کښل یا رسم کیږي . په مخامخ څیره اړخنیمی کتل کیږي . دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نیمی . په مخامخ په درېکودۍ کې د خوندي گردۍ منځنۍ د وړانگې سره کتل کیږي .
---	--

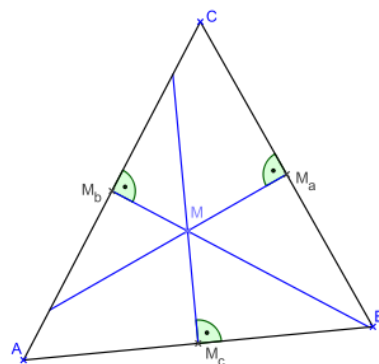
په لاندې درېگودي کې دې کونځنیمې دیو
جې په یوه ټکي سه پرې کوي



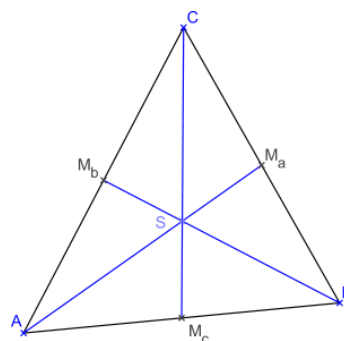
په لاندې څیره کې د درېگودي درې جگي
ورکړ شویو چې په یوه ټکي کې سره
غوڅوي



لاندې څیره په درېگودي کې په منځولارې
گربنې په گوته کویو چې پ لرونده ټکي
کې سره غوڅوي

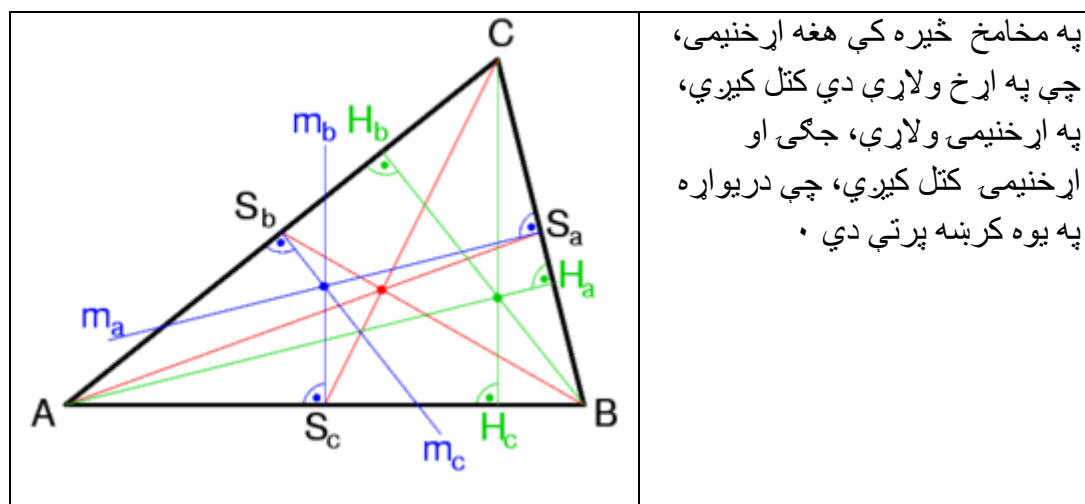
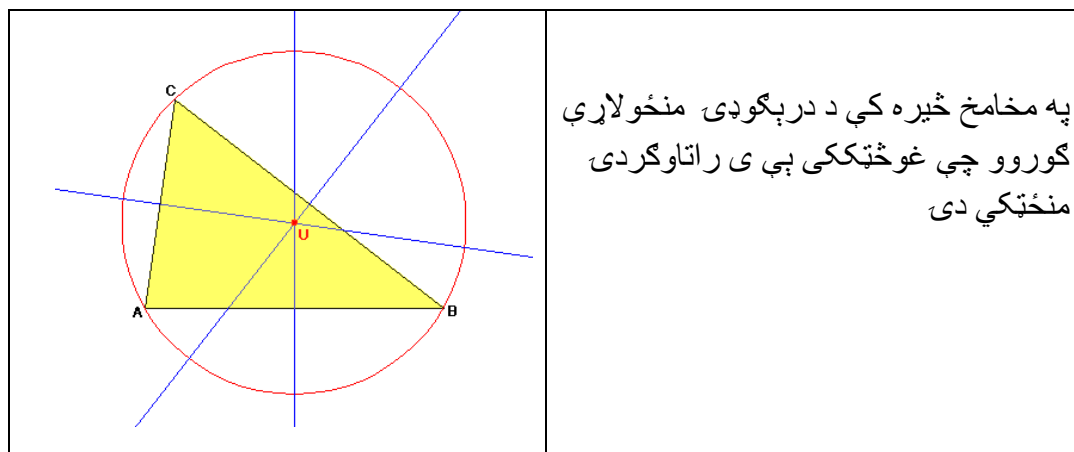


په لاندې مخامخ درېگودي کې درې
اړخنیمې ورکړ شوي، چې په یوه ټکي کې
سره غوڅوي



په مخامخ څیره کې گوروړ چې کونځنیمې
ی خونديگردي منځتني کې سره غوڅوي

سرلیک



د جګو غوڅتکې (شین)، راتاوګردی منځتکې (اسماني یا زرغون)، دروندتکې (سور) په
یوه کرښه پراته دي.

د درېګودیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېګودی یواځنی جوړیږي (همدا یو درېګودی
او بل، چې له دې درېګودی توپیر ولري نه شي جوړیدی) ،

-که د درېګودیو دریواړه اړخونه ورګر شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

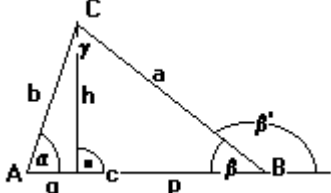
- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اړخونو کونجونه وپیژنو

یا په همدې ډول هغه دریګوډۍ، چې دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګرواینځ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډۍ، چې $n=3$ وي، درۍ ګوډۍ بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملۍ:

په عمومي ډول لاندې جملۍ باوري یا معتبرې دي چې بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

	۱ - د کونجزياتون جمله : په درېګوډي کی تول کونجونه 180° لري $180^\circ = \square + \square + \square$ په مخامخ څیره کې β د β' ګاونډی کونج دی
---	---

۲ - د دباندني کونج جمله: دباندۍ کونج د ناګاونډيو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی، له دې امله د درېګوډي د دباندنيو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمکچ مینه وال دې دا څیره له پورته څ پرې څخه پوره کړي :

۳ - درېګوډي نامساوات یا درېګوډي نابرابرونه نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دی

$$a + b > c ; a + c > b ; b + c > a$$

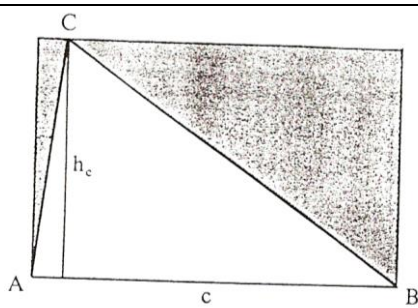
۳ الف-د هر درېګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یا مطلقه ارزښت څخه کوچنی دی

$$|a - b| < c ; |a - c| < b ; |b - c| < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیریال د دریواړو اړخونو زیاتون دی

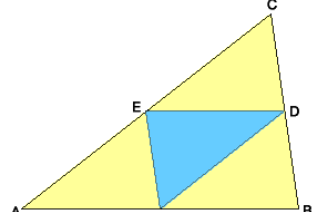
$$U = a + b + c$$

سرلیک

	۵ - د درېځوډۍ منځه‌واره (د هوارې دننه (لنډ: هواره)، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغې کښلې (نیغ) ولاړ جگوالی(لنډ: جگوالی) د ځل نیمایي دی $F = a.h_a/2 = b.h_b/2 = c.h_c/2$
---	--

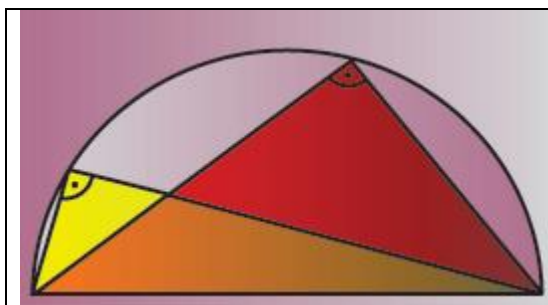
د ښوونې لپاره یې د یوه لنډ چل څخه کار اخلو: موږ د درېځوډۍ د جگړښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجیو غوڅوو او د درېځوډي په اړخ یی څیره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجیز درېځوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېځوډي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته څیرې څخه هم څرگندیږي.

	۶ - د درېځوډي اړخونو نیمایي هغه منځنۍ درېځوډۍ جوړوي، د کوم اړخونه چی نیمایي دومره اوږده وې لکه د پیل شوي درېځوډي(د وړانگي جمله دې وکتل شي
--	--

گورو چی د یوه درېځوډي جگۍ تل څرگند نه دی. مگر دا چی د یوه جگي له لارې یو درېځوډۍ په دوه برخو ویشل کیږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجیز درېځوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جگۍ بیا د پیتاگوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او یا د تریگونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې، چی هغه وروسته څیرل کیږي، لاس ته راوړی شو .

	Satz des Thales: د تالس جمله که AB د یوې گردۍ (دایرې) یوه نیمۍ (قطر) وي او C په دې گردۍ پروت وي، نو درېځوډي
--	---



ABC په C کې ولاړکونجيز دی.

د دې جملې په څې يا برعکس دی:

که چيرې درېگودي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په گردۍ پرته ده د نيمې AB سره

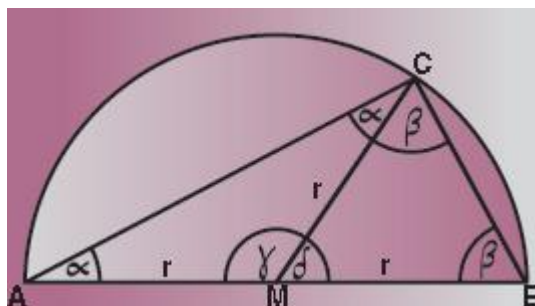
د جملې د بنوونې لپاره: دا برخه دې دا دلته د بنوونځي شاگردانو لپاره نه وي.

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

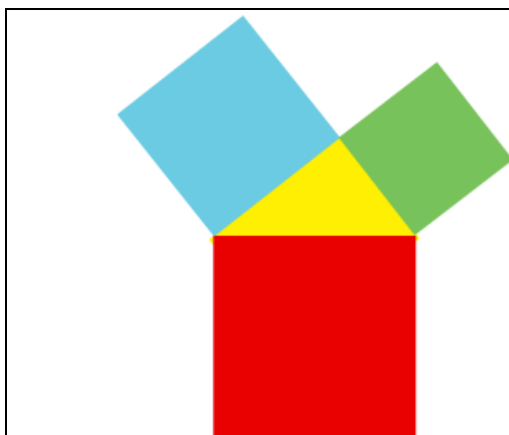
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



د پیتاگوراس (فيثاغورث (Satz des Pythagoras



په يوه ولاړکونجيز درېگودي کې ، چې کاتيونه يا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هيوپوتينوزی يا اوږد اړخ يې c سره پخ نڅبنه گوو ، باور لري

$$a^2 + b^2 = c^2$$

د دې جملې په څې يا برعکس

که د يوه درېگودي ABC د اړخونو a, b, c لپاره باور ولري

$$a^2 + b^2 = c^2 \cdot F = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b \cdot \frac{h_b}{2}$$

سرلیک

نو دا درېگودي په C کې ولاړکونجيز دی يا د پیتاگوراس جمله وايي، چې په يوه ولاړکونجيز درېگودي کې د هپيوتينيز (لوي اړخ) څلورۍ يا مربع د کاتيتونو (ولاړ اړخونو) د څلوريو يا مربعگانو د زياتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېگودی یو ولاړ کونج لري يانې ۹۰ درجي کونج

د درېگودی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هپيوتينوز *Hypotenuse* يا لوی اړخ بلل کيږي

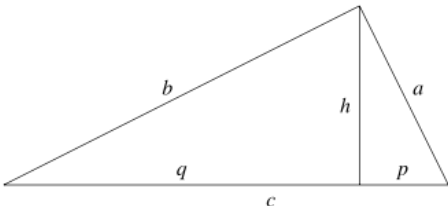
نور دوه اړخونه کاتيتونه *Katheten* يا ولاړ اړخونه بلل کيږي.

لاندې جملې بڼايو:

دا جملې ټولې يوځای راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجيز درېگودی $a + b + c = U$

$a \cdot b / 2 = c \cdot hc / 2 = F$

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاگوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید <u>د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو</u> <u>جمله</u>
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جگړو جمله

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېگودی جگی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

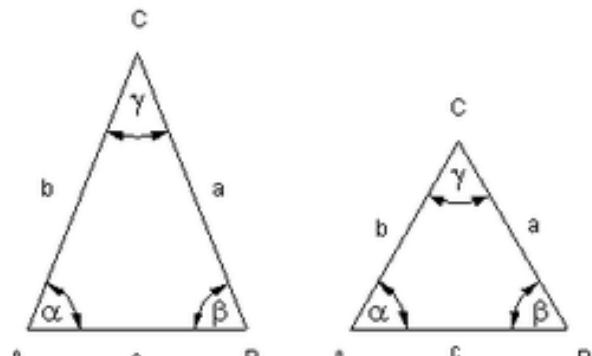
$$F = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b \cdot \frac{h_b}{2}$$

ځکه چې $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پیتاگوراس جملی له مخی) (پیتاگوراس جمله وگوری)

جمله : برابر اړخیز درېگودی :

د یوه برابر اړخیز درېگودي ټول درې اړخونه برابر دي، دننې کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېگودي منظمو پولیکونونو پورې اړه لري (۰ پولیگون لاتین ډیرکودیز) (Polygonen).

د برابر اړخیز درېگودي هر کونج ۶۰ درجې دی. برابر اړخیز درېگودي تره کونجیزو ډیریوگودیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ۹۰ درجو کم دي په دې برسیره یوه برابر اړخیزه درېگودی یوه برابر پښیزه درېگودی هم ده. ټول برابر اړخیز درېگودي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

 $\alpha = \beta$ $a = b$ $\alpha = \beta = \gamma$ $a = b = c$	په یوه برابر اړخیز درېگودي کې، د یوه اړخ کونجیمې، اړخیمې، په منځولاری-او جگی سیو په بل پریوځي. په ورته توګه دا د ضوندي گردی دباندي گردی او دروندتکی اړخ جگیو غوڅتکی لپاره هم په یوه برابر اړخیز درېگودي کې باور لري.
--	---

سرلیک

پورته څیره کې کین لور ته برابر پښیز - او ښي لور ته برابر اړخیز درېځوډۍ دی. هر برابر څه یې کښل شوي.

د یوه برابر اړخیز درېځوډۍ، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	Fläche A هواره یا سطحه
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	Höhe h جگوالی
$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$	د چاپیریال گردۍ وړانګه Umkreisradius r
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$	د خوندي گردۍ وړانګه Inkreisradius ρ
$u = 3 \cdot a$	Umfang u چاپیریال

د برابر اړخیز درېځوډۍ خویونه دې گران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هواړې یو له بل سره او همداسې دواړه شنې هواړې همغه منځهواره لري. یا په بل ډول: د سرو او شنو ولاړځوډیو هواړې یو له بل سره برابرې دي.

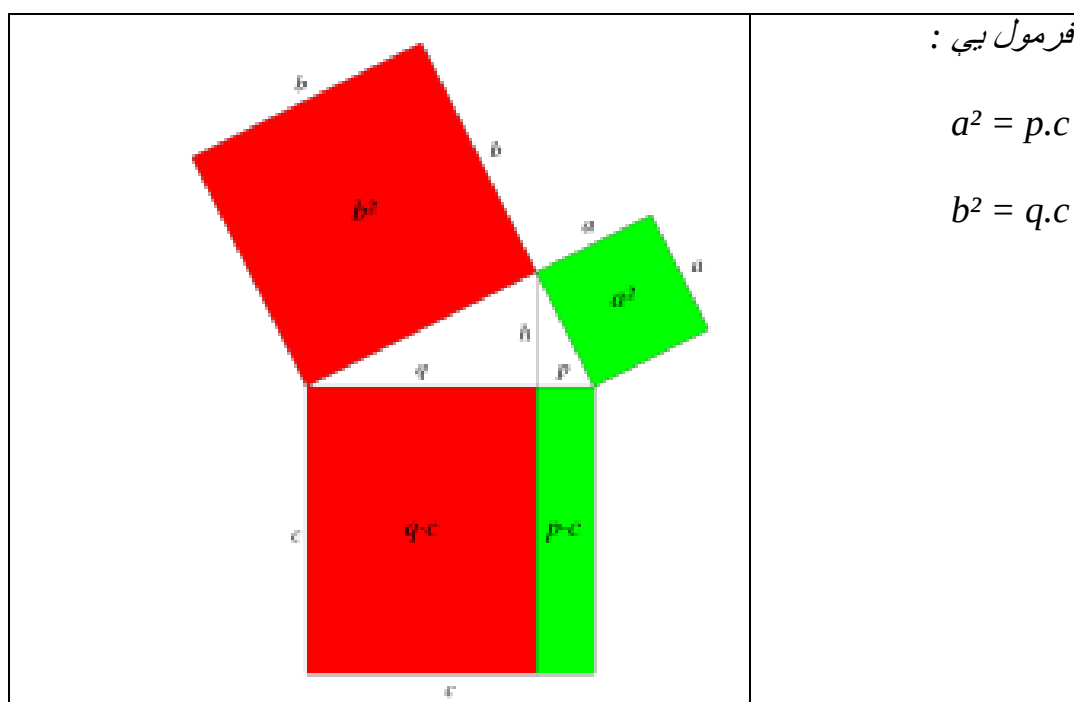
$$b^2 = qc$$

$$a^2 = pc$$

که a, b, c د ولاړکونجیز درېګوډي اړخونه وي، د هیپوتینوز c سره $\circ$ که دا درېګوډی په جګي h په دوه برخو وویشل شي او p یې هیپوتینوز ټوټه په a ده او q همداسې ټوټه ده په b ، نو باور لري:

په a څلورۍ د p او c ولاړکونجیز څلورګوډي او په b څلورۍ د ولاړکونجیز څلورګوډي، د اړخونو q او c سره هوار برابره ده یانې هوارې یا سطحې یې برابري دي.

لاندې څیره دې وکتل شي. پام دې وي، چې دا پورته بڼونه او دا لاندې سره برابري دي، خو یواځې څیرې یې بدې دي، دوه ځله بڼوونه پروا نه لري.

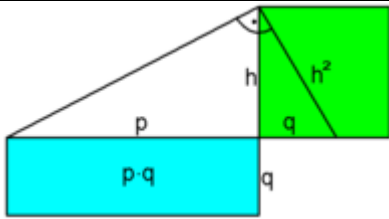


Kathetensatz د کاتیتینونو جمله: دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شنې هوارې هم د اړخ او څلورۍ د فرمول په څیر په لاندې ډول دي

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

Höhensatz des Euklid اویکلید جگجمله

	$h^2 = p \cdot q$ د جگجملې د بیاتیوني ښوونه (دا لږ ستونځمنه ده، خو زما یې دا څیره بدلون ښه راځي گرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کيږي):
---	--

د جگجملې ښوونه: د پیتاگواراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

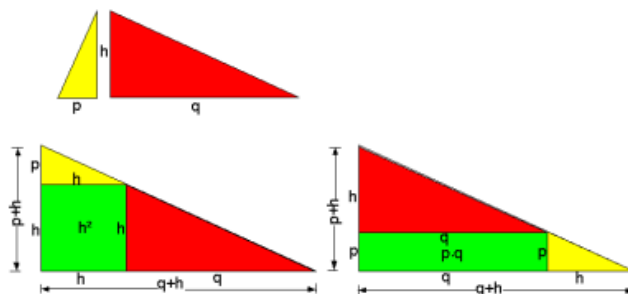
څخه ښوونه لاس ته راځي

په دیاگرام کې درې درېګوډي لیدل کیږي، یو له اړخونو a, b, c ، بل له اړخونو h, p, a او h, q, b . سره، د دې هر یوه درېګوډي لپاره د پیتاگواراس جمله باور لري:

$$h^2 = p \cdot q \Leftrightarrow q^2 = pq + q^2 + h^2$$

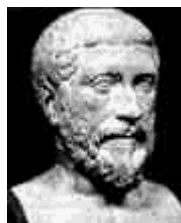
د پورته بیاتیوني له لارې ښوول کیږي.

جیومیتریکي ښوونه



دا څیره دې گران لوستونکی پام ته را وېولي، چې څنگه د بنوونې کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاگوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکودي کې د کاتیتونو(ولار اړخونو) د څلوریو یا مربعگانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلوری سره برابر دی.

دا جمله د پیتاگوراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاگوراس د ژوند سره برابر ځای نیسي. لکه لاندې په گوته کوي، چې دا انسان له دې خورا زیات وو.

دا یو له مانا ټک انسان دی «برتراند راسل Bertrand Russell -» ،،

دی د جلبازو مشر دی «هیراکلیت Heraklit -» ،،

Ludwig Börne لودویگ بورنی د هغه په هکله وايي «کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل. له هغې وروسته ټول سوخندر لرزیږي، تر هغې، چې نوي څه کشف شي»

سرلیک

پیتاګوراس په 570 دزکال پخواپه جزیره ساموس کې پیداشوی .
پلار یې سامي زرګر مَنِساربنوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په مېلت Milet او او انیکشیماندر کې یې زده کړې کولې

د پیتاګوراس بنوونه یا پوهنه Die Lehre Pythagoras

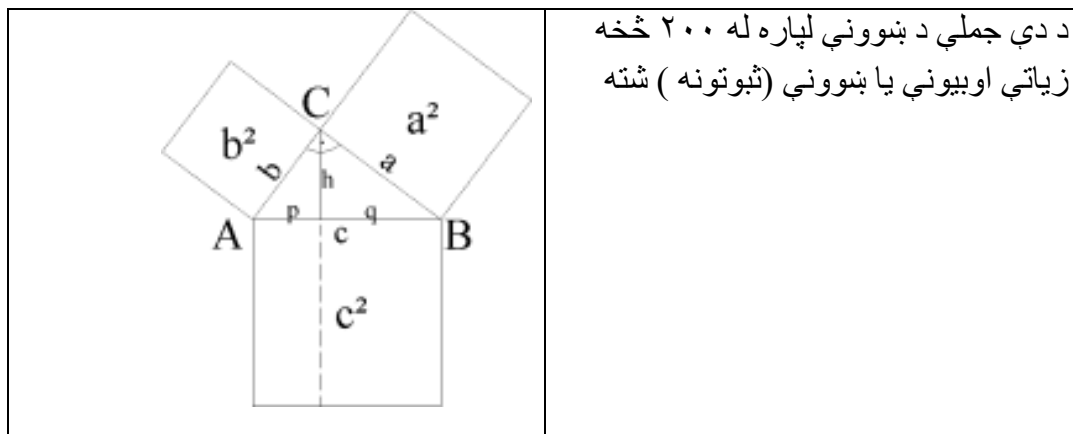
روح نه مري او ځای بدلوي، داسې، چې له یوه ژوندي څخه
وبل ته ځي

د پیتاګوراس جمله

په یوه ولاړ کونجیز درېګوډي کې د کاتیتونو (ولاړو اړخونو)
څلورۍ زیاتون د هیپوتینوز (اوږده اړخ) له څلورۍ سره
برابر دی

c^2	=	$a^2 + b^2$
$p \cdot c$ (د کاتیتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
کاتیت جمله Kathetensatz		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q))$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګورئ



د دې جملې د بنوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیوني یا بنوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او بنوونې
د یوونځلورۍ یا یوون مربع څیره

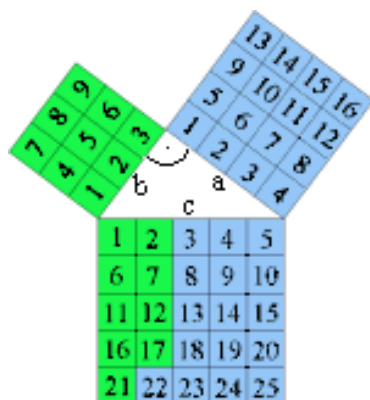
یو ولاړ کونجیز درېکودی لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. $a = 3\text{cm}$; $b = 4\text{cm}$; $c = 5\text{cm}$)

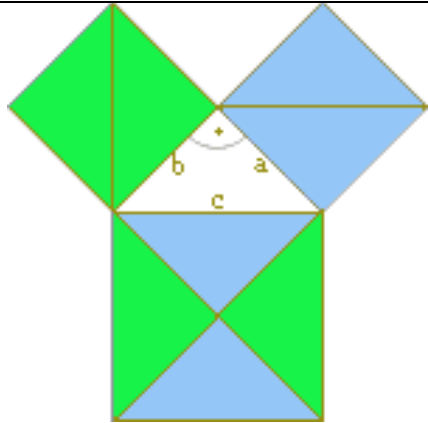
په هر اړخ څلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

$$25\text{cm}^2 = 9\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2$$

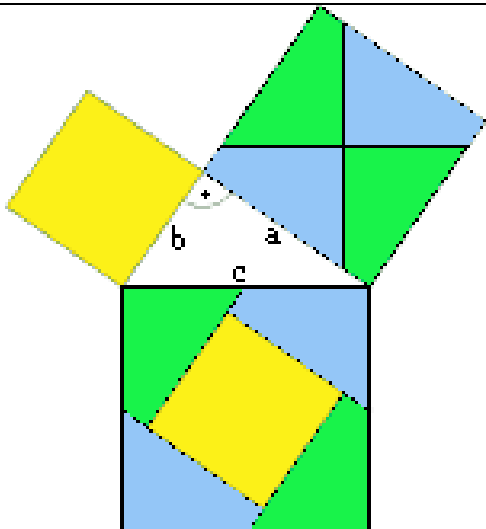
$$c^2 = b^2 + a^2$$



په لاندې کې یو برابرپښیز ولاړکونجیز درېځودی لرو:

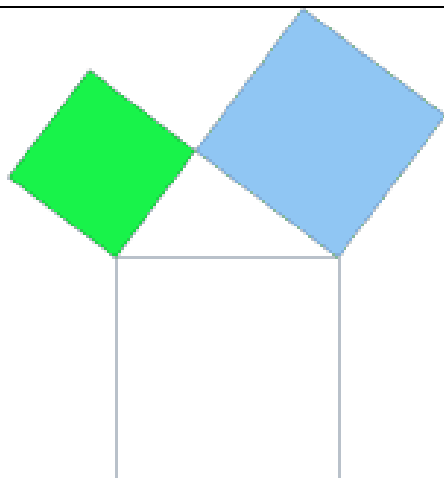
	ولاړکونجیز برابرپښیز درېځودی، چې اوږد اړخ يې (z.B. $c=5\text{cm}$) دی اړخونه a^2 او b^2 گورو، نو کره به ورته وگورو، چې څه شوي يانې ځنې څلوری نیمې شوي او ځنې بیا په څلور برخو ویشل شوي. که څیر لته وگورو، څه کره کولی شو؟
---	--

2.2 په خوبښه ولاړگودیز لرو

	دا په خوبښه ولاړکونجیز درېځودی دی (z.B. $c=4,5\text{cm}$) د تالس گردی د لویې کتیت څلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرگه کرښه وکارې او هیپوتینوز ته یوه ولاړه a^2 غوڅه کړي. گران لوستونکي دې له څیرې څخه پخپله په گوته کړي، چې د لوي اړخ څلوری د نورو اړونو د څلوریو سره برابره ده
--	---

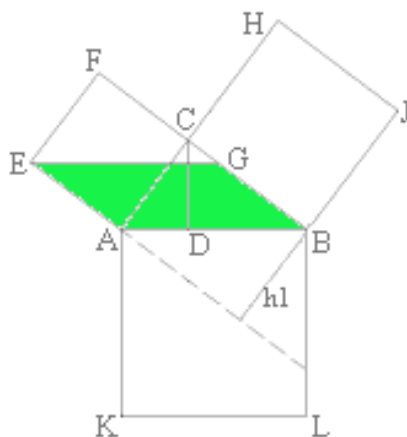
3. د څیرې ځمکچیزه لارښودنه

د لوړو گودونو یا کاتیتونو څلوری په درېځودي ABC کې دننه د غبرگ اړخیز په څېر
غوڅ کړی



غبرگ اړخیز د لوی اړخ څلوری (مربع)
کډتکي باندې د هغې تر یوه اړخ پورې و
څرخوی .

غبرگ اړخیز (مایلگوډیز) یوه ولاړگوډیز
په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هواري
کې دننه بیاتي کړی



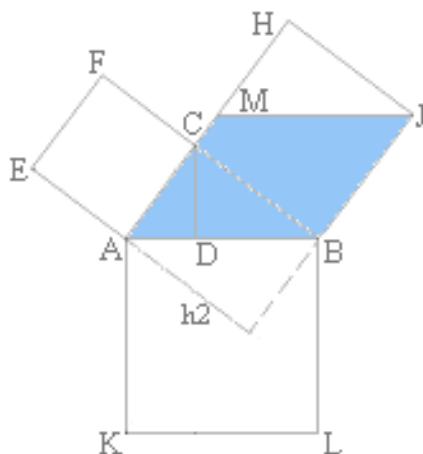
ښوونه : الف : بیاتیونه:

$$EACF = EABG . 1$$

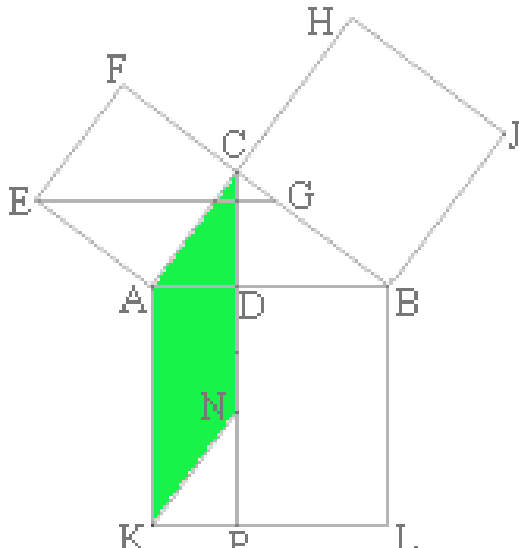
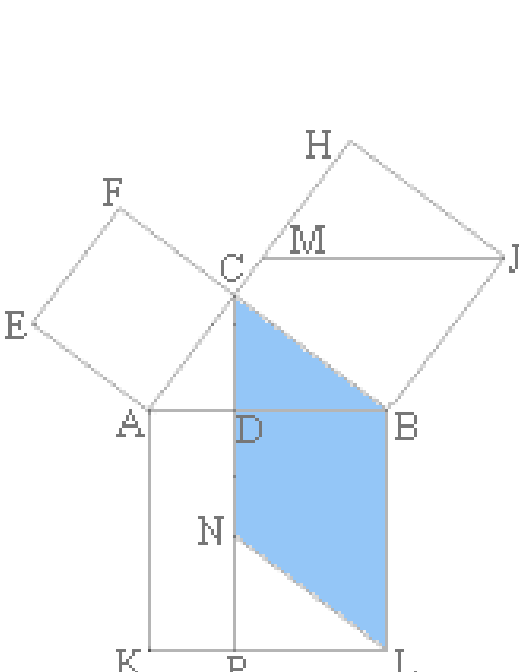
ځکه، چې برابر بنسټالین EA او برابر
حکې

$$BJHC = BJMA . 2$$

ځکه، برابر بنسټالین BJ او برابر
جگې (h) JH لري

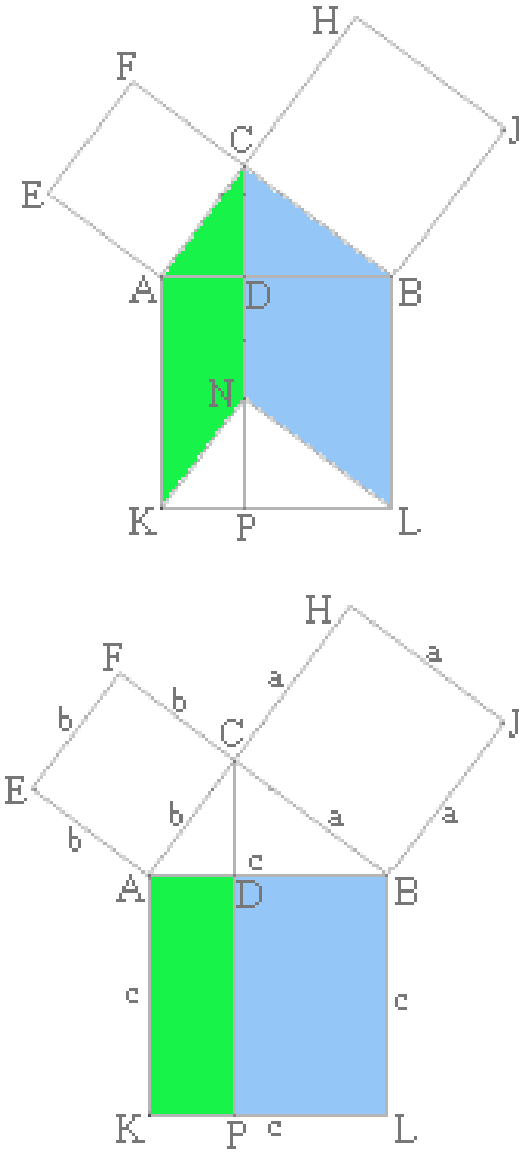


سرلیک

	ب. ۳. څرخون : $EABG = AKNC$ ځکه په A باندې $EA = AC$ د) یوې څلورۍ اړخونه $AB = AK$ (د یوې څلورۍ اړخونه)
	۴. $BJMA = BCNL$ ځکه، چې په B باندې $BJ = BC$ د) د یوې څلورۍ اړخ اوږوالی $BA = BL$ (د یوې څلورۍ اړخونه)

پ. بیاتونه:

۵. $AKNC = AKPD$ ځکه، چې همغه بنسټلاید AK سره نغه جگي KP لري

	۶. $NLBC = DPLB$ ځکه، چې همغه بنسټالین BL او همغه جگي PL لري د پورته دواړو لپاره لاندې څېره وگوري له مخامخ څیرې لاس ته اځي $a^2 = c \cdot DB$ $b^2 = c \cdot AD$ له دې لاس ته راځي : $c \cdot AD + c \cdot DB = C^2$ $b^2 + a^2 = C^2$
--	--

بیاتیونه پیل (لاندې څیره)

۱ - په هر دې اته درېکوديو څلورۍ داسې کيږدی، چې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې گور د یوې څلورۍ اړخونه د یوه درېکودي د اړخونو سره برابر دي .

سرليک

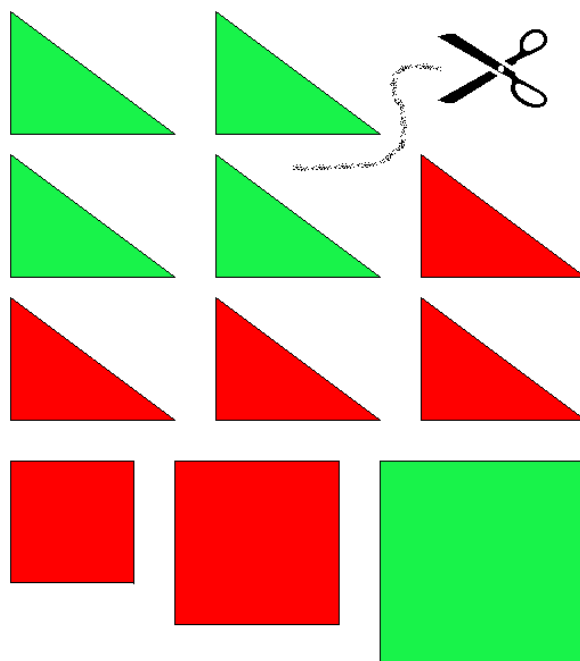
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه څلورۍ اوڅلور درېگودي) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څيرې (يوه څلورۍ او څلور درېگودي) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي.

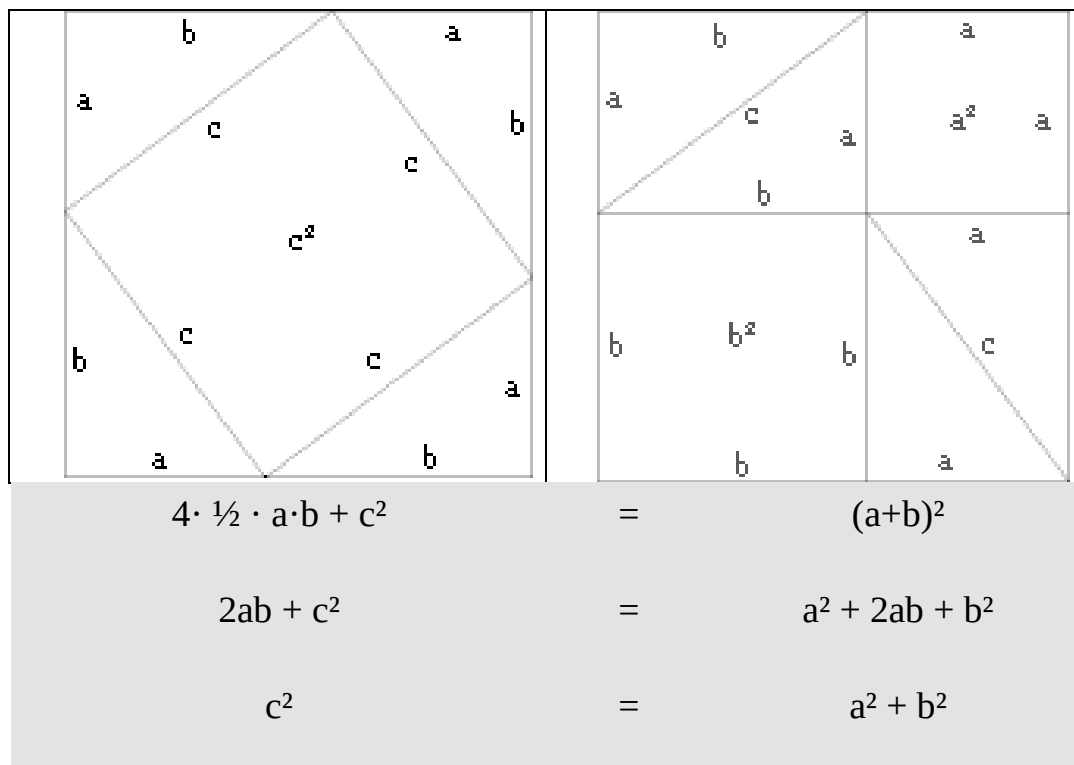
۴ - ځان ته باور پيدا کړه، چې دواړه داسې منځ ته راغلي څلورۍ يو بل پټه وي.

۵ - ټول درېگودي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweis د شميرلو بڼونه



دا څيرې دې د ځمکچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پيدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او گرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

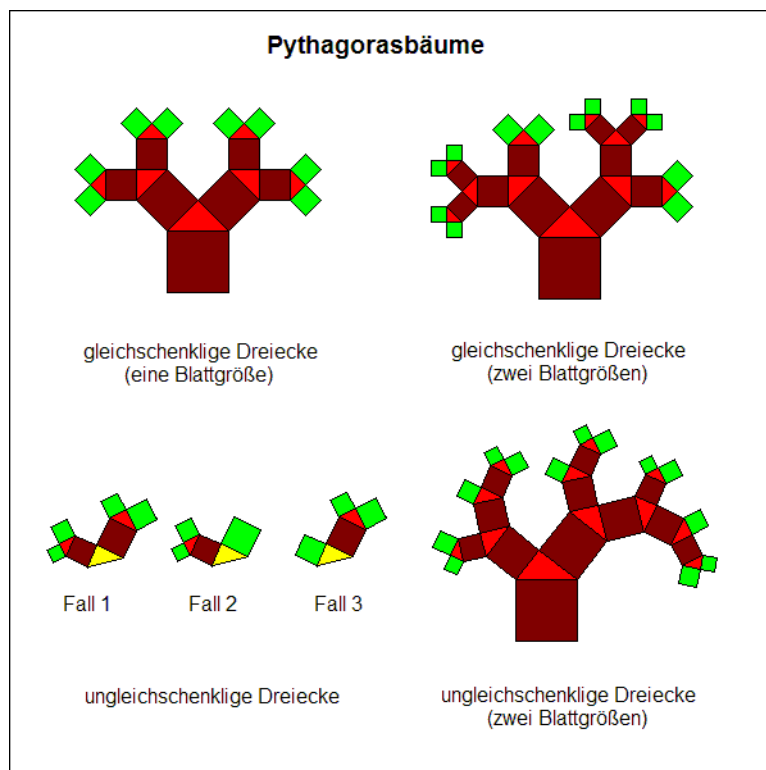
لاندې څيره کې د، پیتاگوراس ونه، لیدل کیږي

له کین و بندي-، له پورته و کښته لور ته

برابر پښیز درېگوډی (یوه پاڼه لویوالی)

- برابر پښیز درېگوډی (دوه پاڼې لویي)

حالت ۱ تر ۳ نابرابر پښیز درېگوډي- نابرابر پښیز دېگوډی (دوه پاڼې لویي)



تمرینونه:

۱ - لاندې دریګوډي وکارئ:

a) $a = 4 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $c = 9 \text{ cm}$

b) $a = 8 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $\beta = 50^\circ$

c) $a = 8 \text{ cm}$; $\beta = 40^\circ$; $\gamma = 50^\circ$

۲ - د هوارې فرمول په مرسته

وښایی: چې د یوه دریګوډي خواوې یا اړخونه او جګي ، یوله بل سره په خټه اړیکو یا ځانښوونو یا تناسب پرتی وي.

۳ - دریګوډی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) $a = 7 \text{ cm}$; $h_a = 6 \text{ cm}$

b) $c = 3 \text{ cm}$; $h_c = 5 \text{ cm}$

$$c) \quad a = b = c = 6 \text{ cm}$$

$$d) \quad a = 10 \text{ cm} ; \beta = 45^\circ ; \gamma = 90^\circ$$

۴- د هوارې اندازولو بل امکانات داسې په نامه د هیرون لیما ورکوي (د سکندريي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = U/2 = (a+b+c)/2 \quad \text{د سره}$$

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې گردې همداسې دننه گردیو وړانگو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.r = r.U/2 = \frac{r.U}{2}$$

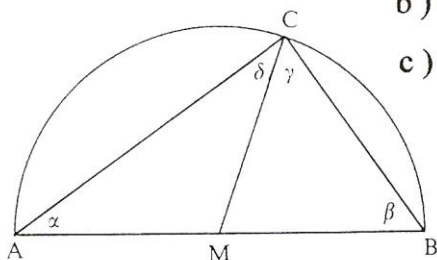
دلته د دننه گردې او r د دباندې گردې وړانگی دي. لاندې ټولې پاتې یا نامعلومې لویي د ټولو دریګو دیو لپاره وټاکي :

$$a) \quad a = 3 \text{ cm} ; b = 4 \text{ cm} ; c = 5 \text{ cm}$$

$$b) \quad a = 5 \text{ cm} ; b = 7 \text{ cm} ; U = 20 \text{ cm}$$

$$c) \quad s = 17 \text{ cm} ; \quad = 5 \text{ cm} ;$$

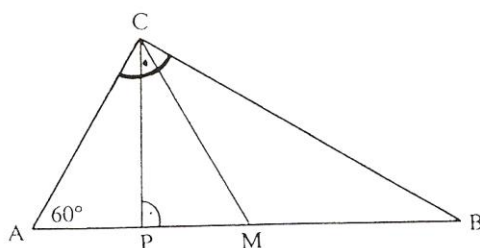
$$h_a = 13 \text{ cm} = h_b$$



څیره ۸۲

۵- د هندسې له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.
(څیره ۸۲)

سرلیک



څیره ۸۳

۶ - څیره ۸۴ یو ولاړکونجیز دریگوډی

وښایي د کونج 90° سره، وښایيچی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په

دري مساوي برخو ویشي.

۷ - وي دې a, b, c د پیتاگوراس

(فیثاغورس) گڼون درېگونۍ.

وښایي : $(n > m)$

$$a) \quad a = 2n + 1 ; \quad b = 2n^2 + 2n ;$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1$$

$$b) \quad a = 2nm ; \quad b = n^2 - m^2 ;$$

$$c = n^2 + m^2$$

۸ - د ولاړکونجیز دریگوډي پاتی برخی وښایي (نښوونه لکه په لیکنه کی) :

$$a) \quad h = 4 \text{ cm} ; \quad q = 5 \text{ cm} ;$$

$$b) \quad h = 7 \text{ cm} ; \quad b = 10 \text{ cm}$$

$$c) \quad p = 4 \text{ cm} ; \quad q = 12 \text{ cm}$$

۹ - د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریگوډي

جگوالی وښایي.

۱۰ - وښایي : په یوه مساوي اړخیز دریگوډي کی د دباندي گردی

وړانکه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ده او له دې سره سم د دننه گردی وړانکه په

$$\text{لاندې توگه ده: } \sqrt{3} = r/2 \quad \text{او} \quad \sqrt{3} = (a/6)$$

۱۱ - د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریگوډي هواره کله خورا

لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

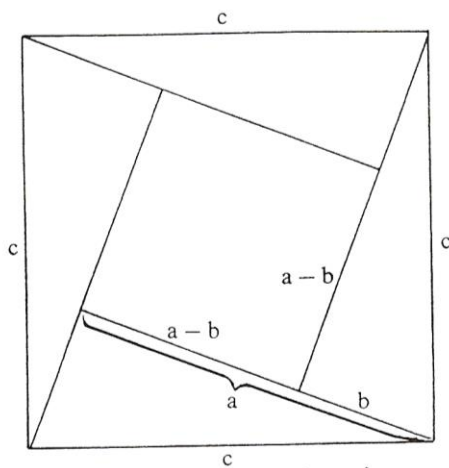
۱۲ - په یوه ولاړکونجیز دریگوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده،

بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپوتینوزي $(2x)$ نو x وشمیری.

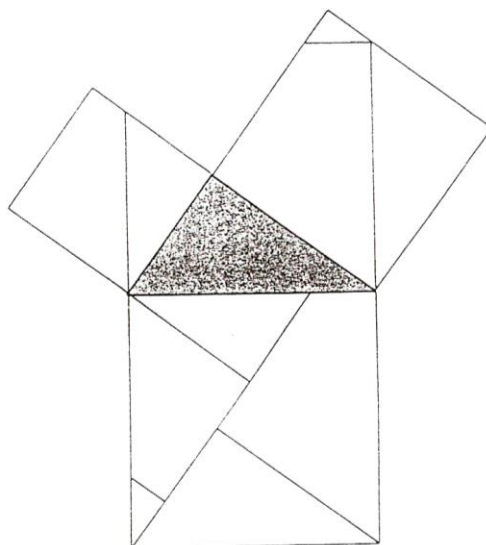
۱۳ - د یوه ولاړ کونجیز مساوی پنبیز دریکونجی هیپوتینوزې $c = 10 \text{ cm}$ ده،

کیدۍ شي له دې څخه د یوې پنبې اوډوالی وشمیرل شي؟

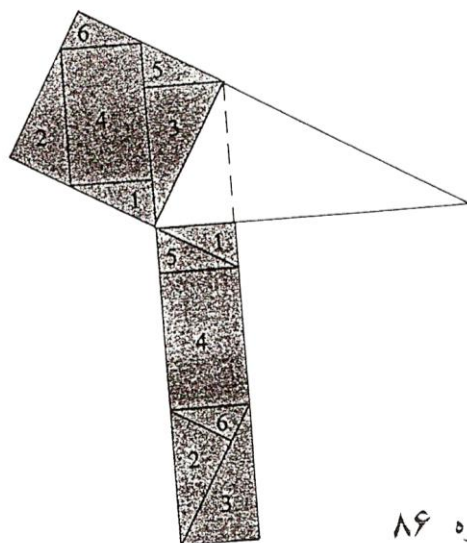
۱۴ - د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاگوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



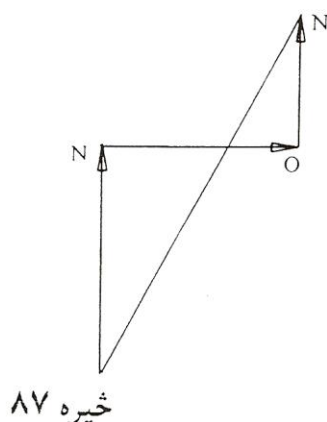
څیره ۸۵



څیره ۸۶

۱۵ - د یوې مربع څخه چې د یوې کانتۍ یا ژۍ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ-کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژۍ یا اړخ اوږدوالی یې ۴ سانتي متره وي: (الف) د کاتیت له جملې سره (ب) د جگجملې سره.

سرلیک



۱۶ - د کاتیت جملی صدق د

څیرونی په مرسته، د برخه

هوارو د مساویوالی بنوونې

له لارې وښایي» (څیره ۸۶)

۱۷ - په برخه دریگوډیو MPC

(څیره ۱۷) د پیتاگوراس جمله

استعمال کړی، او په دې بنسټ

د پیوتاگوراس جمله وښایي .

۱۸ - د مساویپنښ ولار کونجیز

دریگوډیو پښی داسی راکړ شوی

الف (۶ سانتي متره)

ب (۸ سانتي متره ،

پ (x سانتي متره ، هره اړونده

هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟

۱۹ - یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور

ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا

۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.

دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې

دی؟ (څیره ۸۷)

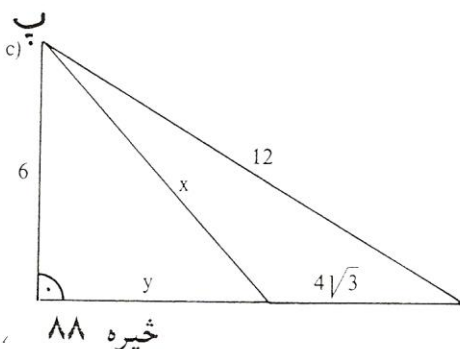
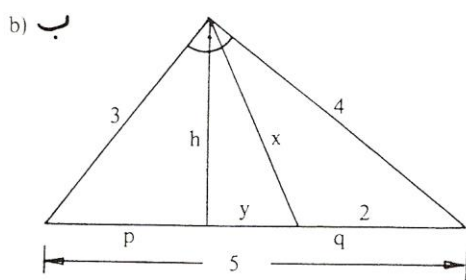
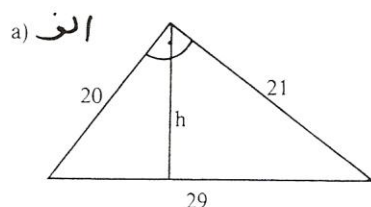
۲۰ - د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،

که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته

وځغلي؟

۲۱ - دا نامعلومی کرښی په څیره ۸۸ کی

وښایي.

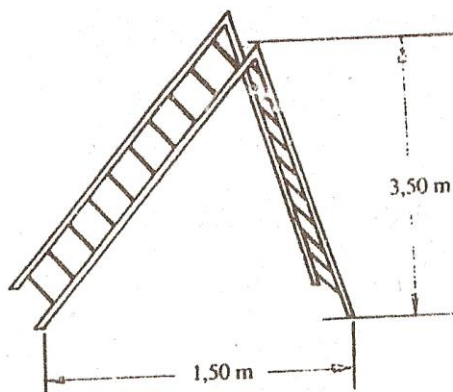


۲۲ - یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه

ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال

۴ ، ۱ متره واټن لري زینه خومره

جگه رسیږي؟



۲۳ - د یوې نقشې، چې د ۱ : ۱۰۰۰۰۰

اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي، چې

د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره

دی د جنگلایڼو ۲۵۰ متره او ۴۵۰

متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی

خومره اوږده ده ؟

۲۴ - د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز

دریځوډی دی

خیره ۸۹

الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او

جگوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چټ له

پورته ژی تر ناوی پورې .

ب) د یوه ۹ متره په سور او ۵،۳

متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره

جگوالی سره د بنسټفورم سور وشمیری،

۲۵ - په یوه رامارته زینه کی ټولی پوری مساوي

اوږدوالی لریهغه په څیورونه ۶۴ کی کښل

شوې د پوریو واټن وشمیری.

۲۶ - پو یوه مساوي پښیز دریځوډي کي چې

چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جگوالی

یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی،

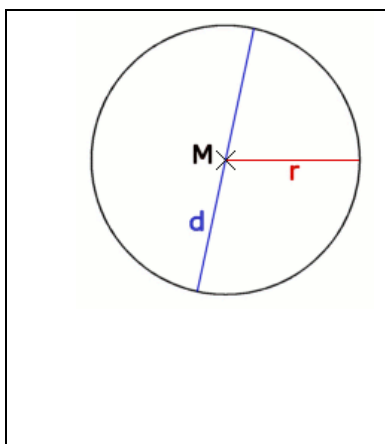
اړخونه خومره اوږده دي او جگوالی یی خومره اوږد دی؟
 ۲۷ - هر یو ټال په زوړند غځول شوي رسی تړلی، چی د تړلو ټکی یی د یوه مساویپنیز دریگوډي کونجټکي دي. که وزنپرونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر یو له بل لري په کبستی تړلي وي، نو کبستی ټال خومره لري ټال وهلی شي، که دریگوډیبنسټ منځټکی د لارجگ ټکي کی ۵،۲ متره د خپل ژورخای څخه جگه وي؟

۲۸ - کوم یو د لاندې دریگوډیو څخه نه شي کبسل کیدی؟

- a) $a = 3 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$; $c = 6 \text{ cm}$ b) $a = 5 \text{ cm}$; $b = 9 \text{ cm}$; $c = 7 \text{ cm}$
 c) $a = 7 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$; $c = 2 \text{ cm}$
 d) $a = 12 \text{ cm}$; $b = 13 \text{ cm}$; $c = 1 \text{ cm}$

۲۹ - ولی درې اړخیز دریگوډی هیڅوخت ولاړکونجیز دریگوډی نه شي کیدی؟

گردی (دایره)



پېژند یا تعریف

د یوې هواړې ټول هغه ټکی، کوم چی له یوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- یا برابر واټن r (په نامه وړانگه) ولري، گردی لاین یا لنډ: گردی بلل کیږي (مخامخ څیره)

$$k = \{X \in E \mid \overline{MX} = r\}$$

گردی سطحه یا - هواړه او گردی چاپیریال یا - محیط

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د r سره برابر وي گردی (موخه ترې گردی منځهواره ده یا ټیټک : گردیتوټه ځما په پام به بهتره وي که دا گردی چیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وټولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په گوته کره، هغه کرښه چی د گردی ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د گردی وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو.

پیژند: او هغه کرښه، چې گردی نیموي د گردی نیمونکي کرښه یا لنډ: نیمي (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نڅښه کوو.

پیژند

د گردی دننه کونج پوره کونج 380° درجي لري. گردی چاپیریال د وړانګي r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی گردی منځهواره د وړانګي r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړ شوی ګڼ گردی ګڼ بلل کیږي

$$\pi = 3,14159265 :$$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π می په Pi نڅښه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړیږ.

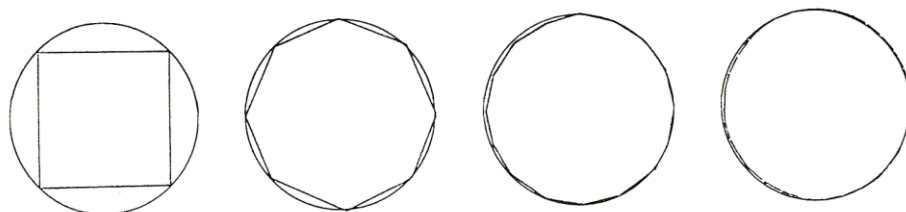
په پورته کې ورکړ شوی گردی ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځېدونی دی. له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پر یوډي کیدونکی ځیفر پرلپسې دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمړني ته مجبور یو، ځکه چه د جېشمیري د ګڼځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

څنگه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

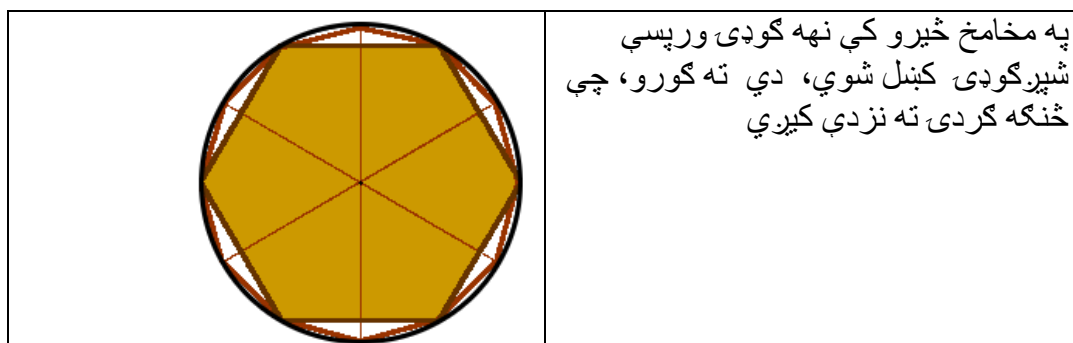
دا له اربنیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تگلار داسی پیل کیږي، چی په گردی کی یو ه څلوری یا مربع راگیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکڅیسف یا یو په بل پسې ۸، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لور یا جگ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

څیره ۱۱۹



یوې گردی ته د یوه n -گوډي له لارې نږدیونه (نزدې کیدنه)

څیره ۱۱۹ بڼای جی،



په پورته څیره څو څوگوډیز بریښي او ستره تری راتاو گردی

پورته څیرو کې یوې گردی ته د یوه n -گوډي له لارې نږدیونه (نزدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ۶۵۵۳۷ گوډی، چې گورو نزدې یا ټیک گردی ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ورسونو ته په یوه پاڼه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځتکی څخه د په همغه واټن د ټکو گڼون یا تعداد زیاتیري (یعنی د

گوډټکو تعداد یا گڼون) د مربع پیلگردي سره دا څیره تل نژدې کيږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځه‌واره هم همغه چاپیریالګردي ته نژدې کيږي. د گوډټکو زیاتیدو سره د گردۍ وړانګه هم لویيږي. د هغو چاپیریال او منځه‌واره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کيږي چی د چاپیر یالګردي او د منځ هوارې د ناپای ډیر n گوډونو سره n - گوډي سره یوځای پریوځي یا یوځای کيږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځه‌وارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستایل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دی:

n پیدایښتي ګڼ	U_n چاپیریال	F_n منځه‌واره
4	5,656854	2
8	6,122934	2, 828427
16	6,242890	3,061467
32	6,273096	3,121445
64	6,280662	3,136548
128	6,282554	3,140331
256	6,283027	3,141277
512	6,283145	3,141572
1024	6,283175	3,141572
2048	6,283182	3,141587
4096	6,283184	3,141591

وروسته به وکتل شي چی څنګه د گردۍ چاپیری او گردۍ منځه‌واره د تریکونوميټري یا دریګوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبلېګه:

د بانک مدیر ښاغلی کړ او غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځای نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمه (قطر) ولري

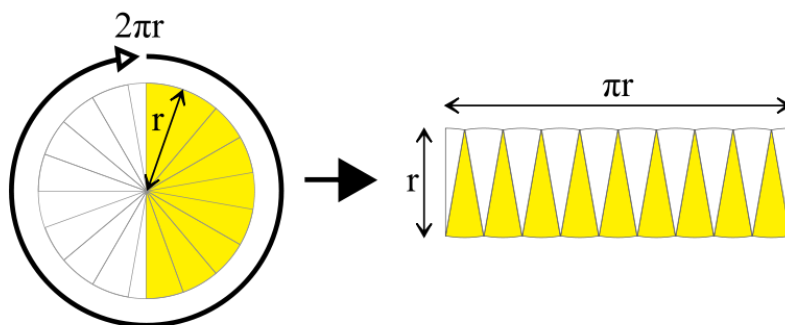
سرلیک

بسپا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځای په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره گران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه گران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی $U = \pi \cdot 1m = 6,248m^2$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځای په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی: $8.75 = 600cm$

د ۸۰ سانتي متره ځای د نفر په سر $80.8 = 640cm$. منځ ازښت یې $6,2m$ دی. پس د نېکو هیلو سره ټول ځای نیولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi \cdot 1m = 3142m^2$ او له دې امله $3,142.250 = 785,40$ یانې الماني مارکونه ازښت لري..

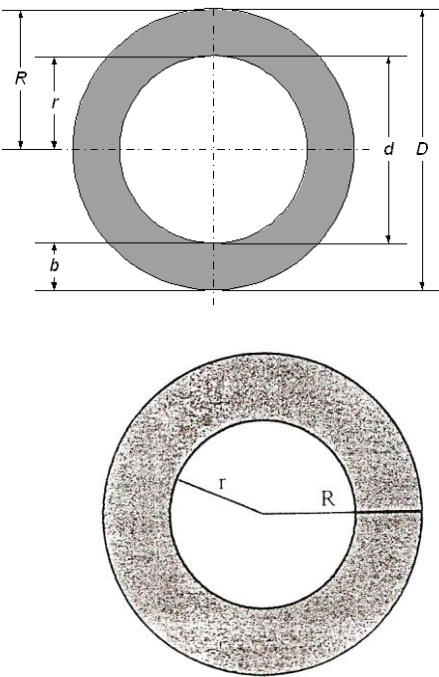
په لاندې څیره کې کتل کيږي، چې د گردی منځهواره نږدې



$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څیره کې د څیرې کوچنیوالي له امله د گردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهوږ دي)

گردنټوټه او گردیبرخه، گردیکړی

 خیره ۱۲۰	ډیر وخت دننه- یا خونديگردي له چاپیریالگردي کوچنی وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کړۍ منځ ته راځي، چې د هغې منځهواره د دواړو گردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي. جمله : موږ دوه گردۍ لرو، چې د چاپیریالگردي یا دباندې گردۍ وړانګه R او د دننه گردۍ یا خوندي گردۍ وړانګه r $F_K = \pi R^2 - \pi r^2$ ده، نو د $F_K = \pi(R^2 - r^2)$ $F_K = \pi(R - r)(R + r)$
---	---

بل ډول پې: یوې گردیکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د گردیکړۍ منځهواره د گردیبرخي د سور او دننه او دباندې گردۍ د نیمو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې گورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلېلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چې له غاړې یا ژړۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. بناغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتي متره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتې کیږي او گردیکړۍ چې له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

سرلیک

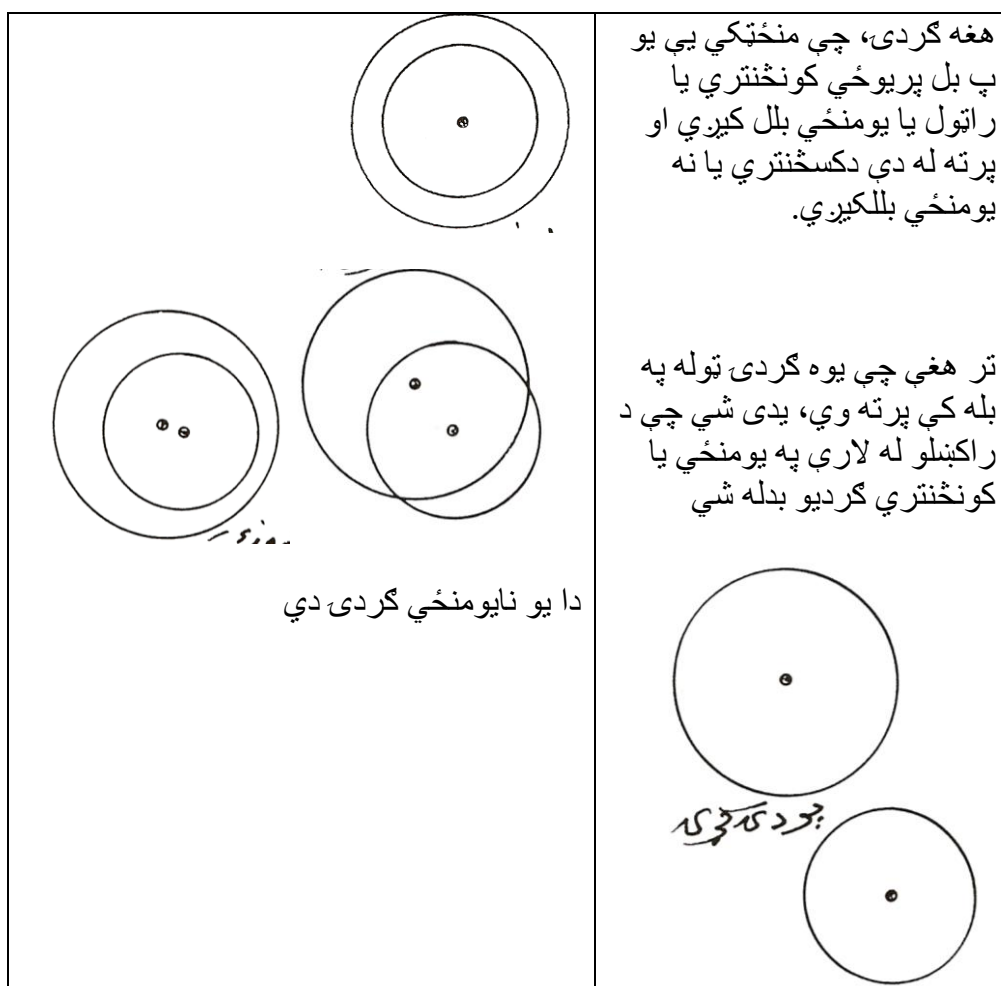
$$F = (0,9m)^2 \cdot \pi = 2,835m^2$$

د گردیکړۍ منځه‌واره او چاپیریال په لاندې ډول دي

$$F = 1,95m \cdot 0,05m \cdot \pi = 0,30m^2$$

$$U' = 2,095m \cdot \pi = 5,969m ; U' : 8 = 74,6 \text{ cm}$$

د داسې لږ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځای نیولی شي.



هغه دوه یا زیاتې گردۍ چې منځ ټکي یې یو په بل ډول پر یوې کونځنټريKonzentrie یا راتول او په غیر له دې اکسټینټريExzentrie یا ناراتول بلل کیږي. تر څو یوه گردۍ

ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې په کونځینتري گردیو یا راتولگردیو بدلی شي.

که گردی یو بل پوره پټې نه کړي، نو د گډو هوارو یا سطحو (= غوڅډیریو) یا گډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي . که گردی یو له بل سره گډ ټکي ونه لري نو دا گردی یو دبل سره پردی بلل کیږي .

څو پیژندونه یا تعریفونه:

د گردی هغه برخه گردیتوټه (سگمنت) Segment/ Abschnitt بلل کیږي، که چیرې یوه گردی د یوې کرښې له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوڅکرښه یا غوڅوونې یا ټوټه ووني (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوڅکرښه گردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د گردی له منځ څخه تیره شي، نو گردی په دوه برابر و برخو ویشي، چی دا بیا گردی نیمووني بلل کیږي. هغه غوڅووني چی له منځ ټکي تیره شي، د گردی نیمې یا لنډ: نیمې بلل کیږي. که گردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له گردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونې کرښه بلل کیږي . په گردی د غوڅکرښې دننه پرته برخه د گردی ټوټووني (Sehne) یا وتر بلل کیږي . ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده . په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا -لکه، چي ورسره بلد یو - کرښي دي . د یوه گردی څخه د دوه وړانگو په مرسته کیدی شي یوه برخه راغوڅه شي دا برخه گردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یا منځني کونج او لیندې (Bogen) b سره. مخامخ څیره ده

په لاندې څیرو کی د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کین وښی لورته:
گردیلینده Kreisbogen د گردی ټوټه ووني(ټوټووني) Kreissehne ،
گردی برخه Kreissektor ،

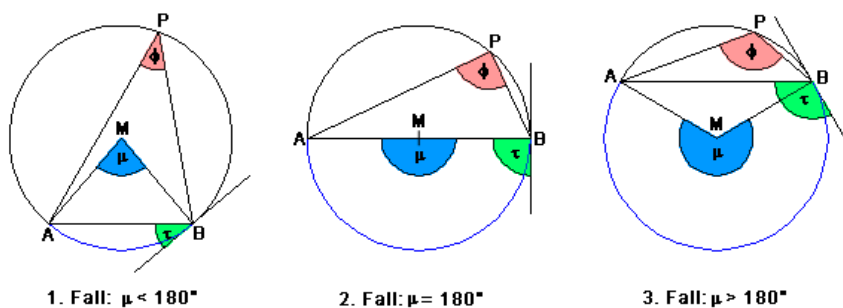
سرلیک



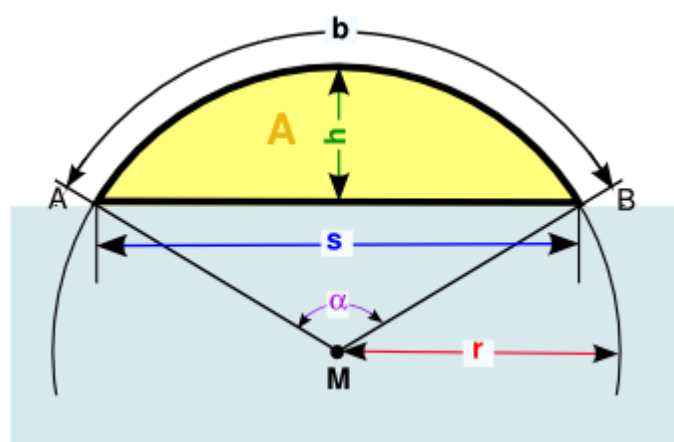
د

پورته ژباړه له کین څخه و بنې لور ته: گردۍ- لینده ټوټه وونې، گردې برخه، گردۍ ټوټه

په گردۍ کې د کونجونو ډولونه:



د گردۍ ټوټه



گردی توتیه Kreissegment ,

د گردی توتی لویی:

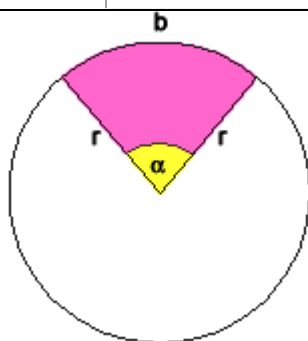
- α = منځتیکونج Mittelpunktswinkel
- b = گردی لینده Kreisbogen
- h = توتی جگی Segmenthöhe
- r = وړانگه Radius
- s = گردی توتیه وونی یا - وتر Kreissehne
- A = توتی هواره Segmentfläche
- M = گردی - منځتکی Kreismittelpunkt
- $A-M-B$ = ترنه Verbindung برابر پینیز درېگودی
-

د گردیتوتی فرمولونه

Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2},$	سطحه مخامخ فرمول <u>Flächeninhalt</u>
$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$	<u>Radius</u> وړانگه
$s = 2r \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right),$ $s = \frac{2h}{\tan \left(\frac{\alpha}{4} \right)} = 2h \cdot \cot \left(\frac{\alpha}{4} \right)$	<u>Kreissehne</u> گردی توتیه وونی (د وروسته لپاره دې په پام کې وي

سرلیک

	$h = r - \left(r \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2} \right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan \left(\frac{\alpha}{4} \right)$	Segmenthöhe د ټوټې جگوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلیندې اوږدوالی <u>Bogenlänge</u>
	$\alpha,$ $\alpha = 4 \cdot \arctan \left(\frac{2h}{s} \right)$	<u>Mittelpunkswinkel</u> <u>el</u> منځتکی کونج په درجه کې <u>(Gradmaß)</u>

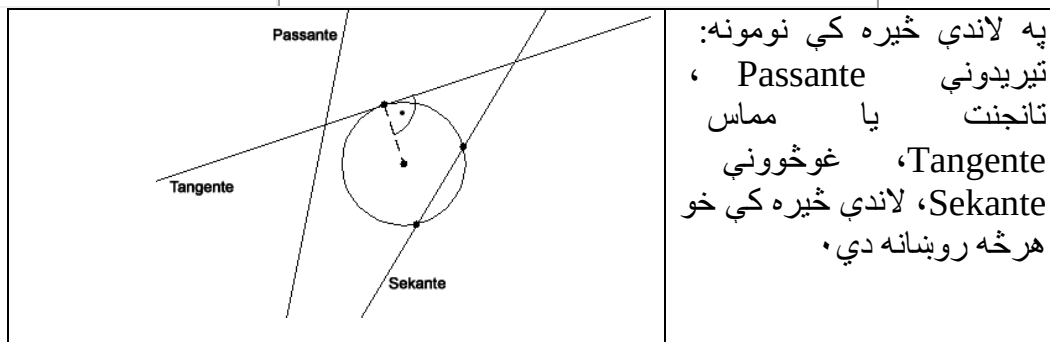


گردی برخه یا قطاع Kreissektor

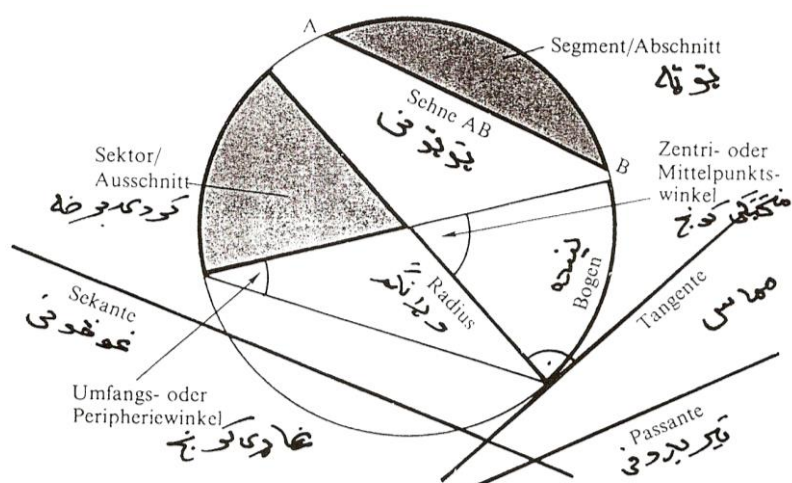
د گردی برخې یا قطاع فرمولونه

$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$	!Error سطحه یا منځه‌واره <u>Flächeninhalt</u>
--	--

$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$	د گردۍ لیندې اوږدوالی
r	<u>Radius</u> وړانګه
α	<u>Mittelpunktswinkel</u> (<u>Gradmaß</u>) منځتکیکونج (په درجه کچ)
$\pi \approx 3,1415926536$	<u>Kreiszahl</u> گردیګن یا - عدد



د پورته څیرې کې راوړي څه په لاندې څیره کې ټول په لاندې څیره کې ورکړل شوي دي

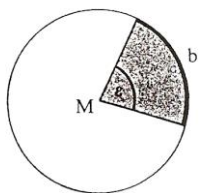


پیلېلگه: دیوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوگرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یا مصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کی، په پالستي، بنیښي او رنگ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنگه فلزونو او ربر ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی. یو گردیدیاگرام وکارئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي. د گردی ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي ده (۱۰۰ په سلو کی) (د جوړموادو برخه د گردنبرخی څخه عبارت دی. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه گردی برخه وي د منځکونج سره $360^\circ:100=3,6^\circ$ وی.

	یعني $4^\circ \sim 14,4^\circ; 6^\circ \sim 21,6^\circ; 9^\circ \sim 32,4^\circ; 75^\circ = 270^\circ$ خیره دی، چې د هر څه برخه کې ورنزدې ښوول شوي وي په یوې گردی کې وکینل شي یا لاندې
--	---

د گردی برخي خیره څرگندوي» د منځکونج چې د ε سره یې په نڅېنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

 د لویوالي د ده b سټی د بوفه یا نږدې اغوځی	$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360^\circ}$
---	--

د ډبل برابر وړ د دویمې برخې څخه باوري دي:

جمله: د گردۍ برخې د لیندې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{2\pi r \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r \varepsilon}{180^\circ}$$

د لومړۍ برخې څخه د سیکتور یا گردیبرخی لپاره باوري کيږي

جمله: د سیکتور یا د گردیبرخی منځه‌واره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{r b}{2}$$

اړیکې د مات $F_{Sk} = \frac{r b}{2}$ د لندوني څخه منځ ته راغلي $F_{Sk} = \frac{F \cdot b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$

بیلگه: د خام موادو برخې (بیلگه مخ) هواره خومره لویه ده، که د گردۍ دیاگرام ۵ سانتي متره وي ؟

$$F \text{ اوسپنه او فولاد } = (25 \pi : 360^\circ) \cdot 270 = 0,218 \cdot 270 = 58,905 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ پلاستیک } = 0,216 \cdot 32,4 = 7,069 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ رنگه فلزات } = F \text{ ریر } = 0,218 \cdot 21,6 = 4712 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ تیل } = 0,218 \cdot 14,4 = 3,142 \text{ cm}^3$$

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د گردۍ سطحه یا هواره ورکړي:

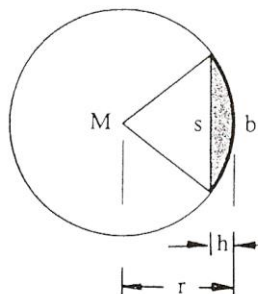
سرلیک

$$F = \pi r^2 = 78,54 \text{ cm}^3$$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پنبیز دریګوډي کمون دی.

څیره ۱۲۵

ګردی ټوټه



د دریګوډي هوارې لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5 r^2 \sin \epsilon$$

(تریګونومتری دی وکتل شي) او

او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د ګردیټوټی یا سګمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$

$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$

$$F_{Sg} = (\pi r^2 \epsilon / 360^\circ) - (r^2 \sin \epsilon) / 2$$

$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \epsilon / 180^\circ - \sin \epsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره ګټور نزدې ارزښت $F_{Sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی

پیلېلګه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د ګردیمیز په ځای به یو منظم اته کونجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟

لمړی ګردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د ګردی نزدې شمیرلو لپاره، د مربع

څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته څو او دې د اړخونو او ردوالی s شمیرو.

منځولاره m ، د اته کونجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د دگر دیتوتی
جگولی h د پیتاگوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

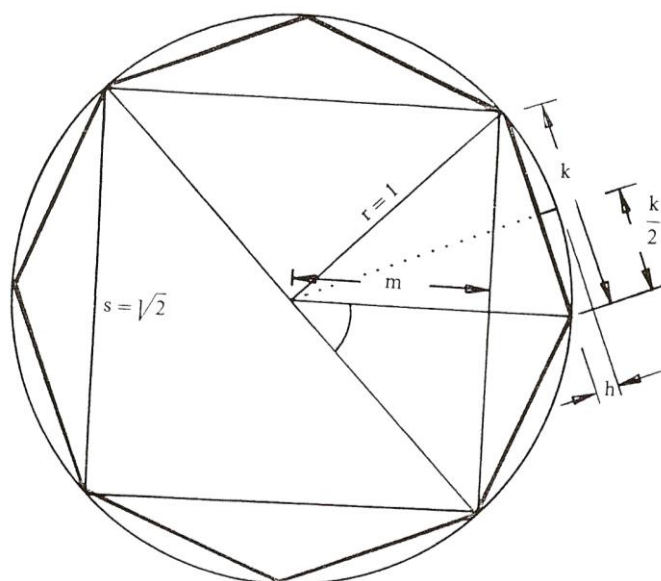
$$s = \sqrt{2} \cdot 1 = 1,414 \text{ m} ; m = \sqrt{1 - (1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$$

$$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756 \text{ m}$$

$$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$$

د 45° له امله $b = 0,393 \text{ m}$ دی. او له دې سوه

$$F_{\text{توتیه}} = 0,5 \cdot [0,393 \cdot 1 - 1,414(1 - 0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$$



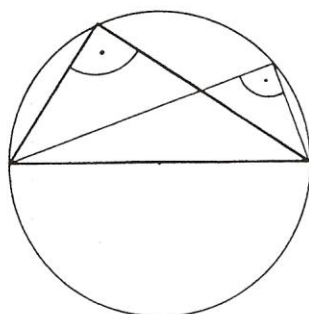
سرلیک

له دې څخه په هر صورت د بنسټیزې میز جوړېږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په
 لاندې توګه ده: $0,312 \text{ m}^2 = 8.0.039$. میز اوس لاندې هواړه لري
 $F_0 - F_{\text{غورزول شوې}} = 2,828 \text{ m}^2$
 او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګردیهواړه د وړانګې $r = 95 \text{ cm}$ سره. د
 کیناستلوځاي سور (k) حتي زیات شوی، چاپیری اوس $U = 8.0,765 = 6,123 \text{ m}$

دی. نږدېونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039 \text{ m}^2$ او
 داسی نور.

تریګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:
 $F_{\text{ټوټه}} = \pi \cdot 1.45 : 360 - 0,5 \cdot \sin 45^\circ = 0,039 \text{ m}^2$
 او داسی نور. څیره

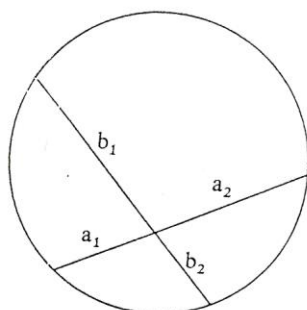
ګردیجملی او ګردیځویونه



څیره ۱۲۷

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري- یا ژی
 کونج ولاړ کونج دی (څیره)



$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

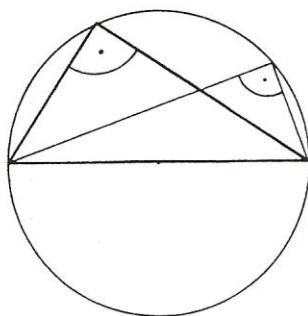
د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کې
 دننه یو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرځو

تریگونومتریکی حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{پوته}} = \pi \cdot 1.45 : 360 - 0,5 \cdot \sin 45^\circ = 0,039 \text{ m}^2$$

او داسی نور . خیره

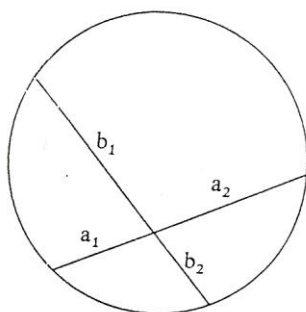


گردیجملی او گردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه گردی کی هر پریفری- یا ژی
کونج ولاړ کونج دی (خیره)

خیره ۱۲۷



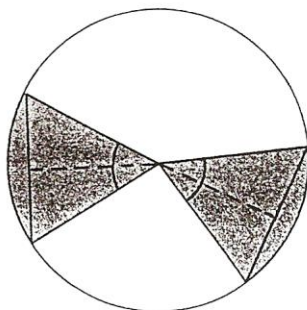
$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

خیره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه گردی ټوټونی په گردی کی
دنده یو بل غوخی کړي نو د غوخیږخو
خل (ضرب) یی یو ثابت دی

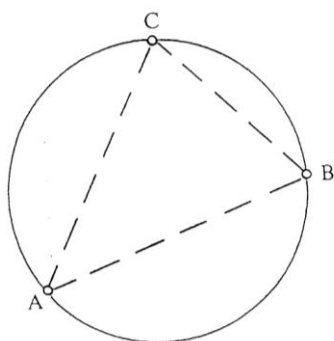
د مساوي ټوټوونو جمله



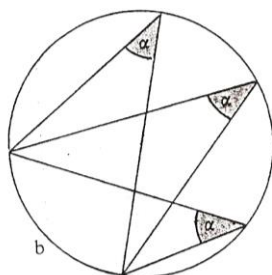
خیره ۱۳۱

مساوي اوږدې گردیټوټی د گردی له منځتکي
مساوي فاصلی لري، مساوي منځتکي کونجونه،
مساوي گردیلینده، او مساوي گردیټوټی او
مساوي گردیبرخی لري .

د چاپیرگردی جمله



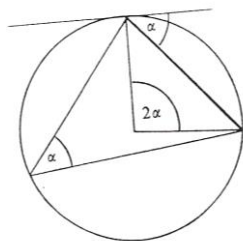
د درې ټکو A, B, C لپاره یوه گردی موجود ده چی د دریواړو ټکو څخه تیریری: دا د دریکونجی ABC چاپیرگردی بلل کیږي څیره



د پریفري - یا ژیکونج جمله

څیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول پریفري - ژی کونجونه مساوي دي



د منځتکي کونج او پریفري - یا ژی کونج جمله:

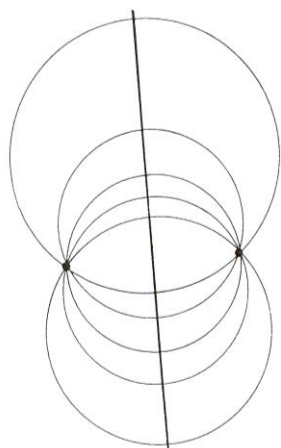
یو منځتکي کونج دوه برابر دواړه لوی دی لکه په دې تړلی پریفري - یا ژی کونج (چاپیریالکونج) مخامخ څیره.

د منځتکي کونج او د تانجنت کونج - او ټوټونکونج جمله:

د منځتکي کونج دوه برابر دواړه لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت - یا ټوټه وونی کونج.

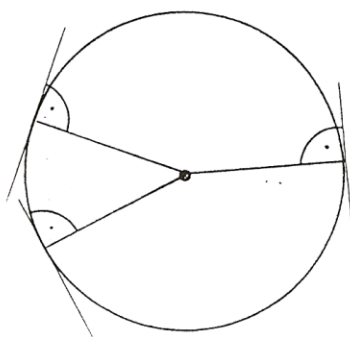
د گردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوڅوي:

د ټولو گردیو یا دایرو منځتکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوڅویو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاين (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ څیره.



د وړانګې او تنجنت جمله

په لمستګي پرته وړانګه او اړوند
تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ
پراته دي.

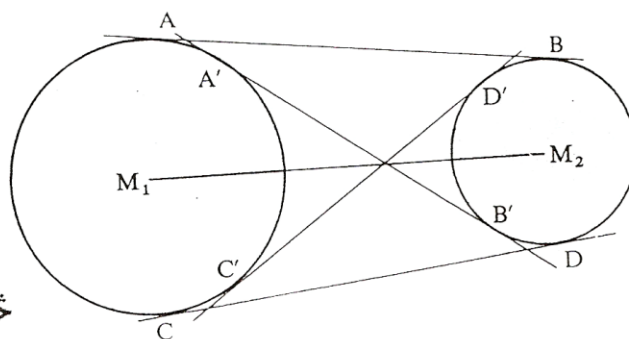


څیره ۱۳۶

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دنننی (د باندي) تانجنتونه
نومیري که د دوه ګردیو د منځ ټکو کرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې
دوه ګردي ګډ دننني او د باندي تانجنتونه ولري، پس د دواړو تانجنتونو غوڅتوب
همغه اوږدوالی لري.

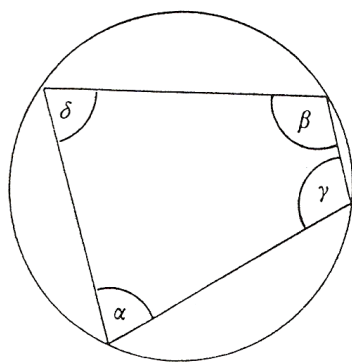
$$|AB| = |CD| \quad (=>) \quad |A'B'| = |C'D'| \quad \text{په همدې ډول}$$



څیره ۱۳۷

سرلیک

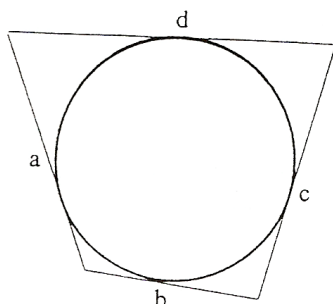
د ټوپونو څلورگودي جمله



څیره ۱۳۸

د ټوپونو کونجونه چی مخامخ
پراته دي یو بل سره 180° باندې
پوره کوي.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$



څیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورگودي جمله

د تانجنتونو په څلورکونجي کی د مخامخ
کونجونو لویوالی د نورو مخامخ کونجونو
سره مساوي دی.

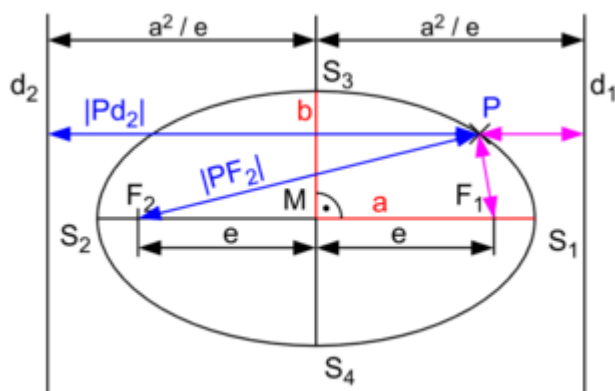
$$a + c = b + d$$

ایلیپسی (بیضوي یا هگی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبللگه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا
چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

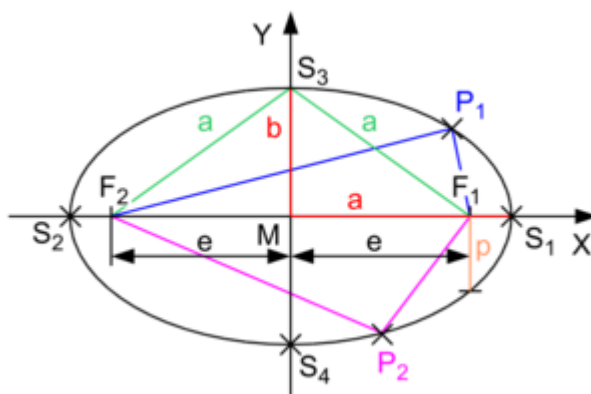
پوښتنه رامنځ ته کیږي چی: داسی یو را گردشوی ښکلی شکل، چی گردی
نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی،
داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې څیره ښایي. چی هر د
غارې ټکی دوه ټکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغو ټکو P ډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F_1 او F_2 سوزېدښکی یا بهتره سوزونښکیو (څخه ثابت یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیري

لاندې واټنونو یا فاصلو ته سوزونوړانگی وايي. $|PF_1| = r_1$ او $|PF_2| = r_2$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

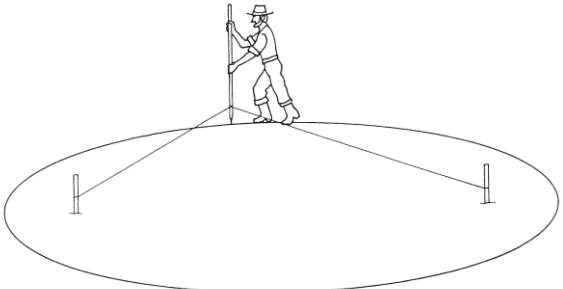
منځ ټکي (وړوی M په O ته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لایني ایکسټرنریختایت (lineare Exzentrizität) یا لایني ناراتوله وایي. ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

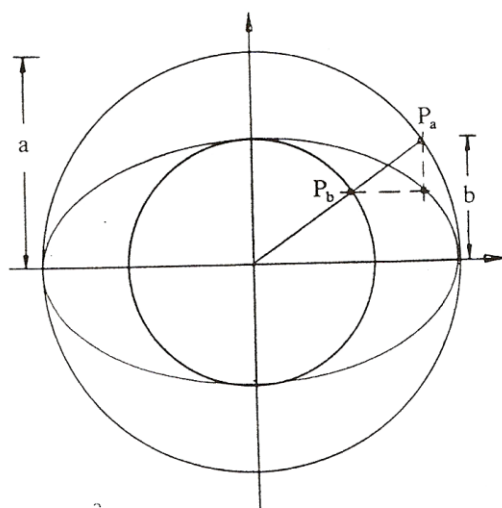
$$I.....r + r = 2a \wedge II.....a^2 - b^2 = e^2$$

په دې کې a او b د ایلیپسی لوي او وړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کې وټاکل شي، II د پېوتاگوراس له جملې لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي. دواړه ناپانکربنې چې د سوزونټکي تیریري او په دې په O کې ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي. د خوښي په ټکی P کې هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونورانگو ترمنځ کونج نیموي.

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

دا څیره دې گران لوستونکي د تمرین په توگه وباسي. د یوې رسی، چې په 2 a اوږده وي، په دواړو سروونو کې موري وتری او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل (خوزیدونکی) موري یا لرگي په مرسته دا پری راکښ کړی یا راکاری او وگرځوی، دلته کوم شکل چې پیداکړي ایلیپسی ده او دواړه د پری د سروونو ټکي چې موري پرې وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلی متر کاغذ کونځینتري یا راټولو گردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکړي، چې سړی د یوه ټکي دوه گردی د a او b وړانگي ووهي او هره د خوښي وړانگه د نننۍ گردۍ په Pb او دباندنۍ گردۍ په Pa کې غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هر چیرته یو د ایلیپسی یا هگۍ یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسې پیدا کیدی شي. پیژندل کيږي چې هر 2 b اته غبرگ ټوټونی

 څیره ۱۴۱	د $k = a / b$ فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خوري ددې فاکتور k په اندازه $r \Rightarrow \pi r.(k.r) = F(hagai, baizawy)$ او له دې چې $r = a$ او $k.r = b$ دلته r د گردۍ «لویه نیمه اکسی(محور) ده جمله: دایلیپسی هواره ده $F = \pi ab$:
---	--



څیره ۱۴۲

د ایلپسی چاپیرونی په ساده ډول
نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی
په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې
شمیرنه بسیا کوي.

جمله : د ایلپسی چاپیری:

$$U \sim \pi (1,5 \cdot [a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا گردی ته ورته ایلپسی. دا

په دې مانا چې $a \sim b$:

$$U \sim \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د گردی چاپیری ته ځي:

$$U = \pi (1,5 \cdot [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi (3a-a) = 2\pi a = 2\pi r \Leftrightarrow$$

او یا په په همدې توگه یا

$$U = \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi \cdot \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلگه:

کوم خورا لویوالی د ښاغلی کړاو میز په ایلپسی یا نیضوي یا هګي څیره لږودی
شي؟

لوي محور $a = 1\text{m}$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95\text{cm}$ ، داچې میز باید د
درځ ژوروالي پورې غوڅ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi \cdot 1,0,95 = 2,985\text{m}^2$$

چاپیری کیږي:

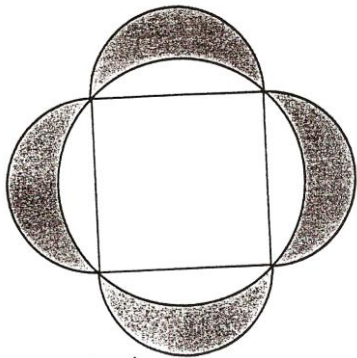
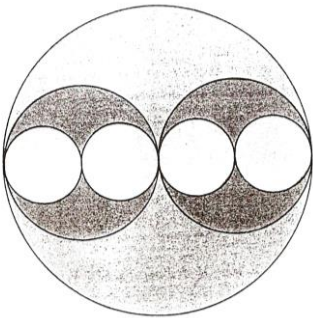
$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}) 6,127 \text{ m} \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردۍ فورم ته یا ګردیڅیرې ته نزدې فورم نیسي $U \sim 6,128 \text{ m}$. له دې امله هګیڅیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

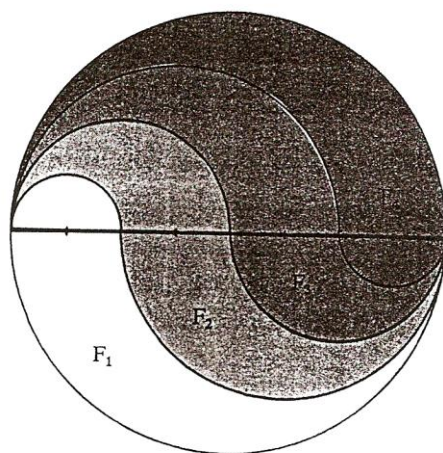
تمرینونه

- ۱ - په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارک Yosemite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چی وړانګه یی ۷ ، ۴ متره وي؟
- ۲ - د لاس ساعت دقیقه بنونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی (خرخونمحور - څوکه)، څوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کی څومره لار وهي؟
- ۳ - ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي (اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیری یی څومره دی؟
- ۴ - په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پری غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیری څخه یو متر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکي چمتووالی له لارې په هرځای کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سړۍ ددې ترمنځ یوه د (گیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځای کړای شي؟
- ۵ - د غوڅهواره به یی د ځمکي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟
- ۶ - په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

اندازه لري وي؟

	۷ - د گردی [اږیال څنگه تغیر خوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډول نیمه شي؟ ۸ - وښایی: د مربع هواره د څلورمې میاشتو (سپوږميو) د هواري سره مساوي ده؟
	د څیرې سره سم د گردیو هوار متن یا د هوارو دنده د مساوي وړانګو سره وټاکي. د اهره یوه د لویې گردی په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایی، چط څلورو وارو گردیو چاپری د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راجاپیره یا دباندې گردی چاپري. ۱۰ - د یوې مربع د باندې او دنده یوه گردی راگرځیدلي. د دواړو گردیو هواري یو بل ته څنگه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟

۱۱ - د دوه گردیو منځ ټکی د مساوي وړانګې $r = 7,2$ cm سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه. د دواړو گردیو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟



څیره ۱۴۵

۱۲ - په یوه گردی، چی وړانګه

یې $r = 10$ cm ده، که

یوه گردیکړی کینول شي،

چی هواره یې دومره لویه ده

لکه د دنده گردی هواره. د

دباندې گردی وړانګه به

څومره وي؟

۱۳ - د یوې گردی

برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په

څیره ۱۴۶ کې چی ورکړ شوي،

وښایی، چی وړانګه یې $r = 4$ cm

وي. وښايي چي هواره په څلورو مساوي

هوارو ټوټه شوې ده (څيره ۱۴)

۱۴ - د هغه گړدې وړانگه وښايي ، کوم چي همغه هوارخوندي لري لکه :

الف) يوه مربع، چي داړخ اوږدوالی يی ۵ سانتي متره وي.

ب) يوه روتي چي نيمی يی ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چي د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ - د يوه پنډ پينسيل سره يوه گړدی وهل کيږي، چي دننی وړانگه يی ۵

سانتي متره وي. داچي پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتيني

يوه گړديکړی ده. د دې گړديکړی هواره وشميری.

۱۶ - يوه ساتليت يا جوړه ، يعنی مصنوعي سپورمی، له ځمکی په يوه گړدی

راڅرخي، چي سرعت يی په ثانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره

دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته

ضرورت لري. وښايي چي دا

ساتليت يا جوړه سپورمی يا

مصنوعي سپورمی له ځمکی

څخه په کوم جگوالي الوزي؟

۱۷ - د يوه څرخونکړی يا بهتره

څرخونپټی په مرسته کیدی

شي څرخونحرکت يا

څرخونخوزون د يوې څپي په

بلی څپي راوړل يا واړول شي.

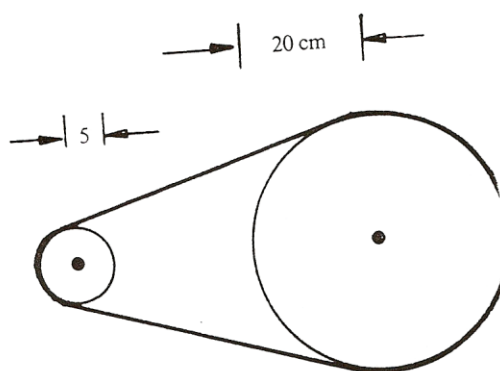
په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه

يعنی ډيره ټيک اړه په بريښنا

ماشين چلول کيږي يا په حرکت

راوړل کيږي. د اړي خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټک دی، که د

ماشينڅرخونڅرخي يا گاډيل ($r = 20 \text{ cm}$) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وگرځي؟



څيره ۱۴۶

۱۸ - کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هگیخیره لري که ولر:

a) $a = 40 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, b) $a = 6 \text{ cm}$, $e = 1 \text{ cm}$

c) $r_1 = 4 \text{ cm}$, $r_2 = 3 \text{ cm}$, $w(r_1, r_2) = 90^\circ$

۱۹ - وښايي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 / 2$ ، نو دنی ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلپسي یا هگیخیرې غاړه.

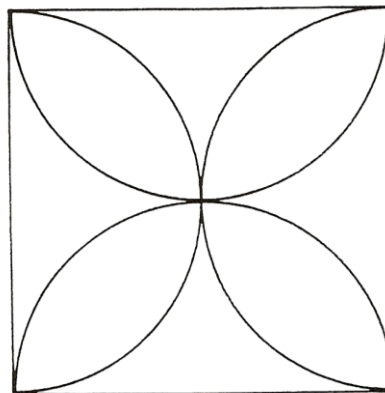
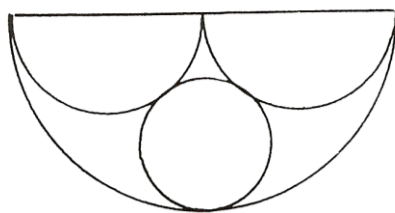
۲۰ - ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې گردۍ په څیر راڅرخي. ددې چاپيري وړانگه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلپسي لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزشات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښايي، او همدا ډول د ایلپسي یا بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ - د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنگ ده؟



څیره ۱۴۷

۲۲ - د دوه گردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تناسب کی سره پرتی دي،
لکه 5 : 8 په لویه گردی کی یو گردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده
دومره لویه ده لکه د کوچنی گردی وړانګه $r = 10 \text{ cm}$ وشمیری.

الف - منځتکي کونج

ب - د گردیبرخی هواره.

۲۳ - کوم منځتکي کونج په لیندې پورې اړه لري، چي

الف (ټیک همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب (دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

پ (نیم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ - د یوې گردیتپوتونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه

وي، که په وړانګه یی چی مربع .

۲۵ - یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جگوالي

راگردوي یعنی له ځمکي راگرځي یا بهتره له ځمکي راڅرخي. د راڅرخونوخت

یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیې دي.

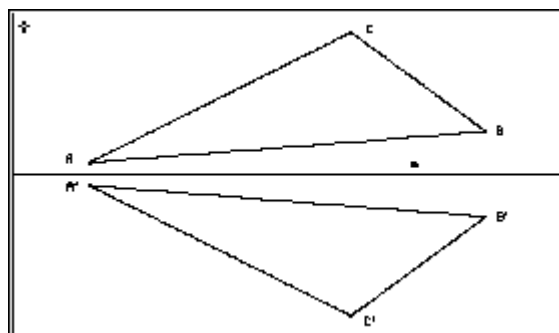
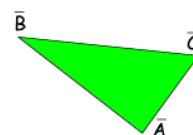
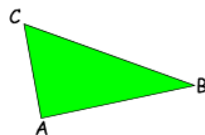
الف - سرعت یی څومره لوي دی؟

ب - په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

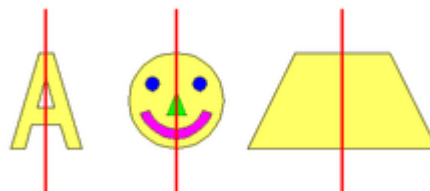
کونگر و اینځ څیرونی (برابري څیرونی)

Kongruenzabbildungen

Congruence mapping



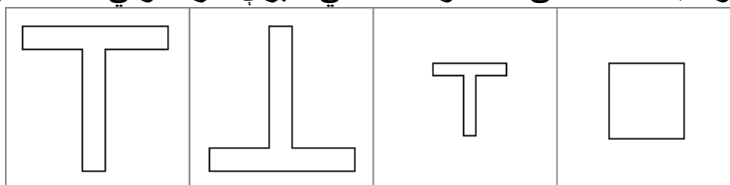
سیومتری څیری یا شکونه Symmetrische Figuren



د هوارو څخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتری څیری یا شکونه، یعنی داسي په نامه برابري یا مساوي او نیمایي څیری:

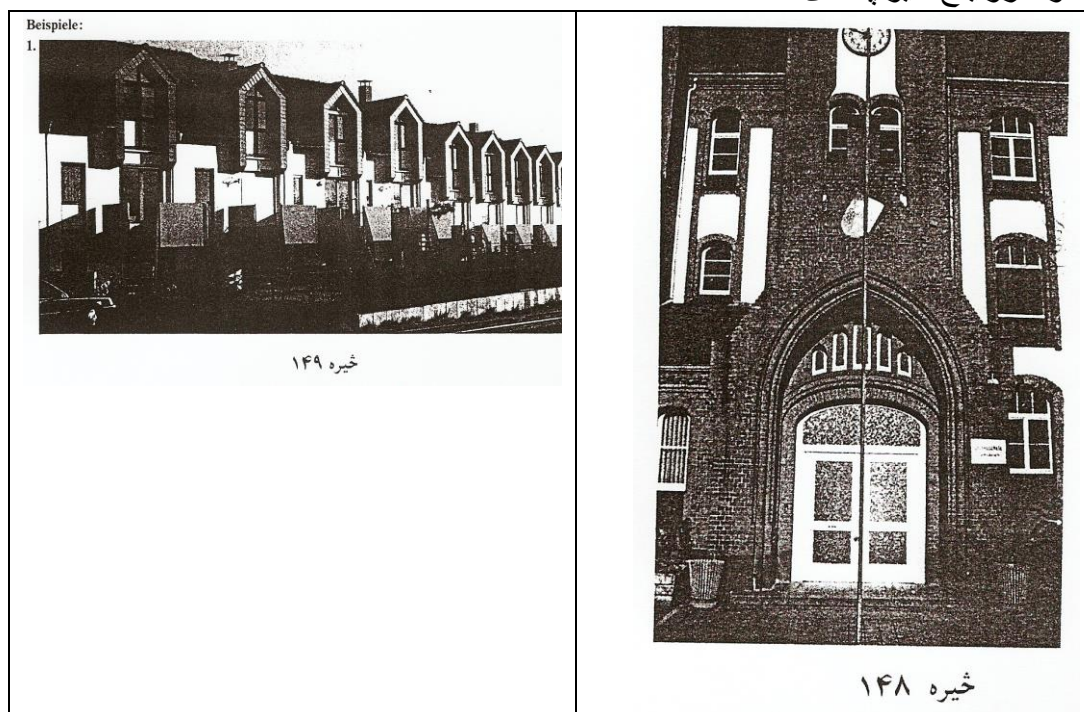
سرلیک

د شمیرپوهنې له مخې د ساده شمیرورټوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونې له امله، او د ښکلا له مخې، د هغو د همغسې څیرې څرگندونې له امله یو ځانگړی ځای نیسی)



په پورته څیره کې کین لور ته دوه د ټي څیرې یو بل پټوي، کین لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونې ټي وکښل شي. دا محور سیومتری څیرې دي.

په ځانگړي ډول د اخري شکلونو څخه کتل کیري چی سیومتری تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتری اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی څنگه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه « دوه هگی. » له دې ځایه تر کونگرواینڅ یو پل دی



پیژند : هندسي شکلونه کونگروینڅ (برابر) بلل کیري، که په فورم ، بڼه (څیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځای یی یو له بل بیل وي.

يادونه : زه به وړانديز وکړم، چې کونگرواينځ څيرونې « ورته برابري څيرونې » وبولو، ځکه، چې يو بل ته ورته دي او برابري هم دې يانې که يو پر بل واچول شي يا يو پر بل پريوزي، نو يو بل پتوي.

د دوه شیانو A او B د کونگرواينځ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \sim B$$

د کونگرواينځ خويونه :

- ۱ - کونگروينځ څيري يا - شکلونه يو په بل پريوځي يا يو بل پتوي .
- ۲ - کونگروينځ څيري يا شکلونه د کاغذ په هنري غبرگولو يا غوڅولو په بنسټ، کيدی شي يو په بل پريوځی.



پورته څيره ټکی سيومتري ده .
غوڅول د شمير پوهنی کار نه دی، مگر غبرگول کيدی شي وي.

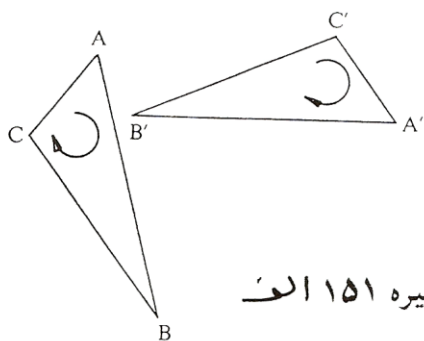
لنډ : محور هنداروني او کرښهنداروني ، څرخون، ټکيڅيره ونې او راکښني گونگرواينځ څيره ونې دي.

پوښتنه کيري چی :

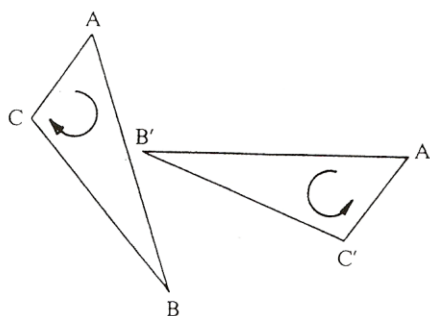
په شميرپوهنه کی عمليي شته چی د هغي په مرسته يا د هغي له لاري يا د هغي په وسيله څيري يو په بل پريوتی - او پتيدی شي ، داسي کارونی يا عمليي په کړنه يا عمل کی شته او دا کونگرواينځ څيره ونې يا څيره کوني بلل کيري.
هر کونگرواينځ څيره يا شکل او لويوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول بايد کونجونه او اوږدوالي ريښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کرښوتناسب، برخو تناسب غبرگ کرځو تناسب (ځانښونه) ريښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج څرخونلور يا سمت تغير خورونکي دی، که څرخونلور تغير ونه خوری نو یولوريز کونگروينځ بلل کیری او که څرخونلور تغير وخوري نو شکلونه مخامخ لوريز يا په څټ يا برعکس کونگرواينځ بلل کيري

سرلیک

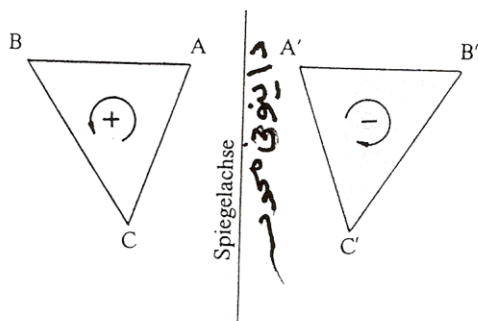
څیره ۱۵۰



څیره ۱۵۱ الف



څیره ۱۵۱ ب



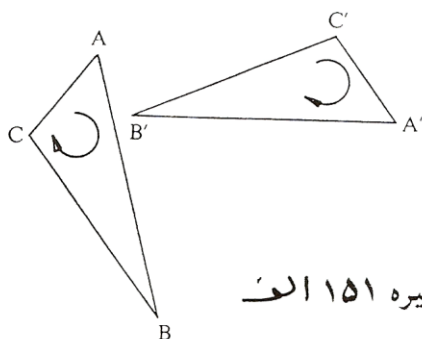
څیره ۱۵۲

کرنه‌ندارونه (په کرنه

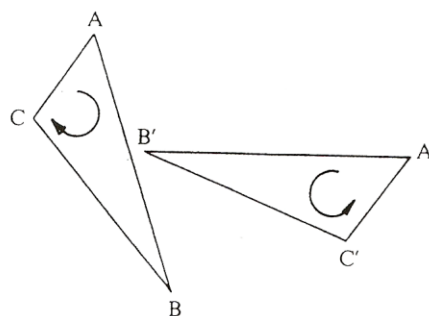
Geradenspiegelung (منعکسونه)

یو کونگرواینڅ څیره ونه مو په پیل
څیرونو کی ونښوده. کرنښ اینونه یا
کرنه‌ندارونه یواځنی مخامخ
کونگروینڅ څیره ونه ده ، ځکه چی
د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

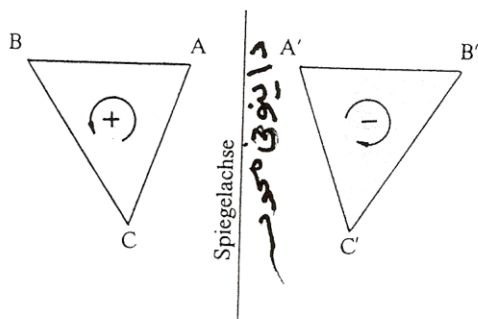
څیره ۱۵۰



څیره ۱۵۱ الف



څیره ۱۵۱ ب



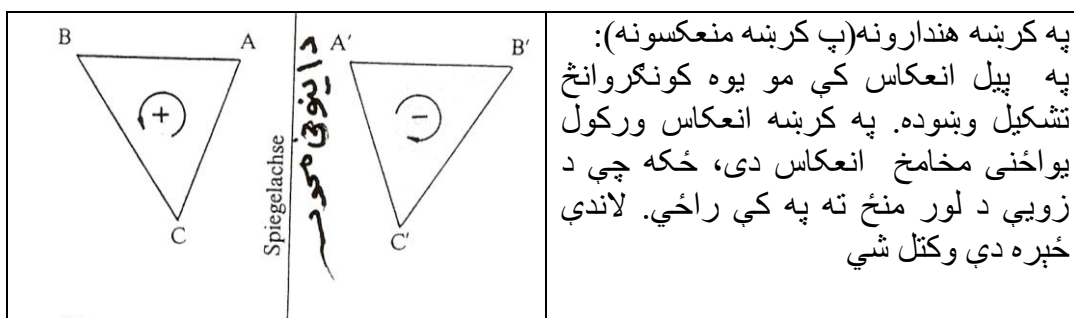
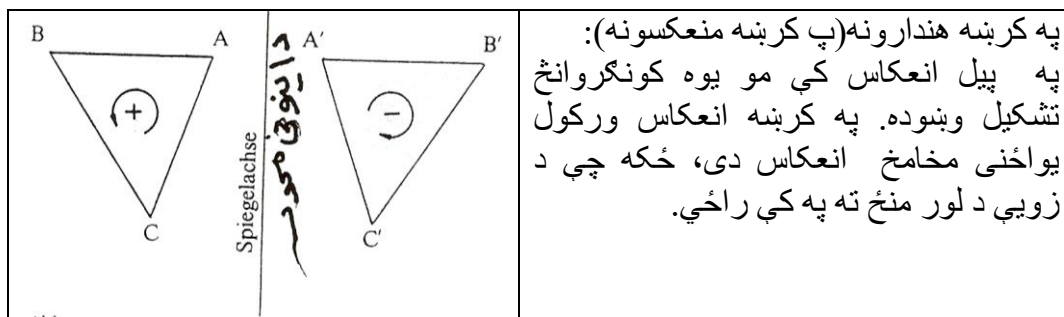
څیره ۱۵۲

کرنهېندارونه (په کرنه

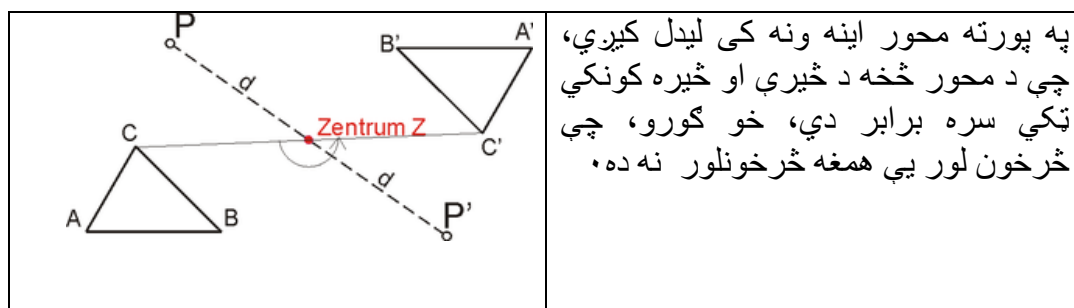
منعکسونه) Geradenspiegelung

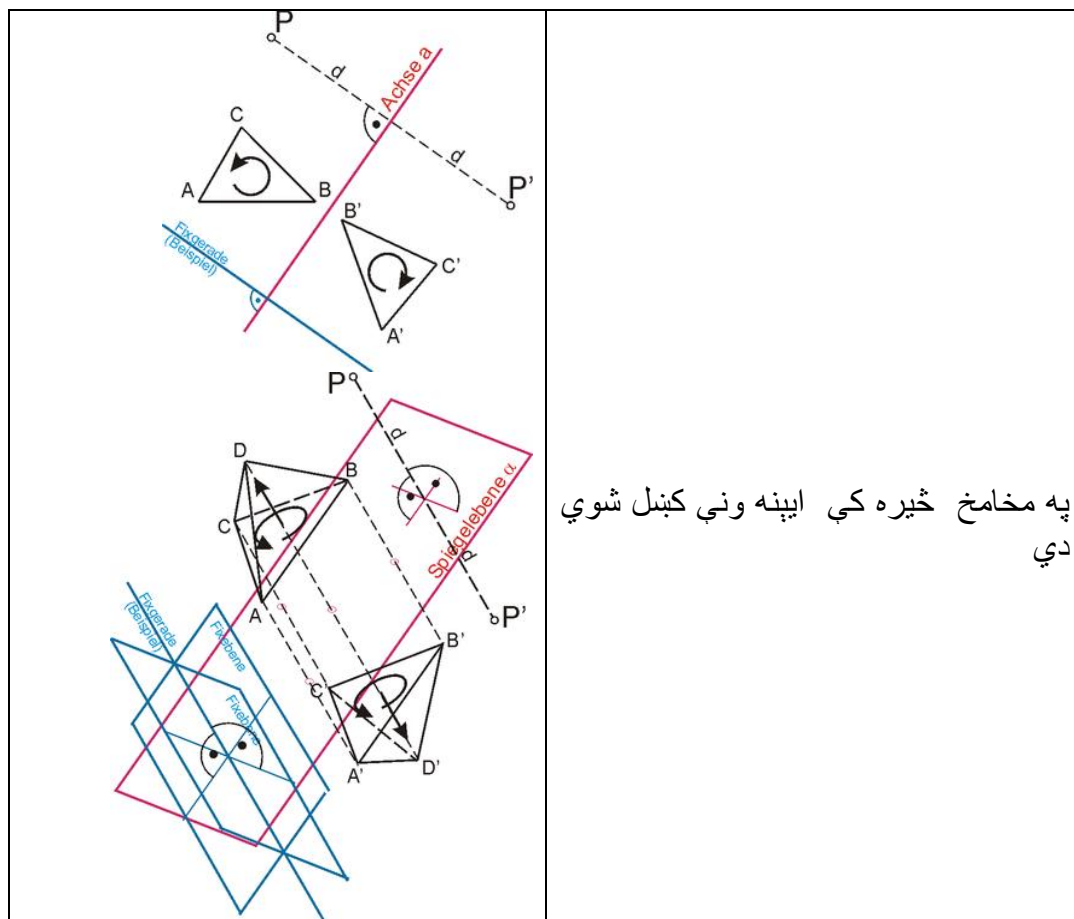
یو کونگرواینڅ څیره ونه مو په پیل
 څیرونو کی ونښوده. کرنښ اینونه یا
 کرنهېندارونه یواځنی مخامخ
 کونگروینڅ څیره ونه ده ، ځکه چی
 د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

سرلیک



د درې ګوډې ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی
'A'B'C' جوړېږي. پخپله کرښه g په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه
بلل کېږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري (ځای په ځای ټکی
(فیکسټکی) Fixpunkte دی، له دې امله کرښی g ته د ځای په ځای ټکو کرښه هم وایي.
ټولی په g ننغولارې (لنډ: ولارې) کرښې د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان څیره کېږي،
مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثنې یا بی له غوڅټکي کرښې ټکي د خپلي
فاصلې په ساتلو ځای بدلوي. له دې امله دا کرښې ځای په ځای کرښی بلل کېږي.
په لاندې څیره کې کین لور ته درې ګوډی په ټکی، چې د کینلې کرښې منځ ټکی دی،
بڼې لور ته څیره کېږي او دا په همدې ټکي، کټک کېږي، چې د هر څیره ټکی واټن د
همدې ټکي څخه همغ دی لکه د څیره کوونې ټکی واټن له دې منځټکی څخه.





د کرښ ایښوونو (هنداروني یا انعکاس) جوړښتڅیرنه

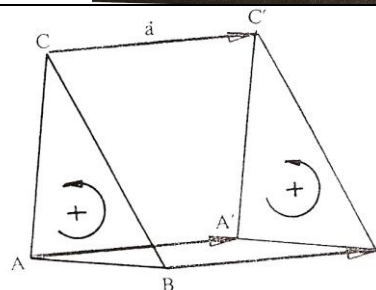
۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرگوډي کی د کونجټکی او په گردې کی د منځ ټکی) په g ولار یا زورند پریوځي او دا له g خوا په فاصله د Pg غزوي. (دا د مخه راغلي .) ۲ - ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتری (په گردی کی : په M یو گر دی د $r' = r$ په وړانګه ووهی). د څیرې او پخواڅیرې (اصل) د ټول شکل لپاره بیا g سیومتريمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله څیره د اینوني سره په خپل ځان څیره کیږي .
--

سرلیک

هره کرېش اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرېش اینونو باندې په همغه محور بیرته راوگرځول شي. Sg په یا په خټ څیره ونه یا مخامخ څیره ونه بیرته Sg دی. دا دڅیرو زیاتواره څیره ونو ځانگړی حالت د.

دلته بیا سړی د څیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره ترلنځېنه «» په کار اچول کړي. کرېش اینوونه د گونگراینځو لاندې یو مرکزي ځای یا منځای لري، ځکه چی ټولی نورې اینونې د کرېش اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راگرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وگورو.

راکښنه یا کښونې Verschiebungen

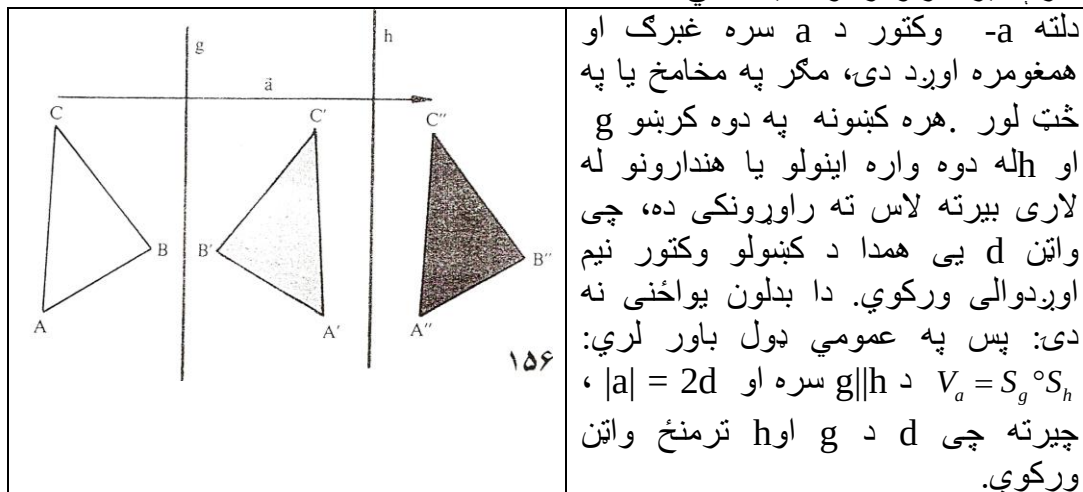
Verschiebungen راکښنه یا کښونه 	پېژند : غبرگکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وگورۍ.
 څیره ۱۵۵	د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د څیرې وتلکي په څیریتکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانگړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی a دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونگرواینځیرونو دي، دا په دې مانا چی د څرخونلور ساتلی پاتي کیږي.

د کښولو جوړښتڅیرنه

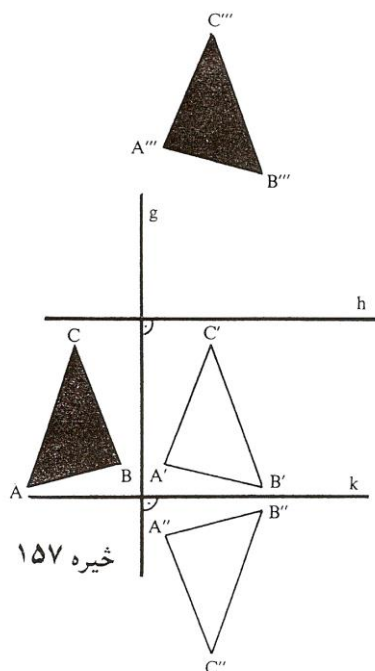
۱ - په هر نڅېنه شوي ټکي (په ډیرگوډي کی گوډونه او په گردۍ کی منځتکی) د گښولو وکتور a وکارۍ (برابر یا مساوي اوږده، همغه لور او غبرگ غشی.)

۲ - د وکتورونو اخرتکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونځلوی. (په گردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانگي په اندازه گردۍ ووهی) کښونه ځاي په ځانتکي نه لري (که د صفر وکتور دې په نامه identität ایدنتیتی یا کټمټ څیرونی څخه تیر یا صرف نظر شو)

ددې لپاره ټولې له a سره غبرګۍ کرښې ځای په ځای کرښې دي، دا په دې مانا چې دوي په خپل ځان څیره کيږي. هر کښول یا نوه هم ښه هره کښه ونه V_a د $V-a$ کښولو له لارې بیرته راوگرځول کیدی شي.



په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسې صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځای کې ذکر شوي وي، ځکه چې دا - لکه څنګه ټول نور واریانت یا



اووښتونۍ - یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي: خوښوونکي یا کښوونۍ اینونه. ترڼه $G_{a,g} = S_g \circ V_a$ یو کښوونۍ اینونه ده،

که $g \parallel a$ وي.

هره کښوونۍ اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چیرته چې کرښې h او k ، کوم چې د کښوونۍ ځای نیسي، په g نیغې ولاړې دي:

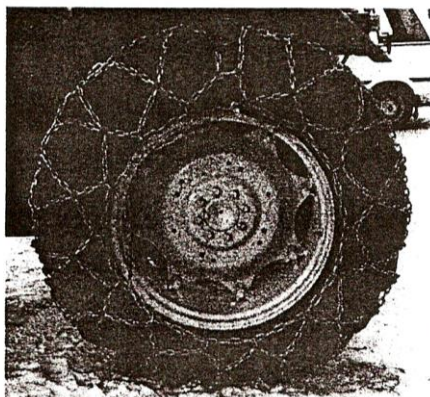
$$h \parallel k; h \perp g.$$

یوه کښوونۍ اینونه ځای په ځای ټکي نه لري، مګر g د څیروونۍ ځای په ځای

کرښه ده. هره کښوونۍ اینونه $G_{a,g}$ په $G_{a,g}$ سره بیرته راګرځول کیدی شي.

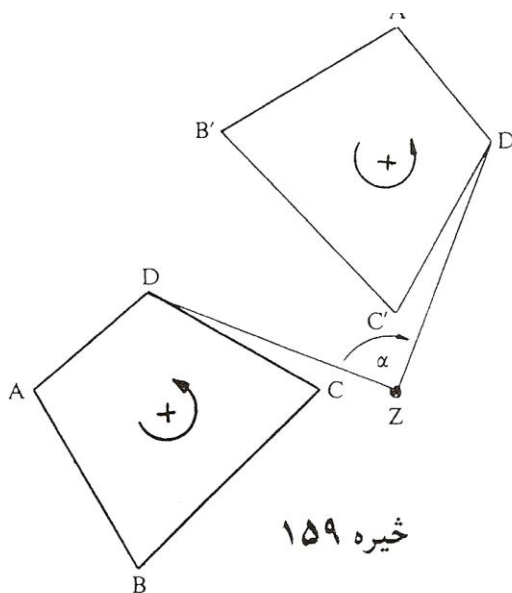
Drenungen

څرخونونه (څرخون)



څیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{z,\mu}$ هغه څیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z (څرخونټکي یا څرخونمنځ) هر اصلي ټکي P په یو څیره ټکي P' داسی تنظیم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP') = \mu$ چې μ یو د مخه ځای په ځای ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.

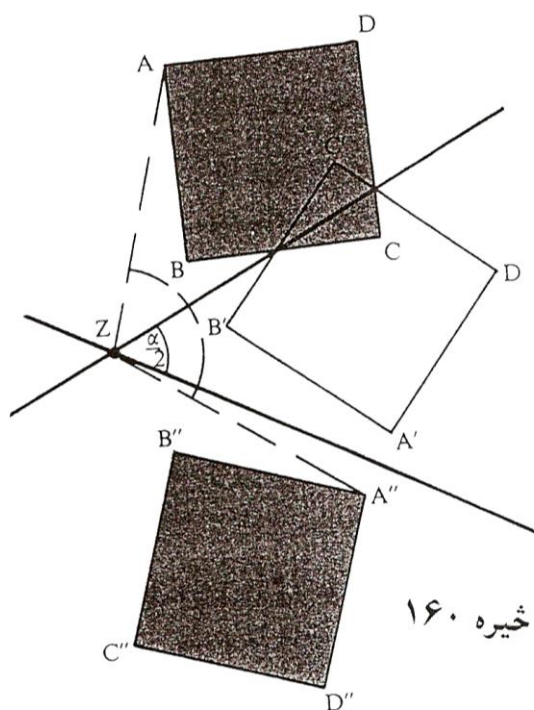


څیره ۱۵۹

پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج څخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ څخه له مخه ورکړ شوی. (ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دڅرخون جوړښت څیره

۱ - په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په گردی کی منځټکي) او



خیره ۱۶۰

خرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی. د هر ټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانګه وکارې، کوم چی له PZ سره کونج جوړوي.

۲- لاس ته راغلی ټکی P' په اصل پرلپسې ترتیبو د بل سره ونښلوی (یا په همدې ډول په P' یو گردی د $r' = r$ په وړانګه ووهی).

خرخون D_z یوه همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده.

که خرخون D_z له خرخون په 0° :

ایدنټیټي یا کټمټ، توپیر ولري، نو دا

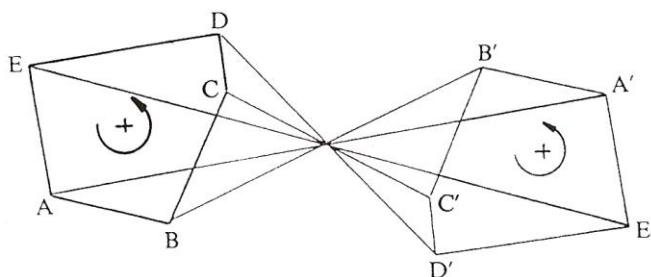
یواځي یو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .

سرلیک

هر څرخون D_z د په کونج کیدی شي چی په څرخون D_z په کونج -
 بیرته راوگرځول شي. د جوړښت څیړنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z
 د دوه کرښي اینوني چی په ټکی Z کی په کونج $1/2$ یو بل غوڅوونکو کرښو g
 او h ځای نیونکی کیدی شي: څرخون: $D_{z,\mu} = S_g \circ S_h$
 د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ سره. g (څیره)

تعریف: یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180^\circ$ سره ټکی اینونه بلل
 کیږي. دا په دې مانا چی په ټکي اینه کیږي.

په دې توگه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونگرواینڅ څیرونه ده. (څیره ۱۲۸)



څیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت څیړنه

- ۱ - د اصلي څیرې هر په نڅښه ټکي څخه یوه کرښه وکارې، چې له اینونکي ټکي Z تیره شي، او $|PZ|$ واټن د Z په بله لور وباسی.
- ۲ - داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی په M' یو $r' = r$ وړانگي گردی ووهی).

ټولګه

هره کونګرواینڅ څیرونه د کرښی اینوني د تړلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرښ اینونو (څرخونو یا کښونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده.

دیو په بل پسې د کونګرواینڅ څیرونو کارونه بیرته کونګرواینڅ څیرونه لاس ته راکوي. دا چي هرکونګرواینڅ کرښ اینونه ده نو د پای کونګرواینڅ یو په بل پسې اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګرواینڅ بیرته راګرځیدلی یا په خټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګرواینڅ څیرونی یو په بل پسې منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتيو را یوځاي کیدی شي. الجبري ټول کونګرواینڅ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کټمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چي ناپیلي څیرونه ، چي په کارونه کی تغیر نه راولی کټمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

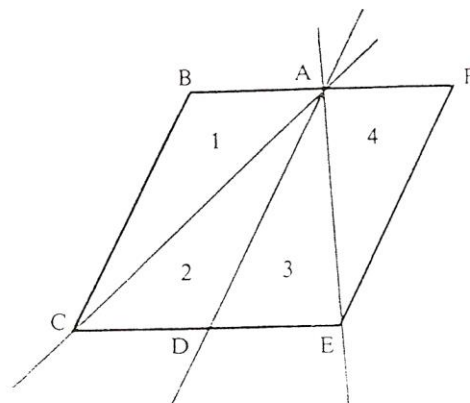
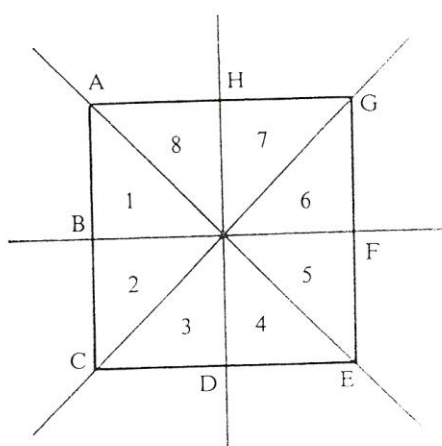
په عمل کی د دریګونو یی کونګرواینڅ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

کونګرواینڅجملی:

الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا
 ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی (SWS) یا
 پ) په دوه اړخونو کی او د اوږداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا
 ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وڅوري یا
 سره مساوي شي

تمرینونه

- ۱ - په یوه غبرگ اړخیز ABCD هندارونی $S_{AB} \circ S_{BC}$ وکارۍ.
- ۲ - د کونگرواینڅ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرنسی پیلخیرې په کونگرواینڅ برخو ټوټه کوي.



خیرې ۱۶۲

- ۳ - په یوه بیلگه وښایي :

$$S_g \circ S_h = S_h \circ S_g \quad (\text{الف})$$

$$S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g \quad (\text{ب})$$

- ۴ - د «هیلگولند» کیشتی او د «کون ماری» لوي کینستی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلگولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي ($N60^\circ W$) دلته N د شمال او W د لودیځ لپاره دی، کرنلایني حرکت کوي او «کون ماري» په ۸۲ درجو جنوب لودیځ لور حرکت کوي ($S82^\circ W$) دلته S د جنوب لپاره دی.

په دې وخت کې د «هیلګولند» څخه «کوبن ماری» په ۷۰ درجو شمالشرق (N70°O)

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کېږي. Nord,, Süd, West, Ost.

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟

ب) د دې وخت له ځای څخه به هغه غوڅتګی څومره لرې وي ؟

۵ - وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د

کونجونو α او β کونجني دي. وښایې چې دریګوډي ABP او ABQ

کونګرواینټ دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅتګي دي).

۶ - څومره کوروننتڅیرونی موجود دی چې لاندې څیرې یې په خپل ځان څیره کوي:

کرښی، گردی، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي، ولاړ ګوډی، راوتی،

مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کټمټڅیرونه دې نه په کی شمیرل کېږي.

۷ - یو څرخیدونکی هنداره، یوه هنداره ده، چې په یوه خپله ایښوول شوي هواره

پروت محور باندې څرخوړ ایښوول شوي. ترتیب په څیره کې له پورته لور

انځورېږي.

د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځای یا ځاینیوون کې

پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم (پریووتکونج = وتلکونج)

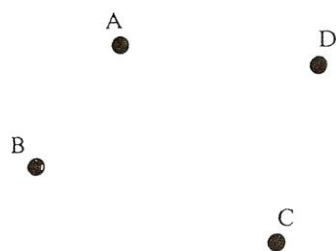
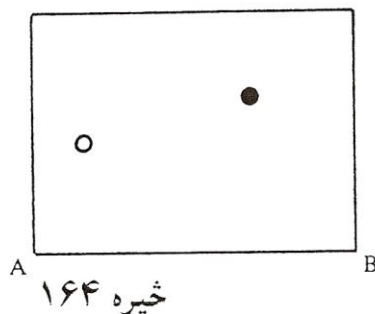
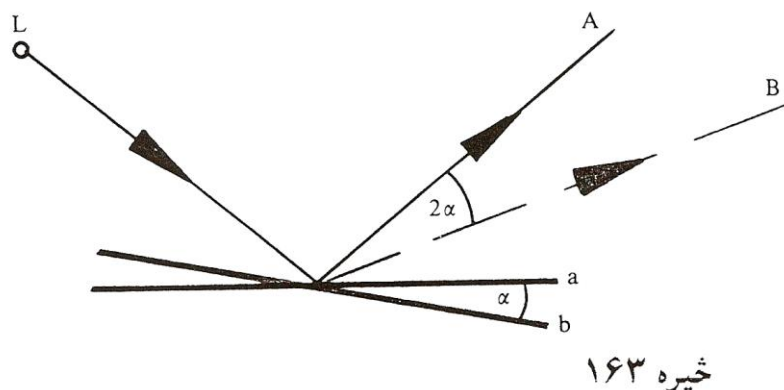
د $\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کېږي یا منعکس کېږي. اوس

نو هنداره د α په کونج د (b) ځای یا ځاینیوون ته راوړل کېږي یا

راڅرخېږي. دلته نو د نور وړانګه د $\overline{OB}$ په لور هچینداره کېږي یا غورځول

کېږي یا منعکس کېږي. وښایې :

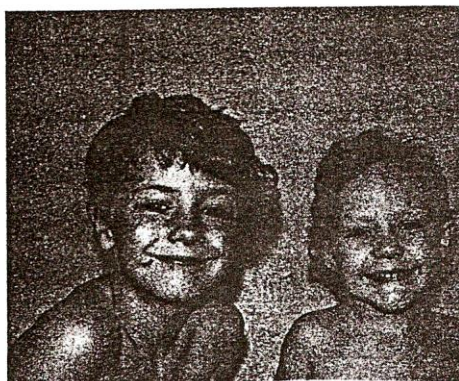
$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$



۸ - د کوتی منځ کی دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوتی له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسی ووهل شي چي تور توپ ووهي. دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لگيږي. (خیره) د کرنو لار وکارۍ « تور توپ - اینه ټکی یا انعکاس ټکی - سپین توپ »

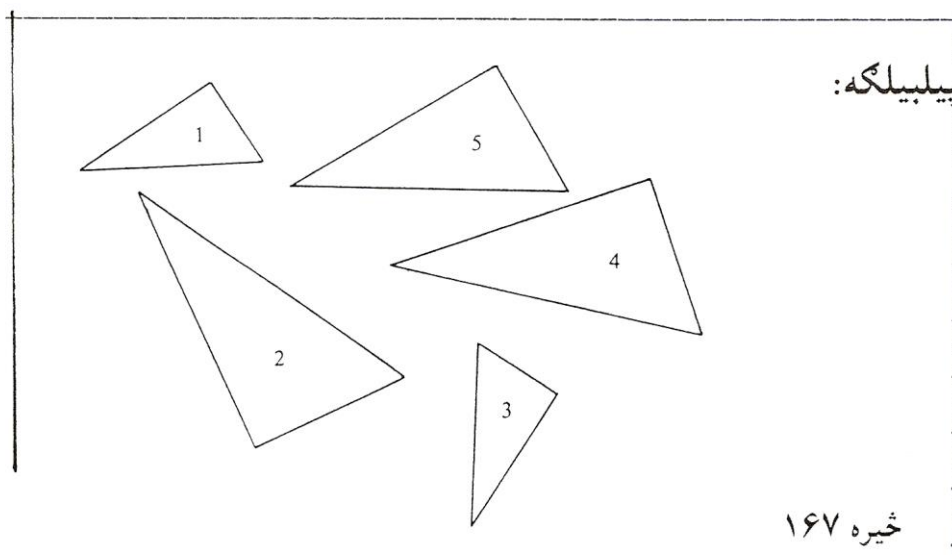
۹ - دا د یوه کور څلور برجونه دي، چی په A, B, C, D سره یی ښایو (خیره) داسی یو ځای S شته ، له کوم چی برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځتې په څیر ښکاره شي یا ځان وښايي ؟

ورته والیڅیرونه Ähnlichkeitsabbildung



څیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنيان وکتل شي، نو سم د لاسه ویل کیږي، چې دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعنې څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کې داسې نه شو ویلی چې دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دي، دا خیالي قضاوت دی چې په شمیرپوهنه کې داسې قضاوت ځای نه لري.



لاندې دریګوډی د کونجونو $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ او $\gamma = 90^\circ$ سره وکارې. ددې کونجونو سره له یوه زیات دریګوډي موجود دي، چی په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه یواځیوالی یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي. دریګوډي ۱ او ۲ کونګرواینڅ دي، دریګوډي ۲ او ۴ هم، مګر دریګوډي ۱ او یا ۱ او ۴ کونګرواینڅ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښي لري (کونج، «بڼه» یا «شکل» یا څیره) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟ له کونګرواینڅجملی څخه مخ ته څو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښایو چه د اړخونو ځانښونه یا د اړخونو تناسب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

تعریف : هوارې څیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چی د مناسبو پای کرښو اوږدوالی په همغه ځانښونه یا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) یو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بیلګه : کونګرواینڅ څیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځانښوونه تل ۱ دی.

له دې امله باید -د کونگرواینڅ د ټولیزیدلو یا عمومیت - د درېگوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.

د دوه یا زیاتو درېگوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځانښوونه کی پراته وي یا اړیکو کی). دا هم د درېگوډیو لپاره باور یا اعتبار لري، په داسی ډول- د کونگرواینڅ څخه پر مخ ځو- چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی : درېگوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی

سره برابر وي

۱- د درېگوډیو دریواړو اړخونو په مناسبه توگه د اړخونو تناسب یا ځانښوونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲- د دوه یو بل سره مناسبو اړخونو تناسب یا ځانښوونه او له دې بندشوي کونج. دا

په دې مانا چي

$$a : a' = b : b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳- د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونو مساويوالی. په

دې مانا چي: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $b > a$ لپاره او یا

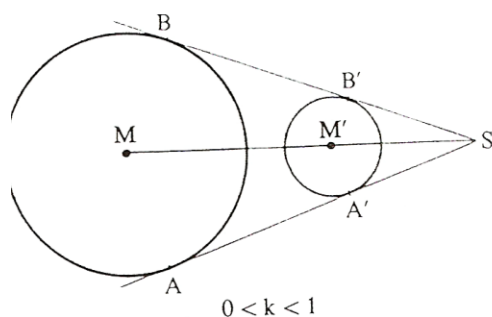
۴- د دوه کونجونو اندازې مساويوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.

دا په دې مانا چي :

په همدې ډول کیدی شي د نورو څیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. څیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانگړو ورتوني څیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والی څیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راکښلو منځ) او یوه گڼ k د راکښلو فاکتور یا څلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په $-k$ ځلی تغیر ورکول کیږي.

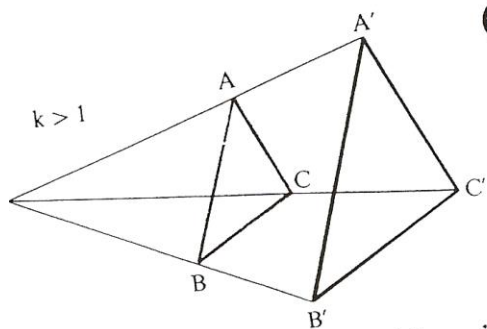


څیره ۱۶۸

د k لپاره له صفر تر یو گڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیا پخپله له دې پوهیدی شو چی څیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زیځلو (کینکلو) غږیږو. څیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که $k = -1$ وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفي گڼ $k \neq -1$ لپاره کیدی شي k په $k = (-1) \cdot |k|$ باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

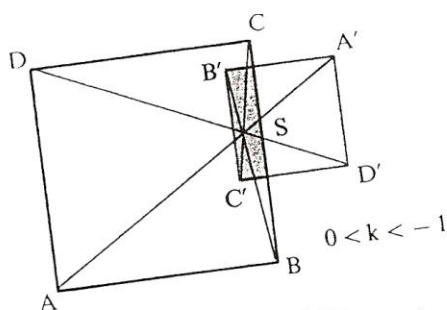
یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

د منځراکښنې جوړښت څېړنه (توضیخ)



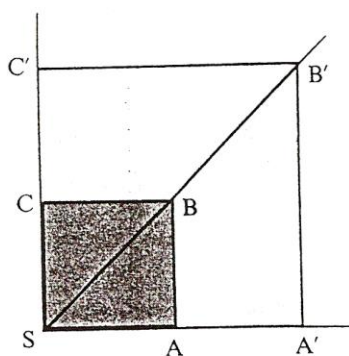
څیره ۱۶۹

- ۱ - د اصلي هر په نخښه ټکي د راکښلو منځ S سره و نڅلوی.
- ۲ - د هر ټکي P لپاره د |PS| پای کرښې په k ځل کيږي (جوړښت ته د $k < 0$ لپاره هم، مقایسه څیره) او نوې پای کرښه



څیره ۱۷۰

- $|SP|.k = |SP|$
- په کرښه چي د ټکي S څخه پیل له P, S او P' تیريږي وکارې.
- ۳ - د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول څیره ټکي سره ونښلوی.



څیره ۱۷۱

- دا چي ورته څيږي (بی له $|k| = 1$) کونگرواینڅ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مگر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k (د بیلگي په توگه $k = 2$, $k = 3$) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتور k^2 (یعني $k^2 = 4$, همداسی $k^2 = 9$) تغیر وخوري.

تعري: په یو منځراکېنسو، چی فاکتور k ولري د څیرې هواره F' او له څیرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب یا ځاننونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \Rightarrow F' = F \cdot k^2$$

د لته د k مخخېنه کوم رول نه لري ځکه چی منفی ځل منفی بیرته مثبت دی.

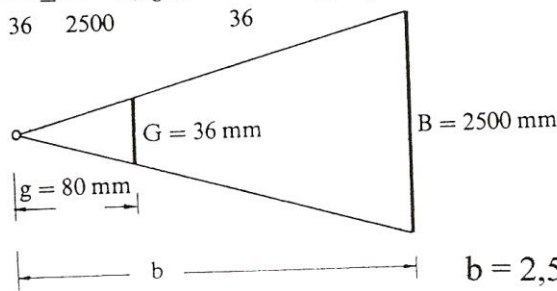
پیلېلگ:

د یاس (د فیلم دیاس) (فورمات یا لویوالی $24\text{mm} \cdot 36\text{mm}$)
په یوه دیوال چی لویوالی یی $2,5\text{ m} \cdot 2,5\text{ m}$ دی د ممکن حده پورې څیره کیري. د ښه ټیک جوړولوسره یی له عدسي واټن 8cm دی. پریوستونی یا پرویکتور د څیرې دیوال څخه باید څومره لرې وي؟ د دیاس هواره په څو واره لویه شوې؟

د دیاس دڅیرونی لپاره لاندې اړیکې باور لري:

$$\frac{\text{د څیرې جگوالی } B}{\text{د دیاس جگوالی } G} = \frac{\text{د څیرې پراخوالی } b}{\text{د دیاس عدسی لریوالی } g}$$

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555,56 \text{ mm}$$



ممکن ډک په دې مانا،

چی 36 mm په $2,5\text{ m}$

باید لوي شي. په دې توگه

د پریوستون دیوال عدسي

واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2,5\text{m} \cdot 0,08\text{m} : 0,036\text{m}$$

$$\sim 5,56\text{m}$$

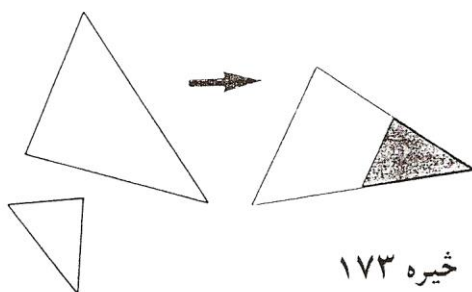
د لویوالي فاکتور یا ځلی دی

$$k = 2,5: 0,036 \sim 69,44$$

له دې امله د څیرې هواره ده:

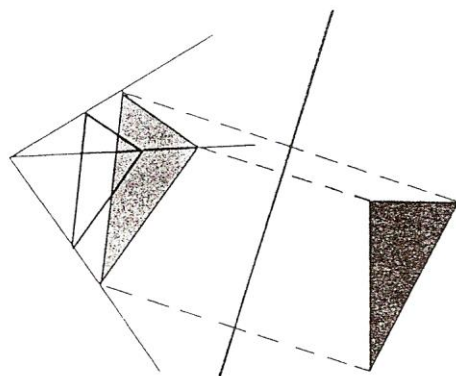
$$F' = 69,44^2 \cdot 0,036 \cdot 0,024 = 4,17 \text{m}^2$$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.



څیره ۱۷۳

دا روښانه ده، چي ورته څیرې،
د څرخوني، راکښلو له لارې او
اینوني له لارې یوه پوزیشن ته
راوړل کيږ، په کوم چي سم د
لاسه د شکلونو د کونجونو
د برابرتوب ورته والی پیژندل
کیدی شي.



څیره ۱۷۴

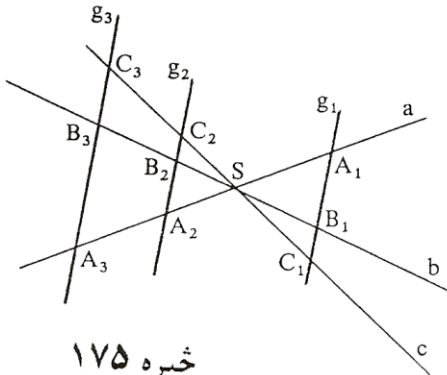
تعریف : هره کونگرواینڅ
څیرونه، هر منځراکښونکی او
له دوې هر تړلی یا ځنځیري
اینبولشوي یا ځای په ځای
شوي څیرونی ورته څیرونی
بلل کيږي.

دا چي هره ورته څیرونه بیرته
یوه داسي څیرونه باندې راگرځي،
نو بیخي باور لري : د ورته

سرلیک

والي خيروني ډيري چي پرلپسي سره وتړل شي يا ځنځيري شي گروپ جوړوي (د گروپ لپاره دې، چي شميرپوهنيزه كلیمه ده، د كتاب پای وکتل شي)
او خيري او همداسي پيل بيلگه (ډياسپرویکتور) څخه د وړانگي جمله ټوليزه يا عمومي کيدی شي.

۱. وړانگي جمله: که له يوه ټکي S وتلی وړانگي $a, b, c, \dots$ له غبرگو کرښو $g_1, g_2, g_3, \dots$ غوڅي شي، نو د يوې وړانگي ټوټي همداسي تناسب کی دی يا همداسي ځان نیسی لکه د بلې وړانگي ټوټی: دا په دې مانا چي:



څیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1 A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1 B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1 C_3|}$$

په څیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرگو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریگوډیو ورته والي چي SA_1B_1 او SA_1C_1 , SA_2B_2 او SA_2C_2 او په همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره یی لري. برسیره پر دې باور لري:

۱. وړانگي جملی په خټ: که له ناپای کرښو $g_1, g_2, g_3, \dots$ څخه د خوري

غونچې يا بهتره ستورې كړينو له لارې ټوټې پرېكړې شي، چې يو بل ته ثابتې يا همغه ځای په ځاي ځاننيونې يا تناسبات څرگندوي، نو دا كړنې يو بل سره غبرگي دي.

۲. وړانگي جمله:

که له يوه ټکي وتلی وړانگي د غبرگو ناپاکړينو څخه غوڅی شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرگو دې ځان داسی نیسی یا په داسی تناسب کی ديلکه هغه د ککرټکی څخه وتلی کچ شوي د وړانگو ټوټي.

$$\frac{|S A_1|}{|S A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S B_1|}{|S B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S C_1|}{|S C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

۳. وړانگي جمله:

په يوه غبرگی ټوټو ځاننيونه داسی ده لکه پهدې بلی غبرگی ټوټو ځاننيونه يا تناسب:

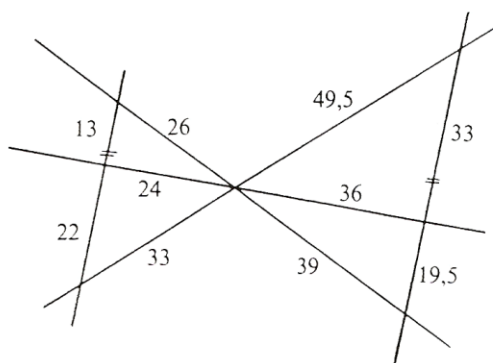
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بييلگه :

۱. د لمړی وړانگي جملی پسی لرو:

سرلیک

۱. د وړانگو جملو پسی یا له امله باور لري:



خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$
معوس وړانگې جمل

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder
۳. وړانگې جمل
 $\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$ oder
 $\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$

3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$ oder
۴. وړانگې جمل
 $\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$

۲. د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه (T_i) په ځانښوونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا

ځانښوونه 2:5 ویشل کیږي. د

دې لپاره د ۲. وړانگې جمل

کارول کیږي یا استعمالیږي:

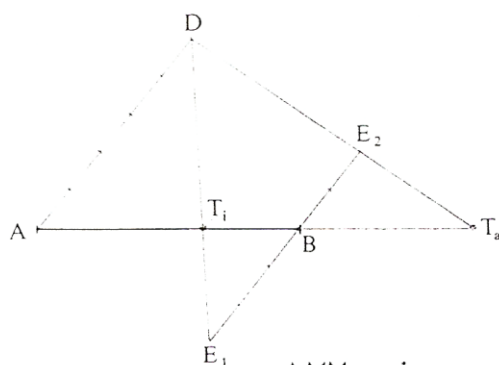
- دننه ټوټوونکې T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

- د باندې ټوټوونکې T_a :

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسيره



خیره ۱۷۷

د کربنو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واړه دی.

۳. طلايي غوڅی یا -غوڅونه:

په طلاي غوڅي يوه د a اوږدوالی کربنه داسی ټوټه کيږي، چی برخه ټوټو
د x اوږدوالی همداسی د $a-x$ اوږدوالی لپاره اړیکي $a : x = x : (a-x)$ باور
لري. دلته x د دواړو برخه کربنو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او اربنیتکتور کی له
مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او
له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کربنه د دوو لنډو
کربنو او د ټولی کربنی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم بڼه بدلون غوره کړي
او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$$x = \sqrt{a^2 - ax}$$

$$x^2 a^2 - ax$$

$$0 = x^2 + 1x - a^2$$

$$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$$

$$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$$

$$x_1 = 0,5a(5-1) \quad \text{په کار نه راځي}$$

$$x \sim 0,618a \quad \text{نو لرو:}$$

د طلايي قاعدې لکه لارې

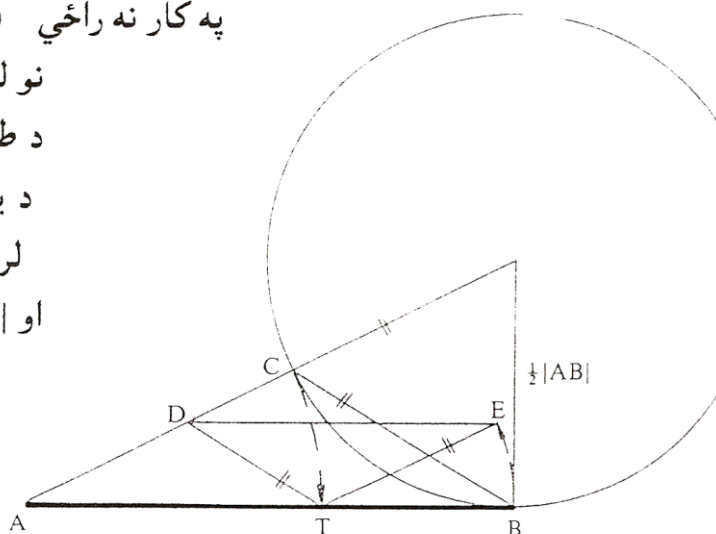
د یوې کربنی $|AB|$ ویشنه

$$\text{لرو } |AC| = |AT|$$

$$\text{او } |AD| = |TE| = |TB|$$

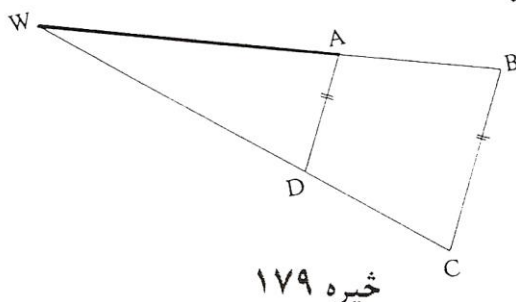
$$\boxed{\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}}$$

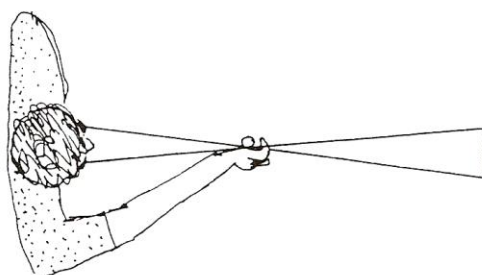
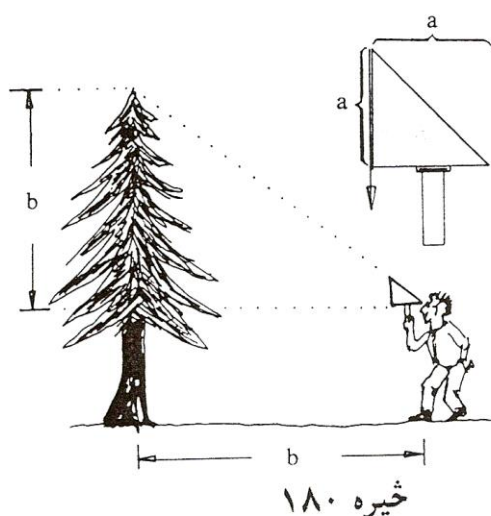
څیره ۱۷۸



تمرینونه

- ۱ - په کواوردیناټسیستم کې دریګوډی $A(2|3)$, $B(6|1)$, $C(3|6)$ ورکړ شوی دی.
- الف) دا دریګوډی د $k=2$ په اندازه وغزوی. د غزولو مرکز دې $Z(0|0)$ وي.
- ب) دا دریګوډی په $S(-2|-3)$ وڅرخوی. د 140° سره. دا څیره دریګوډی په S باندې د $k=-1,5$ سره وغزوی.
- پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کین لورته او بیا په ۵ یوونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په $-x$ محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي $(0|-6)$ د $k=-1$ سره وغزوی.
- ۲ - ایا ټول الف) مساوي پښیز، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي؟
- ۳ - د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونې د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولو مرکز په څیر، څنګه تغیرېږي؟
- ۴ - کرښه $|AB|=10\text{ cm}$ دننه او دباندې داسې ټوټه کړی، چې په ځانښوونې یا تناسب د $5:2$ کې سره پراته وي،
- ۵ - کرښه $|CD|=6,5\text{ cm}$ د «طلای غوڅي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.
- ۶ - د یوه کتونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن $|AW|$ یوه ځنګل برخې W ته وټاکل شي. درې ټکي B, C او D په نڅښه کېږي په داسې ډول چې $AD \parallel BC$ وي. اندازه کېږي: $|BC|=125\text{ m}$; $|AB|=75\text{ m}$ او $|AD|=100\text{ m}$, نو $|AW|$ څومره اوږد دی؟





۷- الف) د یوه «ځنگلوالدریگوډي»

سره (خیره) د یوې ونې
جگوالی اندازه کیدی شي. - ونه
خومره لویه ده ، که د ځنگلوال
سترگه له خمکې څخه ۷۰ ، ۱
متره جگه وي، او دی له ونې
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟

ب) (څنگه) د یوه څرگنده واټن)
د یوه شي د جگوالی د خپل
مټ په مرسته نژدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟

لارښود: ۷ الف وگورئ)

پ) په عسکرۍ کې د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي گام » تخنیک
کارول کیږي یا استعمالیږي.

دا داسې صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترگه
پټوي او غټه گوته راوباسی،

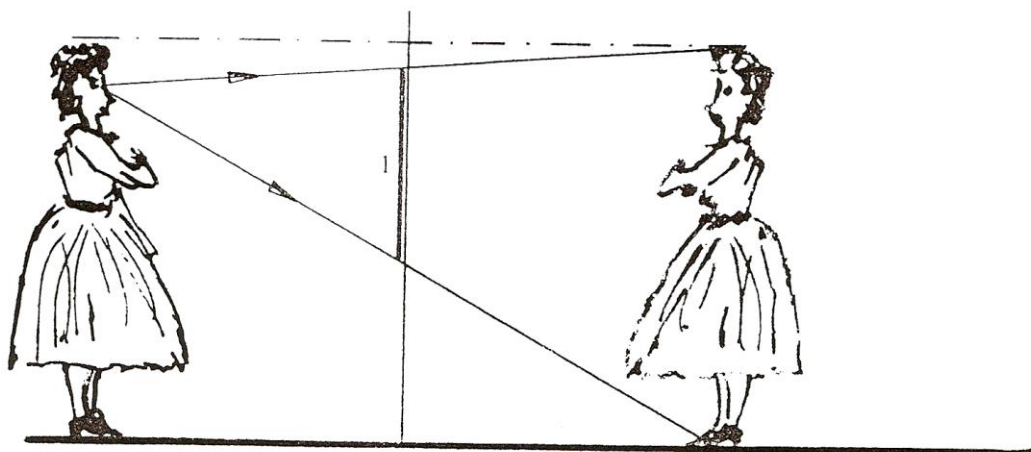
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي

لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترگي په پټولو سره ټیک هغه لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنگه راځي؟

۸- میرمن خانگه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وگوري. په عادي توگه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هندارې

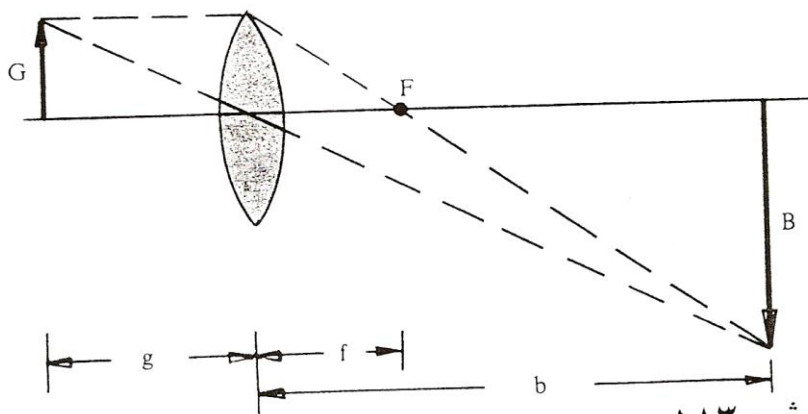
سرلیک

لرې، هندارې ته مخامخ ودرېږي. دا هنداره بايد څومره کم له کمه جگه وي
چې ميرمن څانگه د سترگو جگوالی چې ۱،۶۵ متره دی ټول لويوالی
چې ۱،۷۳ متره دی وگوري؟



څیره ۱۸۲

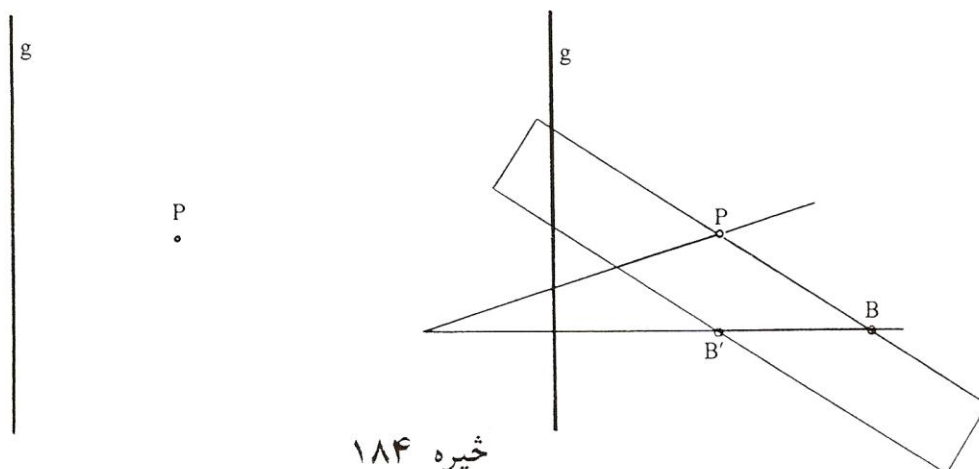
۹- د یوې لینزې یا عدسې یا سترگې له لارې په څیره کې د نور څیرونی

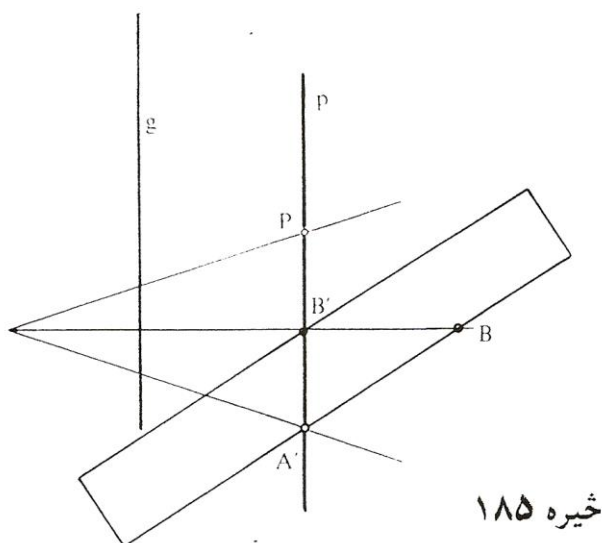


څیره ۱۸۳

جوړښت کتل کيږي. د لينزې يا عدسې لپاره د لينزې يا عدسې مساوات $(1/f) = (1/g) + (1/b)$ باور لري، پخپله د څيړونې لپاره مساوات $B/G = b/g$ باور لري (په لغاتو: د څيرې جگوالې د شي جگوالې سره ځان داسې نيسي لکه د څيرې لريوالې د شي لريوالې ته). دا دواړه اړيکي د وړانگي له جملې راوباسي!

- ۱۰- يو ولاړ کونجيز دياپوزيتيويو مثبت دياس داړخ اوږدوالی ۶، ۳ سانتي متره سره او ۴، ۲ سانتي متره سره يو و هغه ته غبرگ ديوال باندې پريوزې .
څيړونې لينزې يا عدسې، دا شی ۱۲ سانتي متره له دياس او ۸۰، ۴ متره له ديوال لرې دي. د پريوستون ديوال کم له کمه بايد څومره وي ؟
- ۱۱- يو د ديوال مربع شکله کړکی، چي اړخ يی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له يوه هغه ته غبرگ ديوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره لرې بايد يوه د پريښنا سرچينه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تيره رڼا يوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟
- ۱۲- د کوم مرکزې غزونې سره کيدی شي چی يو گړدي دننه دريگوډی په گړدي راگير يا گړدي دباندې دريگوډي باندې څيره شي؟ گړدی هوارې يو بل سره





په کومه ځانښوونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ - د دیسارگ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرگي مټه وي (د بیلگي

په توگه کرښی یا ختکش) د دوه

غبرگو کانتو سره یا اړخونو سره

ځمور په اختیار کي وي . په دلایلو

روښانه کړی ، چی ولی په پرلپسی څیرو

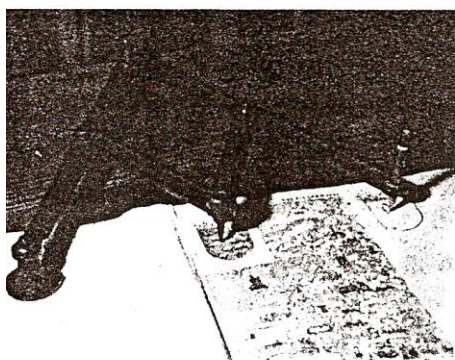
جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي .

۱۴ - وښایی چی د هر غبرگ اړخیز ABCD

لپاره باور لري : که د یوه نیمی د په

خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرگه

کرښه رسم شي ، نوغبرگاړخي منځ ته



څیره ۱۸۶

په دې خويونو د پانتوگراف (Pantograph) يا په ورځني ژبه د ځاښې تونگي دا يوه د رسمولو اله ده قانون هم پينا دي. O په رسمتخته تر زير لاندې راځي . په پينسل P سره د مخه کښل شوي څيرې باندې حرکت ورکول کيږي، نو په دې توگه دا رسمپينسل يو مرکزي يا منځنۍ ورته څيره رسم کوي (څيره .) په تي مخ کې کښل شوې ده

۱۵ - په یوه گردۍ کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوڅوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتی متره دی، د دویمې هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی ونښایی.

۱۶ - خومره لری سږی کتلی شی

الف) د بحر هوارې څخه ۴۰ متره جگ اندازه ټوکړی

(ب) دیوہ لہ ڄمکی ۲ کیلو متره جڳ هوڀونکی یا هوڀالون،

پ (د یوه الوتونکی کوټکی چي د سپوږمۍ هواړې څخه ۲ کیلومتره جگه وي) ($r = 1735 \text{ km}$) ؟

۱۷- د شکل ۱ (خیره

الف) لپارہ صدق کوی $g \parallel h$ او

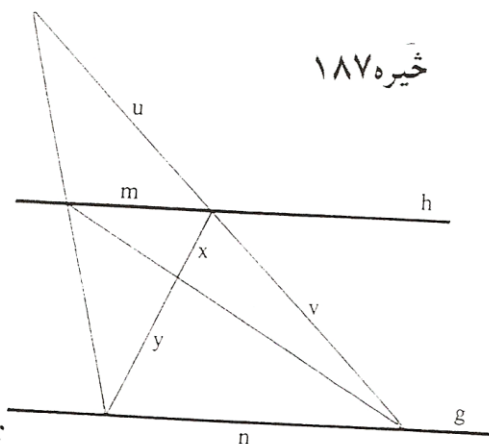
$$a) \frac{u}{v} = 1$$

$$b) \frac{u}{v} = 0,5$$

c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$.

و دستهای

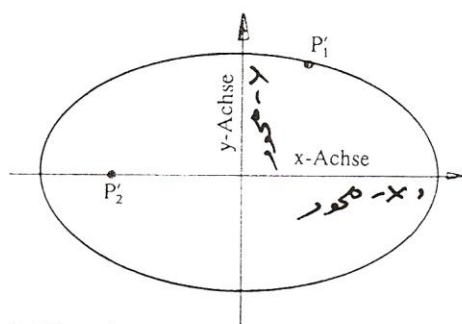
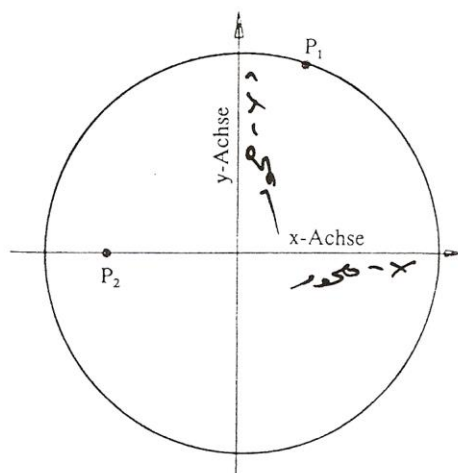
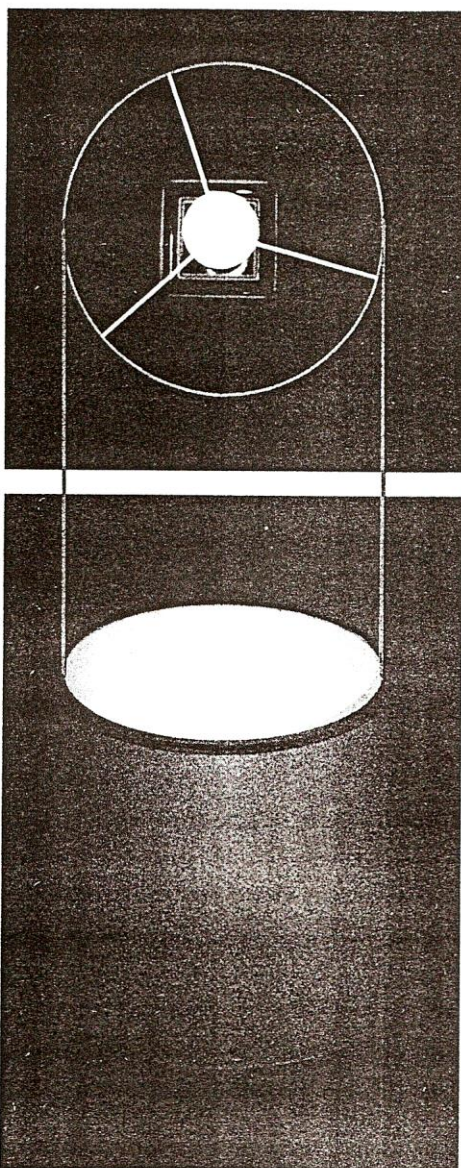


افینی خیرونی (Affine Abbildungen)

محوري افینیتی Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې نیښنې ټوټې چی لږ څنډه یی ماته ده یوه بله ګردۍ ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

کوچنی وی او یا یو ډیرگودی جوړولی شو، چی سیومتری او په دې توگه ښکلی



خیره ۱۸۹

وي. دلته موږ اليپسي سره مخامخ شو. پوښتنه دا ده چې ايا يوه څيرونه شته چې له گردۍ څخه اليپسي لاس ته راشي؟ د څيرې ۱۸۹ | دليدلو له مخې داسې خيال راپيدا كيږي، چې گوندې د گردۍ او ايليپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بيا دې لاندې پريکړې ته اجازه ورکوي، چې يوه څيرونه بايد موجود وي چې د گردۍ څيرونه ايليپسي شي. دا څيرونه بايد کوم خويونه ولري؟

موږ بيا د جوړونې نيونې چې د مخه مو کړي رامنځ ته کوو. ټولې په پراته (افقي) $-x$ محور باندې پراته ټکي ځاي په ځاي پاتيري: پس د $-x$ محور د ځاي په ځاي ټکو کړنې څيرونه ده. د دي په څې د $-y$ محور ټول ارزښتونه تغير خوري. پس هره $-y$ محور سره غبرگه کړنه ځای په ځاي کړنه ده. له دې سره موږ د نوې څيرونې لپاره ټول ضروري خويونه راټول کړل: د افينيتي محوره a سره يوه محوري افينيتي $A_{a,g,k}$ ، د لورکړنې (کړنه چې لوري يې څرگندوي لنډ يې: لورکړنه) g او د افينيتي فاکتور $|k|=0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرايط پوره وي :

- ۱ - هره کړنه PP' چې له ټکو P او P' تيره وي د g سره غبرگه ځغلي.
 - ۲ - که P^* د PP' او a غوڅټکي وي ، نو لرو : $|PP^*| = |k| \cdot |PP^*|$.
- په دې توگه نو يوه محوري افينيتي، د کړنې -، غبرگ - او ټوټه تناسب يا ځاننيونه ريښتوني ده. اخرنۍ دا وايي چې په اصلي پايکړنې درې ټکي دا پايکړنه په همغه تناسب يا ځاننيونه پری کوي، لکه د څيره ټکي په څيره کړنه باندې.

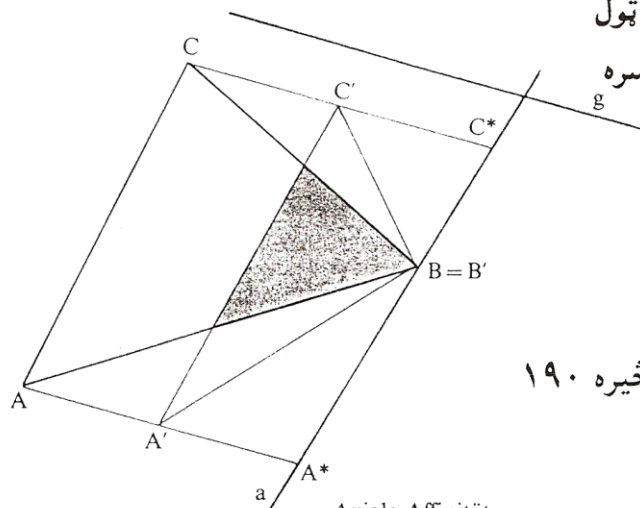
له دې لاندې د محور افينيتي جوړښت څيرونه لاس ته راځي

- ۱ - له اصلي کړنې په نخه شوي ټکي (د بيلگي په توگه P) څخه و g سره يوه غبرگه کړنه وباسي او ددې غوڅټکي د افينيتي محور سره د بيلگي په توگه P^* وبولی.

۲ - له P^* څخه $|PP^*| = k \cdot |P'P^*|$

و g ته غبرګي مناسبې کرښې
وکاړی.

۳ - په دې توګه رامنځ ته شوي ټول
ټکي اصل ته په ورته توګه سره
ونښلوی.

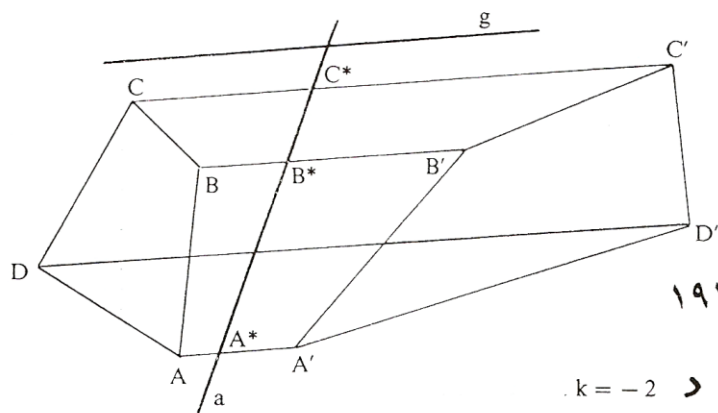


څیره ۱۹۰

Axiale Affinität

$k = \frac{1}{2}$

اکسیال افینیتی



څیره ۱۹۱

$k = -2$

اکسیال افینیتی

سرلیک

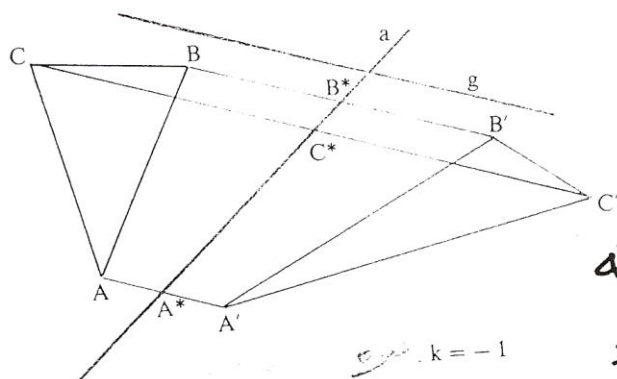
د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکي ځای په ځای ټکي دي، ځکه چې ټولې پایکرښې تغیر نه خوري. له دې لرو چې $A_{a;g;1}$ کټمټ یا *identisch* ایدنتیک دي.

د $k > 0$ لپاره P او P^* د a په یوه (همغه) خوا پراته دي (خیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلخواوو (ش. ۱۵۷)

یو څیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په څیروني $A_{a;g;1/k}$ بیرته راوگرځي .

مائیل ہندارونہ

مائل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتی ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله $|PP^*|$ همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله $|P'P^*|$. پس مائل اینونه محوری افینیتی $A_{a,g;-1}$ ده .



ماہی خنڈار وندہ

خبرہ ۱۹۲

eg. $k = -1$

: محوري افینيتي (یو بل سره) تړلو ځانگړي حالتونه:

بیاتي کوونه یا بیاتیونه Scherung

: دوه محوري افینيتی (یو بل سره) تړل، چی همغه افینيتي محور a ولري، g او h مختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینيتي فاکتورونه k او $1/k$ ولري، نو بیاتیونه (بیاتي کونه) ورته وایو.

بیاتیونه (یو بل سره)

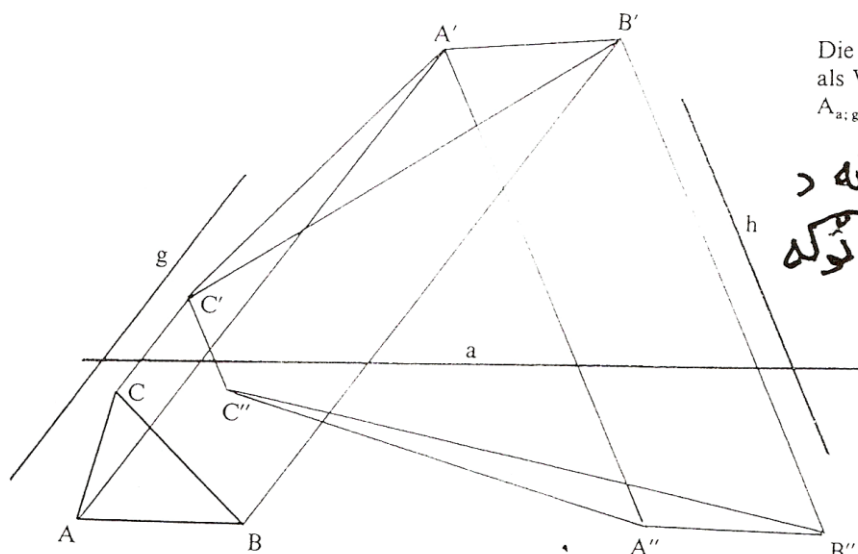
: تړلو په څیر:

$$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-1/2}$$

Die Scherung
als Verknüpfung

$$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-1/2}$$

بیاتیونه د
تړلو په توګه



څېره ۱۹۴

سرلیک

په بیاتیونی کی، لکه څنگه په مایلی اینونی کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وگورۍ)
 په عمومي توگه د څیرې - او اصلي هواری لپاره په یوه محوري افینیتی کی باور لري : $F' = |k|.F$, او یو په بل پسې کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
 $F' = |k| \dots |k|.F$:

دا په دې مانا، چی محوري افینیتی په عمومي توگه هواری ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتی ده له $k = -1$ سره. (څیره ۱۹۲ وگورۍ)

کونگرواینڅ څیرونه
 هره کونگرواینڅڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنۍ راکښنه (راکښل)
 هر منځراکښنه یو افینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونگرواینڅ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیری، د ټولو افین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونو یو په پسي اجراشي یو گروپ جوړوي، داسی په نامه افینگروپ.
 (گروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

تمرینونه

- ۱ - یو دریګودی ABC دې په یوه افین هوار مساوي باندې داسی وارول شي، چیرته چی او $|AB| = |AB'|$.
- ۲ - په دریګودي $A(3|5)$ ، $B(5|4)$ ؛ $C(3|1)$ باندې یو محوري افینتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی $A'(-3|1)$ او $-y$ محور د افینتي محور وي.
- ۳ - د گردی خیره د $M(2|3)$ او $r = 3 \text{ cm}$ سره وټاکي، که د $-x$ محور د افینتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرنه او $k = 2$ د افینتي فاکتور یا $-x$ ځل وي.
- ۴ - یو دریګودی په هوار مساوي پنځه ګودي واروی.
- ۵ - یوه گردی دې د نیمي $d = 12 \text{ cm}$ او د افینتي فاکتور $k = \frac{1}{2}$ سره افینخیره شي. د راپیدا ایلپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینتي محورونه دي چی له منځکي او لوریزکرنی څخه تیریري)
- ۶ - یو ترپڅ ABCD جوړکړی له $a = 8 \text{ cm}$ ؛ $c = 3 \text{ cm}$ ؛ $d = 5 \text{ cm}$ او $\angle A = 40^\circ$. په دې محورې افینتي لارښوده کړی، چی د افینتي محور یی د ترپڅ منځلاین وي، چی د لورکرنه یی د هغي سره 55° درجي کونج جوړوي او د افینتي ځل ۱- فکتور یی $k = \frac{3}{2}$ دی.

دريگوډيکچ يا تريگونومتري Trigonometrie

تعريفونه

د دريگوډيکچ يا تريگونومتري دنده ده چی په هواره يا په هوا کی دريگوډي کچ کړي ، د ځانگړو بلواکو له لارې، دې په نامه تريگونومتري بلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښي (مور یی تل راگرځیدوني بللی شو) څیرل کیږي.

تريگونومتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Ptolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختگ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريگوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیک، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمک اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیک Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.

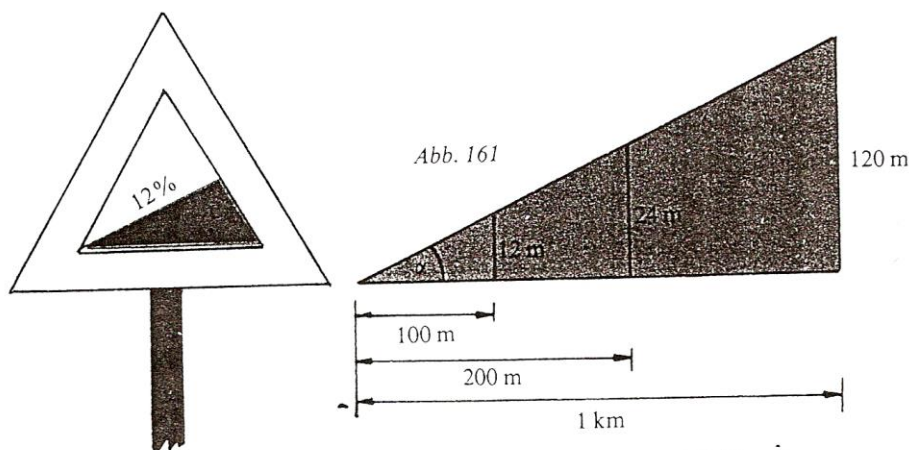
د تريگونومتري مانا یا مهموالی په ځانگړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرنبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي (پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبللگه: د په مانا یا مهم جگوالي یا لویدکرنو نڅښه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی (دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي (وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

پیچومی یا جگوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جگوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جگوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توگه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جگوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جگوالی لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جگيږي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړ شوي پیچومي یا جگوالی کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیزه و هواری فاصلي ته تغیر خوري . د پایکړنو تناسب یا ځاننیزه ثابت یا ځای په ځای پاتیږي او د په سلو کی گڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جگوالی اوږدوالي معلومات نه



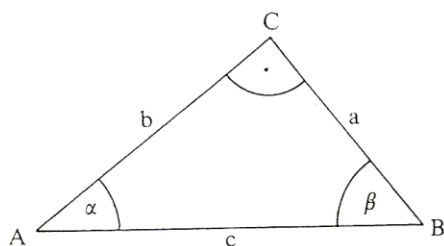
خیره ۱۹۴

۱۵۰. دریگوډیکچ

ورکوي همداسي زوړی یا لويدون. په داسي حالت کې هم بيا نورې لوحې هم زوړندې وي.

په همدې ډول پيچومي کيدی شي، لکه په سلو جمله کې، د کونج له لارې هم ورکړشي، چې د سرک ټوټه يی د پرتون سره جوړوي.

تریگونوميټري یا د په سلو کې (د پيچومي یا جگوالي تناسب) د پيچومي یا جگوالي ويناوي دي او یا په څرگندو پيچومي کونج یا جگکونج چې سلیيز پيچومي یا جگوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کې ۱۲ جگوالي سره د پيچومي کونج په لاندې ډول دی $\angle = 6, 48^\circ$.

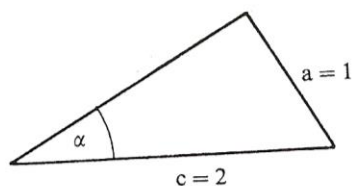


څیره ۱۹۵

په پيلبيلگه کې څرگندېږي چې دا پایکرښي د يوه ولاړ دریگوډي اړخونه انځوروي، چې د دوه دریگوډيو تناسب یا ځانښونه د کونج په بلواکۍ یا اړتوب ښايی. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کېږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتي a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β .

اوس نو لاندې جملې باور لري:

ساینبلواک sinusfunktion: بیلگه:

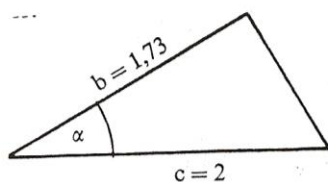


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

خیره ۱۹۶

کوساینبلوک Cosinusfunktion: بیلگه:

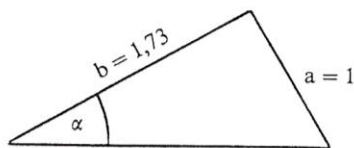


$$\cos 30^\circ = \frac{1,73}{2} = 0,8660$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرتہ کتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion: بیلگه:



$$\tan 30^\circ = \frac{1}{1,73} = 0,577$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

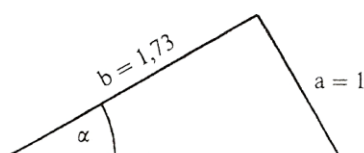
خیره ۱۹۸

سرلیک

يادونه : پام دې وي چي د مخامخ کاتيت لاندې د دريگوډي هغه اړخ پوهيږو، چي په هيپوتينوزې پراته کونج ته، چي څمور موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چي په همدې کونج پروت وي، هغه ته په کونج پروت اړخ چي مور يي لنډ پروت کاتيت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چي کم کارول کيږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بيلگه



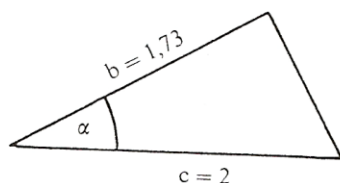
$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتيت}}{\text{مخامخ کاتيت}}$$

څيره ۱۹۹

$$\cot 30^\circ = \frac{1.73}{1} = 1.73$$

ډير کم، د بيلگي په توگه استرونومي کي، لاندې کونجبلواک کارول کيږي

سيکانسبلواک sekansfunktion بيلگه

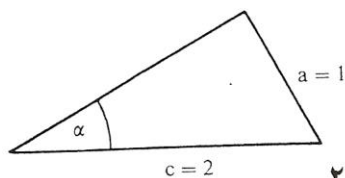


$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هيپوتينوزې}}{\text{پرته کاتيت}}$$

څيره ۲۰۰

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{1.73} = 1.156$$

کوسیکانسېلوک Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

مور به زیات وخت لمړنۍ درې یا په همدې توگه لمړنۍ څلور بلواکه د کارونۍ لپاره راوښو یا وکاروو.

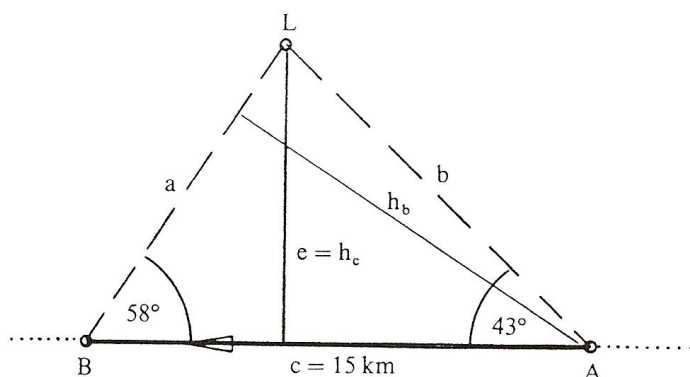
په خوښه دریگوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجېلوکي یواځی په ولاړکونجیز دریگوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جگوالی په جوړولو کی هر دریگوډی په ولاړو برخه دریگوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکړنبي وینا وي د پیل دریگوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشو کونجونو.

پیلېلگه

یوه کښتۍ د رڼا ډزکړي (کله چی کښتۍ له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتۍ یا یو بل څه ته که یوه کښتۍ وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرگندېږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پېښ شوي دي). دلته $\alpha = 43^\circ$ د تگ په لور اندازه کیږي او له

یوه تگ پایکرنې $c = 15 \text{ km}$ او کونج $\beta = 58^\circ$ وروسته.
 په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼا اور څخه څومره لرې ده؟
 د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډز رڼا اور څخه څومره لري دی؟
 په A کی له اور څخه څومره لرې وه؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ; \quad \sin \beta = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د h_b په لور اوبصول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12,959 \text{ km}$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12,959 \cdot \sin 43^\circ = 8,838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8,838}{\sin 58^\circ} = 10,421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونو a او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

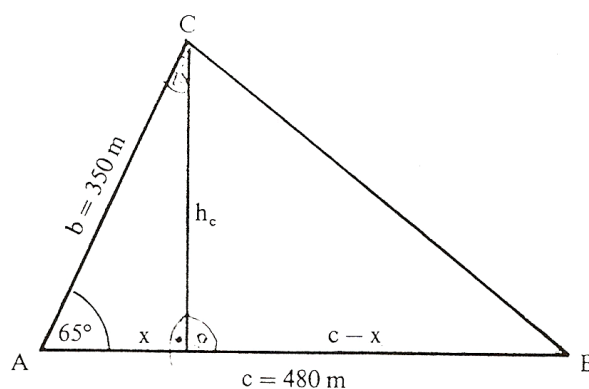
د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځاننیزونه یا تناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیزونه یا تناسب دی.

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= a / b & \sin \beta / \sin \gamma &= b / c \\ \sin \gamma / \sin \alpha &= c / a \end{aligned}$$

د ساین جمله په پخ دریګوډي کې هم باور لري (تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي. سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغو تر منځ راگیر کونج؟

پیلېلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنې $b = 350 \text{ m}$ او $c = 480 \text{ m}$ دي او یو کونج $\alpha = 65^\circ$ ځبندوي. د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جگوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b \cdot \cos \alpha$ ،

ځکه چی $\cos \alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی

$$h_c^2 = b^2 - x^2$$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

د اړخونو اوږدوالی نوموړی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راگرځیدونکی (خیکلیکي یوناني کلیمه ده گردی ډوله یا منظم بیرته راگرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

په هر یوه دریګوډي کې د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملې عمومیت یا ټولیز ته هم وايي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواک له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره، ترڅو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو. د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیدا شو:

$$A = 0,5 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

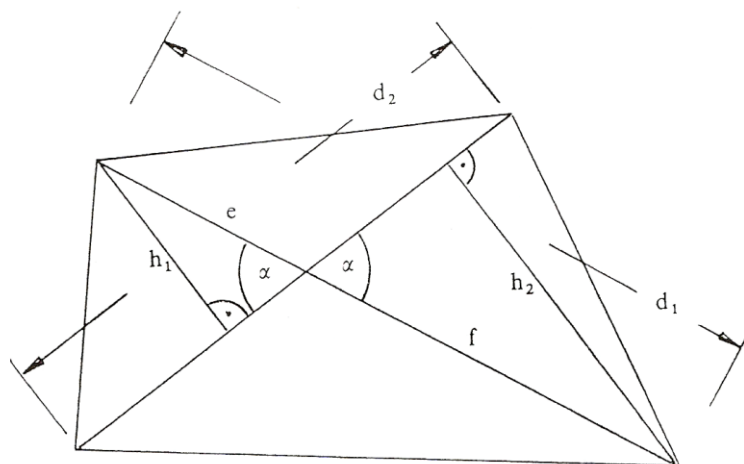
$$\sin \alpha = w(d_1; d_2) \quad \text{چیرته چي}$$

$$A = 0,5(d_2 h_1 + d_2 h_2) \quad \text{اوبی یا حل :}$$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي، نو لرو

سرلیک

$$\begin{aligned}
 h_1 &= e \cdot \sin \alpha \\
 h_2 &= f \cdot \sin \alpha \\
 \Rightarrow A &= 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha \\
 \Rightarrow A &= 0,5 \cdot d_2 d_1 \sin \alpha
 \end{aligned}$$



څیره ۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریگونومتريکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وویل، چی کونجبلواک، نه یواځی د دننه لورته تیرو درېگودیو لپاره، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

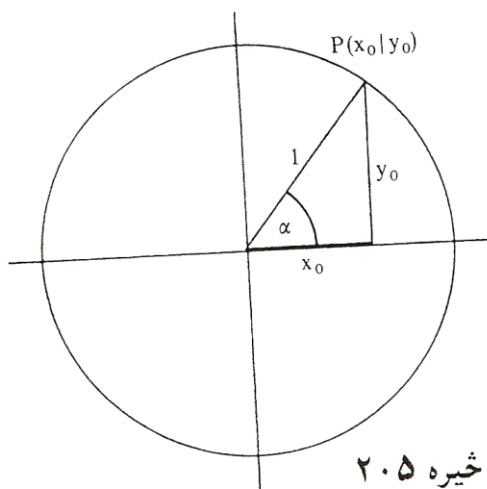
دا پراختیا څنگه تصور یا د خیالوړ کیدی شي؟

په ښه توګه داسې کیدی شي چې په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردینات سیستم کې یوه ګردۍ ووهي چې وړانګه یې ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چې وړانګه یې یو یوون دی) او د ګردۍ منځتګۍ او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډۍ، چې د هغې یو کونج د ګردۍ ځنټریکونج دی، یعنی کونج یې د ګردې په منځ یا ځنټر پروت دی، (خیره ۲۴) کم له کمه یې یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډۍ په دننه کې شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړ کونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چې په لمړي لمړي څلورمه یا کواډرانت (Quadrant) کې پروت دی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ، د کونجتګۍ $P(x_0|y_0)$ په پام کې نیولو سره، باور لري:

$$\sin \alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos \alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښې د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکې مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چې د محور غبرګي رڼا لاندې راشی.



خیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کې کیدی شي چې د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتريکي پیتاګوراس:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

چیرته چې $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$ په مانا دی.

سرلیک

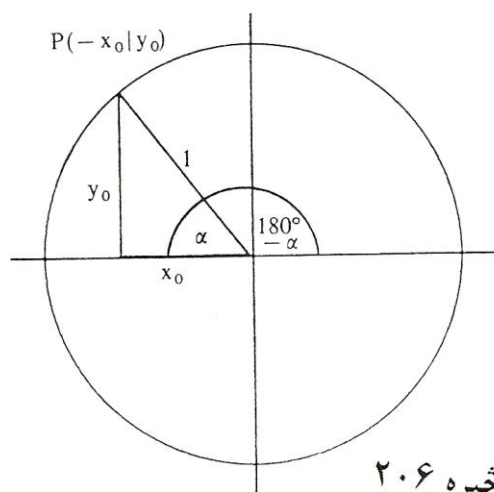
کیدى شي ، چى پوښتنه وشي چى همدا « سيورى » بيا كله لاس ته راتلى شي .
دا حالت بياتيك هلته لاس ته راځي، چى وړانگه د منفي x -محور سره يو
كونج α جوړ كړي، يعنې څنټريكونج يى $\alpha - 180^\circ$ وي .
د « سيوروخپرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

ځكه چى دا سيورى همغومره اوږد
دى لكه د مخه، مگر اوس له صفر
پيل مخامخ (منفى) لور ښايي.

په ورته توگه لاس ته راځي :



خیره ۲۰۶

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

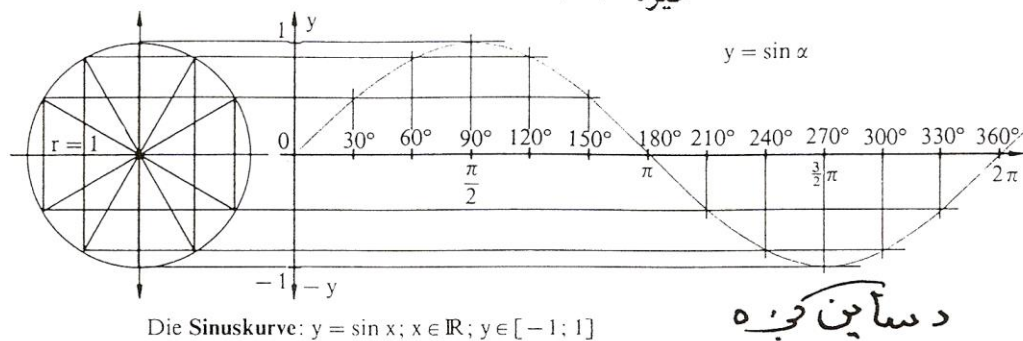
$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \sin (-\alpha) = -\sin \alpha;$$

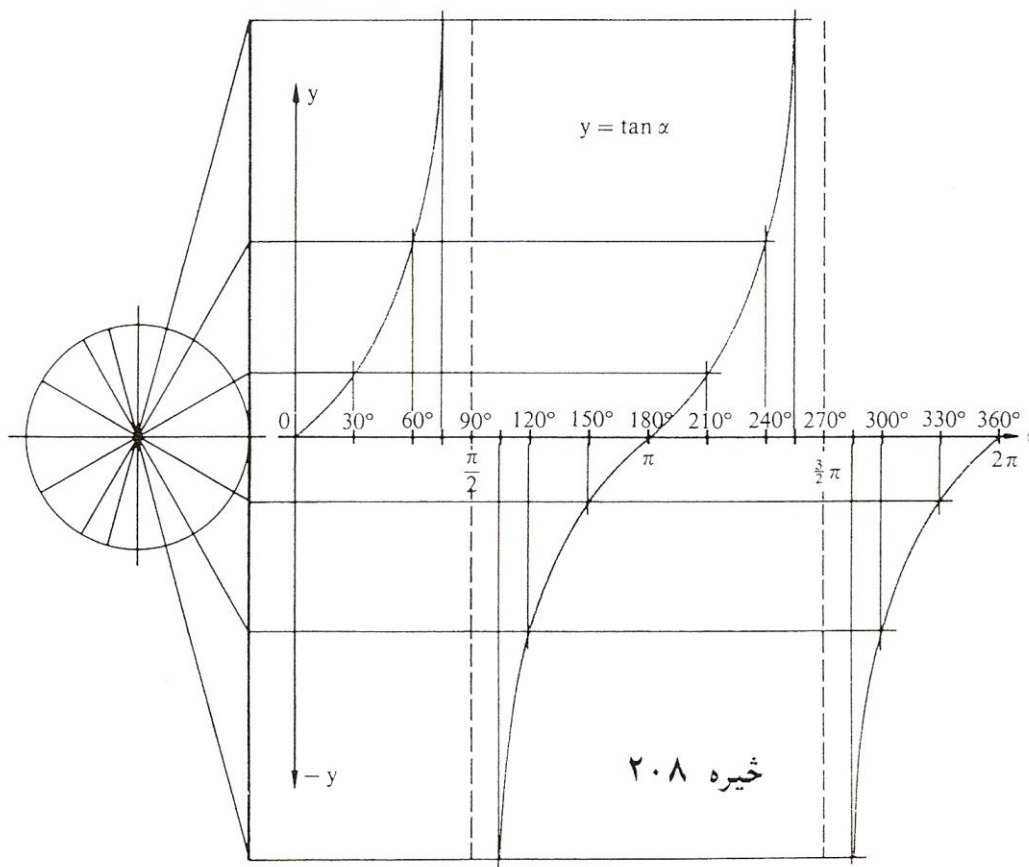
$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

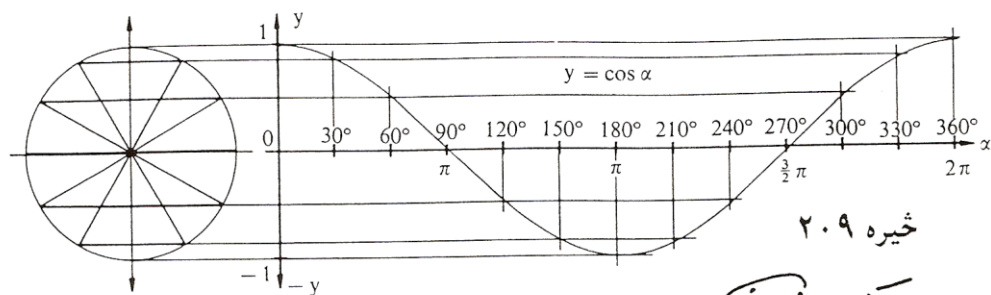
د كونج $\alpha + 360^\circ$ لپاره بيرته د سرچيني كونج اړيكى لاس ته راځي: همدا ډول
د $\alpha + 720^\circ$ لپاره اوهمدا سى نور. په دې توگه د په خوښه كونجفلكشنونو يا
كونجبلواكو لپاره د ساين او كوساين بلواك تعريف دي.
د $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ له امله (مقايسه مخ | ۱۵) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق كوي. له دې امله لاندې د بلواكگرافونه لاس ته راځي

څیره ۲۰۷



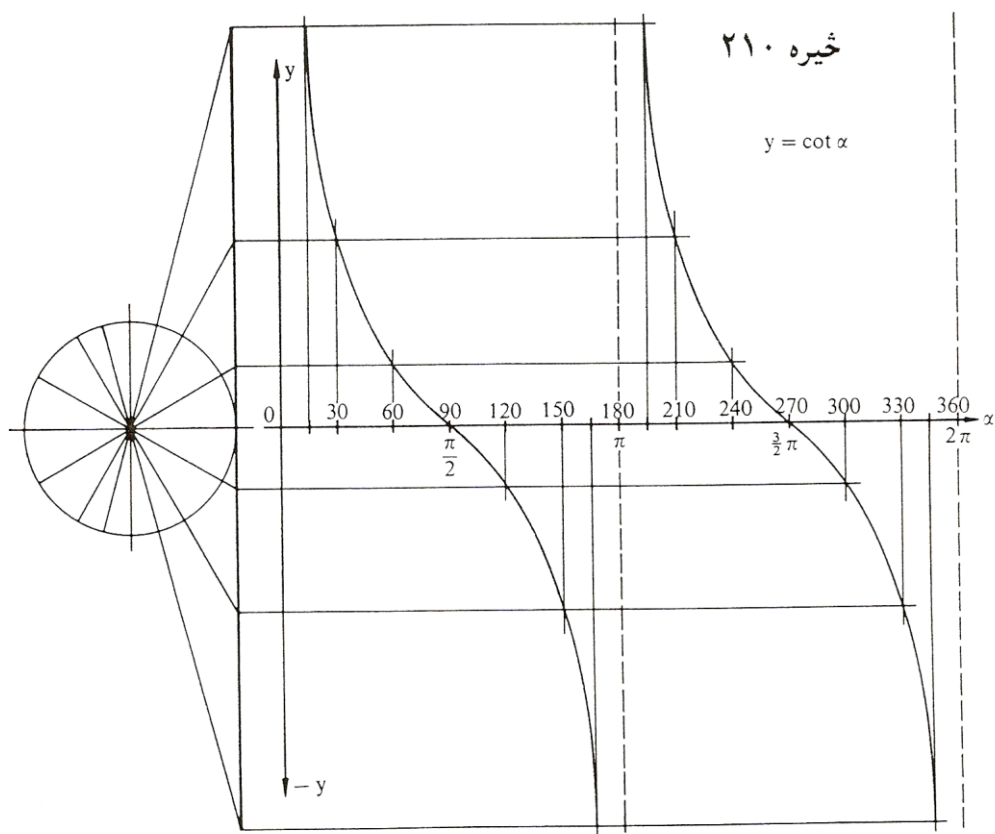
څیره ۲۰۸





Die Kosinuskurve: $y = \cos x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

ڊکوساين کيوه

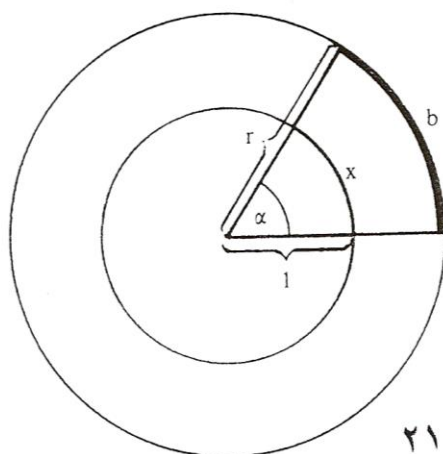


Die Kotangenskurve: $y = \cot x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

ڊکوتانجنٽ کيوه

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا - اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی بنایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتدیری رییلګڼونه دي، په داسی حال کی چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیری ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



خیره ۲۱۱

کونج لویی په واقعیت کی یوون «راد» (rad) « لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مونه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتريکی بلواکو کی ایښودل کیږی (د بیلګي په توګه $\sin$)

ارګومنټ (Argument تعریفدیری) بلل کیږي. په تعریفدیری کی کیدی شي چی نوې درجه، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چی په جشمیری کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی. (راتلونکی دې وکتل شي)

په برخه گردیبرخوکی وښوول شو (گردیبرخی د مخه خپل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه گردیبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پورې 360° درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپیری کی α همداسی نیسي لکه په پیل کی α و 360° درجو ته . دلته گردیگن دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبللگه:

کونج $\alpha = 60^\circ$ له گردی د 10 سانتیمتره وړانگی سره یوه په لاندې ډول گردی لینده $b = 20\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 10,47 \text{ cm}$ غوڅوي یا بیلوي. د گردی

چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83 \text{ cm}$

همغه کونج α د 5 سانتی متره وړانگی سره گردیلینده

$$b = 10\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 5,236 \text{ cm}$$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري : $U = 10 = 31,416 \text{ cm}$.

له گردی د وړانگی $r = 1 \text{ cm}$ سره ددې په خټ یا برعکس کونج گردیلینده

$$b = 2\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 1,047 \text{ cm}$$

غوڅوي» د دې گردی چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلگی څرگندیري، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیري لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردي د وړانگی 1 سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردي د گردیلیندی اوردوالي کچگن، چی په خنتریکونج

باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi) 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګې څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریلګڼونه پریښوول شوي. بیلګې:

$$\begin{aligned} \alpha = 1^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ} \pi = 0,0175 \text{ (rad)} & \alpha = 180^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \pi = \pi = 3,1416 \\ \alpha = 30^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236 & \alpha = 360^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ} \pi = 2\pi = 6,2832 \\ \alpha = 45^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854 & \alpha = 720^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ} \pi = 4\pi = 12,5664 \text{ usw.}; \\ \alpha = 60^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472 & & \\ \alpha = 90^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708 & \alpha = -75^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{-5}{12} \pi = -1,309 \end{aligned}$$

ارکوسبلواکي Arcusfunktionen

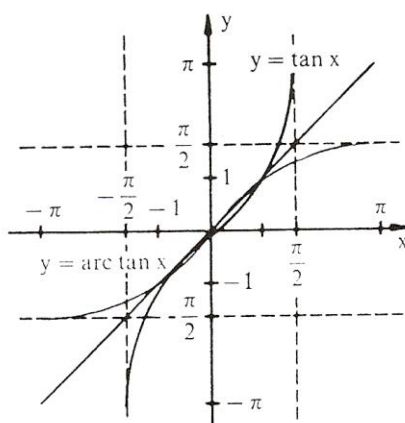
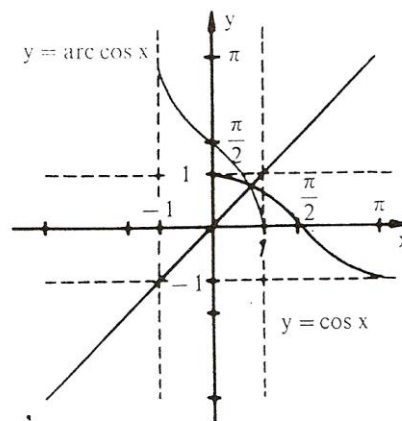
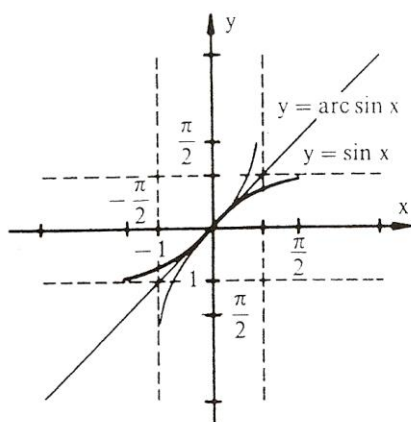
زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي، چې لکه په ورکړشو کرښخانینونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومېږي یا څنګه راڅرګندېږي یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیګی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونو لپاره یا

مختلفو واټنونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعريف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

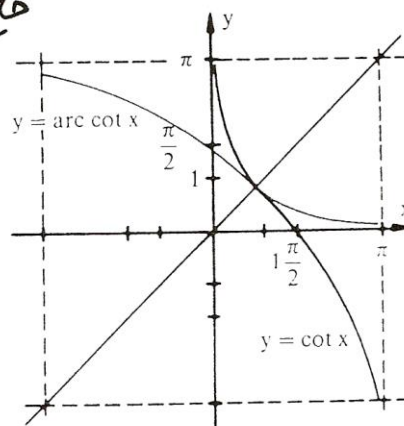
تعريف: د یوه (رابند یا محدود) تريگونوميټريکي بلواک په څټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کېږي یا ځيکلوميټريکي بلواک (لاتین : ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته $\arcsin(x)$ لوستل کېږي «د x ارکوس ساين. د کونجبلواک تعريف ډیری دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښت ډیری دی او په څټ ارگومنټ یا تعريف ډیری دلته تل یو ريلگن دی.

Trigonometrische Funktion تريگونوميټريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f: x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$f: x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



فایده ۱۱۲



Beispiele:

1. $\arcsin(0,8) = 0,9273(\text{rad}) = 53,13^\circ$
2. $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0^\circ$
3. $\arctan(-100) = -1,5608(\text{rad}) = -89,43^\circ$
4. $\text{arccot}(-70) = -0,0143(\text{rad}) = -0,82^\circ$

بینگی:

۵- دا چی کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په خت بلواک دې نو باور لري

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(y)) &= y; & \arcsin(\sin(x)) &= x \\ \cos(\arccos(y)) &= y; & \arccos(\cos(x)) &= x \\ \tan(\arctan(y)) &= y; & \arctan(\tan(x)) &= x \\ \cot(\text{arccot}(y)) &= y; & \text{arccot}(\cot(x)) &= x \end{aligned}$$

یعنی په لاندې توګه هم

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(0,4)) &= \sin(23,58^\circ) = 0,4 \\ \arccos(\cos(\pi/3)) &= \arccos(0,5) = 1,0472 \\ \tan(\arctan(-40)) &= \tan(-88,5679^\circ) = -39,9999 \\ \text{arccot}(\cot(60^\circ)) &= \text{arccot}(0,5774) = 1,0472 \end{aligned}$$

د جشمیري کارونۍ یا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواک تعریفیږي او ارزښت‌یږي شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یې ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چې د جشمیري استعمال په هکله هم څه ووايو.

کورکمپیوتر زیات وخت داسې فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفې په کلک اختیار کې لري، چې د درجې اوږون په لینده کچ او په څپ کوي، مگر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکې په پروګرام کې ځای په ځای شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمۍ د $\dots$ سره په نڅښه شي:

په قاعده کې درېی بلواک ورکړ شوي دي: $\cot$; $\cos$; $\sin$ - کوتنجنټ
 بیا داسې شمیرلکیدی شي، د $\tan$ $\langle 1/x \rangle$. د INV - توکمۍ سره سړی
 ارکوسبلواک ته راځي: نو $\text{INV} \langle \sin \rangle$ ارکوس ساین دی. په عمومي توګه
 کونج - بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي - باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

س

۱ لاندې جدول همغه د کارونۍ یا استعمال لپاره د جشمیري چمتووالی ښای:

Winkelmaß	TR-Modus	Beispiel
کونجکچ	په نڅښونه	نیلکه
Altgrad	DEG	$\sin 45^\circ = 0,7071$
Neugrad	GRAD	$\sin 50^\circ = 0,7071$
Bogenmaß	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$
زېږه درجه		
نوې درجه		
لینده کچ		

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
$\sin 45^\circ$	45 <sin>	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	< π > <: > 6 <sin>	0,5	RAD
$\cot 30^\circ$	30 <tan> <1/x>	1.732050808	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	60(°)	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
$\operatorname{arccot} 2$	2 <1/x> <INV> <tan>	26.56505118°	DEG
$\sin 220^\circ$	220 <sin>	-0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چي جشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه - یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځي یا د بیلگي په توگه <MODE> .

د ورکړشوي درجه گڼي اوړون په لینده کچ د <DRG> سره سورت نیسي. بیرته یا په څټ سپری داسی راځي- لکه چي لرل مو- د <INV> - تکمی سره.

بیلگي

60°	<DRG>	60(rad)
60	<DRG>	60(grad)
60°	<DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<DRG →>	60°
60°	<INV> <DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<INV> <DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<INV> <DRG →>	60°

دلته گراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی گون (gon).

ځنې جشمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په ګراد دقیقې، ثانیه او یا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تګمې <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26.75° 30°15'	<inv> <DMS - Dd> <DMS - Dd>	26°45' 30.25°
------------------	--------------------------------	------------------

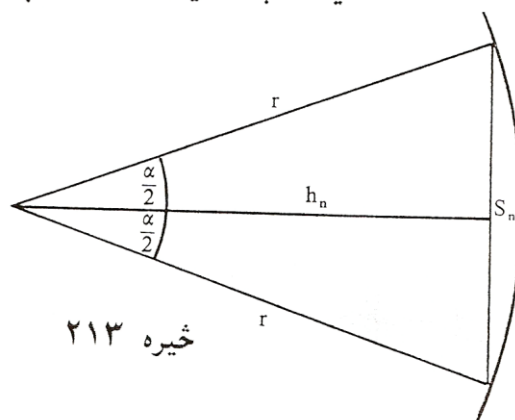
د " 30° 15' " ورکړه کیدی شي د جشمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جشمیری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان موږ متأسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پرېښوولی)

پیلبللګه: دلته دې S_n د یوه منظم n -ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه ګردی کی چی وړانګه یی $r = 5 \text{ cm}$ ده، راګیر دی.

الف) وښایی چی

$$S_n = 2r \cdot \sin \left(180^\circ : n \right)$$

ب) د یوه داسی n -ګوډي چاپیری U_n وشمیری ، چی $n = 8; 16; 32; 128$ وي، او په نزدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګي r سره وښایی .



پ (په همدې ډول n -گړدۍ له هوارو A_n څخه په نزدې توگه يا تقريبې د گړدۍ — هواره A وښايي .

اوبی (حل) : هر n -گړدۍ کيدۍ شي په n مساوي دريگړديو ټوټه کړي شي. د هغو د څښتريکونج α لپاره باور لري $\alpha = 360^\circ / n$. د جگۍ يا جگوالی h_c د کښلو سره په هر مساوي پښيز دريگړدي کي ولاړکونجيزې نيایي د څنتریکونج يا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360^\circ / 2n = 180^\circ / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n/2) / r = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

$$b) U = n \cdot S_n = 2r \cdot n \cdot \sin(180^\circ / n) = 10n \cdot \sin(180^\circ / n)$$

د ارزښتشميرنو د غلطۍ مخنيوی لپاره همدفمند يا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپرلپسی تکمی وکارول شي يا استعمال شي .

$$\begin{array}{l} 180^\circ \langle \text{STO} \rangle \langle : \rangle \quad 8 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 8 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 30.614675 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 16 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 16 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.214452 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 32 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 32 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.365485 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 64 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 64 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.403312 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 128 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 128 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.412773 \end{array}$$

پ (د ډيرگړدي هواره د دريگړديو هوارو د يوځايوالي څخه لاس ته راځي د هر دريگړدي هواره ده: $0, 5 \cdot S_n \cdot h_n$. د

$$h_n = r \cdot \cos(180^\circ / n)$$

$$S_n = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

او

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0,5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0,5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نږدې نږدې کیدونکي ده

360° <STO> <: >	8 <= > <SIN> <: >	8 <: > 12.5 <= >	70.710678
<RCL> <: >	16 <= > <SIN> <: >	16 <: > 12.5 <= >	76.536686
<RCL> <: >	32 <= > <SIN> <: >	32 <: > 12.5 <= >	78.036129
<RCL> <: >	64 <= > <SIN> <: >	64 <: > 12.5 <= >	78.413712
<RCL> <: >	128 <= > <SIN> <: >	128 <: > 12.5 <= >	78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چي له یوې زخیږې زیاتې ولري ، لکه چي پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتې هم زخیږه کیدی شي» په یوه منظم پروگراموړ ماشین سره کیدی شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د گوډونو گڼ څخه تـ شو یا د گوډونو گڼ باندې صرفنظر وشي .

د تریگونومتريکي بلواکو خویونه

دا چي کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چي یوه کونج بلواک تعریفیږی یا ∞ او یا x وي. ددې لپاره چي د یوه بلواک خوي باندې ټینگار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړۍ ډله یواځي له تعریف مساوات (د مخه راغلی) او د پیتاگوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x ; 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتريکي بلواکو کې هيله ده ، چې د پوټنځ لیکدود په پام کې ونیسی.

په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې gegeben ورکړی او gesucht غوښتونې یا پلټونې په مانا دي

gegeben دودنې	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
gesucht غوښتونې	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$

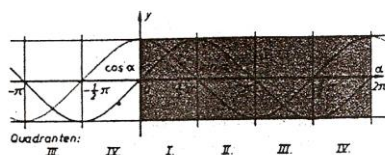
سرلیک

$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لكه چې د مخه مو په گوته كړل، كيدى شي چې تريگونوميټريكي بلواك د مختلفو گونجونو لپاره روښانه شي. كه لمړي وركړ شوي بلواك ارزښتونه مقايسه شي، نو په كره توگه يا په كلكه توگه لاس ته راوړى شو

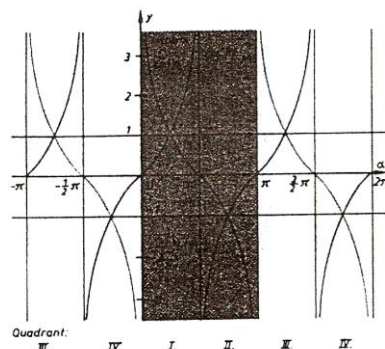
تعريف : تريگونوميټريكي بلواك ټول پريوديكې يعنې بيرته راگرځيدونكى دى، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو كې تكرارېږي. په دې د ساين بلواك او د كوساين بلواك راگرځيدنه (يا ۳۶۰ درجى) لري، كوتنجنتبلواك راگرځيدنه (يا ۱۸۰ درجى (180°)) لري.

$$\left. \begin{aligned} \sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$


څيره ۲۱۴

د ساين او كوساين څنگړن
بهرې د يان راگرځيدنه



د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راگرځېدنه:

بیلگې:

میچې:

$$\begin{aligned} \sin 50^\circ &= \sin(50^\circ + 360^\circ) = \sin(50^\circ - 720^\circ) = 0,76604 \\ \cos -30^\circ &= \cos(-30^\circ - 360^\circ) = \cos(-30^\circ + 1080^\circ) = 0,86603 \\ \tan 2,5 &= \tan(2,5 - \pi) = \tan(2,5 + 5\pi) = -0,74702 \\ \cot 10 &= \cot(10 + \pi) = \cot(10 - \pi) = 1,54235 \\ \sin 35^\circ &= \sin(180^\circ - 35^\circ) = -\sin(180^\circ + 35^\circ) = -\sin(360^\circ - 35^\circ) = 0,573576 \\ \cos 35^\circ &= -\cos 145^\circ = -\cos 215^\circ = \cos 325^\circ = 0,81952 \\ \tan 0,6109 &= -\tan 2,5307 = \tan 3,7525 = -\tan 5,6723 = 0,700208 \\ \cot 0,6109 &= -\cot 2,5307 = \cot 3,7525 = -\cot 5,6723 = 1,428042 \end{aligned}$$

که د فنکشن گراف ته په څیر شو، نو برسیره پر دې روښانېږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلگې:

	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	-0,573576	-0,573576
cos	0,819152	-0,819152	-0,819152	0,819152
tan	0,700208	-0,700208	0,700208	-0,700208
cot	1,428148	-1,428148	1,428148	-1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جېشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

سرلیک

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	-	0
cot x bzw. cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

دلته د همدابول يا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا گوماني لاس ته راوړی شو

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) & \cos x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ \tan x &= \cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) & \cot x &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)\end{aligned}$$

دا گومان کیدی شي په ولاړ کونجیز دریگودي کي د تعریف په مرسته په ساده توگه وپنډول شي. :

$$\sin \beta = a / c \quad \text{او} \quad \cos \beta = a / c$$

د $\beta = 90^\circ -$ له امله لاس ته راځي :

$$\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$$

په ورته توگه نور د غوښتنې هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین

بلواکو یا په همدې ډول د تانجنټ او کوتنجنټ بلواکو گرافونه د $x = \frac{\pi}{2}$ کرښی

ته یو بل سره محوریو مترې ځغلي :

له څیرو او بیلگو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین - ، تنجنت - او کوتنجنت بلواک ناجفت دي « د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \tan(x) = -\tan(-x); \cot(x) = -\cot(-x)$$

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin(-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan(-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = 0,27762$$

د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چې کونجبلواک لایني نه دي (د فنکشنگراف کرښه نه ده، بلکه کرښه ده) ، نو ډبل تعریفیږي پورې ساده ډبل بلواک ارزښت اړه نه لري. لکه

$$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواک ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابی کړی شو.

بیلگی :

$$1. \quad \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$1'. \quad \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$2'. \quad \text{cis}(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

3. $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$$7. \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$$

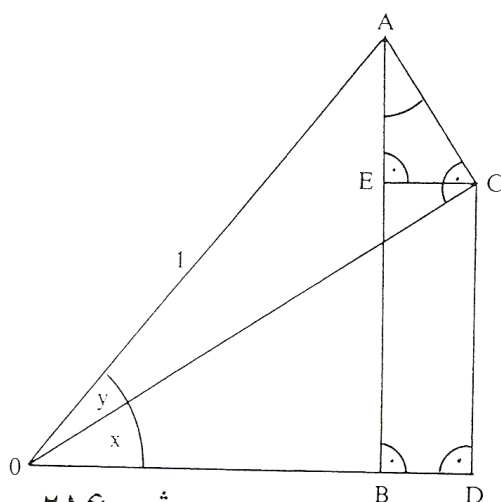
$$8. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

$$9'. \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq -1$$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

$$10'. \cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq \cot y$$



خیرہ ۲۱۶

1. und 2.:

$$|OA| = 1 \quad |AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y \quad \frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسیره پردې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د کای په کای کولو ټنډه ښودنه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. 2':

3. 4. کای په کای کړو: $x = y$

$$5.: \text{Setze } z+t=x; z-t=y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}; t = \frac{x-y}{2}$$

کېږد

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$

پس لرو

$$= \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \text{هېرسي}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

6. ښودنه پر دېه توګه څنګه شي

$$7.: x = y = z/2$$

کېږد

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2 \frac{z}{2} - \cos z \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos z)$$

د ریښه نیونې له لارې ښوونه لرو

په (*) $\sin^2 z/2$ کې $1-\cos^2 z/2$ کيږده:

۹ - ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواک یا فنکشن $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لکه چې په پیل کې مو وویل په طبیعت او تخنیک کې ډیرې پېښې شته دي چې تل بیرته راځي یا لنډ: راځي، یعنې پریودیکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواک بسیا نه کوي.

دا زیات علتونه لري: لمری د ساینبلواک د -1 او 1 ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور دا واقعي د کونج په واک کې نه دي بلکه د وخت په واک کې دي د یوې راځيځدنې سره، چې دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواک د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیکیشن شي یا یې بڼه واوړي. دا بڼه اوږون او د هغې تاثیر په لاندې لیدنه کې راټول شوي دي، ګراف یې ورزیاتې څیړونې لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کې مګر یواځې د ساینبلواک (په همدې توګه د هغې مخامخ د کوساین بلواک چې په $\pi/2$ سره راګڼل شوی وي) د مانا ډک دي. (پوسټن: له پېښې لور څخه)

بیلګې	د کارونې ساحه	تاثیر	بلواک
څلورمه ۲۱۷	ټولې تلپېرته راځيځدونې تعاملونه		$y = \sin(x)$
څلورمه ۲۱۸	د یوه مساوي او ډول شپاړتیا لرونکي یو په بل بېلګې	د -2 لور باندې راګڼنه	$y = \sin(x) + d$

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا های بدلون	په بدل بوښنه جریان د بوښنه او شینا ژونډ تغییر د وښانویه	۲۱۹
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیتود د ټاکل بدلون فالتور - ۱ د 180° فاز های بدلون د	د یوه بندل خوږ بدنه	۲۲۰
$y = \sin(bx)$	د پریود تغیر یا بدلون سرعت $b > 1$ $0 < b < 1$ $b < 0$ په کرا کیدل په غټ کیدنه کم مخور د	د یوه بنسټیزې پورې تغییر د پوره وخت داوړنه او رهغی پورې لمنزه لکه په دغو الویه او ازولو کې	۲۲۱
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پړاوې جریان یا عمل	۲۲۲

تمرینونه

۱ - د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$$4^\circ 6' = 4,1^\circ \quad ; \quad 10^\circ, 5' = 10^\circ 30'$$

a) $6,75^\circ =$

b) $120,48^\circ =$

c) $-75,65^\circ =$

d) $52^\circ 16' =$

e) $97^\circ 13' =$

f) $44^\circ 44' 44'' =$

۲ - په درجه کچې وليکي

a) $x = \pi/3,$

b) $x = -\pi/4,$

c) $x = (2/3)\pi$

d) $x = 4$

e) $x = -3$

f) $x = 4,7$

۳ - په لینده کچې یې وليکي

a) 15°

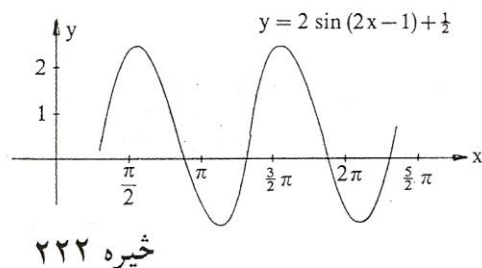
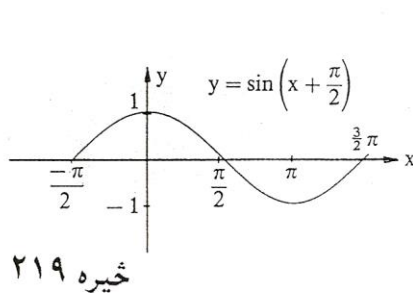
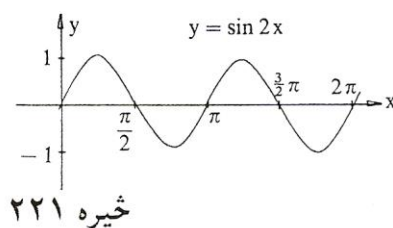
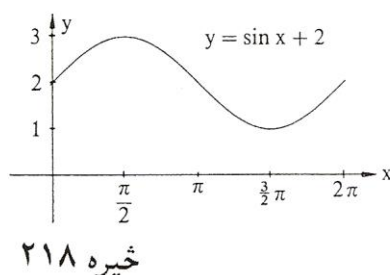
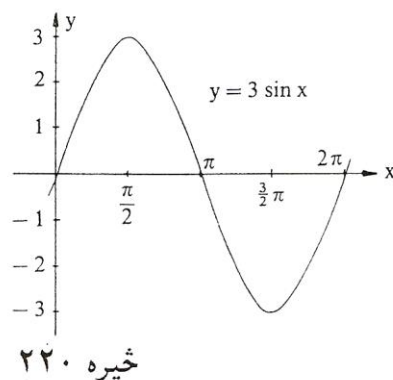
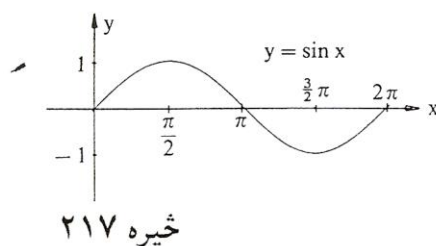
b) -60°

c) 540°

d) $20^\circ 15'$

e) $15,75^\circ$

سرلیک



د دې بلواک گراف د ساين کړې $y = \sin x$ څخه لکه چې گورو لاس ته راځي:

- ۱ - د ارزښت دوه ځله کيدل
- ۲ - د نيمی راگرځيد اوږدوالی باندې پرسیدنه
- ۳ - په يوه يوون د بني لور ته راکښنه
- ۴ - په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

۴ - وټاکي

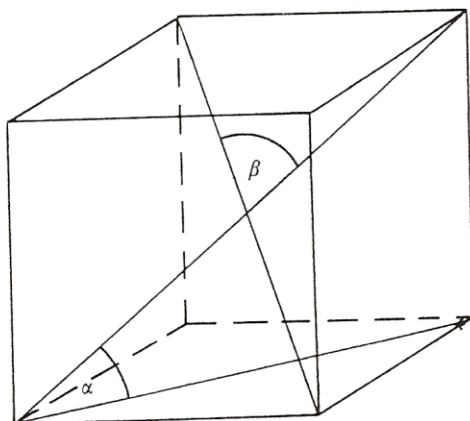
- a) $\sin 20^\circ$ b) $\sin(-30^\circ)$ c) $\sin 172^\circ$ d) $\sin 1^\circ 4'$
 e) $\cos 35^\circ$ f) $\cos 380^\circ$ g) $\cos(-27^\circ)$ h) $\cos 47,9^\circ$
 i) $\tan 11^\circ$ k) $\tan(-15^\circ)$ l) $\tan 33,33^\circ$ m) $\tan 13^\circ 13'$
 n) $\cot 870^\circ$ o) $\cot(-11^\circ)$ p) $\cot 14^\circ 14'$
 q) $\cot(-2^\circ 2')$
 r) $\sin \alpha = 0,8$ s) $\cos \alpha = 0,9$ t) $\tan \alpha = 2,5$
 u) $\cot \alpha = -1$ v) $\sin \varphi = 0,3$ w) $\cos \varphi = -0,13$
 x) $\tan \varphi = -4$ y) $\cot \varphi = 0,3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ - په يوه ولاړ کونجيز دريگودي کې لرو $\gamma = 90^\circ$ او په دې برسیره :

a) $a = 7 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}$

b) $a = 16 \text{ cm}; \gamma = 66^\circ 45'$

c) $c = 5 \text{ cm}; a = 3 \text{ cm}$



خیره ۲۲۳

پاتی ټوټی وشمیری

۶ - په مساوي پښيز دريگودي

کي ($a =$ پښه ده) دی

a) $a = 10 \text{ cm}; \alpha = 80^\circ 40'$

b) $a = 12 \text{ cm}; h = 8 \text{ cm}$

c) $\beta = 40^\circ; a = 7 \text{ cm}$

پاتی ټوټی وشمیری

۷ - د یوه پڅکونجيز ($90^\circ < \alpha$)

دريگودي لپاره ساین وشمیری

۸ الف (کوساین د یوه پڅ کونجيز

دريگودي لپاره وشمیری) ($\alpha > 90^\circ$)

ب) په يوه ولاړ کونجيز دريگوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ - په يوه مکعب کې د يوه هوا نيمې او بنسټهوارې ترمنځ کونج څومره لوي دی؟

څيره د دواړو هوا يا فضا يا بدن نيميو ترمنځ کونج څومره لوي دی؟

۱۰ - د دوه گردیو وړانگي

$$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 4 \text{ cm}$$

دي او همداسی د منځتکو واټن $|M_1M_2| = 8 \text{ cm}$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو گردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکي

او د کډې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ - په يوه دريگوډي کې د يوه

کونجني می مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی (څيره ۲۲۴).

۱۲ - که يوه بار ځاي ته،

چي ۱، ۵۰ متره جگ دی،

يوه زینه ورجگه شي

ميلانکونج دې زيات ترزيات 33° وي، زینه دې څومره لويه وي؟

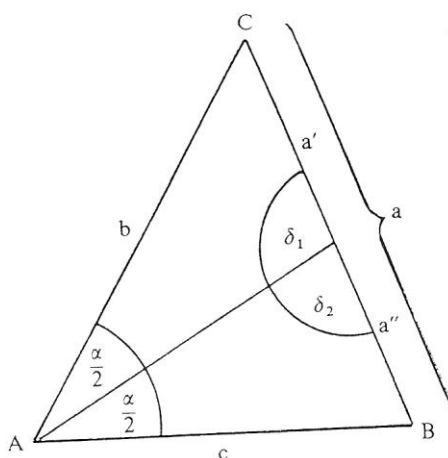
۱۳ - الف) د يوې پورته ختلی کوڅي جگوالی توپیر دې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او ۱۲% جگه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جگوالی توپیر څومره دی؟

پ) د يوه زوړندې پتيلار، چي ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی، که دا د جگوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟



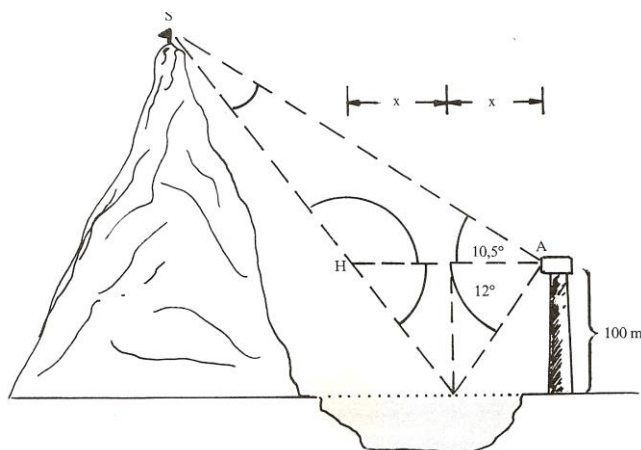
څيره ۲۲۴

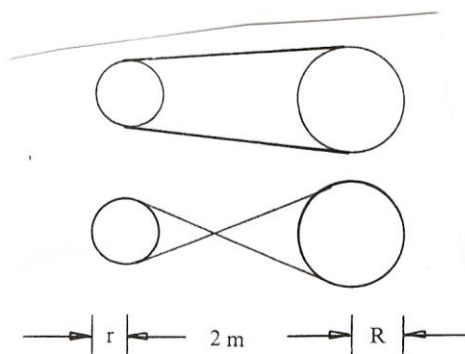
يو د اوبنی يا د اوبو بيلر (کله = ۱۰۰ کيلوگرامه) په يوه پورته خيزول کيږي، چي

- میلانکونج $\simeq 25^\circ$ لري. د وزن زور په زوړند زور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشار زور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره خومره لوي دی ؟ (۱ کیلو گرام = ۸۱ ، ۹ نیوټن $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$).
- ۱۵ - یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی. په پښه باندې په کوم جگوالی باید رسی وړلی شي ؟
- ۱۶ - د یوې ۵۳ متره جگي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمرورانگي په کوم جگوالی یو بل سره مخامخ کیږي؟
- ۱۷ - د یوه ۵ متره جگ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جگیدونکوج یی $\simeq 18,5^\circ$ او پښتیکي یی $\beta = 8^\circ$ لوید کونج ، برج خومره جگ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی خومره دی ؟
- ۱۸ - الف (د پیزا (Pisa) کور، برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ، ۴ متره ور اوړي. دا برج خومره مایل دی ؟
- ب (د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترگي جگوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟
- پ (د ۵ ، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي
- که جگوالی یی ۱۶۰ متره وي؟
- که جگوالی یی ۱۳۷ متره وي ؟
- ت (د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې د بل برج څوکه ښکارېږي چی جگوالی یی ۱۴۳ متره وي ؟

- د پاریس د ایفل برج ښکارېږي چی جگوالی یی ۳۰۰ متره دی ؟
- ۱۹ - د ښیپس اهرام (Cheops pyramid) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنسټ

- د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
 الف) د اړخهوارې میلانکونج خومره دی ؟
 ب) د څنگهوارې دریواړه دنننی کونجونه خومره لوي دي ؟
 ۲۰ - یو ژوری یا قبر -۸ ، ۱ متره ژور دی ، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی ، د پورته
 لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
 الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی خومره پراخ دی ؟
 ب) که ۱۰ متره اوږد وي ، نو بیا دا خومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی
 یی ۵۰ ، ۱ متره وي ؟
 ۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د
 بحیرې لور ته 14° میلان لري ، د دننه لور ته 28° میلان لري . د ډنډ بنسټ
 خومره سور لري ؟ د هغی د نیمی هواره خومره ده ؟
 ۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو بڼه لید د ماترهورن (ماترننسکر یا د ماترن د
 غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
 دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدتکي څخه چی ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په
 لور بڼکته وکتل شي ، نو د غره د څوکی هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
 لیدل کیږي . د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي . د ریفلډنډ
 باندې د ماترننسکر څوکه خومره جگه پروته ده ؟
 خیره





۲۳ - الف) یوه د کښولو کړی،

چي په دوه د کښولو چیترو

باندې راتاو ده، څومره اوږده

ده، که لاندې اندازې ولري

$$r = 22 \text{ cm}, R = 35 \text{ cm},$$

$$|M_1 M_2| = 2m?$$

څیره ۲۲۶

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي

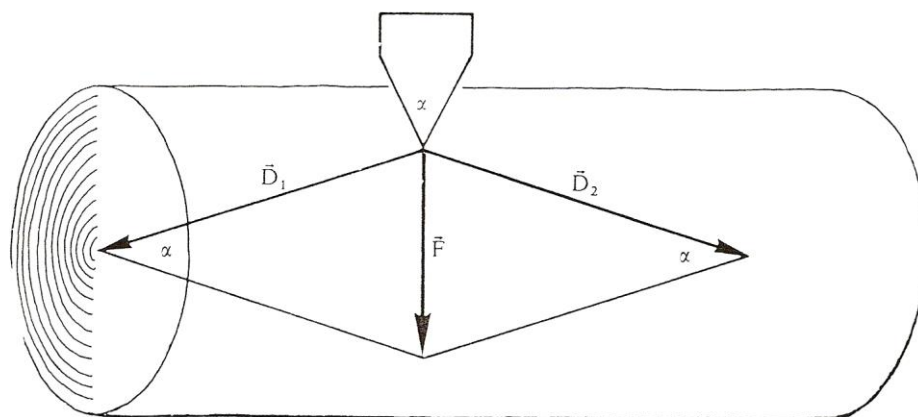
که د اټیران په څیر له پیټروګانو یا ټیکلیو ډاکی حیډل وي ؟

۲۴ الف) د ونی په سټه یو کایل (موری) په خټک د D زور سره وهل کیږي. د

فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه ، که د کایل

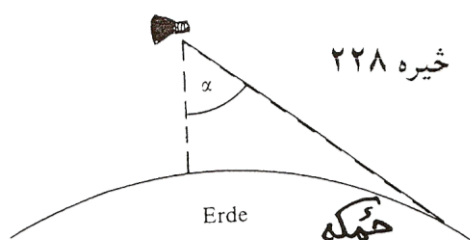
یا تېرګي کونج $\alpha = 6^\circ$ وي. (څیره ۱۹۴) ؟

ب) په کوم کایل کونج یا تېرګي کونج لرو: $|D| = |F|$ ؟



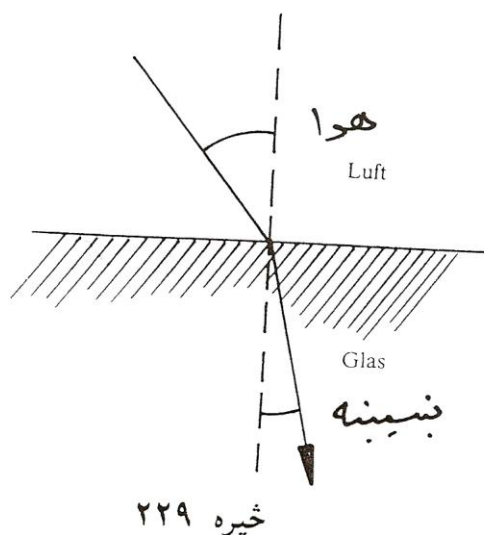
څیره ۲۲۷

سرلیک



۲۵ - د یوه الوتماشین څخه
ځمکه د یوه α کونج لاندې
لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین
څومره جگ الوزې ؟ (د ځمکې
وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ - یو ګاډی د $v_{\alpha} = 120 \text{ km/h}$ سرعت
سره روان دی، نو د باران څاڅکی په
پټلی د تلنلور باندې په 115° کونج



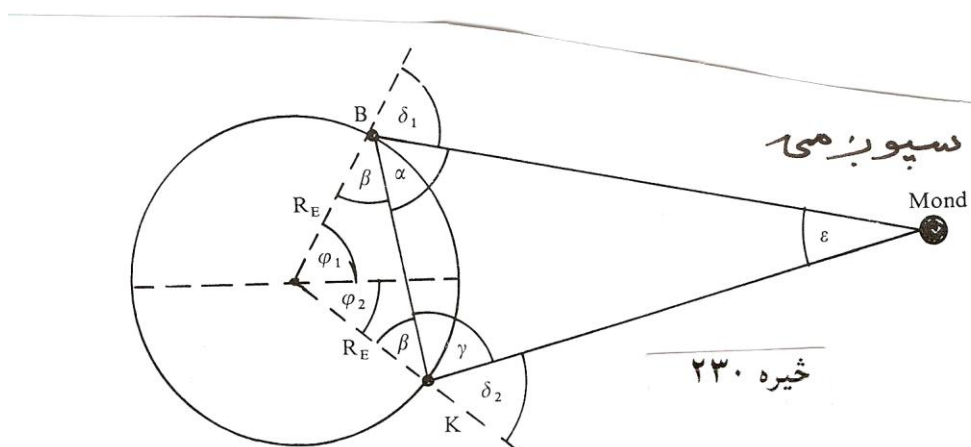
د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنې
تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکي ؟
۲۷ - که د لمر وړانګه په دوه مختلفو
طبقو ولوېږي، نو خپلې لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلوس Snellius
د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وايي، چی پروتورانګه ، ماتورانګه او
ولاړکرنه یا عمود په بیلیدونکې هواړې په یوه هواړه پراته دي او برسيره پر
دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

که د رڼا وړانګه په یوه بنسینه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5$ (1,33) دی. وښايي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$10,5^\circ, 15,8^\circ, 27,3^\circ, 41,2^\circ, 67,6^\circ, 72,4^\circ, 81,9^\circ$ ؟

۲۸ - په ۱۸ مه میلادي پیړۍ کې د سپوږمۍ لړیوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کې (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52^\circ$) او لکه د بنو هیلو په کونج کې ($\varphi_2 = -33,93^\circ$) ، کوم چي په همغه اوږدګراد پراته دي ، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل: $\delta_1 = 32,08^\circ$ او $\delta_2 = 55,72^\circ$.
و شمیری $|BK|$, β , $|KM|$ او له دې څخه d_{EM} .



۲۹ - لږځیدنې Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعنې د وخت t ترواک لاندې دي. دا د بلواک $y = a \cdot (\sin(2\pi/T)) \cdot t + k$ له لارې ورکړ شوي. دلته $t = x \cdot (2\pi/T)$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کې وهل کیږي. $1/T = f$ د یوه څرخون پریود یا راځرځیدنې وخت په ګوته کوي او د لږځیدنې دوام بلل کیږي « f فرکونڅ frequenz بلل کیږي.

ټولو راگرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکي یا حجمونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.

ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چی یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1 m^3 = 1m.1m.1m = 100cm.100cm.100cm = 1\,000\,000 cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9 m^3$$

$$1m^3 = 10^6 cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3 mm^3$$

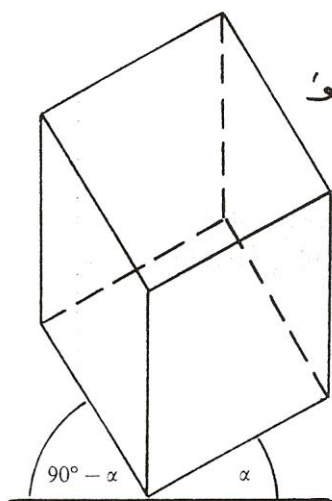
$$1mm^3 = 10^9 \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرنځپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتخته ئیز پریوستون). دا هر یی مختلفې دندې سر ته رسوي.

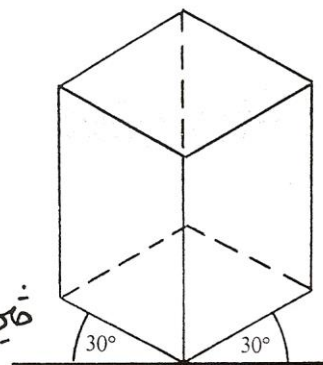
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره وښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.



څیره ۲۳۱ ل ا

Parallelperspektive:
Militärperspektive

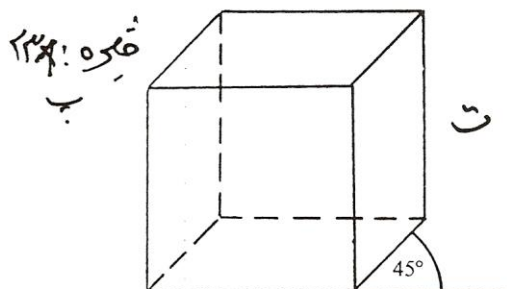
څیره
د غبرګ پر سیمو
د نظامی لیدنی



څیره ۲۳۱ ب

Parallelperspektive:
Isometric

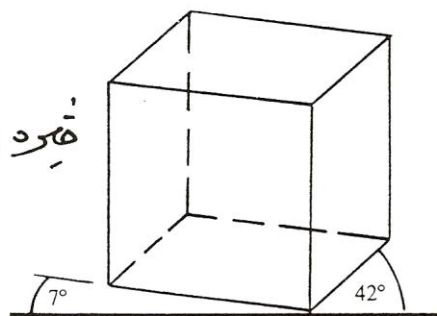
څیره
د غبرګ لیدنه
ایزومتری



څیره ۲۳۱ ج

Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive

څیره لید
کاډا لیر پر سیمو



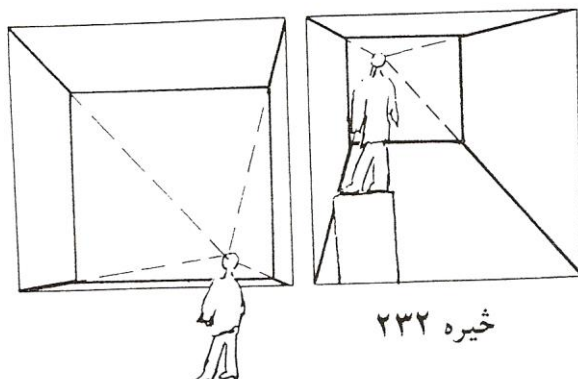
څیره ۲۳۱ د

Parallelperspektive:
Dimetric

څیره پر سیمو
دیمتری

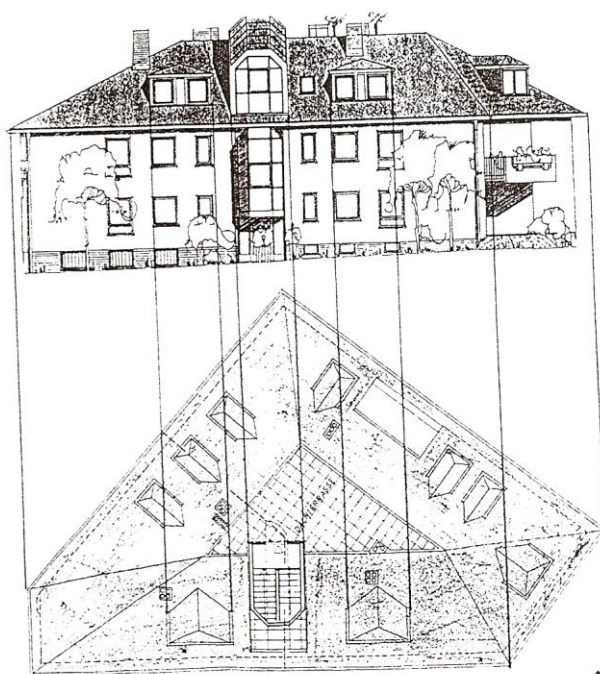
د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلڅیره کښل دي. دا هوایی پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو (مائل له پورته) او یوه چینلونی پرسپکتیو (مائل له ښکته) ترمنځ توپیر کیږي، مگر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهی (فرونټال) خغلیدونکی لاینونه په

نورمال اوږدوالي، له لیدونکي لږې غلیدونکي لاینونه مائیل او په لنډ ډول کښل کیږي. لنډونه یی د کونج تر واک ده:



پروت کونج	30°	45°	60°
لنډوونکی	2/3	1/2	1/3
فاکتور			

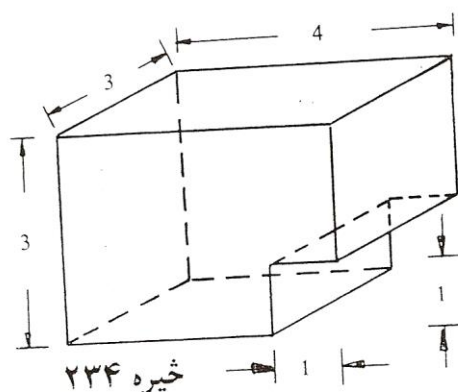
خیره ۲۳۲



خیره ۲۳۳

په یوه پرسپکتیو مائیل جوړښت کی طبعاً ځني برخې او نه خیره شوې د شا خواوي ورکيږي، دا په دې مانا چي په کښلو کی نه راځي. له دې امله او په ځانگړي ډول کونج لرونکو بدنونو لپاره درې تختیز پرویکشن (پریوستون) گټور دی. دا یو درې ځلي ولاړ پریوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنسټیز طرز یا غوڅي هواره، (ب) اړخیز غوڅي یا درز هواره (پ) پورته درز یا غوڅي هواره او دا زیات وخت په جوړښت رسمونو کی استعمال مومي.

تمرینونه



۱ - د دې څیره بدن څخه

دریتختھییز پریوستون وکارې

۲ - د دې بدن مائله څیره

وکارې، کوم چی دریتخته ئیزه

څیره پورې اړه لري.

۳ - د یوې ولاړې گردې توتی یا

استوانی مایلی څیرې غوښتل

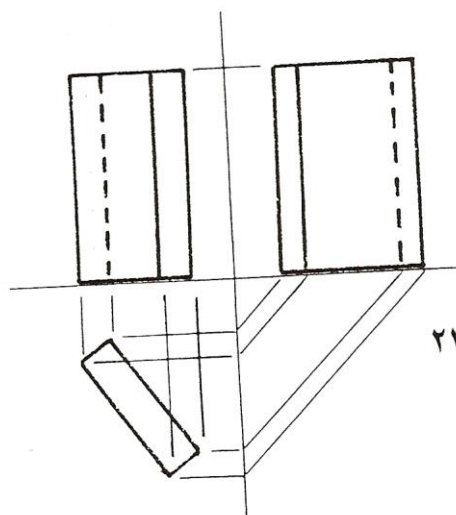
کیږي، چی د بنسټ او ولاړ

درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ - یو شپړاړخي نل یا شپړخندیز

نل وباسی په غبرگ پرسپتکیو

انځورونی سره.

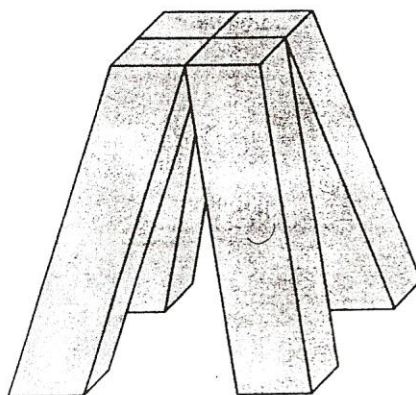
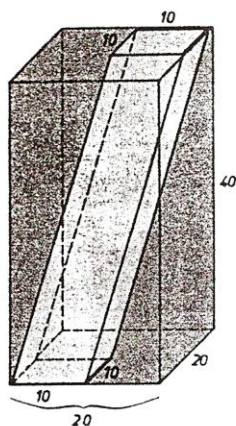


پریزماوې Prismen

پیلېلگه :

۱ = د یوه ستنو یا تیرپښو جوړ میز یا Podest پوډست (لکه په څیره کې کښل شوی میز) د لاندې جوړښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلور اړخیز لرگیو په څیره شوي شکل اړه کړي. یوه پښه څومره ډکې (حجم) لري ؟

$$V = 10^2 \cdot 40 = 4000 \text{ cm}^3$$



څیره ۲۳۶

۲ - د یو ګاولاډې یا مستقیمې پریزما چې جگوالی یې 12 cm دی د باندې هواړه او ډکې (حجم)، چې ځمکه او سر یا سرپوښ یې یو سیومتری تراپیش وي

د اړخونو د اوږدوالي $c = 6$, $a = 10$ cm او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تريخ هواړه

$$h_r(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32\text{cm}^2$$

ده، نو ډکۍ يې په لاندې ډول دی:

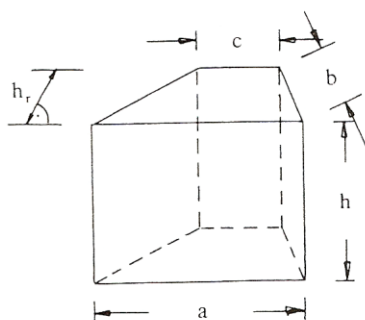
$$V = G.h = 32.12 = 384\text{ cm}^3$$

د دباندې هواړې لپاره د تريخ اړخ

اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاگوراس د جملې په مرسته

لاس ته راوړو



څیره ۲۳۷

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\text{ cm}$$

له دې امله دباندې هواړه ده :

$$O = 2.G + (2.b + a)c, h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

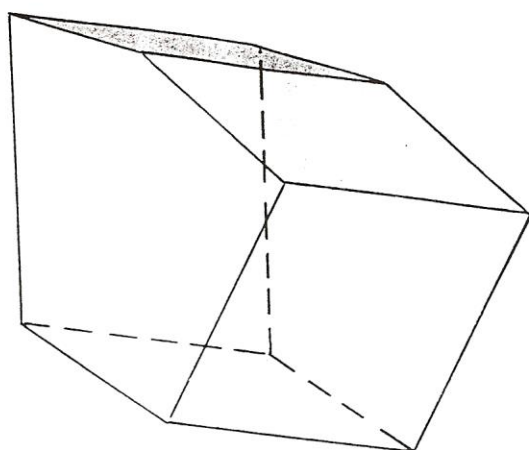
$$O = 363,28\text{ cm}^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چې يواځې په ډیرگوډیو (پولیگونو) بند شوي وي یا یواځې له ډیرگوډیو راگیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګې په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګرواینڅو پولیګونویا ډیرګوډیو بند یا راگیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هواړې د ګونګرواینڅ له امله د اړخونو هواړې غبرګاړخیز دي.
د پورته هواړې (چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

سرلیک

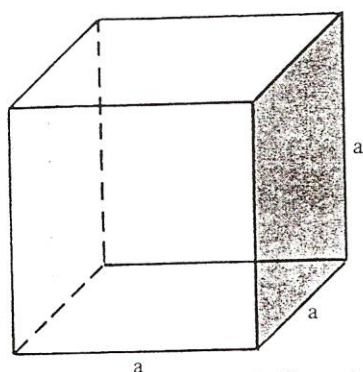


څیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جگوالي باور
ولري، نو بیا له ولاړې پریزما
غږیږو.

د ټولو خورامنظم او په دې ډول
خورا ځانگړي پریزما شپږ اړخیز
یا مکعب دی.

(وورفل Würfel) . دا د
دبانندی هوراو ۶ کونگرواینڅ
مربع خواوې لري، او ژی یا
اړخونه (کانتی) یی یو په بل
نیغی ولاړې دي.



څیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا
شپږخوایز (مکعب) د دباندي
هوارې O او ډکي (حجم) V
لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 \cdot a = G \cdot h$$

بیلگه : څه شی دروند دی یو کورک (Quark) یو شکل لرگي ډوله بدن دی، چی د
بوټلونو خولی په پټیږي) مکعب چی د یوه اړخ اوږدوالی یی 0,3 m وي او که یو د
اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یی 8 cm (د کورک) څخه یو سختوالی
g/cm³ ۷,۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینبرتی یی د ډکي سره څلوو.

د کورک مکعب ډکی : $V = (30\text{cm})^2 = 27000 \text{ cm}^3$

$$m = 27000\text{cm}^3 \cdot 0,2\text{g/cm}^3 = 5400 \text{ g}$$

د اوسپنی مکعب ډکی :

$$V = (8\text{cm})^3 = 512 \text{ cm}^3$$

$$m = 512\text{cm}^3 \cdot 7,86 \text{ g/cm}^3$$

$$= 4024,32 \text{ g}$$

د کورک مکعب له دې امله د اوسپنی

د مکعب ته نژدې

$$34\% [(5400-4024):4024 \sim 0,34]$$

دی. یا په بل عبارت، د کورک مکعب

نژدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د

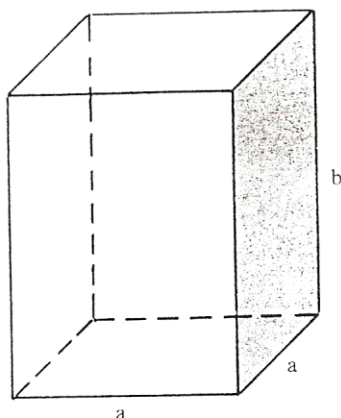
مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب سټه (ځمکه) یا بست

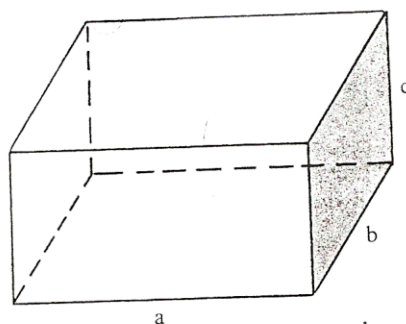
او چټ یا سر مربع پاتی شي او

نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه

مربع ستن (پنبه) لاس ته راځي.



څیره ۲۴۰



څیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړگوډیز

ته «ټولیز» شي یا «عمومیت»

پیدا کړي، نویو کوادر Quader

منځ ته راځي. هغه درې مختلفې

اړخنیمي، مگر مساوي هوا نیمي

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاگوراس د جملی په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندي هوارې او ډکي (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a^2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمو اوږدولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

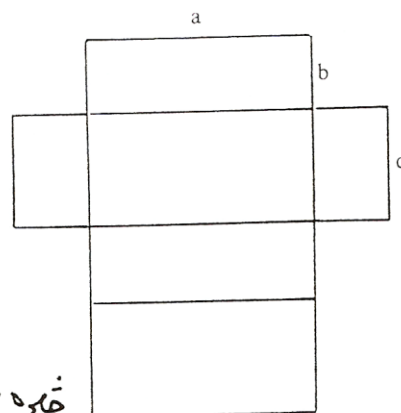
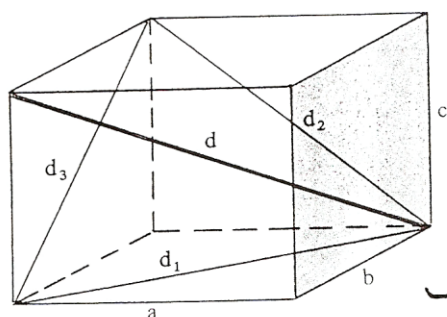
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

د هوانیمو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف



خیره ۲۴۲ ب

بیلگه: یو کواډر د کانتو اوږدوالی $a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$ (بنسټیز هواړه $a.b$) او $c = 12\text{cm}$ لري:

$$M = 2.(5.12 + 4.12) = 216 \text{ cm}^2 \quad \text{د پوښهواره:}$$

$$O = 2.(5.12 + 4.12 + 5.4) = 256 \text{ cm}^2 \quad \text{د باندې هواړه.}$$

$$V = 5.4.12 = 240 \text{ cm}^3 \quad \text{ډکی (حجم):}$$

$$d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40 \text{ cm}, \quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ cm} \quad \text{نیمي:}$$

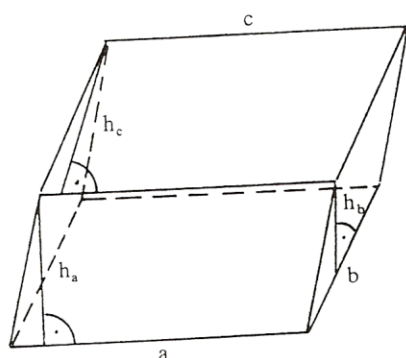
$$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60 \text{ cm}$$

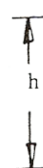
یوه مائیل څلور اړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرگو کونگرواینڅ څلور کونجیو سره غبرگ ایپټ یا شپات یا په بل عبارت غبرگهواریز بلل کیږي، چی موږ به یی له دې ورسته همداسی وېولو. د هغو د باندې هواړه د هغه د بنسټ- پورته - او اړخهوارې دوه ځله ده.

دا د غبرگ اړخیز په څیر شمیرل

کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳



جمله: د غبرگهواریز د باندې هواړه
او ډکی دي:

$$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$$

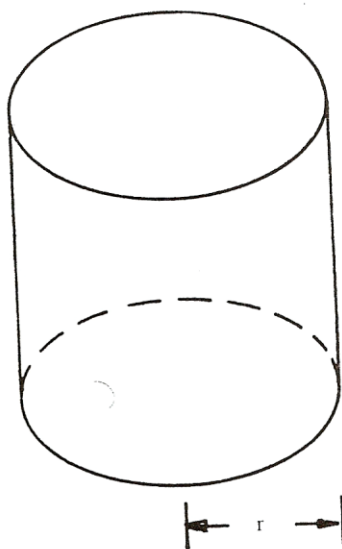
$$V = G.h$$

دلته د ډکي شمیرنه د غبرگ اړخیزهوارې په

څیر اجرا کيږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم، مگر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګرواینڅ ډیر ګوډیز پریښول وی، د هواري د خواو هواري بیا غبرګ اړخیز دي.

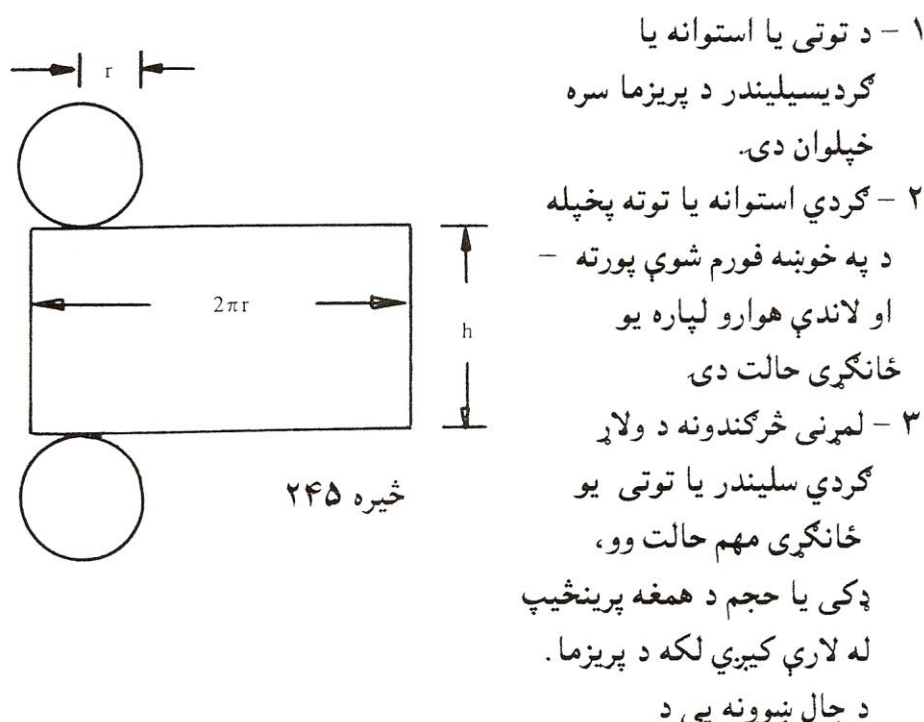
جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هواري او حجم لپاره باور لري:
 $O = 2$ د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواړه .
 $V =$ بنسټهواړه . جگوالی

سیلیندر (توته یا استوانه یا ستن)



څیره ۲۴۴

د هغی نیغی (سیخ ولاړې) پریزما
 سره، چی لاندې او باندې یی
 سیومتری - ګوډیز وي - څه پیښیږی،
 که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
 اوس نو لاندې هواړه (او په همدې ډول
 پورته هواړه هم) په ګردي بدلیري او
 دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هواري
 په یوې کبرې یا راتاو هواري بدلیري.
 یو بدن یو بل سره کونګرواینڅ او
 غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
 ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کيږي.
 د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
 شیان څرګندیري.



پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چي لاندې او پورته (دځمکې- او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندي هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

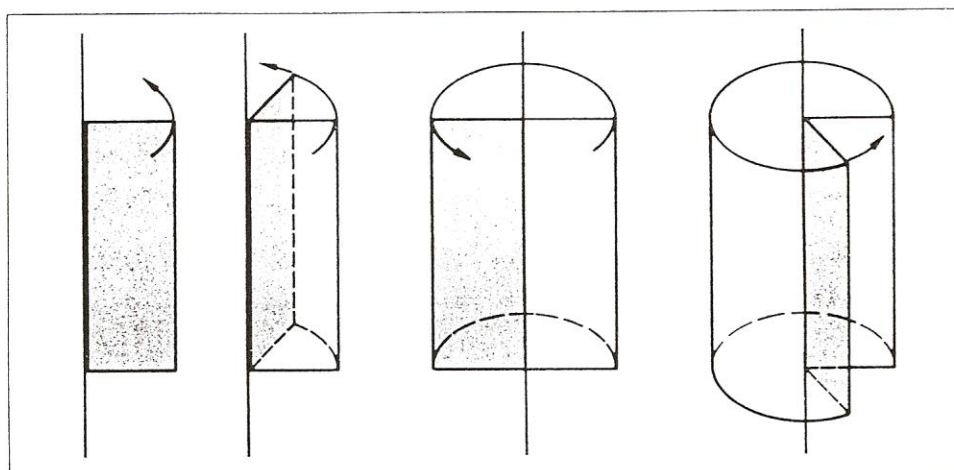
$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

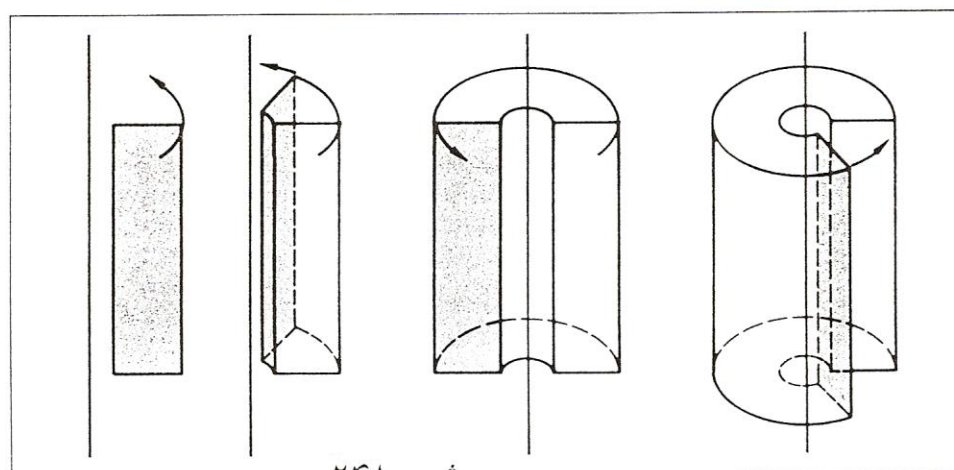
که د یوې استوانی یا توتی څخه منځتکي سیومتری استوانه چی وړانگه یی له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

که د مخه ونيول شي يا فرض شي، چي دا سليخ شوي کاغذ 0,1 mm پندې دي،
نو دلته بايد ټول $4910, m^2 = 0,491 \cdot 10000$ کاغذ سليخ شوی وي.

د گردې - او سوري استوانی يا توتي يا ستن لاندې د يوه ولاړکونجيز
خرخون (Rotation) هم په خيال کي راوړلي شو:



څيره ۲۴۷



څيره ۲۴۸

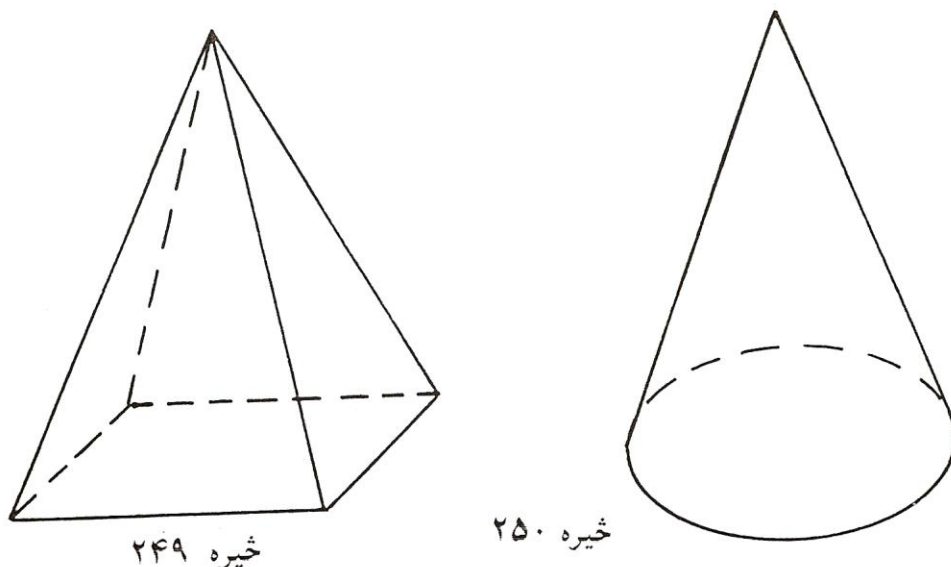
تمرینونه

- ۱ - یوه سمه پریزما د شپږکودیز بنسټ - په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چی ۵ سانتی متره جگه ده. هر بنسټهوارې اړخ یی ۴ سانتی متره اوږد دی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راگرده هواره وشمیری.
- ۲ - یو غبرگهوارې ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یی ۱۳۲ مربع سانتی متره ده. جگوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یی وښایی، که بنسټ هواره یی د اړخونو اوږدوالی ۵، ۴ سانتی متره او ۳ سانتی متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.
- ۳ - پورته واره او ډکې څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟
- ۴ - د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ ځانښونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکې ا مکعب مترو وي؟
- ۵ - یو مکعب د هوانیمې $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ (a, V, O) یی وشمیری.
- ۶ - د شگو موټر کی چی د بارهوا اندازه یا بار ډکې اندازه یی $2,82m \times 1,68m \div 0,55$ وي، څومره متر مکعب شګه ځایري، که دا د پورته اړخ یا کانتی پورې ډک شي؟ د باروونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی. په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډښنټی، تیګوالی یا غلظت 2 g/cm^3 ولري؟
- ۷ - په یوه هواره کرښه یو د پتلیو بند باید ډک شي. دا کرښه ټوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پتلیبند ۸ متره جگ دی. او په بنسټهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟
- ۸ - د سرک جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنې غټه استوانه چی سرک پرې پخوې او په سرک یی څرخوې) ۱۵ ، ۱ متره نیمی لري او د ۲۵ ، ۲ متره سرور دی

- هغه هواره خومره لویه ده، چی خرخی یی په یوه خرخون وهی؟
- ۹ - یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اوږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی خومره دی؟
- ۱۰ - د دې لپاره، چی د گیللاس توته په پروتغوڅي باندې څیړو یا معاینه کړو، ۲۰۰ گرامه پارې نه یی ډکوو ($13,6 \text{ g/cm}^3$). پوهیږو، چی توته هر ځای کی همغه دنننی نیمی لري. دا نیمی خومره دی، که پاره ۸۲ cm جگه وي؟
- ۱۱ - یوه کچتوته دې، د یوه ۵ cm دننه نیمی سره داسی په کچکړښو په نښه شي، چی د هرو دوه پرلپسی کړښو وي د 5 cm^3 ډکی وښایي. د دوه څنگ په څنگ کړښو ترمنځ دې واټن خومره وټاکل شي؟
- ۱۲ - د یوه ولاړگوډیزې وسپنی ټوټی ($25 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$) څخه دې یوه کوتی، بی له سرپوښ او بینښ څخه جوړه شي. ډکی یی وشمیری که الف (چاپیری یی د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یی د لنډ اړخ سره برابر وي؟
- ۱۳ - د لاندې توتو پاتی کڅونه وښایي:
- a) $r = 5 \text{ cm}$; $h = 12 \text{ cm}$ b) $r = 9 \text{ cm}$; $V = 120 \text{ cm}^3$
 c) $h = 6,5 \text{ cm}$; $O = 300 \text{ cm}^3$ d) $M = 282 \text{ cm}^2$; $V = 424 \text{ cm}^3$
- ۱۴ - توته خومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یی خومره دي؟
- ۱۵ - د یوې توتی جگې h او وړانگه r ځانونه ($h : r = 3 : 2$) نیسی. ډکی یی 2000 cm^3 دی. h , r او M یی وټاکي.
- ۱۸ - یو ولاړدوله توته یزه گل کوتی د $h = 17 \text{ cm}$ جگي سره د سره د سرپوښ او بینښ ایلپسی د دواړو نیممهورنو $a = 30 \text{ cm}$ او $b = 20 \text{ cm}$ سره لري. د دې ډکی خومره دی؟

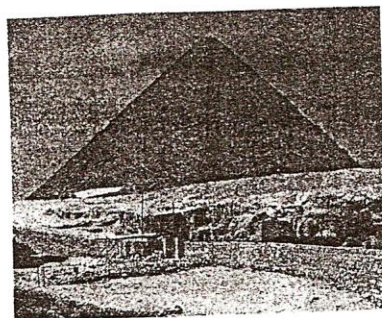
اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو گروپونو پورې اړه لري - اهرام یواځې هواره راگرځیدهواره لري، مخروط مگر راتاو یا کپره هواره. - بیا هم زیات ځېدونوالی لري، نو له دې امله یی په ګډه غواړو وپېژنو یا معرفي کړو.



پیلېلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheops pyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه



خیره ۲۵۱

د تیځو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل
او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی
په پوړی باید ایښوولي وی. دا د
خیوبس اهرام څومره ډکی (حجم)
لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰
متره مربع ولري او جگوالی یی ۱۴۷
متره وي. د هغه لیدور دباندي هواره
څومره ده ؟

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانگړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره
د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه
وي کاره یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي،
که د ډیرگوډي گوډونه له ډیرگوډي دباندي ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او
سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتي (لنډ : اړخ) وایي . لکه چی د جالبسوونه یی
بنايي، نو دباندي هواره یی له لاندې

اړخ او د اړخیزو دریگوډي د یوځایوالي
څخه لاس ته راځي، چی وروستی یی
پوښ هم بللي شو یا بولو.

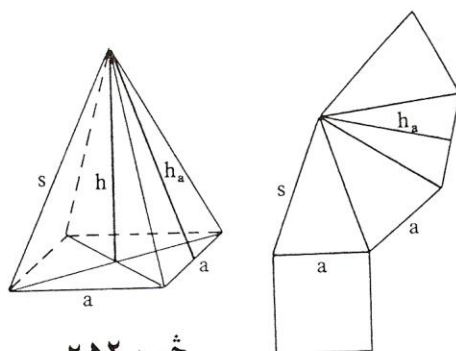
که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د
خیوبس اهرام په مربع شکلي

پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی

راولو چی د پوړی جگوالی یی h/n

وي. د وړانگي جملی د خورا پورته

پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:



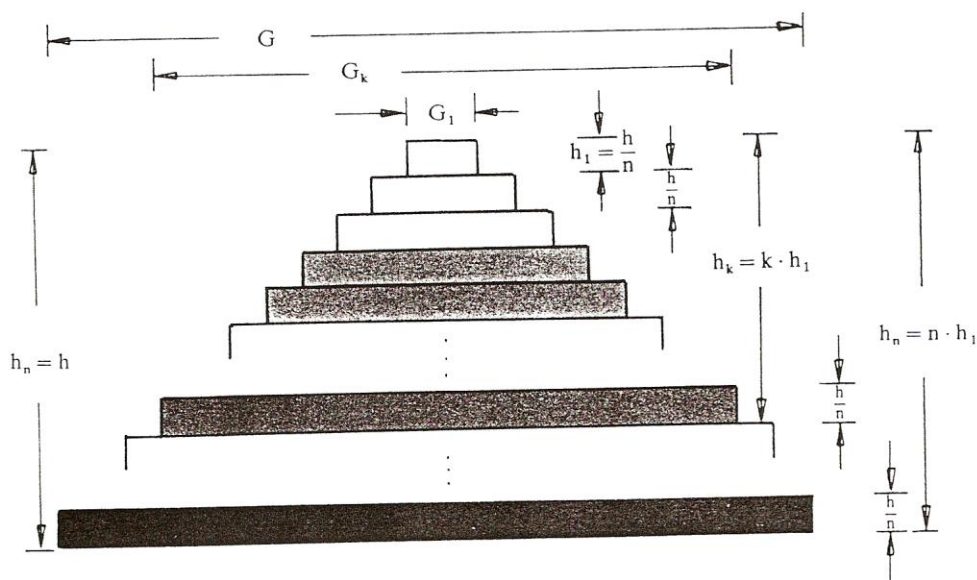
خیره ۲۵۲

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G : (h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G \cdot (k/n)^2, G_n = G$$



څیره ۲۵۳

په دې ډول د k -ام زینې پورې ډکۍ (حجم) دی

$$V_k = G_k \cdot h / n = Gh \cdot k^2 / n^3$$

د ټولو پورېو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پورې}} = Gh \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) : n^3$$

$$= Gh \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) : n^3$$

$$= Gh \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

د پوره ایندوکښون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیرل کیږي. ددې موضوع لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي)

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1) : 6 = (2n^3+3n^2+n) / 6$$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې گڼونپوهی اکریوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي. په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$$V = G.h / 3$$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :
د اړخونو هوارو جگوالی له نیمی لاندې اړخ او جگوالی د پیوتاگواراس د جملی له

$$h_a = 115^2 + 147^2 = 186,64m \text{ لاری شمیرل کیږي:}$$

$$M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2 \text{ په دې ډول یی پوښ دی}$$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

$$V = 230^2 . 147 = 7776300m^3 \text{ ډکی یی دی:}$$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

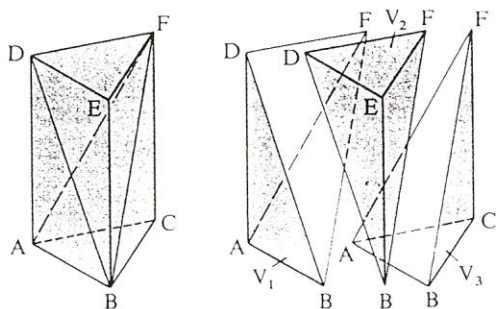
$$M = \text{د اړخونو د ټولو دریگوډیو زیاتون}$$

$$O = M + \text{بنسټهواره}$$

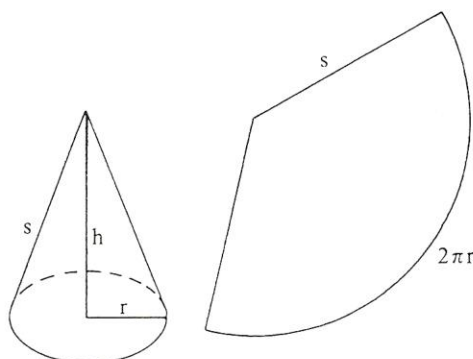
$$V = \text{بنسټهواره} . \text{جگوالی} / 3$$

۲۱۴

بدنګ

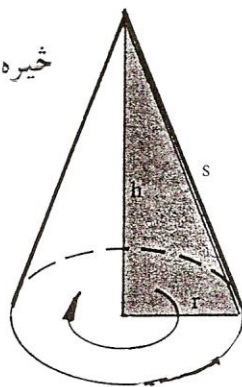


څیره ۲۵۴



څیره ۲۵۵

څیره ۲۵۶



دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه گردۍ ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځتکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې گورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځای دلته وړې ستنې په پام کی ونیول شي. لکه په څیره ۷ کی د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د گردې ټوټه ده، چی وړانگه یی د بنسټ گردې وړانگه ده او لینده یی د گردۍ چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:

$$F_s = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2 \pi r.s / 2 = s. \pi .r$$

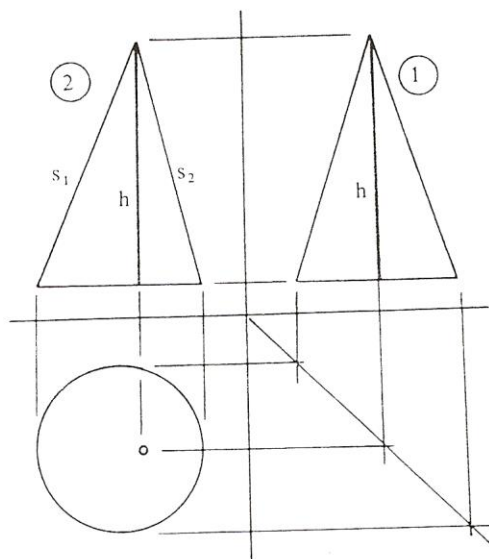
جمله : د گردې مخروط پوښ، د باندې
هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s \cdot \pi r = \pi \cdot r^2 \cdot 360^\circ / \alpha$$

$$\alpha = 360^\circ \cdot r / s \quad \text{د سره}$$

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 \cdot h / 3$$



څیره ۲۵۷

په پام کې دې وي چې ولاړ مخروط د
څرخون په څیر هم په خیال کې راوړل
کید شي: چې په کانتی یا یوه اړخ
د یوه ولاړ دریګوډي څرخون څخه لاس
ته راځي.

بیلګه : د ولاړ گردیمخروط ډکې
وشمیری چې د بنسټهوارې وړانګه
یې ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا
زیات یا عظمي اوږدوالی یې ۱۵
سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی
یې ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون
دریګوډي فرمول سره سړی د

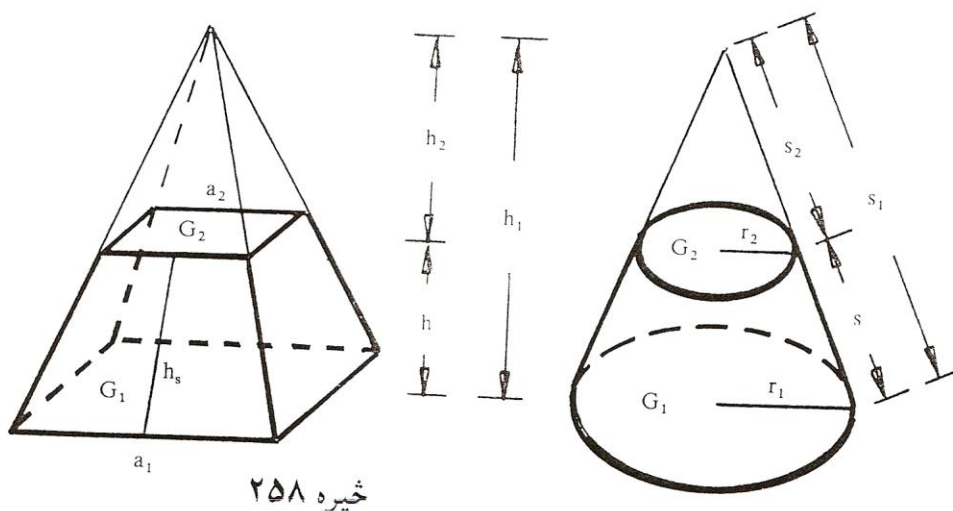
غوڅهوارې په متن یې اخر ته رسوي. (۲)»

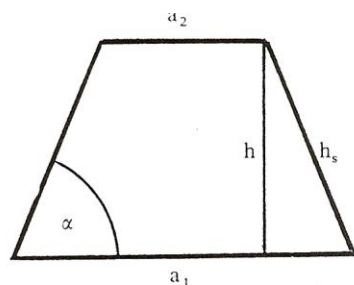
$$F = \sqrt{19(19-12)(19-15)(19-11)}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \quad F = 65,238 \text{ cm}^2 \\
 & , \quad F = d \cdot h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87 \text{ cm} \\
 & \cdot \quad \Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

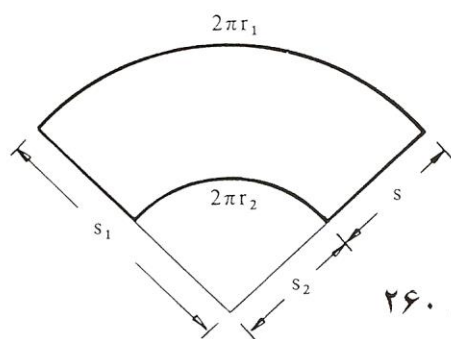
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهوارې ته غبرگ پری کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي (راپیداکیږي) یا منځ ته راځي. د پخ اهرام پوښهواره د یوه تریخ څخه عبارت دی. چی د دوه دریگوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.





خیره ۲۵۹



خیره ۲۶۰

د پخ شلوه چال
خیره دره

د دوي اوږدوالی د پیوتاگوراس له
جملی او یا د میلانکونج په
خخه ټاکل وړ دي.

$$h_s = h / \sin \alpha$$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو
له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز
فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره
یو منظم n-گوډی وي، نو لرو :

$$M = (U + u) \cdot h / 2$$

د U بنسټهوارې چاپیرونکی، د u
سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.
په همدې ډول د سم مخروط د دوه
گردییرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1 \cdot 2\pi r_1 / 2) - (s_2 \cdot 2\pi r_2 / 2)$$

$$= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

د وړانګې جملی په مرسته لاندې اړیکې
پیدا کیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \Leftrightarrow s_2 r_1 = s_1 r_2$$

$$\Rightarrow M = \pi (s_1 r_1 - s_2 r_1 + s_2 r_2 - s_2 r_2)$$

$$= \pi [(s_1 - s_2) r_1 + (s_1 - s_2) r_2]$$

$$= \pi s (r_1 + r_2)$$

$$د s = s_1 - s_2 \text{ له امله}$$

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ - او سرپټهواره یا
سرپوښهواره ور زیات کړو.

د پڅېکي د اولني اهرام او يا مخروط او د پريشوي څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بيرته اهرام او يا مخروط شکلونه لري. (څيره $\sqrt{\quad}$ وگوري)

$$V = G_1 \cdot h_1 / 3 - G_2 \cdot h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2 h_2] / 3$$

دا چې په n -گوډي کې د اړخ اوږدوالی همداسی د گردشميرنه کی وړانگه مربعي ډوله کارول کيږي، د وړانگي له جملی د بنسټهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته ځانونه داسی نيسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچينيزې څوکی څخه.

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{h+h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}} \\ \Leftrightarrow (h+h_2) \cdot \sqrt{G_2} &= h_2 \cdot \sqrt{G_1} \\ \Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} &= h_2\sqrt{G_1} \\ \Leftrightarrow h\sqrt{G_2} &= h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}) \\ \Leftrightarrow h_2 &= -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \end{aligned}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکيفرمول کی کينبول شي، نو د ترڅنگ بيا يواځي هوارې G_1, G_2 او G_3 راپيدا کيږي.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[G_1 \left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right) + G_2 \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \quad . \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \quad . \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \quad . \\ \Leftrightarrow V &= \frac{h}{3} \left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \quad . \end{aligned}$$

سرلیک

که اخري اړیکې د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي (د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3} \left[\frac{(G_2 \sqrt{G_2} - G_1 \sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1} \right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3} \left[\frac{G_2^2 - G_1 \sqrt{G_1 G_2} + G_2 \sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1} \right]$$

د ماتباندي ترم څخه $G_2 - G_1$ د

$$G_2^2 - G_1 \sqrt{G_1 G_2} + G_2 \sqrt{G_1 G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$$

له امله نوکېنډ شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) h / 3$$

د اهرام، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پځمخروط کیدي شي د گردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پځ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکي:

د ټول تراپځ هوارو زیاتون M

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) h / 3$$

د پځمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکي:

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \pi h / 3$$

پیلېلگه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه مټه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۵، ۱ متره جگ وي، او یوه کتله دې ولري چې ۱۰ ټنه وي (د برنس دینښتی یا کلکوالی) په پوښتنه کې یو گرد (پشمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې، په اندازه ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي؟ د دواړو مټو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149 \text{ m}^3$$

دا چې جگوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یو مربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 \cdot 1} + 1))$$

$$\Leftrightarrow 1,299 - G_1 = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow G_1^2 - 3,598 G + 1,687 = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 / 2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow G_1 = 3,044 \text{ m}^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549 \text{ m}^2$$

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)
له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمې په پڅمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پڅ اهرام کی:

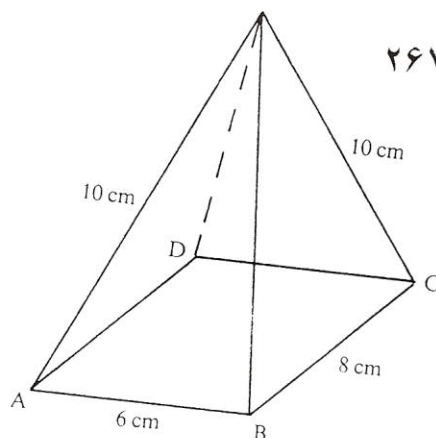
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1\text{m}; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42\text{ cm} \\ \Rightarrow d_2 = 112,84\text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745\text{ m}; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42\text{ cm} \\ \Rightarrow d_1 = 196,85\text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملې څخه اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1,546 \Rightarrow M = 8,488\text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \Rightarrow M = 7,575\text{ m}^2$$



څیره ۲۶۱

تمرینونه

۱ - د یوه مربع اهرام پاسهواره او

ډکۍ وشمیری، که وي:

الف) $a = 7\text{ cm}; \quad h = 14\text{ cm}$

ب) $s = 15\text{ cm}; \quad a = 10\text{ cm}$

پ) $V = 80\text{ cm}^3; \quad h = 10\text{ cm}$

ت) $h_a = 13\text{ cm}; \quad h = 10\text{ cm}$

$$h = 12 \text{ cm} ; s = 18 \text{ cm} \quad (\text{تپ})$$

$$h_a = 12 \text{ cm} ; M = 400 \text{ cm}^2 \quad (\text{ث})$$

۲ - د خیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی تړونکرنه له ټکي A

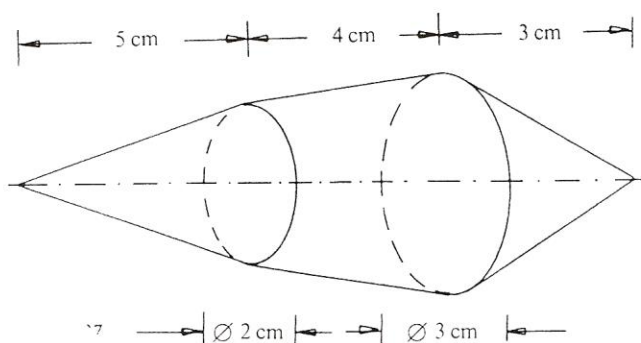
خخه د جگوالی پښیځی ته وشمیری)

۳ - په کوم جگوالی دې مربع اهرام بنسټهوارې ته غبرگ غوڅ شي چی ډکی یی نیم شي؟

۴ - یو ولاړ اهرام د بنسټیز منظم شپږگونجي سره بنسټ لاندې هواړې اړخ یا

کانټی $a = 4 \text{ cm}$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12 \text{ cm}$ دی. V

او O وشمیری ؟



۵ - د خیره شوي

بدن ډکي

وشمیری.

خیره ۲۶۲

ښودنه: $\emptyset$ د نيمې يا قطر په مانا دی چې د غره مانا نه پرېکړه کولی شئ

۶ - د يوه گردیگرډ برج سر يا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هواړې د

اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی. يا داسی ځاي نیسي،

چي پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په يوه کونج کوري، کوم چی ټيک د سر

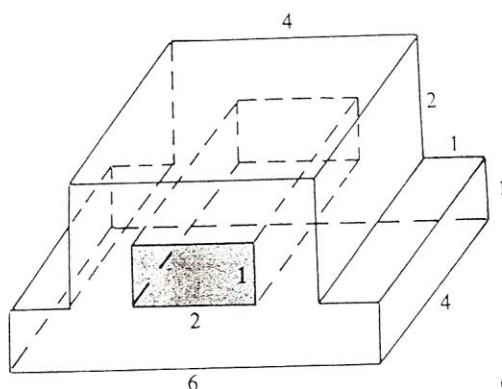
ميلان په گوته کوي، د سرپوښ هواړه څومره لويه ده، که برج ۵۰ متره جگ

وي او د برج نيمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج خخه ۱۰ متره لرې ولاړ

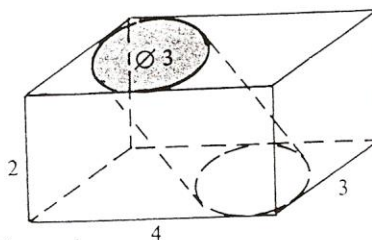
دی او د سترگو جگوالی یی ۸۰ ، ۱ متره دی.

۷ - د یوه برج اهرامډوله سرپوښن چی بنسټ یی مربع او اړخ اوږدوالی یی $a = 12 \text{ cm}$ دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یی ۱۴ خ متره ده د سرپوښن هوا یی څومره ده؟ دا چټ به څومره ارزښت ولري، که یو متر مربع سرپوښنول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

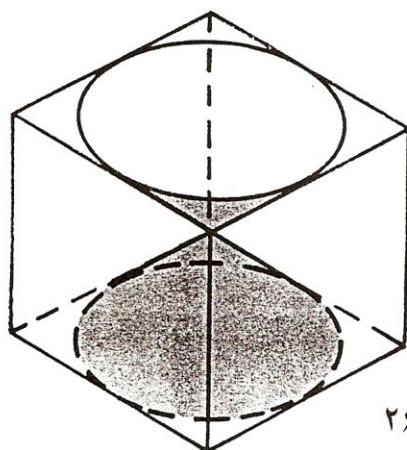
۸ - د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری (ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

۹ - د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

۱. په مختلف کارټوټو کی مخروط

ډوله خالیگاوي برمه کيږي:

الف) په یوه مکعب چی اړخ

اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی

یی $a = 60 \text{ cm}$ دی، یو مخروط

د جگوالی $h = d = a$ سره

ب) په یوه مکعب کی

د $a = 60 \text{ cm}$ یو سیومتری

ديابولو (لاتين: Diavolo = شيطان)

پ (په دوه سمو گردیاستوانو د $h = 2r = 60 \text{ cm}$ هم یو مخروط او یو دیاپولو، دا موږ د شگو ساعت په خیر پیژنو . د تشخای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکي هم وشمیری.

۱۱ - یو مربع اهرام ($h = 2a = 10 \text{ cm}$) بنسټهوارې ته غبرگ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته $0,25h$; $0,5h$; $0,75h$ وي. د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ - ددې لپاره چی یو گردیدوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه گردی باندې را غبرگوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ - یو مخروط ډوله کچگیلاس دې ټیک ۱ لیتر ځای کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جگ دی. د هغه نیمى (یا نیمى گردی) دې څومره لوي وي.

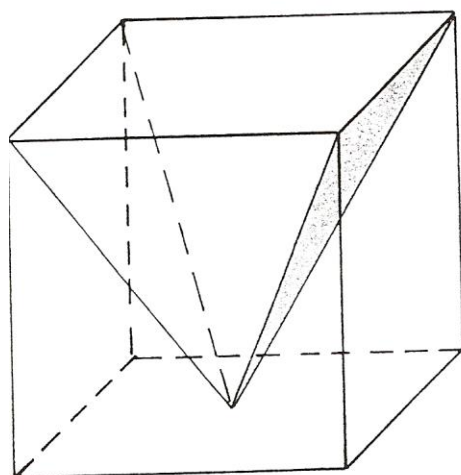
۱۴ - ۵ مکعب متره شگه یوې ټوبی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجى دی . جگى او نیمى يي څومره لوي دي؟

۱۵ - یو مخروط ډوله د اوبو گیلان دې د نیمایي پورې له اوبو ډک شي. دا اوبه په گیلان کی څومره جگى ولاړې دي؟

۱۶ - یو کافيواله یوه مخروط ډوله د شربت گیلان د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جگه ده. دی دا گیلان د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توگه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

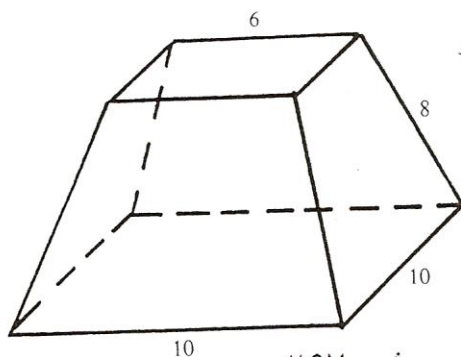
۱۷ - په خیره ۲۶۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکى وشمیری

۱۸ - په یوه چت باندې یو د وینو چتپټوونى، چي ۵ ، ۴ متره جگ دی ایښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی $a = 12,5 \text{ m}$ متره او $b = 9 \text{ m}$ متره دي. د



خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷
متره اوږد دی. د چتپټوونې ډکۍ
و شمیرۍ او همداسې د چتپټې
سرهواره هم وشمیرۍ.
۱۹- د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره
خومره خاوره باید راوویستل شي،
که پوره ژي یا غاړه یی ۱۰ متره د
غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج
یعنې هغه کونج چی د غاړې یا اړخ
سره د کنلویه لور جوړوي- یی ۶۰
درجی وي؟



خیره ۲۶۷

۲۰- د یوه هواډکۍ خومره مائیلوالی لري،
که د یوه ونی ستی هوا ډکۍ شمیرلو
لپاره چی مخروط ډوله دی د موتي
قاعدې وکارول شي، د لاندې سره
$$V^* = \pi h [(r_1 + r_2)/2]^2$$

د $r_1 = 10$ cm سره
او $r_2 = 5$ cm مسره؟

۲۱- خومره مسو ټوټه په کار ده،

چی خیره شوي مسخولی جوړه

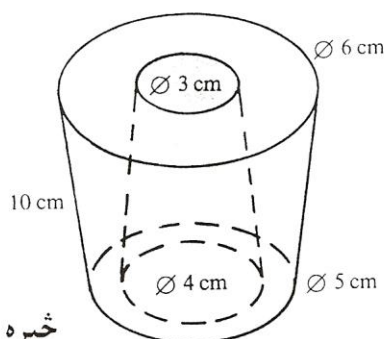
س کړای شو (وگړنی په خیس متر؟ دپسی مټي
(خیره ۲۶۷ .

۲۲- جوړ شوي کارپوټي حومره درنۍ دي (اندازه په سانتي متره)
 ۲۳- د لاندې پڅمخروطونو M, O او V وشميرئ

پنځ کيگل مخروط

Kegelstümpfe:

- a) $r_1 = 12 \text{ cm}$; $r_2 = 10 \text{ cm}$;
 $h = 8 \text{ cm}$
 b) $r_1 = 9 \text{ cm}$; $r_2 = 7 \text{ cm}$;
 $s = 6 \text{ cm}$
 c) $r_1 = 5 \text{ cm}$; $h = 7 \text{ cm}$;
 $s = 8 \text{ cm}$

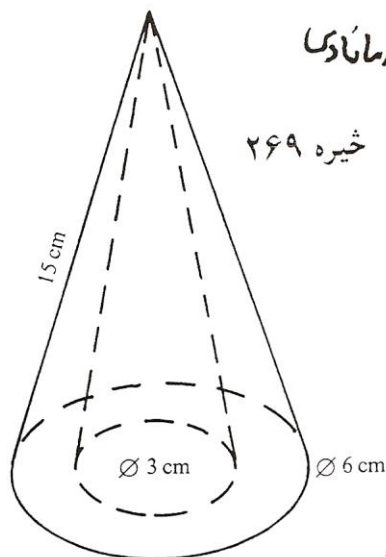


څيره ۲۶۸

د اوسپنې کارکوونکي Eisenwerkstück $\rho = 6,5 \text{ g/cm}^3$

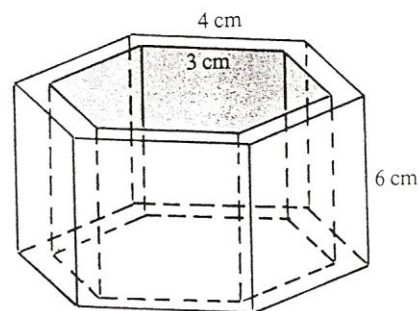
مو په دې ځايونو هم د کلي پرماندې
 يا غلطت

څيره ۲۶۹



Kunststoffmodell $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$

پلاستيکي مودل



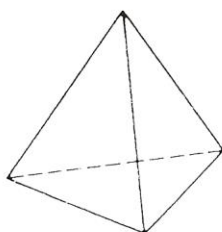
څيره ۲۷۰

Messingsechskantrohr $\rho = 8,3 \text{ g/cm}^3$

د مسيک شپږ اړخيزه کوټکه

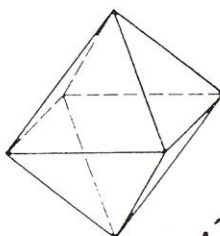
منظم ډیرهواریز

ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندهواري لري یا له ټوارو رابند وي ، پولوئیدر (یونانی : ډیرهواریز) نومېږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وېلو. د دوي ترمنځ ټيک پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنې له اړخه په ځانگړې توگه په زړه پورې دي ، ځکه چی پاس هوارې او ډکي يي بند دي ، دا په دې مانا چي د فرمولونو له لارې انځوریدلی شي ، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلوته یا فورمونه یا خیرې لري.



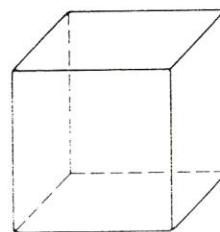
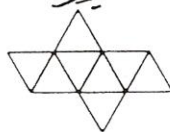
Tetraeder

ټلورهواریز



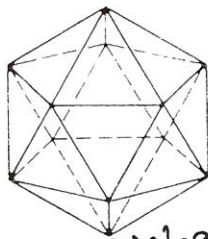
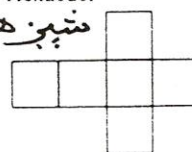
Oktaeder

اټه هواریز



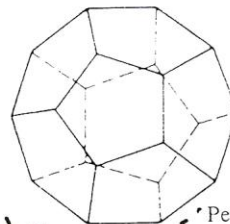
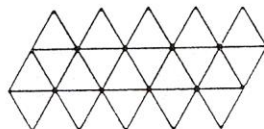
Hexaeder

شپږهواریز



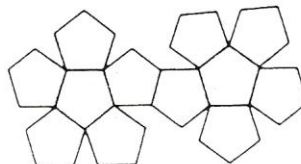
Ikosaeder

شلهواریز



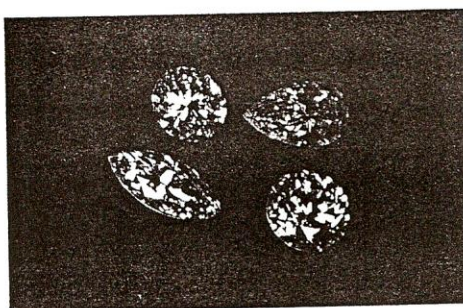
Pentagondodekaeder

پنځه مخی دی د ولسهواریز

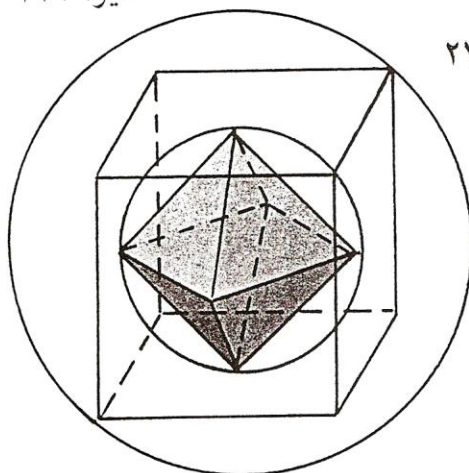


خیره ۲۷۱

دا پنځه منظم بدنونه د هوارو بڼه‌هواريز ابو کهگ هوار بنديز دي : تيترايډر (څلور هواريز Tetraeder) ، هيکسائيډر Hexaeder (شپږ هواريز ، مکعب) اوکټائيډر Oktaeder (اته هواريز) دودیکائيډر (دولس هواريز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاگون دودیکائيډر Pentagondodekaeder پنځه گوډي دولسهواريزه بلل کيږي) ، او په همدې توگه ايکوزائيډر Ikosaeder (شلهواريز) څيري په تير مخ کی.



څيره ۲۷۲



Würfeln und Oktaeder mit In- bzw.

Umkugeln

مکعب او اته هواريز د به کی
کعب او په را کعب غونډیو
سوه

بیلگي

د مالگي تيگي مکعب جوړوي،
کوبفرسولفيد مينرال Fahlerz
تيترايډر، د گوگرو کريستال
دودیکائيډر او الون (کاليوم
الومينيوم سولفات) اوکټائيډر
جوړوي.

څيره ۲۷۳

منظم ډير هواريز پلاتوني (اډلاطون)
(خیالی platonische) بدنونه هم
ياديږي، ځکه چی يوناني فيلوسوف
او شميرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م.
پخوا) په دې نظر وو، چی څلور
پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه،
او هوا په خپل واپه فورم تيترايډر،
ايکوزائيډر، اوکټائيډر او

هيکسائيډر په گوته کوي. د هغه په
فکر جهان پخپله يو دودیکائيډر فورم
لروده. په دې پنځو هر يوه بدن کي کيدی

سرلیک

شي يوه گردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کې دننه شي يا په بل عبارت دننه راگير شي، نو په دې توگه شپږ دننه - او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي، کومو چې کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو، کوم (چې هغه وخت معلوم) شپږ پلانیت به په داسې لاره گرځي، چې د هغوي نیممحورونه د داسې دننه - او دباندېغونډې وړانگو سره برابر شي. لاندې جدول د دې منظم پولونیدر ډیر هواریزو معلومو لویو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لري. $a =$ د کانتې يا اړخ اوږدوالی، $e =$ د گونډونو گڼې (تعداد) $f =$ د هوارو گڼې. $k =$ بدن اړخونو گڼې، $l =$ د هوارو اړخونو گڼې، $m =$ په هرکونج کې د کانتو يا اړخونو گڼې، $\infty =$ د گاونډيو هوارو ترمنځ کونج، $r =$ چاپیر گردې وړانگه، $\rho =$ د دننه گردې وړانگه، $O =$ پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره، $V =$ ډکي.

پنځه یون ډیر هواریز (Einheitspolyeder) لاندې ($a = 1$) ارزښتونه لري:

Polyeder	r	ℓ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوښه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د
کوډگنېون e، اړخگنېون k او هوارگنېون f لپاره:

$$e + f - k = 2 \quad \text{د اویلر ډیرگوډي یا پولوئید جمله :}$$

په هرصورت دا جمله یواځې د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور
لري، یعنې هغه، چې په کومو کې ټول نیمې د بدن په دننه کې ځغلي، یعنې
منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلگي:

کوادری: $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید: $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکاائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه (کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غونډوسکه؟

که تاسو د انگرېزي فوتبال په عربي ژباړه په عربي وگورئ، نو کره قدم به ترې واخلي.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک
نومونه نه ده.)

سرلیک

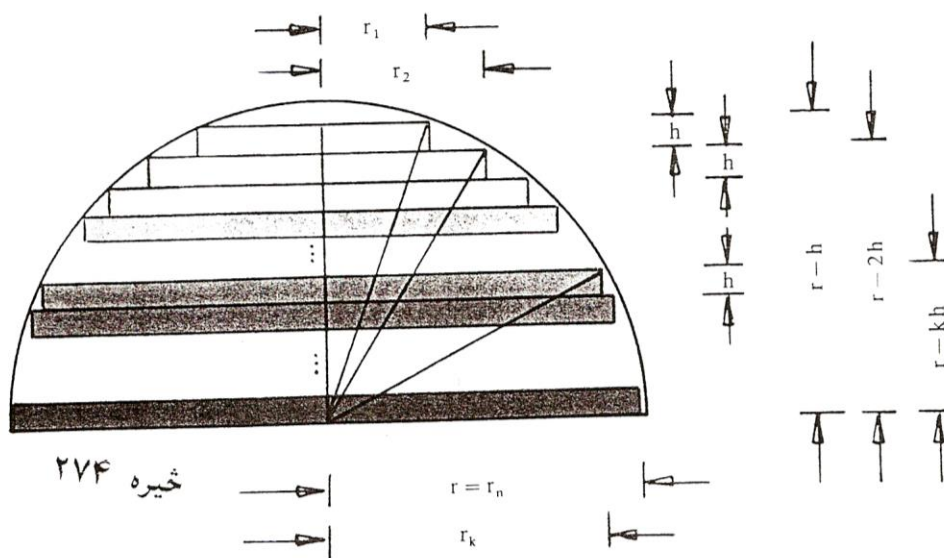
د هندسي يا ځمکچپو هڼې له مخې غونډارۍ يا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولگه ده يا د هغو ټکو ځای دی، چې له يوه په

کلکه يا کره ټاکلې ټکۍ M څخه چې د غونډ منځتکۍ بلل کېږي همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه يواځې د جگدرجيز يا لوړ سيومتري (هره نيمې په همغه وخت کې سيومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ يو ځانگړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چې ځمکه (نزدې) يو غونډۍ شکل لري. د بيلگې په توگه په کارتوگرافي کې ځمکه اوږدگريډيو (ميريدیانی Meridiane) باندې ویشل کېږي. په ميريدیانی باندې هر واټن د ځمکې وړانگې R ته بيا يوه لينده په گوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بيا غونډۍ (گردۍ استوانی ته ورته) په کوچنيو ستن ډوله چيتروگانو (کردې ټوټې، چې موږ ورته په هسکه مينه کې چيترو وايو. د مات منگۍ څخه گردې خيږې جوړېږي، ټوټه ده) ټوټه کېږي، چې جگوالی يې $h = r/n$ دی. د يوگونو چيتروگانو وړانگو لپاره باور لري يا صدق کوي (د پيتاگوراس جمله):

$$r_1^2 = r^2 - (r - h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$r_2^2 = r^2 - (r - 2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



$$\begin{aligned}
 r_k^2 &= r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h \\
 r_k^2 &= r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh) \\
 r_k^2 &= 2rkh - k^2 h^2 \\
 r_k^2 &= \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2 \\
 r_k^2 &= r^2 \left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3 \left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)
 \end{aligned}$$

ډوليز

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\frac{2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) - \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\frac{2}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\left(1 + \frac{2}{n} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right]$$

که د «ستنگيو» گڼون تلم پورته لار شي، نو په نوکانو کې لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډی

$$V = (2/3) \pi r^3 \Rightarrow V_{غونډی} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

د غونډی د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د گوډ یا کونج ټکي د منځکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جگوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډی ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوک په پام کې ونه نیسي، چي دا سره د کمو استنشاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډی پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

غونډي $V =$ د اهرامونو ډکيو زياتون $r = (1/3)$.

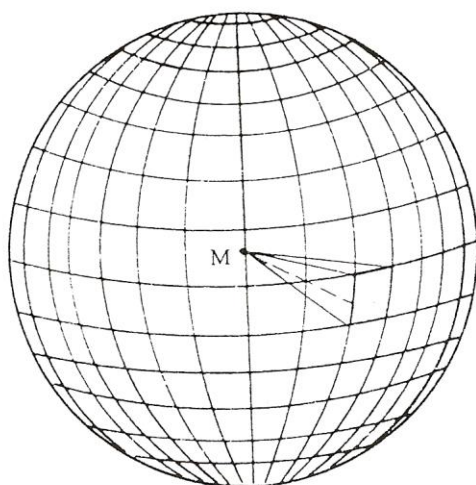
د غونډي پاس يا ټوله هواره

$$(1/3) \cdot r \cdot O = (4/3) \pi r^3$$

$$O = 4\pi r^2 \text{ د غونډي}$$

په ټوليزه يا عمومي توگه باور لري

$$O = 4\pi r^2, V = (4/3) r^3$$



څيره ۲۷۵

پيلبيلگه:

منځنی ځمکورانگه ۶۳۷۰ کيلو متره

ده . د ځمگي پاسهواره او ډکي څومره

دي؟ ځمکه څومره کتله لري، که د

ځمگي منځنی سختوالی $5,514 \text{ g/cm}^3$

د مخه ونيول شي يا فرض شي؟

$$O = 5,10 \cdot 10^8 \text{ km}^2,$$

$$V = 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 ;$$

$$m = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

د خاليغونډي ډکي همداسی لاس ته راځي لکه د يوې خالي استواني ډکي (د مخه

لوستل شوی دی) د دوه يو په بل کی پرتو کونځينتري غونډيو توپير يا کمون:

$$V_{\text{خاليغونډي}} = (4/3) \pi (r_1^3 - r_2^3) .$$

پيلبيلگه:

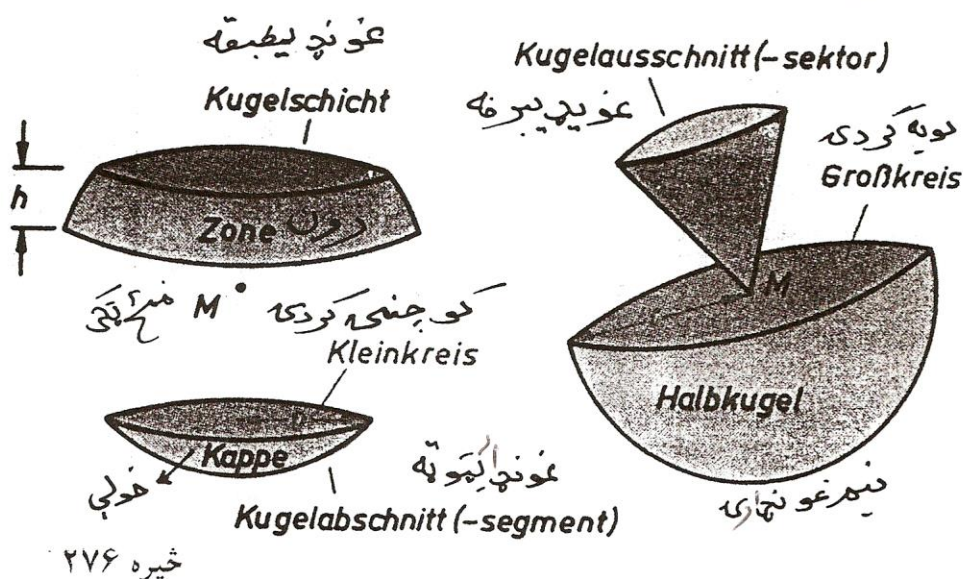
د اوسپنی خاليغونډی کومه کتله لري ، که د باندننيمی يي ۱۲ سانتيمتره او

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دینستی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8 \text{ cm}^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25 \text{ g}$$

اوس غونڊ پير خي په پام کي نيسو. په ټوليزه توگه لاندې بنسټيز فورمونه مخ ته

لے: کرو!



ددې يوه ټوټه يا زياتې ټوټې داسې منځ ته راځي ، چي غونډۍ د يوې يا يا زياتو گرديو له خوا غوڅه شي. که داغوڅي د غونډي له منځه کي تير شي، نو دوه نيمغونډي او يوه لويه گردۍ د غوڅهوارې په څير منځ ته راځي. که غوڅي له منځه کي تير نه شي، نو دوه غونډي ټوټي منځ ته راځي. د دوه داسي غوڅيو ترمنځ يوه غونډي طبقه منځ ته راځي. که له غونډي يو مخروټ ډوله ټوټه رابيله شي، نو غونډي پرڅه منځ ته راځي.

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کینډولو له لارې لرو:

$$s_1^2 h_2 - s_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لارښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3s_1^2 + 3s_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د گردیتوبی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi s^2 (r - h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکي (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي $s^2 = h(2r - h)$. په دې توگه د s^2 لپاره ځای په ځای کوي او له دې لاس

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3} \quad \text{ته راځي:}$$

$$\Leftrightarrow V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

نو r د (*) په مرسته پای په پای نشی لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3} \pi h \left(\frac{s^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (s^2 + h^2)^2$$

د غونډیتوبی پوښهواره M، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره. که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځای کپړه ولیکو) نو لرو:

$$Mr / 3 = 2 \pi r^2 h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2 \pi r h$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولېواري د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټګردی هواره ور زیاته شي. د غونډېطبقي پوښهوارې ته د غونډیزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یی داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردی هوارې وززیات شي. د غونډیتپوښ پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډیکپرې هوارهته د مخروطپوښ وززیات شي.

د غونډاري برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h = \pi(\varrho^2 + h^2) \quad (\text{Kugelkappe})$ $O = 2\pi r h + \pi \varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$	د غونډاري ټوټه
$V = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h \quad (\text{Kugelzone})$ $O = \pi(2r h + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$	غونډاري خولی
$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{6h} (\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r (2h + \varrho)$	غونډاري ټیکلی غونډاري زون
	غونډاري برخه

بیلګه:

۱- د پنیرخرخ د یوه غونډیطبقي فورم یا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیری، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25 \text{ cm}$ او $h = 20 \text{ cm}$.

سرلیک

$$V = (20 \pi / 6) (3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458.70 \text{ cm}^3$$

$$= 34.458 \text{ dm}^3$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho^2 + (h/2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26.93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26.93.20 + 2.25^2) = 7310.59 \text{ cm}^2 = 73.11 \text{ dm}^2$$

۲- یو دلوبی لاطو یا لوبی څرخۍ د غونډیتوټی بڼه لري د ټولجگوالی $r = 16 \text{ cm}$ او سور $b = 2 \rho = 10 \text{ cm}$ سره. د هغه ډکۍ او پاسهواره څومره لوي دي؟ د خولۍ جگوالی د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = -2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اویو یا حلونو $h_1 = 31.2 \text{ cm}$ او $h_2 = 0.8 \text{ cm}$ سره.

داچې $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونۍ یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

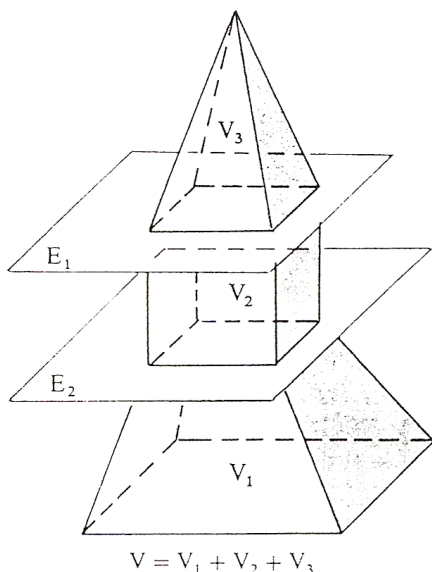
$$V = 2 \pi . 16^2 . 0.8 : 3 = 428.93 \text{ cm}^3$$

$$O = 16 \pi (2 . 0.8 + 5) = 331.75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چې زیات تر پام تیر شو، ګټور دی چې د یوه پیچلي بدن د ډکۍ یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

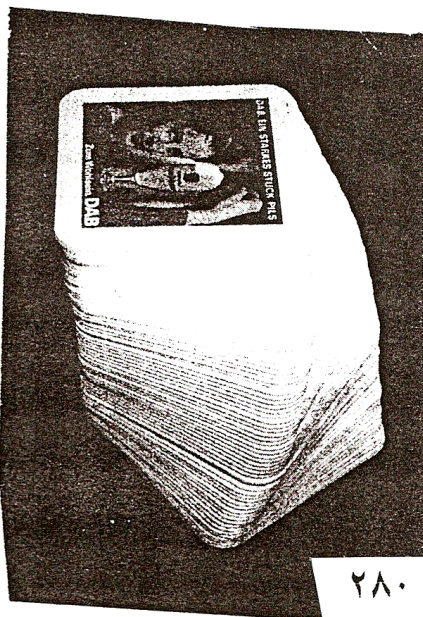
په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چي ض معلومو فرمولونو له لارې شميرل کيدی شي.



خیره ۲۷۹

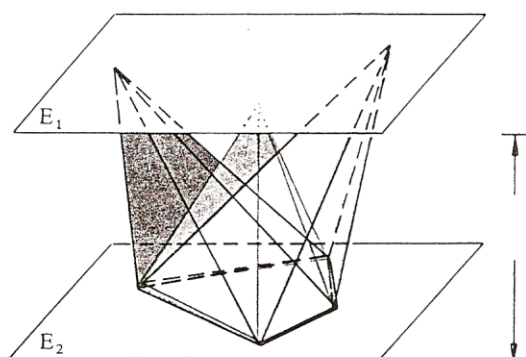
بیلګې :
ددې خیره شوي بدن ډکی له یوه پخ اهرام، کواډر یا غبرګارخیز یا مکعب او یوه اهرام خخه لاس ته راځي. دا جوتیري، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 تپته شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چي زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي (مخروط، اهرامونه) د گیلایس اینسولوتوتی (داسی ډبل کاغذونه دي چي د پیالیلاندې یا ریکابی یا پشکاب په خیر وي او گیلایسونه پر اینسول کیري) چي یو په بل اینسول شوي په پام کی نیسو. د دې تپتو د خرخولو ، یا ځای بدلولو له لارې جگوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوری په پام کی نه نیول کیري، ځکه چي په تیوري کی



خیره ۲۸۰

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پندوالی یی په پام کی نه نیول کیږي
د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنیچپ دی



جمله :

دوه بدنونه همغه ډکۍ یا برابر ډکي
لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په
همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې
دی کونگرواینځ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه
ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جگي او
برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$
د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره
چی د بنسټهوارې سره غبرگه وي،
په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې
خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو
بنکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې گردې استوانی یا
گردیتوتی څخه چی وړانگه r لري
او $2r$ جگ دی دوه د څوکو یا ککرې
له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه
غوڅوي (یو دیا بولو) د $r = h$ سره.
دپاتی خالیفورم یوه د شگو ساعت

پوښ راپه گوته کوي. د یوې دومې همغی سره برابرې گردې استوانی یا گردیتوتی د
وړانگي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتری له امله بسیا کوي که
لاندې نیمغونډی او د «شگو» ساعتیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره
یوه بستهوارې سره غبرگه هواره راکوي، په غونډي کی گردی په شگوساعتپوښ کی

گردیگوته یا گردیکړی. دلته دې r' د دیا بولو څخه منځ ته راغلي گردی وړانگه وي. r د غونډیغو څیگردي وړانگه .

د هوارو لپاره چی واین 1 له همغه بدن منځتکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 \cdot 1^2)$$

د وړانگي جملی څخه، برسیره په دې

لاس ته راځي: $\hookrightarrow$ (د شکو سعت)

$$r'/r = 1/r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه گورو چي ډکیمساوی

څیره ۲۸۲

یا ډک برابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2 \pi r^3$ دی، ځکه چی $h = 2r$ دی .

د دیا بولو ډکی دی :

$$V_D = (2 \pi r^2 / 3) \cdot (h/2) = \pi r^2 \cdot h / 3 = (2/3) \pi r^2$$

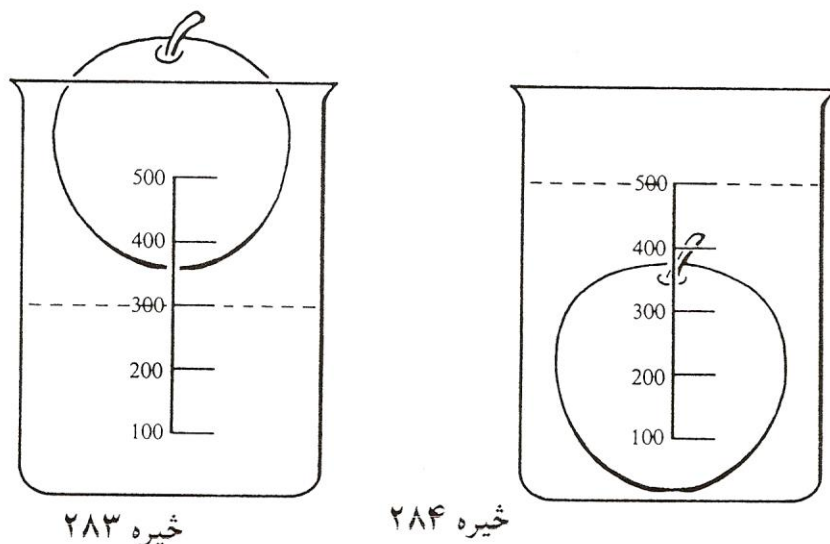
او له دې سره د شکو سعت - او نیمغونډي ډکی :

$$V_K = V_Z - V_D = 2 \pi r^3 - (2/3) \pi r^3$$

$$V_K = (6/3) \pi r^3 - (2/3) \pi r^3 = (4/3) \pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیک د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منی یا د یوه

الو ډکۍ یواځې فزیکي متودونه یا طریقی مرسته کوي چې ډکي یې وشمیرل شي. لکه په لاندې څیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



تمرینونه

- ۱ - د هغه بدن ډکۍ څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواړه یو ولاړ اهرام کینښول شي د $s = a$ سره؟
- ۲ - یو تیترائیډر څلور هوايز بدن او یو غونډۍ برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکۍ په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځانښوونه یو بل سره لري؟
- ۳ - هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډۍ شته . چې د هغه هره هواړه په منځکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډګی او V او پاسهوارې $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

- پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، په ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.
- ۴ - د المان د پارلمان په سر منډه او اتیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منډه به څومره وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي ($\rho \sim 19,3 \text{ g/cm}^3$; $l \sim 10 \text{ cm}$) اتیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیري؟
- ۵ - یوه غونډی، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اهرام غونډی جګوالی یا جګی داسی وټاکي، چی الف (همغه ډکي لري) د برابرې پاسهوارې لري.
- ۶ - د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلی متره نیمی لري، له توییږي د یوې گردۍ ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا څومره پنډه ده؟
- ۷ - د یوې سابونپونکی دیوال به څومره لوي وي، چی دبانډنی نیمی یی سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلی ه
- ۸ - یوه د بنیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲ وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($\rho \sim 2,6 \text{ g/cm}^3$)
- ۹ - یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
- الف (دا دننه سمخ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر وزن ۴۵ گرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که هایډروجن ($\rho = 9.10^{-5} \text{ g/cm}^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟
- ۱۰ - یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راگیر یا خوندي کیږي. د ما اړخ اوږدوالی ۵ cm دی

الف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ - د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمۍ ($r = 1735 \text{ km}$)

ب) مارس ($r = 3430 \text{ km}$)

پ) وينوس ($r = 6305 \text{ km}$)

ت) جوبيتر ($r = 71800 \text{ km}$)

۱۲ - د کورکغولې ($\rho = 0,25 \text{ g/cm}^3$) د 36 سانتي متره نيمې سره يوه

غونډيدوله د پارې زړی ($\rho = 11,4 \text{ g/cm}^3$) لري. دا د پارېزړی څومره

لوي دی، که غونډۍ تر نيمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ - د يوه لوي سري سري 400 ميليونه غونډيدوله د سړوپونکی لري، هر يوه د

نيمې $0,3 \text{ mm}$ سره. د ټولو پونکیو گډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ - يو غونډی، چی وړانگه یی $r = 10 \text{ cm}$ ده، د يوې هوارې څخه په 3

سانتي متره، له منځ يا کوکز څخه، واټن غوڅيري. د دواړو برخو غوڅهوارې

او ډکي وشمیری.

۱۵ - د پاتی یاد نايادو برخو M, V, h او r د لاندې غونډيبرخو لويوالی وشمیری

a) $r = 6 \text{ cm}$; $h = 5 \text{ cm}$ b) $M = 50 \text{ cm}^2$; $h = 3 \text{ cm}$

c) $h = r = 7 \text{ cm}$ d) $M = 700 \text{ cm}^2$; $r = 10 \text{ cm}$

۱۶ - د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د 10000 متره جگوالی څخه ليدل کيدی

شي (د ځمگی وړانگه 6370 كيلومتره ده)

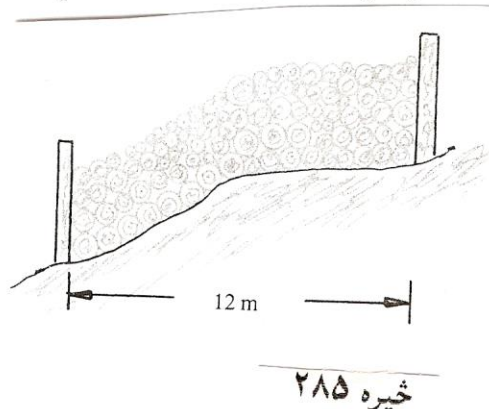
۱۷ - د يوه غونډي نيمی په څلورو برابرو برخو ويشل کيږي. په ټوټهټکو کی په

نيمی ولاړې درې هوارې اچول کيږي. په کوم ځاننيونه يا تناسب کی

الف) د پوښهوارې، ب) د راپيدا شوو يا منځ ته راغلو غونډي برخو

سره پراته دي؟

۱۸ - په يوه غونډي کې، له منځ څخه ليدلو يا کتلو سره ، هوايي (دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا يا د هوا ډکۍ دی) پرسيدنه، د دريو اړو کواورديناتو څخه برابر دي. که دا يو له بل توپير ولري، نو د الیپسوئيد څخه غږیږو، چي اصلي محورونه يی a, b او c دي. د الیپسوئيد ډکۍ د فرمول $V = (4/3) a.b.c$ له مخی شمیرل کيږي. ځکه په ريښتونی غونډی نه دی، بلکه يو الیپسوئيد، چي اصلي محورونه يی $a = c = 6378 \text{ km}$ (د اکواتور وړانگه) او $b = 6357 \text{ km}$ (قطبي وړانگه) لوي دي. (که په کلکه ونيول شي نو د



اکواتور وړانگو ترمنځ يو کوچنی توپير شته) د ځمکي ډکۍ وشمیری او د منځ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی (

۱۹ - په يوه زوړندې يا پيچومی باندې ۱ متر اوږد لرگی ډیری شوی، لکه په څیره ۲۸۵ کی چي لیدل کيږي. څومره د هوا متر لرگی دا 1,20 m جگه د لرگو ډیری لري.

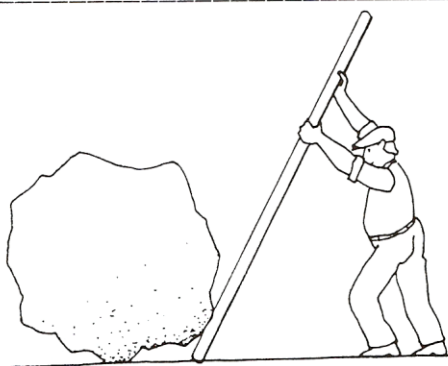
وکتور شمیرنه

نڅورونه

پیلبلگه

یوه درندې تیگی ته څنگه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مگر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د تیگی لاندې سړی یوه تخته یا اړم نښلوي او یا وړلاندې کوي، د بل سر نه یی لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیگه یو څرخون حرکت باندې راځي.

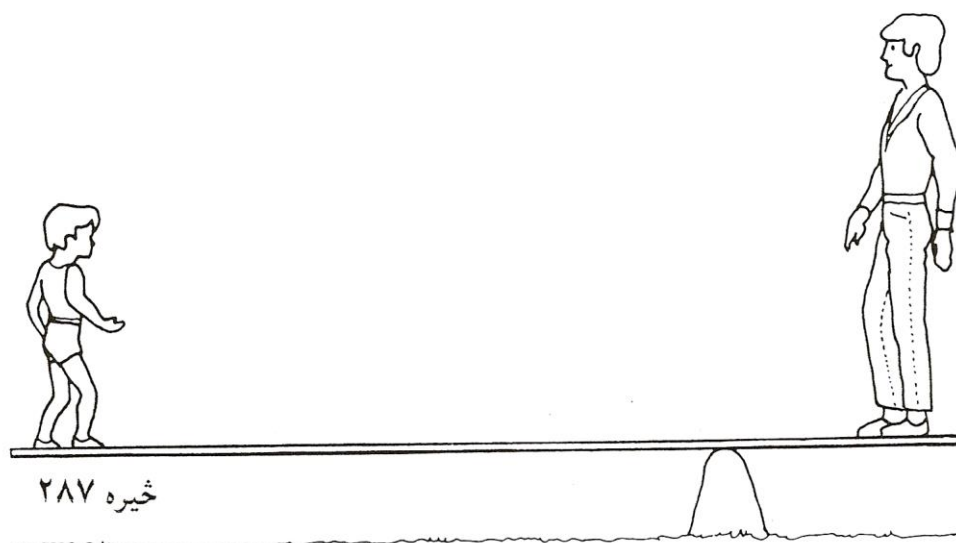
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي «زور د زور اړم = بار د بار اړم». که تیگه په پوره اندازه اوږده (او ستایل) وي، کیدی چی یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



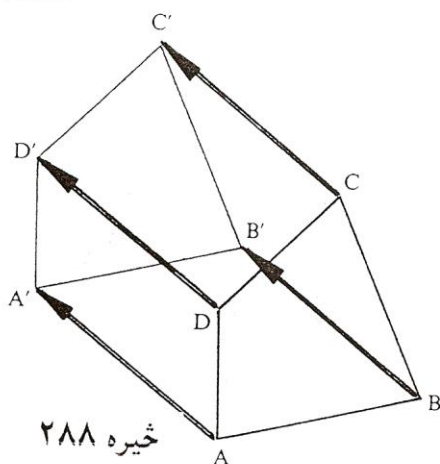
یا دا حالت د پورته پیلبلگي سره ټیک وښانه څرگند شوی؟ هیڅ نه پېښیږي، نه څوک په اړم ټيکنه یا پورته زور ونه کړي بلکه یا راکښ یا ورپورې وهي. هرڅه باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو و د زور ارزښت سره د زور تاثیر لور هم په نیله لوبه کی وړ داخل کړو. ددې هدف لپاره

څیره ۲۸۶

وکتور سره شمیرنه کړي.



تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. تل د یوه غشي په څیر انځورېږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (گڼ ارزښت) ، په هواکۍ یی ځای لور او د غشي څوکه د وکتور لور موخه یا هدف ښایي.

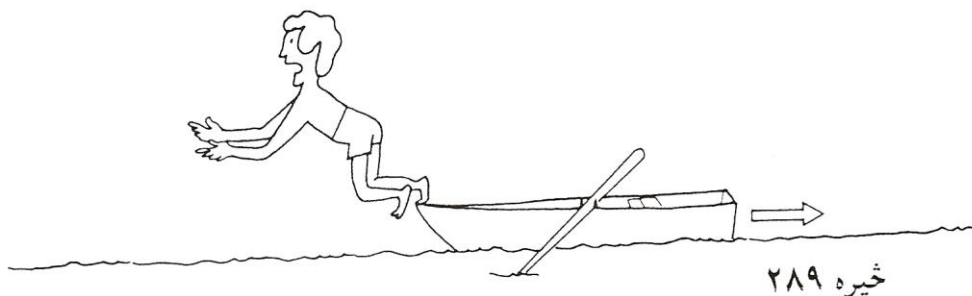


د وکتورونو لپاره د کارونې ساحې

ځپونه د مخنځېنې سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیک کی کښول، لکه زورونه، سرعتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په څیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و

څیره ✓ کښول په وکتور سره په ځښه کیږي

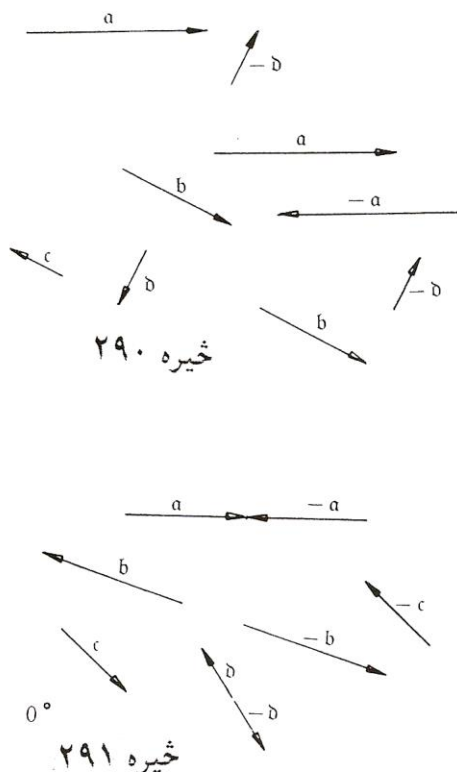
و هسکی مینی ته رانبايي، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رانبايي
چی څومره اړده ده. وکتور دا را په گوته کوي، چی ایا څوک له جلاکوټ څخه
هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلاکوټ ته (



داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا
ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چې له ټکي P و ټکي Q ته لارښودوي، $\vec{PQ}$ سره په
نڅښه کیږي.
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\vec{PQ} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی P' د P څیره او ټکي Q' د Q څیره وي، نو د $\vec{PQ}$
اوږدوالی او لورد $\vec{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا
وگڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یو بل سره غبرګ او
کوګرواینځ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي څخه هم غږیدی شو. (دا دې ځما
په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)



خیره وکتورونه د ایکویوالنختولگی په څیر: دوه وکتورونه ټیټ هله سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت (اوږدوالی) او همغه لور ولري.

تعریف

د a مطلقه ارزښت $|a| = a$ دی.

تل یو نامنفي گڼی دی.

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ

یوونو وکتورونه یا واحد وکتورونه بولو.

وکتورونه د همغه ارزښت سره مگر د

مخامخ لور سره مخامخ یا په خپ

وکتورونه بلل کیږي:

$$|a| = |-a| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره

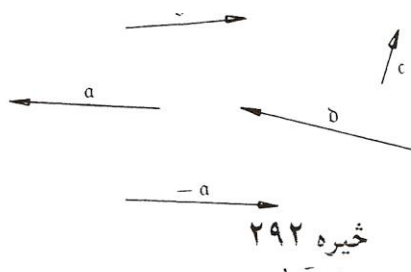
صفر وکتور 0 دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتور کواوردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

سرلیک



$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \quad \text{په هواره کي :}$$

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} \quad \text{په هوا کی :}$$

څیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه (اوردوالی) :

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = 2,5 ; |\mathbf{b}| = 2 ; |\mathbf{c}| = 1 ; |\mathbf{v}| = 3$$

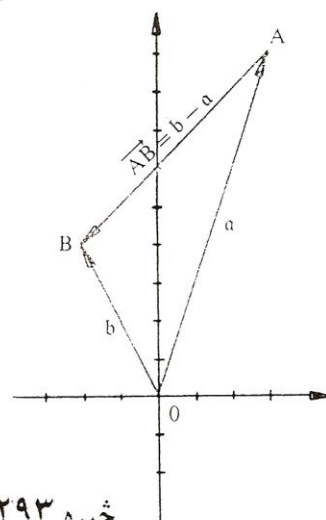
بیلگي:

وي دې $A(3|9)$ او $B(-2|4)$ پیل-
او پایتکي . نو د A او B څخه ټاکلی
وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته
راځي :

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

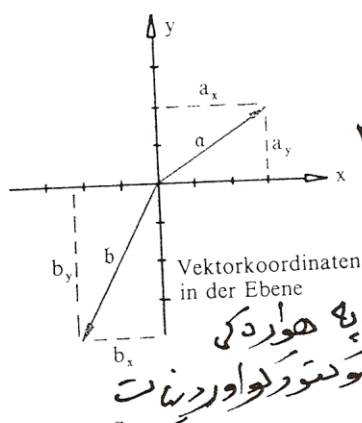
$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



جمله: د وکتور ارزښت د پیتاگوراس
له جملې څخه لاس ته راځي او دا د
یوگونو کواوردیناتو له لارې :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{په هواره کی :}$$



خیره ۲۹۴

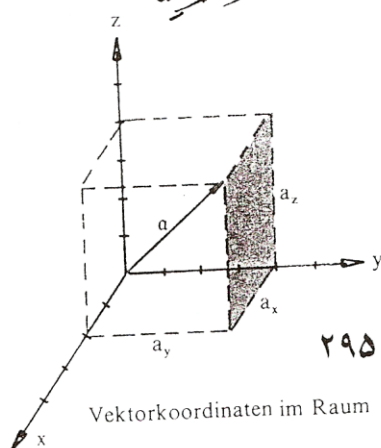
$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

بیلگي :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8,77$$



خیره ۲۹۵

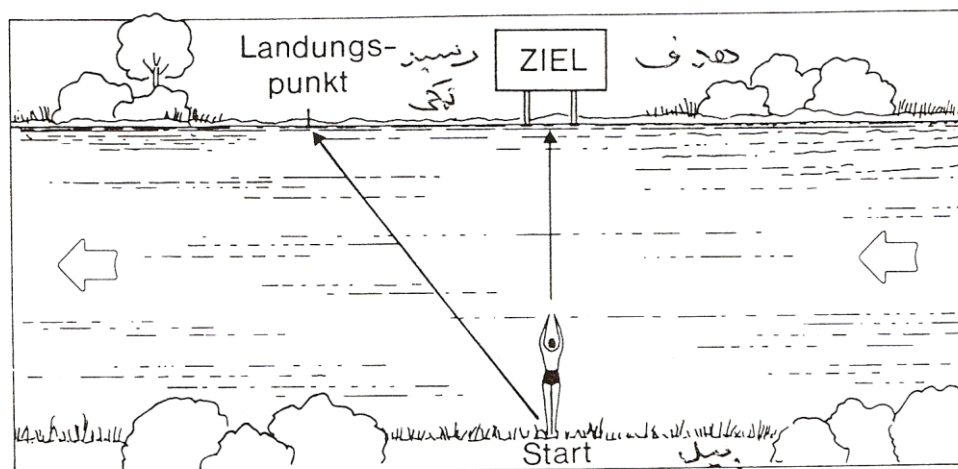
په هوار د کي
وکتور کو او در دینات

وکتور زیاتون او s-خلوون یا ضربول

پیل بیلگه: یو لامبو و هونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چي اوبه روانی دي. سره له دې چي دا تل سیده لامبی، دا نه شي کولی چي هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي. د روانو اوبو څخه د ځان سره وړ کیري. په ټولیزه -

یا عمومي توگه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یې ولمبل، کوم کچی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

گرافیکي د وکتور زیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتور غشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرگ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرگ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبوو هونکي او د اوبو د سرعت زیاتون، څمور په څیره کی »



څیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو گرافیکي سره زیاتېږي، که د دوهم وکتور پیل ټکی د لمري وکتور په پاڼي کینول شي یعنی د غشی په سر کینول شي او داسی ورپسی. دا زیاتون وکتور نو بیا د لمري وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرنی وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

د خپرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي
 جمله : د زیاتونو کټور کواو دینات همداسی کمونو کټور د پیلو کټور د زیاتون
 همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

په هوار کي

په فضا کي

په پلکي

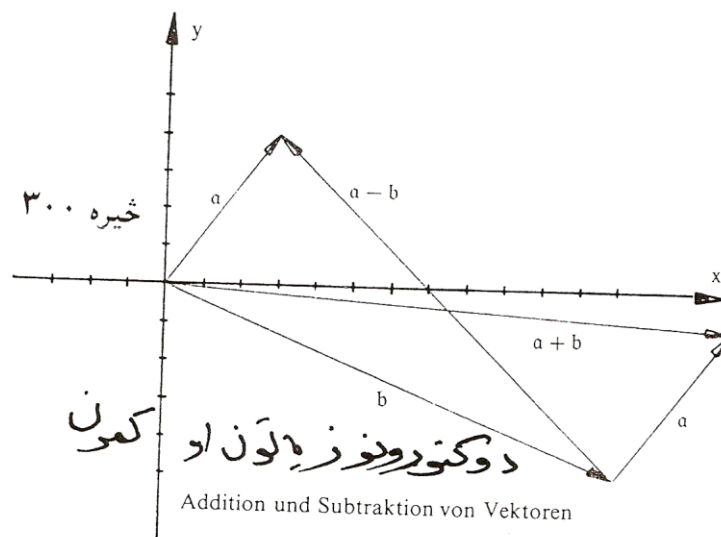
$$1. a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12,73; \quad |a + b| \approx 15,03$$



سرلیک

$$2. \ a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+0 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$a - c = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 3-8 \\ 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$a - b + c = \begin{pmatrix} 4+2+7 \\ 3-0+8 \\ 2-5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$a + a = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot a$$

دا وروستنی بیلگه د وکتورونو د څلولو لپاره ده چی له گڼونو سره ځل شوي
($-s$ ځلون یا 0 ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

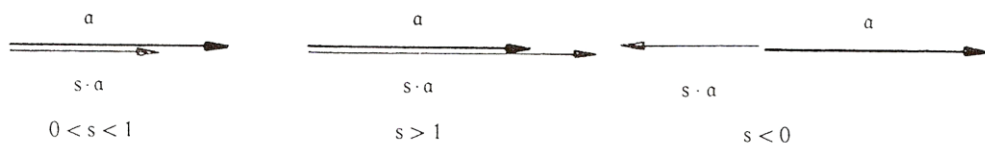
تعریف : وي دې s یو ریل گڼ (سکالار هم نومېږي) a یو وکتور .
نو $s \cdot a = a \cdot s$ هغه وکتور لاس ته راځي ، چی همغه لور ولري لکه a
او $-s$ واره اوږدوالی ولري. وکتور a له s سره ځلیږي، که د وکتور هر
کومپوننت د s سره ځل شي:

$$s \cdot a = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix} \quad \text{په هواکې} \quad s \cdot a = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \\ s \cdot a_z \end{pmatrix} \quad \text{په هواکې}$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 5 \\ -0,5 \cdot 7 \\ -0,5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

هندسي د يوه وكتور ځلونه د يوه رييلگن سره د هغه وكتور منځنی غزونه ده د ځلونی يا فاکتور s په اندازه. د وكتور پيلټيگی د کربنمنځ يا غزونمنځ دی. دلته د $|s| > 1$ سره وكتور اوږد پري يا غز پري» او د $|s| < 1$ سره وكتور لنډ پري. د $|s| = 1$ لپاره د وكتور ارزښت تغير نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وكتور نور راپه څټ کيږي يا راگرځي يا برعکس کيږي.



څيره ۳۰۱: د وكتور a ځلونه د يوه رئيل گڼ s سره.

که $s = 0$ وي، نو $s \cdot a$ صفر وكتور 0 دی.

جمله: په ټوله توگه يا مجموعه کی د سکالار سره د وكتور ځلونو لپاره لاندې شمير قاعدې باور لري:

$$\begin{aligned} |s \cdot a| &= |s| \cdot |a| \\ (s_1 + s_2) \cdot a &= s_1 \cdot a + s_2 \cdot a \\ s \cdot (a + b) &= s \cdot a + s \cdot b \end{aligned}$$

بیلگي:

$$1. \left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -9 \\ -12 \\ -15 \end{vmatrix} \approx 21,21$$

$$\left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |-3| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{50} \approx 21,21$$

$$2. (4-6) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$(4-6) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$3. 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

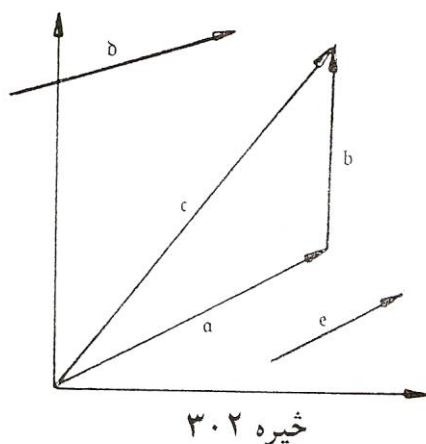
$$3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لایني بلواک بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواک بلل کیږي. تیک په لاندې توگه افده کیږي:

تعریف: دوه وکتورونه a او b لایني بلواک دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلگن s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې $s \cdot a = b$ باور ولري. دا وکتورونه لاینخپلواک دي، که انځورونه $s \cdot a = b$ د هیڅکوم رییلگن s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کې تل دري وکتورونه لایني بلواک دي. په هوا (R^3) کې تل ۴ وکتورونه لاینبلواک دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کې زیات تر زیات

دري وکتورونه لاینیخپلواک کیدی شي.



لایني بلواک وکتورونه لایني خپلواک وکتورونه
د بیلگې پو توگه

$\{a, b\}$	$\{a, e\}$
$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{e, d\}$	$\{a, c, d\}$

بیلگي:

۱ - وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لایني بلواک دي ، ځکه چې

$$s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} -3.s = 6 & & s = -2 \\ 6.s = -12 & \Leftrightarrow & s = -2 \\ 11.s = -22 & & s = -2 \end{array}$$

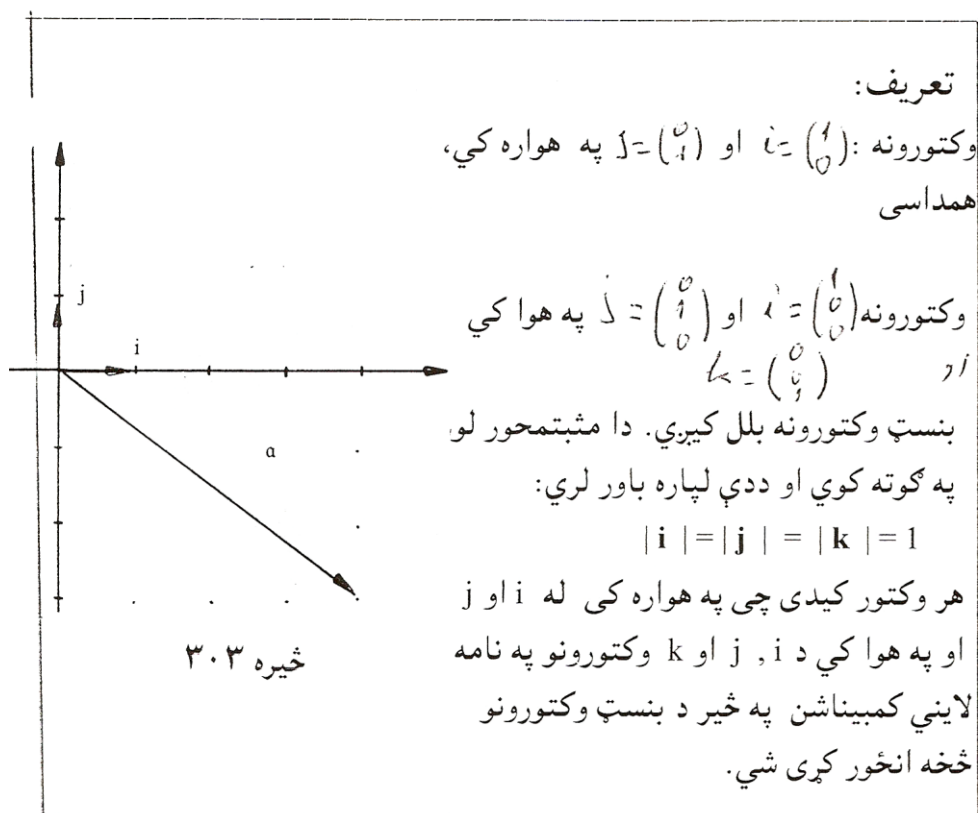
۲ - په خټ يا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواک دي، ځکه چې :

$$s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} -4.s = 10 & & s = -2,5 \\ 6.s = 15 & \Leftrightarrow & s = 2,5 \\ 8.s = 20 & & s = 2,5 \end{array}$$

ګورو، چې دلته سره ګډ يا مساوي s نه شي پيدا کیدی.

د وکتورونو لاینی خپلواکوالی او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کې د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کېدې شي:

لکه څنګه چې ټکی په کواوردیناتو کې تعریفېږي چې خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسې کېدې شي چې وکتورونه، ځانونه، په خوښه داسې وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چې ځغاستلور یې یو ددې کواوردیناتو محور وي...



بیلګې:

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot i - 3 \cdot j = 4 \cdot i + (-3) \cdot j$$

$$b = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3i + 11j + 6k$$

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلگڼونو سره ځلونی له لارې لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره ، کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو گروپ جوړوي (د گروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول - $\alpha + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي . رابندیدنه

دوم - $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي

اسوخیاتیو قانون

دریم - $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم - $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په خټ وکتور یعنی

مخامخ وکتور موجود دی

پنځم - $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلونی لپاره د یوه ریل گڼ سره باور لري:

شپږم - $s \cdot a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم - $1 \cdot a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم - $(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$ د ټولو رییلگڼون m او n لپاره او هر

وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم - $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چی له V وي او

هر رییل گڼ m لپاره.

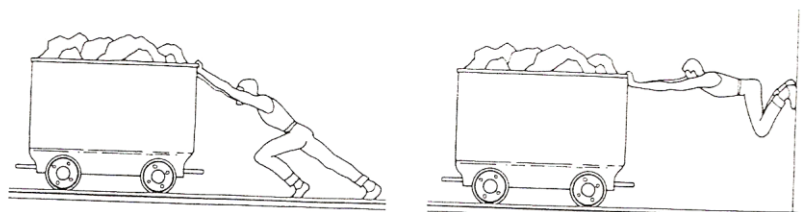
په ټولگیزه توگه یو داسی جوړښتخوینه د وکتور هوا یا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

سکالار ځل

وکتورونه لکه چي ومو لیدل کیدی شي چي سره زیات شي او یا د یوه رییلگنې سره ځل شي . کیدی شي، چي وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړي شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توگه، بیرته یو وکتور هوا جوړوي (د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توگه سکالار لاس ته راکوي، چي دا یواځي ارزښت لري او لور نه لري.

پیلېلگه :

په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واگونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چي ولی کارگر واگون مخته راکښوده او په همدې توگه تیلواوه، ددې لپاره چي موټر سم پورته کړي؟

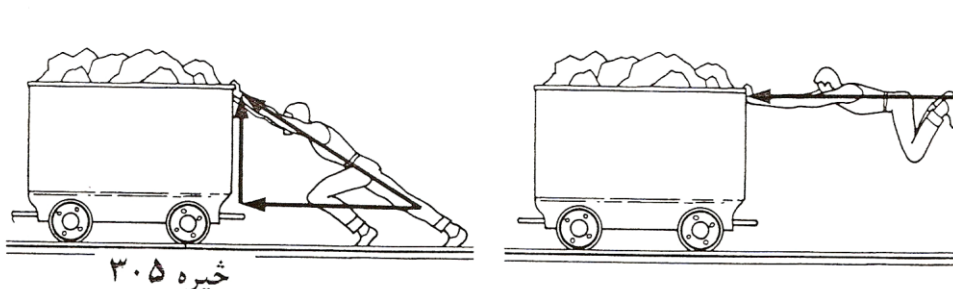


څیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چي د هغو ځل په فزیک کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چي واگون په حرکت کی راولی، باید د واگون په لور واچول شي یا د واگون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چي واگون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واگون سره غبرگ او بل په دې ولاړ زور پوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځي پروت زور واگون د مخ لور ته

په حرکت راوړي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولې کارګر د مخ لور ته تکیه وهي. هغه رسی چې د هغی له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمکې سره غبرګه خغلي (= لار) ، (نزدې د مټو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیر پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړ کونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F \cos \alpha$ په څیر لاس ته راځي. کار $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښت لوی زور او لار - لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري: دا یو سکالار دی.



تعریف:

د دوه وکتورونو a او b یو $a \cdot b$ سکالار ځل لاندې (ویل کیږي a ځل b) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږي،

$$a \cdot b = |a||b| \cdot \cos \alpha = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

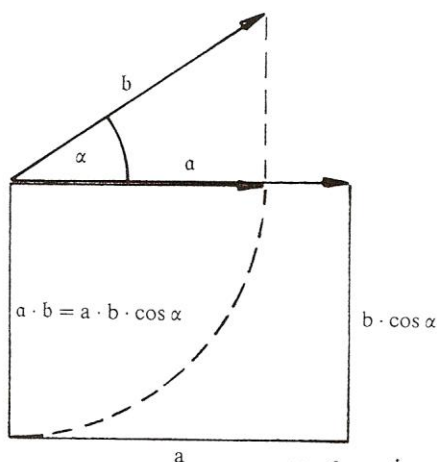
دلته کونج α د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړ کونجیز هوار متن دی یا هواره ده د اړخونو a او $b \cdot \cos \alpha$ سره (د b پریوسټون په a) داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\cos \alpha \neq 0$ ، یعنې $90^\circ \neq \alpha$ ده .

د b ولاړ پریوسټون په a کله کله

په $b_a = b \cdot \cos \alpha$ سره ښول کیږي:

$$a \cdot b = a \cdot b_a$$



څیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $a \perp b$

او $b \perp a$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$a \cdot b = 0 \iff a \perp b$$

بیلگه:

د یوه ولاړ کونجیز کواوردینات سیستم (Orthonormal basis) اورتونورمال بنسټ (یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټ وکتور سکالار ځل د ځان سته تل ۱ دی :

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j) \\
a \cdot b &= a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j \\
a \cdot b &= a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j \\
a \cdot b &= a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1 \\
a \cdot b &= a_x b_x + a_y b_y \\
a \cdot b &= b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a
\end{aligned}$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتو وکتورونو لپاره هم ښوول کيږي شي:

تعريف: د سکالار ځل د کمپوننت انځورونو لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداصط

د a او b ترمنځ کونج په لان دې ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

دوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير منځ مساواتو څخه لاس ته راځي

بيلاکي:

$$1. a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$$

$$\text{also auch } \cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{100+36}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$2. a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,05872 \Rightarrow \alpha \approx 86,63^\circ$$

وکتورخل

پييلگه:

که چيرې په يوه سوري جام کي اوبه واچوي او بيا سوري خلاص کړي او يا که چيرې تاسو يو لاسمينځي يا لمباډنډ ډک کړي وي، نو که چيرې اوبه بندي راوباسي اوبه په بنيلوريز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تويدل د دروند ورن په ذريعه منځ ته راځي ، په بني لور څرخيدنه اوبه د کوريوليسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سيستم کي بايد وکتل شي يا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکي په ځانڅرخون له لارې کتل کيدشي.

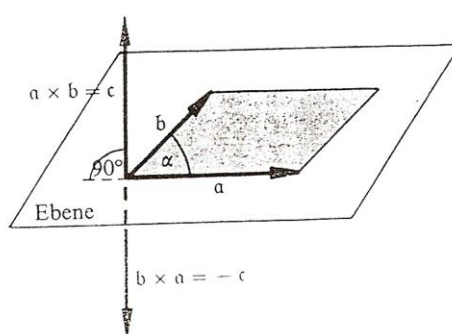
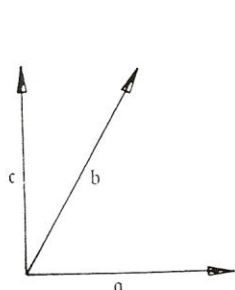
د دوه وکتوري لويو يو بل باندې تاثير له امله (حرکت يا خوزيدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکي څرخون له امله خوزيدنه يا حرکت) يوه بله لويه ، چيدا هم وکتوري لويه ده منځ ته راځي. د دريواره، د لور له امله ، په يواځني گډاپړيکو کي سره پرته دي، او او د دريمي ارزښت کيدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټوليزه توگه باور لري:

تعريف :

د وکتورخل $a \times b$ لاندې (a اټيران b) يو وکتور پوهيږو، چي لاندې خويونه ولري

اول . دا وکتوردريگونې a,b,c په لړپرلپسي يو بني سيستم جوړوي
دوم. وکتور c په وکتورونو a او b نيغ ولاړدی، يعنی په هغی هواره هم چي
د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

دریم. د وکتور c ارزښت د a او b څخه جوړ غبرگ اړخیز سره مساوي دی

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(a; b) = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$


څیره ۳۰۸ : یو بنی سیستم

کیدۍ شي، چی د پیچمیخ له

لارې ونبول شي:

که پیچمیخ له a و b ته وڅرخول

شي، نو میخ د c په لور خوزي یا

حرکت کوي

څیره ۳۰۹

څیره ۲۰۹ : وکتور ځل او هندسي

اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفر وکتور دی او یا دواړه سره غبرگ پراته دي (دا په دې مانا، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180^\circ$)

جمله: وکتور c د دیرمینانت په مرسته د وکتورونو a او b د کمپوننتو له

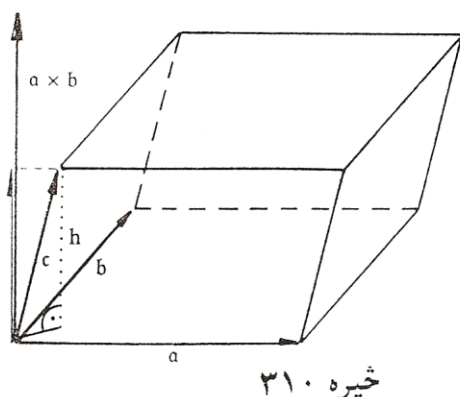
لارې لاس ته راوړ کیدی شي

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z) i + (a_z b_x - b_z a_x) j + (a_x b_y - b_x a_y) k$$

شپاتځل Spatprodukt یا غبرگهواريزي ځل

د وکتور ځلونه ارزښت هغه غبرگهواريزي هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزيرې. يو دريخوايز يا دريدمينزيونال وينه و غبرهواريز ته شپات يا بيرته همغه شپرهواريز وايي (دا د مخه لوستل شوی) دا کيدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکي داسی شميرل کيږي، چې بنسټهواره د جگي سره ځل کړای شي. دا جگي د c ولاړ پريوستون دی، په $a \times b$. يو هندسي بدنيز Stereometrische اوبی يا حل له دې امله د $a \times b$ او c د سکالار ځل له لارې لاس ته راوړل کيږي.



تعريف :

د وکتورونو a, b او c څخه غزیدلی شپات يا غبرگهواريز (Parallelepiped) ډکي دلاندې ځل څخه شميرل کيږي:

$$V_{\text{Spat}} = (a \times b) \cdot c$$

دا غبرگهواريز ځل مثبت دی، که وکتورونه a, b, c

په دې ترتيب يو لړپيرلسی بنی سیستم جوړ کړي، په غير له دې بيا منفي دی.

تر هغی، چې بنسټهواره د يوه وکتور له لارې ځان بنای يا بنسول کيږي يا ځان څرگندوي، نو دا ډکي يو سکالار دی.

په ادبياتو کی دا د ځل اټيران نخښه، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

یکل کیري، یعنی لیکو: $(a \times b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$. غیرکھواریزخل شمیرنه د یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اټیرانخل لکه د مخه مو چی وویل د بنسټوکتورونو د لاینی کومبیشن په خیر انخوردلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلگه:

د هغه غیرکھواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

له دې چی غزیدي؟ $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ او $c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird?

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غیرکھواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیرونونه یا -واحدنه)

تمرینونه

۱ - دواړه وکتورونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم

کی دا لاندې رسم کړی

رسم کړی

$$a) a + 3b \quad , \quad b) 0.5a - 3b \quad , \quad c) 2(a + b)$$

او په هرواړ یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ - په هوا یا فضا کی ټکی $B(2|-1|4)$, $A(1|2|3)$, $O(0|0|0)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومېږي یا څه ډول دي؟

$$\begin{array}{lll} a) \overrightarrow{OA} & b) \overrightarrow{BC} & c) \overrightarrow{AC} \\ d) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} & e) \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC} & f) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \end{array}$$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ - که په یوه هواړه کی دوه وکتورونه a او b لایني خپلواک وي، نو هر بل د دې هواړې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لایني کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1 a + k_2 b$ له لارې د لایني کمبینیشن په څیر د ریښو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپېژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شمېرپوهنې کتاب وکتل شي)

$$\begin{array}{lll} a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; & b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ a) c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} & b) c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} & c) c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$۴ - وي دې : \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad او \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad , \quad وشمیری:$$

$$\begin{array}{llll} a) a.b & b) -a.b & c) a.a & d) b.b \\ e) a.(b.a) & f) a.(b.a).a & & \end{array}$$

او د دواړو وکتورونو ترمنځ کونج.

۵- کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکي؟

۶- د تریگونوميټري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷- د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸- په خوښه دریځوډي ABC لپاره د پیتاگوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\vec{AC} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2$$

۹- د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جگجمله وکتوري وښایی.

۱۰- د یوه په خوښه غبرگهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱- الف) د غبرگ اپیټ یا غبرگهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $b=3$, $a=1$ او $c=-2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) \cdot c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلگي په مرسته وښایی، چی اټیرانځل اسوخیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b=0$, $a=2$ او $c=k$ له لارې یو غبرگ

اپیټ ورکړ شوی دی، چی ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲- یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د $N60^\circ O$ په لور الوخي.

سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km/h سرعت لري او دا

الوتکه له پیلارې اړوي. دا نوې الوتللور وټاکي او د الوتکې نوی سرعت!

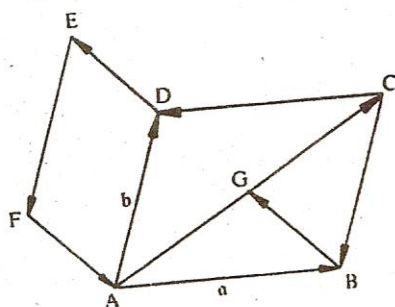
۱۳- د وکتورونو a او b لپاره کله لاندې اړیکې باورلري؟

$$a) |a+b| < |a|+|b|, \quad b) |a+b| = |a|+|b|$$

۱۴- لاندې وکتورونه ورکړ شوي دي:

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} -45 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad e = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یا b د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵- ناټاکلي وکتورونه a او b د

وکتورونو لاینی کمینیشن په

څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶- یو دریګوډی ABC په

$$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ

اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷- په یوه څلورګوډي کې دی $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ او } d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

د نیمې اوږدوالی وشمیری او د هغې غوڅکونج ($\leq 90^\circ$)

۱۸- یوه کینستی د ټکي O څخه د $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ په لور خوږیږي یا حرکت کوي،

دا کینستی تګلور دی. باد د $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ په لور لږیږي.

الف) د باد زور $F \perp$ برخه څومره لویه ده، چی په زیگل باندې ولاړ پریوزي.

یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

سرلیک

ب) د F برخزور له $F \perp$ څخه څومره لوي دي، كومه چي كينستې د مخ په لور بيايي؟
 ۱۹ - يو بار، چي ۱۰۰۰۰ نيوتونه دي د دوه مالو ستونو سره نيول شوي. جوړښت يي يو مساوي پښيز دريگودي جوړوي، د بنسټ ۶ متره سره او د پښي اوږدوالي (د ستنې اوږدوالي) ۵ متره دي.

الف د وشن زور په ضواړو ستونو څنگه تاثير اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته كمپوننتونه څومره لوي دي؟
 ۲۰ - وكتور v كواوردينات و اوړتوگونالبنستونو $(\frac{1}{2})$ او $(\frac{1}{3})$ ته وشميرئ،

كه $|v| = 5$ وي او v د وكتور $(\frac{1}{2})$ سره يو د 55° كونج جوړ كړي.

۲۱ - وي دې $a + b + c = v$. وشميرئ: $a \cdot d + b \cdot v + c \cdot d$

۲۲ - د څلور ټكو A, B, C, D او همداسي E, F, G, H سره يو غبرگ اړخيز

ورگرشوي دي. د لاندې ورکړنو يا شرطونو سره د هغو هواړي وشميرئ

$$a) A = (0|6|0), B = (8|4|0), C = (6|16|0)$$

$$b) E = 1,5|2,5|3,5, F = (0,5|0|2,5), G = (1|0,5|4,5)$$

هغه تراوسه ورك يا نامعلوم ټكي (D همداسي H) چيرته پروت دي؟

۲۳ - هرام د بنسټ هواړي د كونجونو

$$A = (1|0|2), B = (3|3|7), C = (4|2|12), D = (2|-1|7)$$

سره كوم ټكي لري، چي څوكه يي $S = (2|4|15)$ وي؟

لارښودنه: لمړي خپل ځان وپوهوي، چي آيا كونجونه رينبټيا په يوه هواړه كي پراته دي.

تجار تي شميرنه

ځانيونيز يا متناسب او په خټ ياچپه ځانيونيز
يامتناسب بلواک (فنکشنونه)، درېقضييه

په ورځني ژوند کې دې ته اړتيا پېښېږي چې ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلگي په توگه د خپليو لويوالی د ځمکې ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی گڼونو a او b د انډول لپاره په زيات وخت کې کمون $a - b$ کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه گڼونو a او b له توپير څخه غږېږو. په ډيرو وختونو کې دا بسيا (کفايت) نه کوي چې د دوه گڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

پيلبيلگه:

دوه پټي يو 1800 m^2 او بل 2000 m^2 يو له بل 200 m^2 توپير لري. دا د پټيو لويوالی که 400 m^2 او 600 m^2 وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ویش د يوه ميراث ویش وي؟ هر ځل به دا يو 200 m^2 ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. گورو چې په دوم ویش کې $400 \text{ m}^2 / 600 \text{ m}^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش $1800 \text{ m}^2 / 2000 \text{ m}^2$ ته زيات دی. دا په دې مانا، چې که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کمېږي.

دا مخته پرته بيلگه، بنایي، چې په داسی حالتونو کې دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځانيونه کې راوستل کيږي شي

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفې لويې يا گڼونې وي، نو a/b ویش يا $a:b$ د تناسب يا ځانښوونې b ته بلل کېږي.

بیلگه: ۱ - د ځمکو 400m^2 او 600m^2 لویوالی یو بل سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي يا یو بل سره ځانښوونې. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي $66,6\%$ جوړوي.

۲ - د پټیو 1800m^2 او 2000m^2 لویوالی یو بل سره په $1800/2000 = 0,9 = 9/10$

تناسب يا ځانښوونې کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90% جوړوي.

۳ - د مودل گاډي TT لاین (لیکو يا پتلیو) او الماني گاډو د لیکو يا پتلیو سور یو بل سره په لاندې تناسب کی پراته دي

$$12\text{mm}/1435\text{mm} = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ - که یو کړندی په 30 دقیقو کې 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلې سرعت تناسب و وخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70\text{km} / \frac{1}{2} h = 140[\text{km/h}] = 140\text{km/h} .$$

۵ - د یوه هوموژین بدن (د مساویډوله مواد جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلې (g) ځانښوونې يا تناسب دی، د هغه بدن ډکي (cm^3) ته

$$\rho = m / V [g / \text{cm}^3]$$

د یوه لرگي بلاک سختوالی (کثافت)، چی درې کیلو گرامه دروند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی (حجم) لري، $0,75 g / \text{cm}^3$ دی

$$3000 g / 4000 \text{ cmw} = 0,75 g/\text{cm}^3 = \rho \text{ سختوالی}.$$

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواک دوه ځانگړو تپونو يا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنگه، چې موږ په ورځني ژوند کې ډير واره ورسره مخامخ کېږو، چې له دې امله يې پيژندنه ځمور لپاره خورا مهمه ده.

پيليلگه:

- ۱ - د يوه نل څخه په 3 دقيقو کې ۱۲ ليتره اوبه راوځي. خو ليتره اوبه به په يوه ورځ کې له دې نل څخه راووځي، څومره په يوه کال کې؟
که په درې دقيقو کې ۱۲ ليتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په يوه دقيقه کې بايد ۴ ليتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو يا ۱۴۴۰ دقيقو کې
طبعاً $5760 = 1440 \cdot 4$ ليتره اوبه راوځي. او په دې تعقيب په يوه کال کې
 $2102400 = 5760 \cdot 360$ ليتره او يا 210240 هيکتوليترو اوبه بهيږي.
- ۲ - څلور کارگر يوه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کې راپورته او کانکريټوي.
څومره وخت درې کارگره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارگر ضرورت ولري چې دا ځمکه راپورته کړي او هم کانکريټ کړي؟
که څلور کارگره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو يو کارگر ددې لپاره حتماً
زيات وخت په کار لري، يعني څلور ځله زيات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې
کارگر په تعقيب $12 = 36 : 3$ ساعته او لس کارگر $3,6 = 36 : 10$ ساعته =
درې ساعتونه او ۳۶ دقيقې ضرورت لري چې دا ځمکه وکني او کانکريټ کړي.

په دواړو حالتونو کې يو نظم منځ کې پروت دی، دقيق په لمړۍ بيلگه کې فنکشن وخت — د اوبو مقدار او په دومه بيلگه کې فنکشن کارگر — د کار ساعتونه. مگر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راپورون ډول کې يو له بل توپيريږي:

۱ - څومره ډير وخت چې تيريږي په هماغه اندازه زياتی اوبه له نل بهيږي.

۲ - خومره چی کارگر زیاتیري همغومره د کار وخت کمیري
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونو یا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکی لیکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱- فنکشن f : وخت (دقیقه) $\leftarrow$ د اوبو ډیری (ل)

د فنکشن لیکدود (فنکشن لیکلوقانون) لري $x \rightarrow 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسی بریښي $y = 4x$; $x \in Q^+$

۲ - فنکشن g : کارگر (خو دانی) $\leftarrow$ د کار وخت (ساعت)

د فنکشن لیکدود لري $x \rightarrow 36/x$

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسی بریښي $y = 36/x$; $x \in N$

تعریف:

یوه لویه x و هغې ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځانیونه

(په نڅینه کې $y \sim x$) بللکیري که د هغوي تناسب یا ځا نیونه

(ویش) y/x تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y/x = k$ وي.

بلواک (تابع) یا فنکشن $y = kx$ (ثابت k) د تناسب یا ځانیونی څلوونی
یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغې بلی تنظیم شوی لويي ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده

ځانیونه کی ده، که د هغو ځل تل یو ثابت ارزښت وساتي: یعنی

$$y \cdot x = k \Leftrightarrow y = k/x$$

بلواک یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب (antiproportional)

یا په څټ ځانیونکی بلواک یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n -برابره پورې د

بلی لويي هم دوه برابره، نیم برابر یا n -برابره پورې اړه لري.

په چپه یا په خټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n - برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... $1/n$ - برابره تعلق لري (اړه لري).
 په چپه یا په خټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په خټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواک یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په خټ متناسب بلواک یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنې کتاب وکتل شي)

بیلگي :

۱ - سیده تناسب یا سیده ځانښونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت (افغانی) (ډیری (کلیوگرام)

ب : په تیزوالی یا سرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$$s(\text{km}) \rightarrow t(\text{s})$$

۲ - ناسیده تناسب یا ناسیده ځانښونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره

ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرگند ټاکلي ټول وزن د وړونکو ټیو گڼنه ناسیده متناسب

ده د هرې کوتی یویوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه

گڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات

یا ځانښونیز برابرول بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي

(یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

دباندي غږي دي او b او c د انډول دننې غږي. په هر تناسب کې د دبانديو غږوځل د دننيو غږو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = c \cdot b$$

اوس ځان باوري کولی شو چې د دننيو غږو بدلول او يا د دبانديو غږو بدلول يو د بل سره په تناسب يا انډول کې تغير نه راولي. کيدی شي چې ټول دنني غږي د دبانديو غږو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \quad \Leftrightarrow \quad a/c = b/d \quad \Leftrightarrow \quad c/a = d/b \quad \Leftrightarrow \quad b/a = d/c$$

له دې امله کيدی شي چې يو دبل سره برابر زيات تناسبونه يا انډولونه د يو په بل پسې راتلونکو تناسبونو په څير وليکل شي:

$$a/b = c/d = e/f \quad \Leftrightarrow \quad a:c:e = b:d:f$$

دلته بايد په پام کې وي چې ویش ځانله صورت نيسي يعني تل د دوه گڼونو،

بيلگي :

$$15/5 = 21/7 \quad \text{يا} \quad 5.21 = 7.15 \quad \text{څخه لاس ته راځي} \quad 5/15 = 7/21 \quad \text{يا} \quad 15/21 = 5/7$$

$$8/12 = 4/6 = 2/3 \quad \text{د} \quad 8:4:2 = 12:6:3 \quad \text{لپاره لیکو}$$

۳ - يو تناسب چې دننه او دباندې غږي يي يو له بل سره برابر وي ناپريکيدونکی

تناسب بولو. په ناپريکيدونکي تناسب يا انډول $a:m=m:b$ يا $m:a = b:m$

کې m منځنی متناسب انډولی بلل کيږي. منځنی متناسب د نورو دوو غږو a او b جيو متریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{a \cdot b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

$$16/12 = 12/9$$

۴ څلور انډولونه متناسب يا ځاننيونيزڅنگه ليکل کيږي؟

$$18/x = 8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 \cdot 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 \cdot 5) / 8 = 11,25$$

په ترتيب متناسب يا ځاننيونه يا انډول کي باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زيات وخت مود تګست وظيفي د تناسب مساواتو (انډول برابرې) ته لارښودوي، نو بيا درې ورکړشو لويو ته څلورم تناسب يا انډول غوښتل کيږي. د داسې وظيفو لپاره سيده يا ناسيده تناسب يوه غوره رول لوبوي. داسې پوښتنې د درېقضي شميرني يا پاي (ختم) شميرني لاندې شهرت لري. د درېقضي شميرني اصلي پرابلم په دې کي دی، چي د وظيفي ورکول بايد څرګند يا روښانه شي، چي ايا دا يوسيده متناسب او که چپه يا په خپ متناسب بلواک (تابع) يا فنکشن دی.

- د درې قضي پوښتنې کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
- ۱ - يوه د شرايطو قضيه، کومه چي ټولي ضروري ورکوني په ګوته کوي.
 - ۲ - يوه د پوښتنې قضيه چي غوښتونکي لويي x متن کي يا خوندي لري او له هغي سيده يا ناسيده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
 - ۳ - يوه پايقضيه، په کوم کي چي له يوه يوون (واحد) په ورته يا مناسب ډيرون پاي ورکول کيږي.

پيليلګه:

يوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چي ۸۰۰ کيلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقيقو کي ټي کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کيلومتره لار په څو ساعتو کي ووهي؟

تجارتی شمیرنه ۲۸۱

د درې جملې له لارې یې ځواب:

الف - د شرایطو قضیه 800km - 6h 40 min

یا 800km - 400 min

ب - د پوښتنې قضیه 2200 km - x min

پ - پایقضیه 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتیب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظیفه د ټيک ځواب لپاره ضروري نیوني دا وي چی سیده تناسب وپیژندل شي: هرڅومره چی د الوتلو واټن لرې کیږي په همغه اندازه الوتکه زیات وخت په بر کی نیسي.

یعنی 2200km اوږد واټن په داسی انډول یا تناسب کی دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکویوالنڅ فورم (څیرې-) اوږون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 \cdot 2200) / 800 = 1100$$

۲ - ۴ کارگر د یوه دیوال وهلو لپاره پنځه ورځي ضرورت لري. د ناروغي

له امله یو کارگر د کارلري پاتیري. دا راکمه یا راکوچنی ډله اوس څنگه

مشغول ده؟ دلته یو ناسیده تناسب یا ځانښوونه لرو:

هرڅومره چی کارگر کم وي په همغه اندازه وخت زیاتیږي

د درېجملې سره شمېرنه	د تناسب سره شمېرنه
۴ کارگر - ۵ ورځي ۱ کارگر - ۴.۵ ورځي ۳ کارگر - ۲۰ / ۳ ورځي پس ۳ کارگر - $6\frac{2}{3}$ ورځي	غوښتونکي کاروخت x د ۵ ورځو سره داسې تناسب کې دی لکه ۴ کارگر و درې کارگرو ته ورځي $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20/3$
یوځای شوې درې قضیه: د ۳۰ جوړه کالیو گنډلو لپاره ۱۲ درزبان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځي به ۱۰ درزبان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟ لمړۍ درېقضیه (سیده متناسب) ۳۰ جوړه کالي ۱۲ درزبان - ۲۰ ورځي ۷۰ جوړه کالي ۱۰ درزبان - x ورځي هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزبان زیات وي همغومره لږې ورځي ۱۰ جوړه کالی - ۱۲ درزبان - ورځي ۷۰ جوړه کالی ۱۲ درزبان ورځي ۷۰ جوړه کالي ۲ درزبان - ورځي ۷۰ جوړه کالي ۱۰ درزبان ورځي پس لرو ورځي $x = (20.7.6)/(3.5) = 56$	

تمرینونه

۱ - لاندې ځاننیونی یا تناسبونه ساده افاده کړی.

- a) $200t : 2 \text{ kg}$ b) $6 \text{ m} : 6 \text{ km}$
c) $4\text{km} / 30\text{min}$ d) $3,2 \text{ t} : 400\text{dm}^3$

۲ - یوه موټر د 5500 کیلو متره اوږدې لار لپاره 385 لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګډول 50 لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې 430 کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ - که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسېږو ، نو د 60 کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

- a) $50\text{km} / \text{h}$ b) $110 \text{ km} / \text{h}$?

۴ - یو ښار پلان د $1 : 10000$ تناسب یا ځاننیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

- a) 5 cm b) 33 mm c) 1 dm

۵ - یو 81 گڼ څنگه په داسی په 2 زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځاننیونه یا تناسب یی داسی وي لکه $5 : 4$ ؟

۶ - د یوه گڼ او 5 کمون ځان نیونه یا تناسب و 7 ته داسی دی ، لکه چی د 5 کمون ودې گڼ سره، چی 4 ته ځا نیسی یا و 4 ته تناسب یا ځاننیونه؟ دا گڼ کوم دی؟

۷ - یو فاو وې موټر 80 کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په 120 متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر 120 کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟
ب) بی ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه 40

متره مخ ته شي ؟

۸ - د سونگ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیدا کیږي. د سونگ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید (Kohlendioxid (Co₂) ترمنځ تناسب یا ځانښوونه 11 : 3 ده.

څو گرامه سونگسکاره به ۱۰۰ گرامه کولینډیاوکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ - له دریو یو په بل اغیزه مند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخۍ ۴۰۰ وارې په یوه دقیقه کی څرخي یا څرخۍ.

نور دواړه غابنورڅرخۍ څو واره څرخۍ یا څرخۍ؟

۱۰ - ۹۰۰ تیري، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو گرامه وزن لري.

۱۱۰۰ تیري به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور

یې ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ - یو د زدکونکو ورځپاڼه « هیلې » د رحمان بابا د لیسې څخه راوځی د

دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکونکی ۳

ساعته کار پرې کوي.

څومره زدکونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیک دوه

ساعته کی وتړي؟

په سلو کی - Prozent- ، په زرو کی - Primille -
گټه - Zins- او د گټې د گټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د a/b یا c/d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و
ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کې (ځما د شمیرپوهنې کتاب دې وکتل شي)
به وښوول شي چې څنگه بنسټیز نظم په داسې ماتو کې ټاکل کیدی شي. د انډول
یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکولی شو چې دواړه مات لاندې په گډ ماتلاندې
چې 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کې کیدی شي.

پیلېلگه:

یو جوړ جامي، چې په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کیدی، په ۴۰ افغانۍ گرانی شي.
د گرانېت تناسب یا ځاننونه یې و اولي ارزښت ته څومره دی؟
دا تناسب $40/230$ کیدی شي نزدې په یوه مات چې مات لاندې یې
«۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چې د ویشنې له لارې داسې صورته
ونیسي:

$$40/230 = 0,1739 \quad \text{پس} \quad 40/230 \sim 17,39/100$$

قیمتیدل د لمړني قیمت 0,1739 ځله راکوي. داسې هم وایو چې قیمتیدل
په سلو کې نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیز ارزښت G سلمه برخه ددې گڼ 1 په سلو کې بلل
کيږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی $G/100$ ، په همدې ډول $\% P$ له G

د گڼ ارزښت $W = P \cdot G / 100$ له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کی جمله
او W په سلو کی ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسی نیسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په
سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخري مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:		
په سلو کی ارزښت	بنسټ ارزښت	د په سلو کی ټاکنه
$W = G \cdot P / 100$	$G = 100 \cdot W / P$	$P = 100 \cdot W / G$

بیلگی:

په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	۱ - د په سلو کی ارزښت
14 %	د 120 DM	= 16,80 DM

۲ - یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 60 DM , 40 یعنی المانی مارکونه د
مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟
که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

سرلیک

نو باید $40,60 / 14DM$ د 1% د بنسټ ارزښت برابر وي. په دې پسی
بنسټ ارزښت $(100\% =)$ د $G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM$
لاس ته راځي.

له دې سره بایسکل 290 مارکونه بی مالیا ارزښت لري او 60 ، 330
ماروکونه د مالیا سره.

کید ی شي، چی سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو
بنسټ ارزښت د 114 په سلو کی کیښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14) \cdot 114DM = 330,60 DM$$

۳- یو جوړ کالي چی 150 مارکونه ارزښت لري په 10 په سلو کی گرانیږي، دا
کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په 10 په
سلو کی ارزواني. پوښتنه داده، چی ایا دا کالي به اوس هم 150 مارکونه
ارزښت ولري، که څنگه؟

طبعاً نه، ځکه چی گرانیوالی په 10% مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت
دی، مگر دا ارزښت یی په دې اوسني ارزښت، چی $150 + 150 \cdot 10\% = 165DM$
په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزښت وروسته اوس

$$165 - 165 \cdot 10\% = 165 - 16,50 = 148,50DM$$

مارکونه دی. که یوه وکتونکی بنسټ / ارزښت یو د 10 په سلو کی
ارزښت سمبول کیږي، کیږی شی چی دا دیو د سان ډل لاری وشی.
بیلگي:

اول (د 350 ماروکونو 14% کی داسی شمیرل کیږي: $350 \cdot 0,14 = 49 DM$
دوم (که د 4568 کیلو گرامه بنسټ ارزښت په 22% کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568 \cdot 0,78 = 3563,04 DM$$

دریم (که د $2303 m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جگ شي، نو لاس ته ترې راځي »

$$2303 \cdot (1 + 0,24) = 2303 \cdot 1,24 = 2855,72 \text{ m}^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ- یا سټه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې موږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی $G / 1000$

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولگن ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو سټه ارزښت دی.

بیلگه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

موږ غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانگړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلک د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بدایي یا سرماي) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړۍ کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پور ورکونکی څه پیسی باید لاس ته راوولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چې دې ته د سرمایي گټه وایی. په بانکي معاملو کی د فعالی او غیر فعالی گټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله گټه بانک د پوروړی څخه د ورکړ شوې پور په مقابل کی لاس ته راوړي، د دې په څې یا برعکس څوک چې په بانک کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانک کی پیسی سپما کوي، نو د مرکزي یا ملي بانک په هدایت د

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما گټه ووايو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورگټی او سپما گټی ترمخ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینشپ کی باید د ساده گټی او داسی په نامه د گټی گټی ترمخ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده گټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی گټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا گټه د کال په اخر کی په منظمه توگه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د گټی گټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت گټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د گټی گټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال گټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیري او بیا د ټولو گټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یواځی ساده گټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبلگه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکي شمیرنه کي په بانک کی اینوولکیږي، چي کلنی گټه یی ۴,۵% ده. له ۳,۵ کالو وروسته دا سرمایه اینونکي په بانکي شمیرنه کي څومره پیسی لري؟
دلته په پوره هدایت ساده گټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توگه داسی شمیرنو کی د گټی گټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه گټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت گټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلو کی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه (یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په % .

دا چي په دنده يا شميرنه کي گټه غوښتل شوې (دمخه برخه دې، يعني د
په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د يوه کال لپاره گټه ده ، په بنسټيزه بډايي ، چي ۳۵۰۰ مارکونه دي.

په درنيمو کالو کي په ساده گټونه بډايي، چي بانکي شمير يي واز

کړي $3,5 . 157,50 = 551,25DM$ لاس ته راوړي. په دې توگه به په سپما

کتابچه کي $3500 + 551,25 = 4051,25DM$ (مارکونه) وي.

د گټي وخت t لکه، چي ومو ليدل يو کال ، زيات يا کم کيدی شي. ، بيا نو په
بانکي شميرنه کي د يوه کال لپاره ۱۲ مياشتي نيسي، چي د هرې مياشتي لپاره
۳۰ ورځي ټاکي، يعني په ټوليزه توگه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بيا بانکي شميرني
صورت نيسي. د ورځو په بنسټ بانکي شميرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شميرل
کيږي (د سپما ورځ Wertstellung يا Valutierung)، هغه ورځ، چي پيسي بيرته
له بانک اخستلي کيږي يا له بانک بيرته پورته کيږي، نه ورسره شميرل کيږي.

د گټي فرمول: $Z = K.p / 100$. د ورځني گټي فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

بيلگي

لمړی: ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ . ۱۹۹۰ پورې څومره
گټه کوي، که گټه % 75، 4 وي.

د گټي وخت د ورځو په بنسټ شميرو: $t = 12 + 60 + 3.360 = 1152$ ورځي.

د ورځني فرمول له مخي لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

سرلیک

دوم : یوې بنځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کینښول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانک څخه راواخستلې. دې بډایي یا سرمایي څومره گټه وکړه:

$$p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4,0809 \Rightarrow p \sim 4,08\%$$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده گټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جگه شي، که بډایي په ۵%، 4% گټه سپما شوې وي؟

$$t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4,5 = 8000$$

ورځي ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځي

څلورم : یو بډایي، چې لاتري یې ختلی په ساده گټونه، چې ۷، ۶ په سلو کې ده له بانک څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه گټه اخلي.

دا د لاتري ختنه به څومره جگه وي؟

موږ دا د گټې فرمول د بډایي په لور اړوو یا بدلوو:

$$K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6,7 .30 = 358208,95DM$$

لکه چې پوهیږو، بانکونو پرکسیس یا کار کې د گټې گټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د گټې گټه کلنې شمیرل کیږي او بډایي ته ورزیاتیږي.

یو پیل بډایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالي کې د یوې گټې ټاکه یا مقدار $p\%$ سره په گټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې گټې

...

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p / 100)$$

سره په سپما کتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولی گټه ده، د یو کال په پیل بډایي K_0 سره.

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلېدایي د همغې پښېگتې یا گټې پیل سره داسې لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 \cdot P / 100) + (K_0 + K_0 \cdot P / 100) \cdot (P / 100) \\ = K_0 + K_0 \cdot P / 100 + (K_0 \cdot P / 100) \cdot (P / 100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیر دباندي ونيول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2 = K_0(1 + 2 \cdot P / 100 + P^2 / 100) = K_0(1 + P / 100)^2 = K_1(1 + P / 100)$$

له درې کاله وروسته دا بډايي يا سرمايه ده:

$$K_3 = K_0(1 + P / 100)^3 \quad K_3 = K_2(1 + P / 100)$$

که دا شميرنه په ورته توگه دوام پيدا کړي، نو د t کالو وروسته په ټوليزه

توگه لاندې بډايي لاس ته تري راځي

$$K_t = K_0 \cdot (1 + P / 100)^t = K_{t-1} \cdot (1 + P / 100)$$

د $(1 + p / 100)$ لپاره غواړود لنډونی له امله q وليکو، q گټې فاکتور يا گټې ځلونی بلل کيږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د گټې گټې فرمول: یوه بډايي K_0 د t کالو وروسته د $p\%$ کلنۍ

گټې باندې (د گټې جگیدنه) په $K_t = K_0 \cdot q^t = K_0 \cdot (1 + p / 100)^t$ لویه شوې

بیلگه: له درنیمو کلو وروسته په $4,5\%$ گټه 3500 مارکونه په کوم ارزښت لویيږي؟

$$K_{3,5} = K_0 \cdot q^t = 3500 \cdot 1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM مارکونه}$$

د گټې شمیرنې سره بډايي $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots, K_t$ یوه هندسی پرلپسې

جوړوي (ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنې کتاب وکتل شي) دا د پیلېدایي K او ځلووني

$q = 1 + p / 100$ سره، گرافیکي که وکتل شي، نو د گټې لوییدنې

فنکشن $K_t = K_0 \cdot q^t$ یو اکسپوننشل بلواک انځوروي. د تعریفیږي $D = Q$ سره.

ساده گټه اچونې بیا یو لاینی فنکشن $Q = K_t \cdot t$; $K_t = K_0(1 + p \cdot t / 100)$ په

نڅښه کوي. له دې امله بډايي په ساده گټه اچونه دومره چټکه نه لویيږي، لکه چې

په یوه دگټې گټې اچونې باندې.

بیلگې: ۱- یو د 4700 افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده گټه اچونه

او ب) په د گټې گټې اچونې چې $4,5\%$ دی-ایښول کيږي. دا هر پایلېدایي څومره لویه ده؟

$$a) K_5 = K_0(1 + P \cdot t / 100) = 4700(1 + 4,75 \cdot 5 / 100) = 5816,25 \text{ Af}$$

$$K_5 = K_0 + 1116,25 = 5816,25 \text{ Af}$$

$$b) K_5 = K_0 \cdot q^t = 4700 \cdot 1,0475^5 = 5927,45 \text{ Af}$$

۲- یوه بډايي د 5000 افغانیو په $3,5 \cdot 97$ واچول شوه او باید په $31.12.2001$ راووستل شي.

څومره په $4,5\%$ گټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له $31.12.01$) په گټه واچول شي؟

سرلیک

$$\begin{aligned}
 K &= [K_0 + K_0 \cdot p \cdot t / 100 \cdot 360] \cdot (1 + p / 100)^n \\
 &= [50000 + 50000 \cdot 4,5 \cdot 237 / 36000] \cdot 1,045^4 \\
 K &= 61392,35 \text{ Af}
 \end{aligned}$$

د لویو t , q , او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چې د t کلونو په $p\%$ ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړ شوي بډایي K_t ته چې بیایي دیسکونټونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1 + \frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t \cdot (\frac{1}{q})^t$$

تعریف: د نغدارزښت فرمول

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 \cdot q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی، چې د K_0 په لور اوبی یا حل شوي. بیلګي:

۱- یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیریدنی له امله یو څه نیسی بانک کی سپما کړي، د 5% په ګټه. دا پیسې بهه خومره یا دا مقدار به خومره لوي، چې دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟ باید په بانک کی ۲۳، ۹۶۱۲ مارکونه کینښول شي یا سپما شي..

۲- د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي «علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالک ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چې ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له درې کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي. کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ 8% ګټه ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چې دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړای شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

بیلگه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي، کومه چی د گټی په گټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی گټی د څلورو کالو لپاره په بانک کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف (کلني، ب) نیمکلنی، خ (میاشتنی، او ت) په ورځنی گټونه؟

تمرینونه:

- ۱ - یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵، ۴٪ کمشو» د دې کالیو لومړنۍ نیه ۲۵۰ ماکرونه وه. اوس دا کالي کومه نیه لري؟
- ۲ - یو پطلون په ۵، ۴٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟
- ۳ - د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونو راکمیري، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه درلوده، اوس دا څومره بیه لري یا څومره قمته ده؟
- ۴ - یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونو ګرانیري او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟
- ۵ - رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په گوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نقد ادا کولو په حالت کې ۳٪ سکونتو.

دلته څومره پیسې ورکول کیږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کې ۲۰٪ ربات لاس ته راوړي، او دا چې هغه پیسې ندې ورکوي، بر سیره پردې ۲٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.

دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ - په یوه نغدپیسوبیه ۱۴٪ کې د ماليې ورزیاتیري او ۳٪ ربات ورکول کیږي. که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکې شی، ته به مالیه لومړۍ ورزیاته کړې او که لمرې به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جگ شي، که لومړۍ مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ - اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمې پوره کوونو لپاره کلنۍ ۵، ۱ په زرو گټه باید نیمې ته ادا کړي. دا څومره ده؟
۸ - یوه گازره په منځنۍ توگه 0,5% ویتامین A لري. څو گرامه گازرې به ۱۵ ملي گرامه ویتامین A ولري؟

۹ - په یوه موټر بیولو کنترول کې د یوه موټر څغلونکي څخه د ازمایښ لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چې موټر څغلونکي 1,7% الکول په وینه کې لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چې د وینې ډکۍ ۷ لیتره وي؟

۱۰ - د ارزښت کاغذ (دا په بانک کې څه کاغذونه دي، چې خلک یې اخلي، په کلنۍ ټاکلې گټې سره) یو پیسې اینښوونکي ددضیویدند Dividende (کلنۍ گټه ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څومره پیسیبه هغه اینښودلي وي، که یوه بډايي

په ۵، ۷٪ گټه اینښوول شوې وي ؟

۱۱ - اباسین په یوه بانکي حساب کې ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴٪ کې گټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابر وړ (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د ښوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کرښيز الجبر
- ۹ - د شميرپوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کربنیز الجبر

۱۴ - Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمک‌چپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه يې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمير پوهنې پښتو ډکشنري د شمير پوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وېه غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د گروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شمير پوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينواریو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه گام او پای).



د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميږي په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نومېږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library