



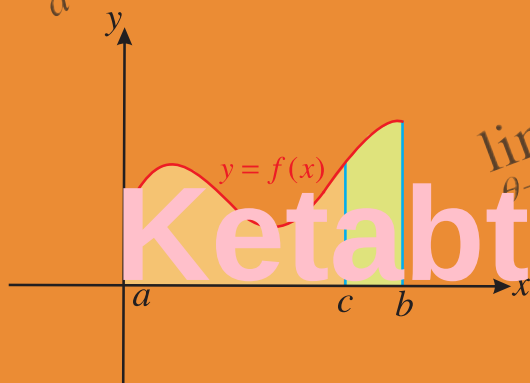
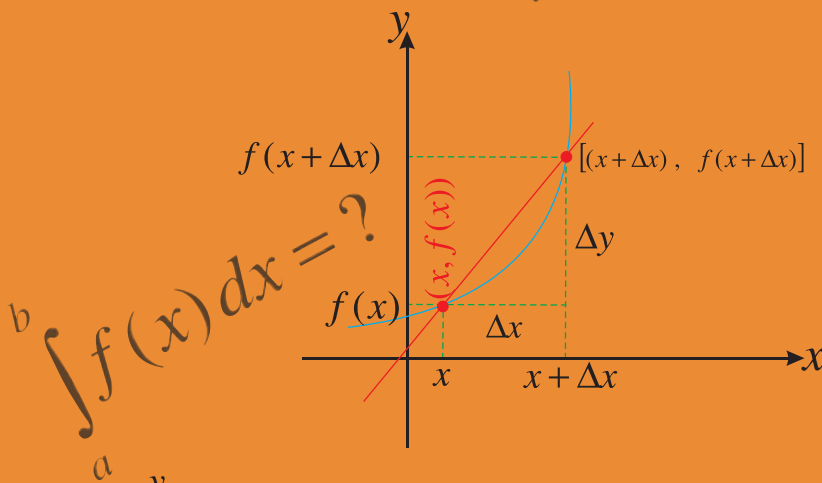
د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

ریاضی ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ?$$

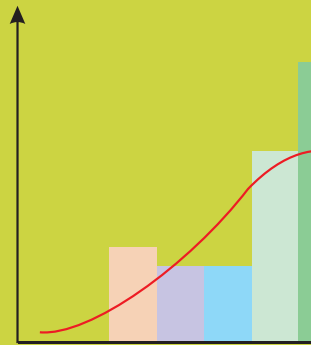


$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = ?$$

Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۰

ریاضی ۱۲
ټولګی





د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب، د پېرزونکو روزنې او د ساینس د مرکز اهمیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف
لوی ریاست

ریاضی ۱۲

نورنکس

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.



ليکوالان:

- پوهنځی حمد الله شیرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړې
- پوهنمل طلابز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- سرمؤلف میر تقییب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(خدرار) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

علمي او مسلکي اېډیټ:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال رحیمه هدایت زی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړې

د ژبې اېډیټ:

- محمد قوس دکرخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکټور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکټور شېر علي ظریفې د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید ((نویل)) نسیمي



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





ملي سرود

دا وطن افغانستان دی دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د توري هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو د ترکمنو د تاجکو

ورسره عرب، گوجر دي پامېریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل خلیږي لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به لکه زړه وي جواویدان

نوم د حق مودی رهبر وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پېغام گړانو ښوونکو او زده کورونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کېږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انګشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي. دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځیدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لویو او زامنو په پاکښته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي. پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسئولیت په رښتیني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستۍ د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي. په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او ویش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر





لړ لیک

مخونه

۱-۴۰

سر لیک

لوړې څېړنې له پمیت

- د لېمیت مفهوم
- د بې او کټې خوا لېمیتونه
- د لېمیت خاصیتونه
- د نسبي تابعگانو لېمیتونه
- د ∞ مهم شکل
- د $00 - 00$ او 0.00 مهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مهم شکلونه
- د مثلثي تابعگانو لېمیت
- د تابعگانو متناوبت
- د متناوبي تابعگانو خاصیتونه
- د څېړنې لنډیز او پوښتنې

۴۱-۸۲

دویم څېړنې مشتقات

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعگانو مشتق
- د مثلثي تابعگانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څېړنې لنډیز او پوښتنې

۸۳-۱۳۲

درېم څېړنې د مشتق د استعمال ځایونه

- د یوې تابع بحراني ټکی (اضطبي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په گټې اخېستې سره
- د منځنيگانو رسمول
- د توابعو د گرافونو محاسبه
- د هوموگرافیک تابعگانو گراف
- د درېمې درجې یو مجهول له تابع گراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لړپیتال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څېړنې لنډیز او پوښتنې



مخونه
۱۳۳-۱۷۲

سرليک څلورم څپرکی انټيګرال

- د ريمان مجموعه
- د انټيګرال مفهوم
- د غير معين انټيګرال خواص
- معين انټيګرال
- د معين انټيګرال خواص
- د مشتق او انټيګرال اساسي قضيه
- په تعريضي طريقې سره انټيګرال نږونه
- قسمي انټيګرالونه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

۱۷۳-۱۹۸

پنځم څپرکی د لوګاريتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق او انټيګرال

- د لوګاريتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق
- د معکوسو تابعگانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشل تابعگانو انټيګرالونه
- د لوګاريتمي تابعگانو انټيګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انټيګرال محاسبه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

۱۹۹-۲۲۲

شپږم څپرکی د انټيګرال تطبیقات

- د یوې منځنۍ د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو محصور شویو منځني ګانو ترمنځ د مساحت محاسبه
- د دوراني جسمونو د حجم محاسبه
- د قوس د اوږدوالي محاسبه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

۲۲۳-۲۶۰

اووم څپرکی احتماليه

- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جملېني توزیع او د برنولي آزمایښت
- د پواسن د احتمال توزیع
- د نورمال توزیع
- د نورمال توزیع منځني لاندې مساحت او د هغې ستندرد کول
- نمونه اخیستل
- د نمونې د اوسط توزیع
- د مرکزي لېمېټ قضیه
- د نمونېني توزیع نسبت
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

۲۶۱-۲۸۲

اتم څپرکی احتمالات

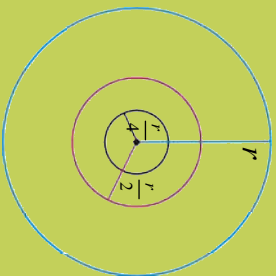
- پرېکړې او نښتي فضاګانې
- هم چانسې پېښې
- د نښتو یا پېرسته فضاګانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناڅاپه پېښو استقلالیت
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې



لوہری چیرکی نہایت







د لمېټ مفهوم

په يوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعگانې یې په ترتیب سره $\frac{r}{2}$ ، $\frac{r}{4}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته نور څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

د $a_n = (1 + \frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1 - \frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in \mathbb{N}$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

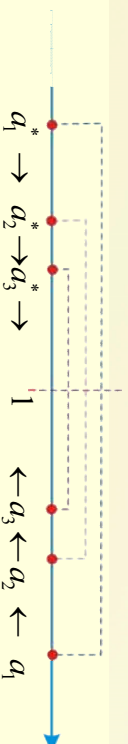
- عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) ونیسئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دیندې پراته دي.
- د a_1^* ، a_1 او a_2^* ، a_2 منځنۍ ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.

- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* رښتوونه کومو قیمتونو ته نږدی کېږي؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله: لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کینې لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

– د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقریب وکړي، مساوي په a_n^* (سره کېږي او همدارنګه د a_n^* د ترادف $n - m$ حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له a_n^* سره کېږي.



ددې لپاره چې د لمېټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړۍ پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.



مثال: لاندې ورکړل شوي ریښه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نږدی کېږي،

موضوع په گرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \dots (i)$$

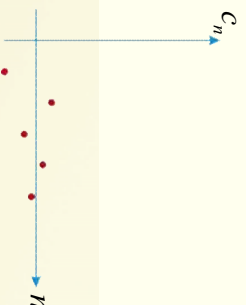
$$b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots (ii)$$

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \dots (iii)$$

حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره گرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

n	1	2	3	4	5	6	7	$\rightarrow \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\rightarrow 2$

n	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\rightarrow 1$



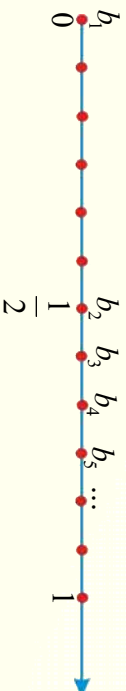
n	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\rightarrow 0$

له پورتنیو گرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته او د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لېمیت قیمت څرگندېږي، د لېمیت په شته والی کې ریډف یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لېمیت (limit) وایي. چې په $\lim$ سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نيسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



اوساکه چيرې I $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots$ او III) $2n, 4, 6, \dots, 2n$ نږدې شي، نو د I ترادف صفر ته نږدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نږدې کېږي د III ترادف د نږدې نهايت (∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندي ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{يا} \quad x \rightarrow a \quad \text{يا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

له بني لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^+$) که چيرې د x د قيمتونو متنقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

له کين لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^-$) که چيرې د x د قيمتونو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له بني لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

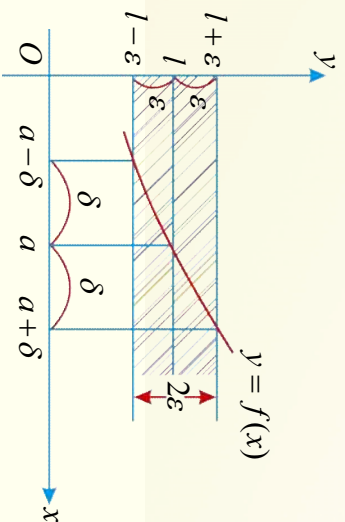
لومړۍ بېلگه: د x متحول د 9 عدد ته نږدې کړئ یا په بل عبارت د $x \rightarrow 9$ مفهوم توضیح کړئ.
حل:

$x: 9.1, 9.01, 9.001, 9.0001, \dots \rightarrow 9^+$
 $x: 8.9, 8.99, 8.999, 8.9999, \dots \rightarrow 9^-$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تېرلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیت عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ یا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow l$

تقرب وکړي نو داسې بې لیکو:



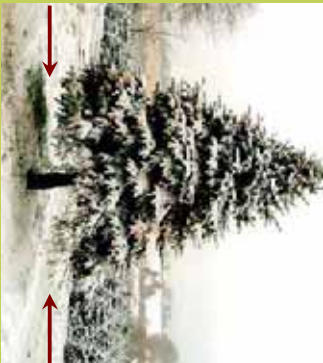
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow |x - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$$



د $2x = f(x)$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښئ چې که x د (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

د ښي او کښي خوا لمېټونه
مخامېخ تصويرونه پاملرنه وکړئ ووايئ چې
مخامېخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.



په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02



- د تابع گراف رسم کړئ.
 - که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.
- د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د ښي خوا لمېټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لمېټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو کوچنی عدد $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \Rightarrow x \in (a, a + \delta)$ یا

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

د کښي خوا لمېټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کښي لوري l_2 لمېټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یو عدد پیدا شي داسې چې $f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \Rightarrow x \in (a - \delta, a)$ یا

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $a \rightarrow x$ ته نږدې شي د l لمېټ لري، یعنې: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

دويمه بېلگه: وښیئ چې $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ سره دی.

حل: د ښي او کښي خوا لمېټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کښي خوا لمېټونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ دي.

دويمه طریقه: د لمېټ د تعريف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ

مشتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لمېټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لمېټ

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \text{ لري، یعنې:}$$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$ تابع کله چې $x \rightarrow 2$ لمېټ نه لري.

د لمېټ خاصيتونه (Properties of Limit)

د مځامځ مساوات د لمېټونو دواړه خواوې کله چې

$x \rightarrow -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 \pm x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 \pm \lim_{x \rightarrow -1} x$$



فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسول لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لمېټ به څو وي؟
- که $x \rightarrow 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لمېټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \div \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ او $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ وي، نو:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} Kf(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x) = KA$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبتوو او پایلې یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

بې نهایت کوچنی نابېلګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \rightarrow a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که

چیرې $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ وي.



1- ددې لپاره چې $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یوې بې

نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $a \rightarrow x$ د مجموعې په حیث ونډول شي، یعنې:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= b + \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty \quad \text{نو } x \rightarrow a \text{ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنی تابع وي، خو صفر نه وي، نو}$$

د بې نهایت کوچنی تابعگانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعگانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنی تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لېمیت یې صفر نه وي، نو د

$$\frac{\varepsilon(x)}{u(x)} = v(x) \quad \text{تابع یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.}$$

مثال:

$$1 \text{ د } x^2 - 9 = \varepsilon(x) \text{ تابع کله چې } x \rightarrow 3 \text{، یوه بې نهایت کوچنی تابع ده ځکه چې:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$$

$$II \quad \frac{1}{2x} \varepsilon(x) = \text{تابع کله چې } x \rightarrow \infty \text{ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی تابع ده.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

- $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow -3} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = (-4)(-4) = 16$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0-3}{0+1} = -3$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لېمیت یو خاصیت داسې بیان او ښوور:

1. د څو تابعگانو د مجموعې لېمیت د نوموړو هرې تابع د لېمیتونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که

چېرې د $f(x_1), f(x_2), \dots$ تابعگانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) + f(x_2)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

ثبوت: که $b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$ ، $b_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1)$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنی تابعگانې وي، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= b_1 + \varepsilon_1, \dots, I \\ f(x_2) &= b_2 + \varepsilon_2, \dots, II \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x_1) \pm f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1) \pm (b_2 + \varepsilon_2) = b_1 \pm b_2 + (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$$

خرنگه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کورچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کورچنیو تابعگانو

مجموعه او تفاضل بیا هم یوه بې نهایت کورچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \pm \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

2. د دو یا څو تابعگانو د ضرب د حاصل لمبیت د نوموړو تابعگانو د لمبیتونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_1 \cdot b_2 \\ f(x_1) &= b_1 + \varepsilon_1 \\ f(x_2) &= b_2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = b_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot \varepsilon_2 + b_2 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$$

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همدارنګه په خپلو کې بې نهایت کورچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] = b_1 \cdot b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

3. د دوو تابعگانو د نسبت لمبیت د هغو تابعگانو د لمبیتونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}, \quad g(x) = b_2 \neq 0$$

ثبوت:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= b_1 + \varepsilon_1 \\ g(x) &= b_2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} &= \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2 b_1 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \end{aligned}$$

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنۍ مثبت عددونه $0 < \varepsilon < 1$ دي، نو کله چې $x \rightarrow a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې به لاس راځي، چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

د سانډويچ قضیه: که چیرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعگانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې a د عدد په کې شامل دی (ولو که $x \neq a$) او $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ وي، نو } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \text{ دی.}$$

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت $\frac{x^2}{2} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{4}$ ولري، نو $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{4})$ نو د سانډويچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

قضیه: که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعگانې وي چې $f(x) < g(x)$ نو د لمبیت د شتون په صورت کې

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ سره دی.}$$

مثال: د $f(x) = \frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x) = \frac{15x+4}{5x-6}$ تابعگانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې

$$f(x) < g(x) \text{ دی، د } x > 1 \text{ لپاره لرو:}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x-4}{5x+6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+4}{5x-6} = \frac{15}{5} = 3$$



لاندې لمبیتونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} x^7 - 2x - 5$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-5)^2 - 9}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 4x + 1}$

د نسبتي نابېگانو لمېټونه

آيا پوهېږئ چې مځامخ اړيکې په څه نامه يادېږي؟

$$\frac{0}{\infty}$$

$$0', \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$



فعاليت

- د $1 - x^2 = r$ تابع لمېټ هغه وخت پيدا کړئ، چې $x \rightarrow -2$ ته تقرب وکړي.
 - د $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = r$ تابع لمېټ هغه وخت پيدا کړئ، چې $x \rightarrow 1$ ته تقرب وکړي.
 - د $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = r$ تابع لمېټ هغه وخت پيدا کړئ، چې $x \rightarrow \infty$ ته تقرب وکړي.
- له پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

پايله

- د ځينو نابېگانو لمېټ مستقيماً د قيمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
 - د ځينو نابېگانو لمېټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{\infty}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \cdot \infty$... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لمېټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول يې تر څېړنې لاندې نيسو:
- 1- د $\frac{0}{0}$ بڼه:



فعاليت

- د $\frac{x-1}{x^2-1} = f(x)$ تابع قيمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
 - د $f(x)$ تابع لمېټ کله چې $x \rightarrow 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
 - آيا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره يوه معين قيمت ولري؟
- د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:
- که چيرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لمېټ د پيدا کولو لپاره يې لومړۍ تابع د تجربې په مرسته ساده کړو د ابهام عامل (څښتنه فکتور) له منځه وړو او بيا يې د لمېټ قيمت په لاس راوړو.

مثال: لاندې لمیټونه پیاکړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$$

حل: لومړی د لمیټ ښه ټاکو:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

خړنگه چې پاسني لمیټونه د $\frac{0}{0}$ ښه لري، نو د تجزيې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لمیټ قیمت په

لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 2-2 = -4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{2^2 - 12 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لمیټ د $\frac{0}{0}$ مهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2-4 = -2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ ښه لري، نو د لمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او

مخبر د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = ? \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1} = ? \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{4} - \frac{4}{x^2+1}}{x-2} = ? \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x} = ?$$

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مهم شکل

آيا د مخامخ تابع لميټ ټاکلی شی؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 8}{2x^2 - 2}$$



فعاليت

- د $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x - 1$ د تابع لميټ چې $x \rightarrow \infty$ وڅېړئ.
- د $g(x) = x^3 - 2x - 4$ د تابع لميټ چې $x \rightarrow \infty$ وڅېړئ.
- د $y = \frac{5}{x-2}$ د تابع لميټ چې $x \rightarrow \infty$ وڅېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لميټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x \rightarrow 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لميټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x \rightarrow \infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لميټ د پيدا کولو لپاره يې داسې کرښه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه يې لميټ په لاس راځي.

لوړې مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2}$ پيدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

حل: لوړې د لميټ بڼه ټاکو:

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرچ په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ پیدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرچ د x له ټولو په لور توان وېشو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x}} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$

دریم مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2}$ پیدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرچ د x له ټولو په لور توان وېشو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{0}{\infty} - \frac{0}{\infty}}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

یادونه: هغه تابعگانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسو کولای شو، په لاندې

ډول د هغوی لېست په لاس راوړو:

د $f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ، که چېرې $(x \rightarrow \infty)$ کړی وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

- 1- د $m = n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$.
- 2- د $m < n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت له صفر څخه دی.
- 3- د $m > n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت له $\pm \infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لېمیتونه پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4}{-x^4} = -6$$

1- څرنگه چې $m = n$ دی، نو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1} = 0$$

2- څرنگه چې $m < n$ دی، نو د نوموړی تابع لېمیت صفر دی.

3- څرنگه چې $m > n$ دی، نو د نوموړي تابع لېمیت مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \infty$$

يادونه: زده‌کونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عمليې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.



لاندې لمیټونه پيدا ڪری؟

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

III- د $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ مهېم شکلونه

د مخامخ لمېټونو قيمتونه پيدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \cdot \frac{2x^3 - 4}{x - 3}$$



فعاليت

- د $a + 1$ مزدوج وليکئ.
- د $\sqrt{x - 1}$ مزدوج وليکئ.
- د $\sqrt{x} - \sqrt{x + 1}$ لمېټ پيدا کړئ، کله چې $x \rightarrow \infty$ تقريب وکړي.
- د $f(x) = (2x - 1)(x + 1)$ تابع لمېټ وټاکئ، کله چې $x \rightarrow \infty$ تقريب وکړي.

له پورتنۍ فعاليت څخه پايله داسې بيانوو:

د هغو تابعگانو چې د $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ مهېم شکلونه ولري، د لمېټ د پيدا کولو لپاره يې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، ترڅو چې د $\frac{0}{0}$ او يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته يې لمېټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لمېټونه پيدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = ? \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(\frac{1}{x^2+2x-3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = \frac{9}{1-1} - \frac{8 \cdot 1 + 10}{1^2 - 1} = \frac{9}{0} - \frac{18}{0} = \infty - \infty$$

حل 1:

څرنگه چې نورې لمېټ د $(\infty - \infty)$ بڼه لري نو ليکلای شو، چې:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x + 9 - 8x - 10}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(\frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(\frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = (1-1) \left(\frac{1}{1^2 + 2 - 3} \right) = 0 \cdot \frac{1}{3-3} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$$

حل 2:

ليدل ڪيري چي نوموڙي لميٽ (0·∞) شڪل لري، نو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$

پڙهڻي؟

لاندي لميٽونه پيدا ڪري.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 8x^3)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \left[(x^2 - 25) \frac{1}{x-5} \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ شکلونه
د مخالف لمېټ مبهم شکل وټاکي؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^x = ?$$



فعاليت

- د $x^x = x^x$ تابع لمېټ په هغه صورت کي پيدا کړئ چې $x \rightarrow 0$ وکړي.
- د $(1+x)^x = 1+x$ لمېټ بڼه په هغه صورت کي وټاکئ چې $x \rightarrow \infty$ وکړي.
- د کرمي عملېي په مرسته کولای شو چې $0^0, \infty^0, 1^\infty$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

که چيري يوه تابع پورتنۍ مبهم شکلونه ځانته غوره کړي هغه د طبيعي لوگارتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)]$$

وردي، يعني:

يادونه:

1- که چيري $\infty \rightarrow n$ وکړي د $(1 + \frac{1}{n})^n = a_n$ ترادف $a_n = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کي ښکاره بري:

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
100000000	10^{-9}	$1 + 10^{-9}$	2.718281828

نو 2.718281828 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.718281828 \dots$ عددنہ د Euler عدد وائی.

-II

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ثبوت: پوہیرو چي څلور وارہ پوہننبي د 1^∞ مبهم شڪلونہ لري.

$$1) x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}, \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}, x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[(1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \rightarrow u = \frac{1}{x}, u \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[(1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{x})^x \right]^{\alpha \beta} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right], x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}, x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[\lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u})^u \right] = \ln e = 1$$

$$4) y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow x = \ln(1 + y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1 + y}}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x}}, y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}, y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{1}{\ln(1 + y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(1 + y)} \\ &= \frac{1}{\ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

د 1^∞ مههم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشل تابع لېمیت پکې $\lim_{x \rightarrow d} [u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مههم شکل

ځانته غوره کړې په دې حالت کې $\alpha = u - 1$ سره تعویضو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x \rightarrow d} u^v = \lim_{x \rightarrow d} [1 + u - 1]^{\frac{v}{u-1}} = \lim_{x \rightarrow d} \left[(1 + \alpha)^{\frac{v}{\alpha}} \right] = \lim_{x \rightarrow d} \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\lim_{x \rightarrow d} (v\alpha)}$$

څرنگه چې $u - 1 = \alpha$ دی که چیرې $u \rightarrow 0$ نو $\alpha \rightarrow \infty$ ته نږدې کېږي په پایله کې:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow d} [u(x)]^{v(x)} &= \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\lim_{x \rightarrow d} [v(u-1)]} = e^{\lim_{x \rightarrow d} [v(u-1)]} = e^P \\ \lim_{x \rightarrow d} [u(x)]^{v(x)} &= e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow d} [v(u-1)] \end{aligned}$$

لومړی مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$ لېمیت قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لېمیت بڼه ټاکو معلومېږي چې لېمیت د 1^∞ مههم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x}, \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x(1 + \frac{2}{x} - 1) \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ.

حل: لومړی د لېمیت بڼه ټاکو $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

خرنگه چې معلومېږي نوموړی لېمیت د 1^∞ مېلم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 &= e^P \\ u &= 1 + \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x-5}{2} \\ P &= \lim_{x \rightarrow \infty} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 &= e^P = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\end{aligned}$$

درېم مثال : $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل : د تېر په شان بيا هم لومړی د لېمیت ښه ټاکو، $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ مېلم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

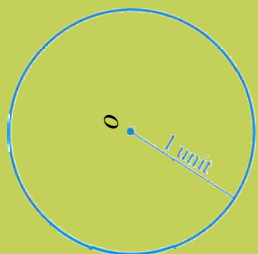
$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} &= e^P \\ P &= \lim_{x \rightarrow 0} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} (\cos x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} &= e^P = e^0 = 1\end{aligned}$$



لاندې لېمونه محاسبه کړئ.

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$



د مثلثاتي تابعگانو لمېټ Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1 unit) وي، نوموړي دایرې ته څه ډول دایره وايي.



فعالیت

- دوضیعه کمیاتو په سیستم کې د $C(0, r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرنۍ ټکي څخه په دایره باندې د OX پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکۍ د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاوې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په گوته کړئ.
- له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتو:

قضیه: د یوې زاوې د سین او د هغې زاوې د نسبت لمېټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

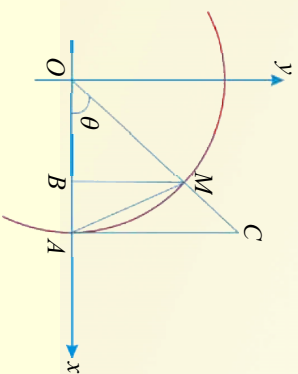
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت } MOA = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{BM} \quad \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت } O\hat{A}M = \frac{1}{2} \theta r^2$$

د θ د زاوې برخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\text{مساحت } CO\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot r$$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2} r \overline{BM} < \frac{1}{2} \theta r^2 < \frac{\overline{AC}}{2} \cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin \theta < \tan \theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} 1$$

د ساناوېچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$ او همدارنگه $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$ دی، نو

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

پوهېږو چې د هرې زاوې ساين د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta}$$

د ساناوېچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left. \begin{aligned} -\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} &= 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} = 0$$

په پايله کې ویلای شو چې د یوې زاوې ساين او د هغې زاوې د نسبت لېمیت مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاوې یې نهایت ته نږدی شي.

لومړی مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $\alpha = 2x = x$ ، خوځڼګه چې $x \rightarrow 0$ کړی دی، نو $\alpha \rightarrow 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \frac{\sin \alpha}{2\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \Rightarrow 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

دویم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x}$ حل کریں۔

حل:

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} = \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \frac{5 \cdot 2x \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$ حل کریں۔

حل: پرمیرو چپی $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ سرہی، نو:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

خلورم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کریں:

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x \frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{\sin 5x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

پنجم مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$ پہ لاسی راویں۔

حل: پرمیرو چپی $\frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x + 6x}{2} \sin \frac{4x - 6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x}$$

کہ $y = 5x$ سره وي، او $x \rightarrow 0$ نو $y \rightarrow 0$ کوي، نو:

$$= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$



لاندي لميٽونه محاسبه ڪري.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3x$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

د تابعگانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.



د تابعگانو گرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادې تابعگانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای، یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابعگانې په نوموړې ټکې کې غیر متصلې یا غیر متمادې تابعگانې بلل کېږي.



- د $x^2 + 4x$ تابع گراف رسم کړئ.

- د $f(x)$ د تابع لمېټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.

- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.
له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $f(x) = y$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادې بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوی وي.

2- راکړل شوي تابع د a په ټکي کې لمېټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لمېټ سره مساوي وي: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وینئې چې د $x^2 + 2x - 1$ د $x_0 = 2$ په ټکي کې ممتدې ده.

حل: څرنگه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د ممتدیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2 \in Dom f(x) &= IR \\ 2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) &= 4 + 4 - 1 = 7 \\ 3) \quad f(2) &= 2^2 + 4 - 1 = 7 \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 7$$

څرنگه چې د ممتدیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع ممتدې ده.

دویم مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع ممتدیت د $x_0 = -1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده؛ له: $IR \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0} = \infty \quad \text{سره دی.}$$

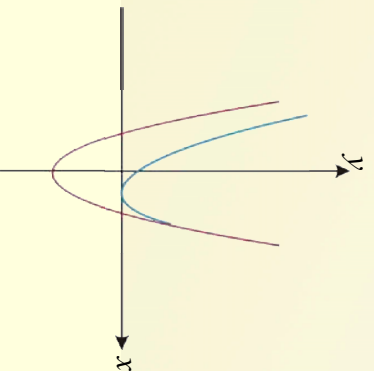
څرنگه چې لیدل کېږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د $x = -1$ په ټکي کې ممتدې نه ده.

درېیم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$ د تابع ممتدیت د $x = 2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کښي خوا لیمیتونه څېړو:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

په پایله کې وړلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې ممتدې ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



خلورم مثال: که $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 1-x & ; x < 1 \end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متعاديت وڅيړئ.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غير متعادي ده.

پايله: که چيرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متعادي وي، نو $f(g(x))$ په

$x=a$ کې هم متعادي ده، يعنې:

- $$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(g(a))$$
- $$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^\alpha = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
- $$2) \lim_{x \rightarrow a} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$
- $$3) \lim_{x \rightarrow a} \log_a f(x) = \log_a (\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$
- $$4) \lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

پنځم مثال: که $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ وي او $x \neq -3$ وي.

آيا د $f(x)$ تابع د $x = -3$ په ټکي کې متعادي ده؟

حل: څرنگه چې تابع د $x = -3$ په نقطه کې نه ده تعريف شوي يا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعريف په ساحه کې نه دی شامل، نو له دې امله تابع د $x = -3$ په ټکي کې متعادي نه ده.

غير متعاديت: که چيرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې يو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وايو چې f په a کې غير متعادي ده او a يې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کيڼ لوري لمبیتونه ولري خو مساوي نه وي.
دویم ډول: کم تر کمه يو له دوو لمبیتونو(د ښي او کيڼ لوري لمبیتونه) څخه موجود نه وي.
درېم ډول: که چيرې تابع د a په ټکي کې لمبیت ولري خو د a د f تعريف په ساحه کې شامل نه وي. (نوازې يو خالي ټکی وي).



پوښتني

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متعادیت وڅیړئ.

$$a) f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3 \qquad b) f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$$

$$c) h(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2 \qquad d) f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$$

$$e) f(x) = |x-3| \quad ; \quad x=3 \qquad f) g(x) = \frac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$$

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases} \qquad h) f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$$

د متمادي تابعگانو خاصيتونه

د مخامخ مسالو ته اړه سوچ وکړئ چې حقيقت لري او که نه؟

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ (f \div g)(x) &= f(x) \div g(x), \quad g(x) \neq 0\end{aligned}$$



فعاليت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعگانو متماديت وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانو:

پايله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د $c = x$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعگانو څخه يې

هره يوه په $c = x$ يا يوه لټورال کې متمادي ده.

- 1- د تابعگانو جمع $f(x) + g(x)$
- 2- د تابعگانو تفريق $f(x) - g(x)$
- 3- د تابعگانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$
- 4- د تابعگانو تقسيم $\frac{f(x)}{g(x)} ; g(x) \neq 0$

لومړۍ بېلگه: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ وي، نو:

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ وي.

ب) $(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x) \cdot f(x) = f(x) \cdot g(x)$ د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل: لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېرو چې متمادي ده که نه؟

$$1) Df(x) = \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$$

$$3) f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د f تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1) Dg(x) = \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$

$$3) g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

په همدې شان د g تابع د $x = 1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعگانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$1) D(f(x) + g(x)) = \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$$

$$3) f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$$

$$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$1) D[(f + g)(x)] = \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 + 3x + 1] = 6$$

$$3) (f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$$

په پایله کې د متمادي تابعگانو د جمعې حاصل د $x = 1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 3x - 2) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 9x - 6$$

$$1) D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$2) (f \cdot g)_{(1)} = 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 - 6 = 8$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(1) = 8$$

په پايه کي د متمادي نابېلگنو د ضرب حاصل د $x = 1$ په نقطه کي متمادي ده.

دويمه بېلگه: که $g(x) = 3x - 2$ او $f(x) = x + 1$ وي، وڅېړئ، چې آيا $x = 2$ د $f(x) \cdot g(x)$

په نقطه کي متمادي ده؟

حل:

$$1) Dg(x) = IR$$

$$1) Df(x) = IR$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

$$3) g(2) = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$3) f(2) = x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x + 1)(3x - 2) = 3x^2 - 2x + 3x - 2 = 3x^2 + x - 2$$

$$D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$(f \cdot g)(2) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = (f \cdot g)(2) = 12$$

په پايله کي لاس ته راځي چې $f(x) \cdot g(x)$ د $x = 2$ په ټکي کي متمادي ده.



1- وٺيئي چي لائيندي تابعگاني په ورڪر شويو نقطو ڪي متمادي دي او ڪه نه؟

$$1) f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$$

$$2) g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$$

$$3) h(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$$

2- تشریح ڪري، چي وٺي د $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ ڪي غير متمادي ده.

د څېړنې لنډيز

د متحول تقرب: ول کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{يا} \quad x \rightarrow a \quad \text{يا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

له بني لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^+$) که چېرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \rightarrow a^-$) که چېرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له بني لوري او د x د متحول تقرب له چې لوري؛ يعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

تعريف: که چېرې د $f(x)$ تابع په يوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کيدای شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ول کېږي چې د $f(x)$ د تابع لمبیت عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې بې لیکو: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ يا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow l$

د لمبیت ځانګړتیاوې: که f او g دوي تابعګانې وي، C, L او M حقيقي عددونه وي داسې چې $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ او $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې ليکلای شو:

- 1) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$
- 2) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$
- 4) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0, \quad g(x) \neq 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt{L}$

بې نهايت كو چنی نابېگانې: د $\varepsilon(x)$ تابع كله چې $a \rightarrow x$ ته نږدی شي بې نهايت كو چنی. بللې كېږي، كه

چېرې $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

د سانډويچ قضيه. كه چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابعگانې د هر x لپاره په يوه غیر ترلي انټروال كې چې د a عدد په كې شامل دی(ولو كه $x \neq a$) او $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ شرط صدق وكړي په هغه صورت كې

چې $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وي، نو $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ دی.

- كه چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېمېټ د پيدا كولو لپاره بې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده كوو او بيا بې لېمېټ په لاس راوړو.

- $f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$ د تابع د لېمېټ د پيدا كولو لپاره چې $x \rightarrow \infty$ وكړي، عبارت دی له:

1. د $m = n$ لپاره د نوموړي كسر لېمېټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$

2. د $m < n$ لپاره د نوموړي كسر لېمېټ عبارت دی له $\pm \infty$.

- د هغو تابعگانو چې $(-\infty - \infty)$ او $(0 - \infty)$ بڼه ولري د لېمېټ د پيدا كولو لپاره بې د كسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ بڼه غوره كړي چې وروسته بې لېمېټ په لاس راوړو.

- هغه تابعگانې چې د 1^∞ ، ∞^∞ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{0}$ ، $\frac{0}{\infty}$ بڼه غوره كړي چې وروسته بې لېمېټ په لاس راوړو. څخه $P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]$ ، $e^P = \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{1^P}$

- لاندې رابطه كله چې $\theta \rightarrow 0$ وكړي هميشه سمه ده.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

- د $f(x) = v$ تابع د $x = a$ په ټكې كې متمادي بلل كېږي، كله چې:

1. a د $f(x)$ تابع په دويم كې شامل وي.

2. راکړل شوی تابع د a په نقطه كې لېمېټ ولري.

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په ښه کړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} - 1$$

- a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} - 2$$

- a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

$$\lim_{x \rightarrow 1.4} (2x + 0.3) - 3$$

- a) 1 b) 3 c) 0 d) هېڅ يو

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} - 4$$

- a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 5$$

- a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} - 6$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

7- لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3 + x} + x$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2 - 7}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x - 18}{x^2 + 3x - 10}$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x - \sqrt{3x - 2}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cos x}$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x)}{\tan(a+x) + \tan(a-x)}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x + \sin^2 x}{x^2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 2x}{x \tan 3x}$$

$$21) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi + u)}{\sin 8(\pi + u)}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - x + 5}{\sqrt{9x^4 + 1}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+3}{x+2} + \frac{2}{x^2 + 2x} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 2}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x + \sin^2 x}{ax^2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 4}{4x + \sqrt{x}}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$



دویم خبر کی مشق



د مېشتي لومړنی سوچ د پیردي فرماټ (P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نیوټن (Isaac Newton) او گوتفريدولېم لایبنز (Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني منځ ته راغی او تکميل شوی دی.



مشتقات

Derivatives

د $-1 - x^2 = f(x)$ تابع په پام کې ونیسئ، د مخامخ

کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$$

د یوه منځني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې

رابطې څخه په لاس راځي.

- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاوې سره اړه لري، چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟

- آیا د مستقیم خط او منځني میلونه یو شان پیدا کېږي؟

له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منځني میل په اسانۍ سره نشو پيدا کولای ځکه چې منځني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منځني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

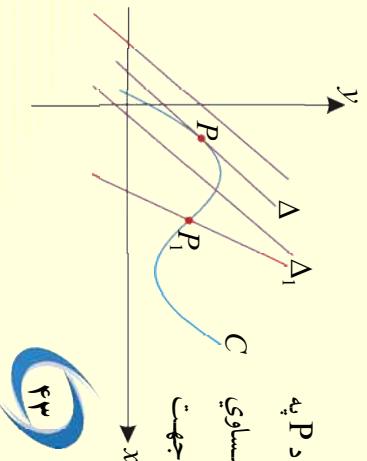


فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د C منځني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د P په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکي د C په منځني باندې داسې حرکت وکړي، چې د P ټکي ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

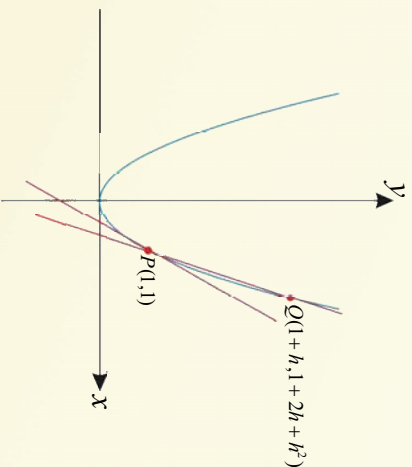
د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منځني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاوې له $(\tan)$ سره مساوي C دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منځني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د منځني میل له مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو د دې مماس میل له هغې فورمول څخه چې دوي نقطې يې معلومي وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخميني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ بنودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h, 1+2h+h^2)$ ټکی د منځني بر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تېرېږي، میل يې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \rightarrow 0$ نو $P \rightarrow Q$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وايي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$

د لمېټ دا عمليه موز ته دا امکان په لاس راكوي چې د $y = x^2$ د تابع د منځني ميل په يوه اختياري ټكي $P(x, y)$ كې په لاس راوړو. كه د Q د ټكي اختياري مختصات $[x+h, (x+h)^2]$ وي كه د PQ ميل ته

m او د P په ټكي كې د مماس ميل په m_T سره ونښو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليكلای شو، كه چېرې $[x, f(x)], [x+h, f(x+h)]$ د Q د نوميروي منځني دوي اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليكلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

په حقيقت كې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د P او Q له ټكو څخه تېرېږي.

او د منځني ميل د هغې په هر اختياري ټكي كې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

دويم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منځني سره د مماس ميل د $P(2, 0)$ په ټكي كې پيدا كړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشكيل او د $x = 2$ په ټكي كې د منځني ميل حسابو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-4h-h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3-h) = -3 \end{aligned}$$

منځني يا وسطي تغير

كه يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال كې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعنې $f(t) = S$ او t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه

يادېږي او سرعت د t_0 په وخت كې عبارت له هغه حد يا لمېټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل

$$\text{كېږي.} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

د پورتنۍ رابطې لېسټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ورپاڼه شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغیر وايي، یعنې:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(s_2) - f(s_1)}{t_2 - t_1}$$

مثال: د $f(x) = x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2, 5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $x_1 = 2$ او $x_2 = 5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{5 - 2} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{25 - 4}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعگانو د x د متحول لپاره د یو Δx او y ترزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل

شوو ټکو کې پیدا کړئ.

$$1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = ? , \quad f(x) = 2x^2 - 4$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = ? , \quad f(x) = 2x - x^2$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = ? , \quad f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

$$2) \text{ د } f(t) = 5t^3 - 3t + 1 \text{ د تابع متوسط تغیرات د } [2, 4] \text{ په انټروال کې پیدا کړئ.}$$

د یوې تابع مشتق
مخامخ لېمیت څه راښيي آیا په بل ډول یې لیکلای شو؟

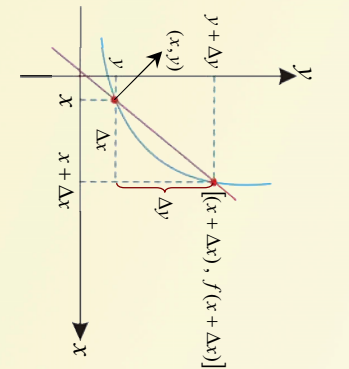
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



فعالیت

- که چیرې د $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متنادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زیاتوالی پیدا کړئ آیا تابع ترږد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع ترږد د متحول پر ترږد $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانښي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمیت ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لېمیت د څه په نامه یادېږي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:



$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - y \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \quad / \quad \div \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

تعریف: د تابع او د متحول د بدلون د لېمیت نسبت ته کله چې د متحول ترږد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق

بلل کېږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

لومړۍ مثال: که $f(x) = 2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

حل : د مشتق د تعريف څخه په گټه اخيستنې سره ليکلاي شو، چې:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = 2$$

دويم مثال : د $f(x) = x^3$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

دريم مثال : د $x \geq 0$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ.

حل : مخکې له حل څخه $0 \leq x$ حالت په پام کې نيسو:

الف: که $0 < x$ وي؛ نو د مشتق د تعريف په مرسته ليکو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

صورت او منځ د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

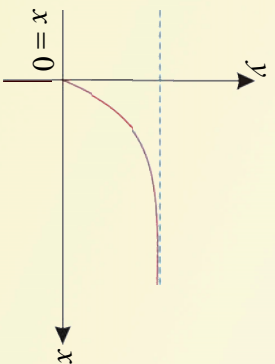
ب: که $x = 0$ شي نو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$ موجود نه دی،

نو د $y = \sqrt{x}$ تابع د $x = 0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي

لکه چې په شکل کې ليل کېږي؛ يعنې که x ډېر لوی شي، نو د

مماس ميل صفر ته نږدې کېږي او د $x = 0$ په ټکي کې

مماس $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ د مماس ميل ډېر لوېږي، چې مماس په يوه عمود



خط بلېږي.



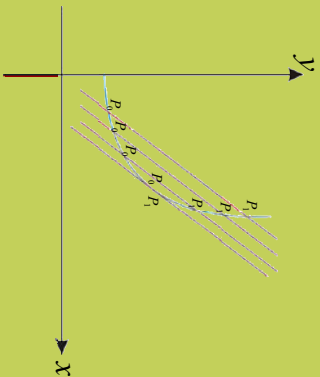
دلاندې توابعو مشتق د تعريف په مرسته پيدا کړئ.

1) $f(x) = x - x^2$

2) $f(x) = -2x^2$

3) $f(x) = 2x^2 + x$

د مشتق هندسي تعبير
په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



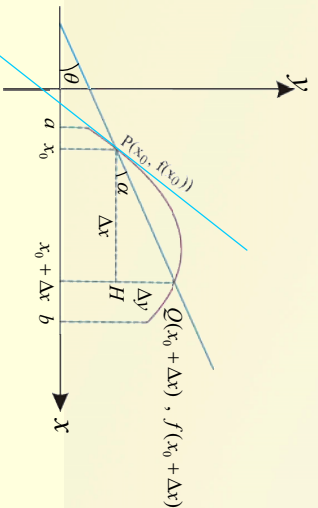
فعالیت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منځني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a, b]$ متناډي وي گراف رسم او د $(x_0, f(x_0))$ او $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ ټکي د منځني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منځني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ويلاى شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکي ته ډېر نږدې شي ($\Delta x \rightarrow 0$)، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښئ
- لمبت د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کله چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وڅېړئ.

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منځني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعنې:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_{\Delta}$$



تعريف: د مماس ميل د منځني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منځني د $A(1, 1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan \alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 1 \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3] - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2] = 6x^2 \end{aligned}$$

ښاۀ د مماس د میل قیمت د $A(1, 1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $6 = 6 \cdot 1^2 = f'(1) = m$ ښۀ د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 5 \end{aligned}$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل قیمت د $x_0 = 2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0 \\ m &= y' = 2x_0 = 2 \cdot 2 \\ y' &= m = 4 \end{aligned}$$

درېم مثال: د $f(x) = x^2$ د تابع ورکړل شوي ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانگړي توگه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړو:

$x = x_0$	
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

خزنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $2 \cdot 2 = 4$ یعنی $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f'(x) = 3x_0^2$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له:

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

د مساوات دواړه خواوې په Δx ویشو:

$$\begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ f(x_0) = \frac{1}{x_0} \\ f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} \\ \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0) \\ \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} \\ \Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2} \end{array} \right.$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

د مشتق تابع ٻي



1. ٻه لاندِي پوڻيندو ڪِي د تابعگانو مشتق پيدا ڪرِي.

$$1) f(x) = 5x^2 - 2 \quad 2) f(x) = \frac{2}{x}$$

2. ٻه ورڪرل شور پڪو ڪِي د لاندِي تابعگانو مشتق پيدا ڪرِي.

$$1) f(x) = 4x^2, \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad 2) f(x) = 3x - 1, \quad x_0 = -1$$

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تراید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:



فعالیت

د $C = y$ تابع (C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ:

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون (تزايد) ورکړئ، د تابع د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون (تزايد) نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لمبیت ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $C = f(x)$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع گراف یوه افقي کرښه ده

چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$\begin{array}{l} y = C \\ y + \Delta y = C \\ \Delta y = C - y \\ \Delta y = C - C \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} \\ y' = 0 \end{array} \right.$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$\begin{array}{ll} f(x) = C & \Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) = \pi^4 & \Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) = 100 & \Rightarrow f'(x) = 0 \end{array}$$



2- د یوې طاقت لرونکي تابع مشتق :

د $y = x^n$ تابع چې $n \in \mathbb{R}$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونیسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آیا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړیکه یې ولیکئ؟
- د پورته اړیکې څخه د Δy قیمت پیدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمټ ونیسئ چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې بهر تویو:

که چېرې $y = x^n$ $f(x)$ راځل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$\begin{aligned}
 y &= x^n \\
 y + \Delta y &= (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y \\
 \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\
 \Delta y &= (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\
 \Delta y &= \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]}{\Delta x} \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\
 y' &= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ځلي } n} \\
 y' &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^5 \Rightarrow f(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \\
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$



پوښتنې

د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------|-----------------|
| 1) $f(x) = x^{-2}$ | 2) $x(t) = gt^2$ | 3) $t(x) = x^8$ |
| 4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ | 5) $f(x) = 10^{10}$ | |



3- د حاصل جمع مشتق:

د u او v مشتق منوونکي تابعګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $v = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $v = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزیاید ورکړئ، د v د تزیاید په اړه څه فکر کوئ؟ دهغې اندازه ولیکئ.

- لومړی د تابع تزیاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx ووېشئ او وروسته یې لېمېټ په هغه صورت کې پیدا کوئ، چې $0 \rightarrow \Delta x$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوړ:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حلونو د مستقلنو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$\begin{aligned} v &= u + v \\ v + \Delta v &= u + \Delta u + v + \Delta v \\ \Delta v &= u + \Delta u + v + \Delta v - v \\ \Delta v &= u + \Delta u + v + \Delta v - u - v \\ \Delta v &= \Delta u + \Delta v \\ \frac{\Delta v}{\Delta x} &= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\text{څرنگه چې } u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ او } v' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \text{، نو: } v' = u' + v'$$

4- د حاصل تفريق مشتق

که $v = u - v$ وي، نو $v' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

لومړی مثال: د $v = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کوئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دی، نو:

$$\begin{aligned} u' &= 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 \\ u' &= 2 \\ v' &= 0 \end{aligned}$$

بناءً: $2 = y' \Rightarrow y' = 2 + 0 \Rightarrow y' = (2x)^1 + (1)^1 \Rightarrow y' = u^1 + v^1$

دویم مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u = 4x^2$ ، $v = 3x$ او $w = 5$ دی چې $u^1 = 8x$ ، $v^1 = 3$ او $w^1 = 0$ کېږي، نو:

$$y' = u^1 + v^1 + w^1$$

$$y' = (4x^2)^1 - (3x)^1 + (5)^1$$

$$y' = 8x - 3$$

درېم مثال: د لاندې تابعگانو مشتقونه پیدا کړئ:

1) $y = 12x - 7$

2) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

3) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

$$y' = (12x)^1 - (7)^1$$

$$f'(x) = (9x^2)^1 - (12x)^1 + (4)^1$$

$$f'(x) = (6x^3)^1 - (2x^2)^1 + (6x)^1 - (1)^1$$

$$y' = 12$$

$$f'(x) = 18x - 12$$

$$f'(x) = 18x^2 - 4x + 6$$

5- د حاصل ضرب مشتق:



فعالیت

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u \cdot v$ هم مشتق منونکي دي، د $y = u \cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

• په پورتنۍ تابع کې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تړلید وکړئ او د تابع تړلید پیدا کړئ.

• د Δy د تړلید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.

• د پورتنۍ رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېږمېټ ونیسئ، چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

له پورتنۍ فعالیت پایله داسې ثبتو:

ثبوت:

$$y = u \cdot v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \Rightarrow \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot v'$$

$$y' = u'v + v'u$$

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left. \begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$\begin{aligned} y &= (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1) \\ \left. \begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array} \end{aligned}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:



که د u او v تابعګانې مشتق منونکې وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منونکې ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$

تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تولید ورکړي او د y تابع تولید پیدا کړئ.
 - د مساوات دواړه خواوې په Δx ویشئ.
 - د پورتنۍ رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $0 \rightarrow \Delta x$ وکړي، لېمیت ونیسي.
- د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بهوتوو:

ثبوت:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \Rightarrow \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v \cdot \Delta u - uv - u \cdot v \Delta}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v) \Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} \right) = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

لومړۍ مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{u}{v} & \Rightarrow y' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ u &= 2 + 3x & \Rightarrow u' &= 3 \\ v &= 1 - 2x & \Rightarrow v' &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y' = \frac{3(1-2x) - [-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} = \frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

يادونه: که چيرې وغواړو چې د يوې تابع مشتق په يوه ټاکلي نقطه لکه په x_0 کې پيدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلی قيمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پيدا کړو، لکه:

دویم مثال : د $f(y) = \frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل : د تابع د حاصل تقسیم د مشتق څخه لرو:

$$\left. \begin{aligned} u &= 2y^2 - 3 \Rightarrow u' = 4y \\ v &= 1 - 3y \Rightarrow v' = -3 \end{aligned} \right\}$$

$$f'(y) = \frac{4y(1-3y) - [-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2} = \frac{4y - 12y^2 + 6y^2 - 9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y) = \frac{-6y^2 + 4y - 9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-6(0)^2 + 4(0) - 9}{1 + 0}$$

$$f'(0) = -9$$

درېیم مثال : د $f(t) = \frac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل : پوهېږو چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري نو د $\frac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګډه اخیستې سره داسې عمل کوو:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{v} &\Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ u &= -3 \Rightarrow u' = 0 \\ v &= 2t - 1 \Rightarrow v' = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(t) = \frac{0 \cdot (2t-1) - 2(-3)}{(2t-1)^2} = \frac{6}{(2t-1)^2}$$



پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1) $f(x) = \frac{3}{5}x(x-2)$ | 2) $g(x) = (2x-3)(x-3)$ | 3) $f(x) = (2x-1)^2$ |
| 4) $f(t) = \frac{t^2}{1-2t}$ | 5) $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ | 6) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ |
| 7) $f(x) = 3x^5 - 5x^2$ | 8) $f(x) = 7x + 3$ | |

7- د یوې مربع جذري تابع مشتق:



فعالیت

د $\sqrt{x} = y$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $\sqrt{x} = y$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پیدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لمبیت په هغه صورت کې ونیسي، چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې ښودل شو:

ثبوت:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخروج د صورت په مزيج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړۍ مثال: د $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $u \cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v &= x^2 - 1 \Rightarrow v' = 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + 2x \cdot \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} = \frac{x^2 - 1 + 4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$



8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

- که چیرې y د u او x د تابع او مشتق مننونکي وي د y اړیکه u ته او x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزايد ورکړئ د y د تزايد په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړو خواوو څخه لمبیت ونیسئ چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ټپي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لمبیت نیسو چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

دویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستې سره لرو:

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v &= \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (2x + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

درېم مثال: د $f(x) = (\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $u \cdot v = y$ او $y = \sqrt[3]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستې سره لیکلای شو:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt[3]{x}-1 \Rightarrow u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v &= x+3 \Rightarrow v' = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3) + 1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x) &= \frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}} + (\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

$$f'(8) = \frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}} + \sqrt[3]{8}-1 = \frac{11}{12} + 1 = \frac{23}{12}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیدا کوو:

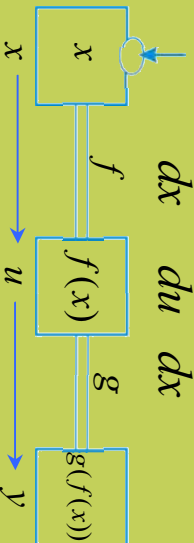
پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad y = 3x^{-3}, \quad f(x) = x^2 + 3$$

2- که $x^2 - 3x = f(x)$ او $\sqrt{x} - 1 = g(x)$ وي، د دې تابعگانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)', (f \cdot g)', (f \div g)', g \neq 0]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



د مرکبو تابعگانو مشتق (زنجیري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



فعالیت

که چیرې $y = u$ او $u = X$ تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وویاست چې y د u او u له X سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\frac{\Delta u}{\Delta y} = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta y}$ مساوات حقیقت لري؟

- د پورتنی مساوات دواړې خواوې په Δx ویشئ.

- که د بڼې اړخ د کسرونو د مخزجړنو ځایونه بدل شي، په پورتنی رابطه کې بدلون راځي؟

- د پورتنی مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیت ونیسي چې $0 \rightarrow \Delta x$ وکړي.

د پورتنی فعالیت پایله داسې ثبتوږ:

د تابع، تابع مشتق ثبت او پایله یې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\text{خړنگه چې } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u) \text{ او } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \text{ دی، نو: } y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

د دې زنجیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

$$1- \text{که } y = u^n \text{ وي؛ نو } y' = nu^{n-1} \cdot u' \text{ کېږي.}$$

$$2- \text{كه } y = \sqrt[n]{u} \text{ وي؛ نو } y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \text{ كيږي.}$$

مثال: د لاندې تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

- 1) $y = (2x^2 - 1)^3$ 2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ 3) $y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3$
- 4) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3}$ 5) $y = (x^2 - 2)^{-3}$

حل: د زنځيري قاعدې په مرسته ليکلاى شو؛ چې:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ y = \underbrace{(2x^2 - 1)}_u^3 \\ u = 2x^2 - 1 \Rightarrow u'_x = 4x \\ y = u^3 \Rightarrow y'_u = 3u^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)} \\ y' = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x \\ = (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x = 48x^5 - 48x^3 + 12x \\ = 12x(4x^4 - 4x^2 + 1) = 12x(2x^2 - 1)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \ y = \sqrt{1 - x^2} \\ u = 1 - x^2 \Rightarrow u'_{(x)} = -2x \\ y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array} \right\} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ليدل كيږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو:

$$\left. \begin{array}{l} 3) \ y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3 \\ u = (x^2 - 3)^2 \\ u'_{(x)} = 2(x^2 - 3)(2x) \\ v = 2x^3 \Rightarrow v'_{(x)} = 6x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y' = [(x^2 - 3)^2]' \cdot 2x^3 + [2x^3]'(x^2 - 3)^2 \\ y' = [2(x^2 - 3) \cdot 2x] \cdot 2x^3 + 6x^2(x^2 - 3)^2 \\ = 8x^4(x^2 - 3) + 6x^2(x^2 - 3)^2 \\ = 8x^6 - 24x^4 + 6x^2(x^4 - 6x^2 + 9) \\ = 8x^6 - 24x^4 + 6x^6 - 36x^4 + 54x^2 \\ = 14x^6 - 60x^4 + 54x^2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4) \ y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3} \\ u = x^2 - 2x^3 \\ u'_{(x)} = 2x - 6x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y' = \frac{2x - 6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2x^3)^2}} \end{array}$$

$$5) \ y = (x^2 - 2)^{-3} \left\{ \begin{array}{l} y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u' \\ u = x^2 - 2 \\ u'_{(x)} = 2x \end{array} \right. \begin{array}{l} y' = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u' \\ y' = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4} \end{array}$$

يادونه:

1. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0), f(x_0))$ په نقطه کې له منحنی یا د تابع له گراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x) = x^3$ د تابع میل د $x_0 = 1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $x_0 = 1$ دی، نو: $f(x_0) = 1$ سره کپړي او $P(1, 1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

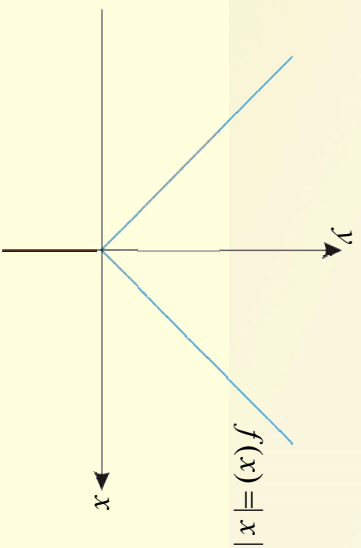
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \Rightarrow f'(1) = 3 \end{aligned}$$

II. که د f تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پیوسته یا متعادي ده، خو برعکس یې ټوک نه ده، یعنې کیدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متعادي یا پیوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $|x|$ د تابع مشتق د $x = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیون د نسبت د لمبیت محاسبه ده چې د ښي او کښي اړخ لمبیتونه یې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \end{aligned}$$



ليدل کيږي، چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پيوسته يا متمادي ده.



د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$ 2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

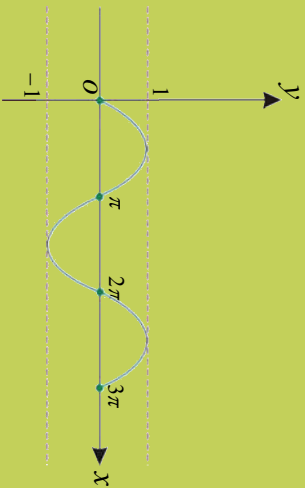
3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$

5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

د مثلثاتي تابعگانو مشتق
مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- مثلثاتي دایره او رادیان تعریف کړئ.
 - آیا دا $-1 \leq \sin x \leq 1$ اړیکه حقیقت لري او که نه؟
 - د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونیسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونیسئ.
 - د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
 - وروسته د انکشاف له پورتنی رابطې څخه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو څخه په هغه صورت کې لمبیت ونیسئ چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.
 - له پورته فعالیت څخه پایله داسې شو تورو:
- د -1 د $y = \sin x$ تابع مشتق:**
- ثبوت:**

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چیرې $f(u) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u) = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

لومړۍ مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f(x) = \sin u \Rightarrow y'_u = \cos u \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u \\ f(x) = \sin 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \cos 4x \end{array} \right\}$$

دویم مثال: د $f(x) = x^3 \cdot \csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

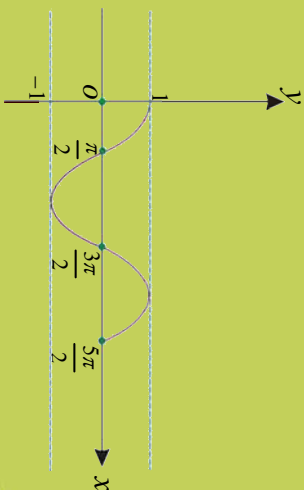
حل:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x} \\ u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{-uv'}{v^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x \\ f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - \cot x \cdot \csc x \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \end{array} \right\}$$



د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$$\begin{array}{ll} a) y = \sin 5x & b) y = \frac{\sin x}{1+x} \\ c) y = \sqrt{1+\sin x} & \end{array}$$



د $y = \cos x$ تابع مشتق
مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي؟



فعالیت

- د $y = \cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تړايد ورکړئ.
- د $y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$ مثلثي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنۍ انکشافې رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لږمېت ونیسئ چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړي.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې ښوونو:

د-2 $y = \cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

یا په لنډه ډول هغه داسې شتونو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot (-2 \sin x \cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ چې سره دى، نو:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې $y = \cos u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

حل: پوهېږو چې $y' = u' \cdot v + v' u \Rightarrow y = u \cdot v$ دى، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$f'(x) = (2 \sin x)' \cos x + (\cos x)' \cdot 2 \sin x = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2 \cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = (x)' - [(\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x \cos x + (-\sin x \sin x)] = 1 - \cos 2x$$



پوښتنې

د لاندې تابعگانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

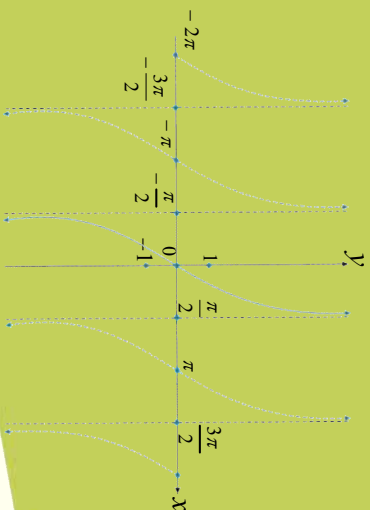
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$

2) $f(x) = \sin^2 x$

3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$

5) $f(x) = \frac{5 \sin^2 2x}{3 \cos 5x}$



د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع رابښي.



فعاليت

- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل وليکئ.
- د پورتنۍ نسبت څخه مشتق ونيسئ، هغه له څه سره مساوي کړي.
- له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق :

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پریږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثالني تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق یې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left. \begin{aligned} u &= \tan^3 x \\ u' &= \sec^2 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \tan^3 x \\ y' &= 3 \tan^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$

دویم مثال : د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل : څرنگه چې تابع شکل د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \Rightarrow u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \Rightarrow v' = -\csc^2 x$$

د u, v, u', v' او v' قیمتونه د $y' = u'v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$



د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y = \tan x \cot x$

b) $y = (x^2 + x - 1) \tan^2 x$

c) $y = \frac{1}{\tan x}$

d) $y = \tan x \sec x - \cot x$

ضممني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره وليکئ.

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$



فعاليت

- د $4 - 2x^2 = y$ د تابع مشتق پيدا کړئ.
- د $1 = xy^2 + y^2$ تابع خو منحوله تابع ده؟ او گراف يې څه ډول شکل لري؟
- د پورتنی تابع مشتق پيدا کړلای شئ.

د يوه منحنی خط معادله د وضعيه کيانتور په سيستم کي عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځايه $0 = f(x) - y$ کېږي او $f(x) - y$ يوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $f(x) - y = F(x, y)$ تابع په پام کې ونيسو، نو د دې منحنی معادله د $F(x, y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $25 - y^2 - x^2 = F(x, y)$ وي، نو د $0 = F(x, y)$ له معادلې څخه ليکلای شو، چې $0 = 25 - y^2 - x^2$ يا $25 = x^2 + y^2$ چې د دې دور بيلا بيلو توابعو معادلې $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $0 = F(x, y)$ معادله کيدای شي چې د خو تابع گانو معادله د $f(x) = y$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $f(x) = y$ په تابع کې چې X او Y يو له بل څخه جلا وي، نو مشتق يې په آساني پيدا کولای شو، ولې په ځينو رابطو کې Y له X سره يو ځای بيان شوی وي لکه په $0 = 1 - y + xy^2$ چې د مشتق په نيولو کې که د X له جنسه مشتق نيسو، نو Y يو ثابت عدد فرضوو او که د Y له جنسه مشتق نيسو X ثابت فرضو لکه:

$$\begin{aligned} xy^2 - y + 1 &= 0 \\ (xy^2)' - (y)' + (1)' &= 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y') - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xy'y' + y' = y'(-2xy + 1) \\ y' &= \frac{y^2}{-2xy + 1} \end{aligned}$$

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د $0 = f(x, y)$ په شکل تعريف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډه ډول داسې محاسبه کېږي:

$$\frac{f'(x)}{f'(y)} = - \frac{\text{د تابع مشتق نظر ته } y \text{ ثابت دی}}{\text{د تابع مشتق نظر ته } x \text{ ثابت دی}}$$

لومړی مثال: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $0 = y - \sin \frac{x}{y} - 1$ رابطې څخه $\frac{f'(x)}{f'(y)}$ پیدا کوو.

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos \frac{x}{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi, 1)} = \frac{\frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{\pi}}{1 + \pi \cos \frac{1}{\pi}} = \frac{\cos \pi}{1 + \pi \cos \pi} = \frac{-1}{1 - \pi}$$

دویم مثال: د $3x + 2 = y^3 + 2y^2 + x^2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.
حل:

$$x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2 y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 2 = x^2 + 6y^2 - 2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2 - 2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$$

دویم مثال: $0 = x^2 - y - y^6$ ضمنی مشتق پیدا کریں۔

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

اوپر بلے طریقہ:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دویم ضمنی مشتق

دو ضمنی رابطی د دویم مرتبہ د مشتق د پیدا کولو لپارہ د فورمول پہ مرستہ لومړی د ضمنی اړیکې لومړی مشتق پیدا کوو او بیا له دې رابطی څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $1 = y^2 - x^2$ رابطی دویمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوپر بلے طریقہ:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطی څخه مشتق نیسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'_y - y'_{(x)} \cdot x}{y^2} = \frac{y - y'_{(x)} \cdot x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

دویم مثال: د $0 = -3 + y^2 + xy + x^2$ په معادله کې د Y مشتق نسبت X ته د $(1,1)$ په ټکی کې پیدا او پر

منځنۍ د مماس معادله یې ولیکي.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منځنۍ برونځ واقع دی؛ د $y'(x)$ د پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)} = 2x + y$$

$$f'_{(y)} = x + 2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y}, \quad x + 2y \neq 0$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x \cdot y' + 2yy' = 0$$

$$2x + y + (x + 2y)y' = 0$$

$$(x + 2y)y' + 2x + y = 0$$

$$(x + 2y)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

دویم مثال: د $x + y^3 = 5y^2 + x^2y^3$ ضمني تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f'_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$



1- د $5 = x \sin y + y \cos x$ د رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $3 = y + xy^2 + x^3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $4y^2 + 4x = x^2 + y^2$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات
 د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟
 د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟



فعالیت

- د $1 - 2x - 3x^3 - 2x^4 = y$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتنی مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتنی تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $f(x) = y$ مشتق منونکي وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $f'(x) = y'$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $f''(x) = y''$ دریمه مرتبه مشتق یې په $f'''(x) = y''' \dots$ په کلي ډول n - یم مرتبه مشتق د $f(x) = y$ تابع په $f^{(n)}(x) = y^{(n)}$ علامت نیوو.

لومړی مثال: د $1 - 4x + 3x^2 - x^3 = f(x)$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

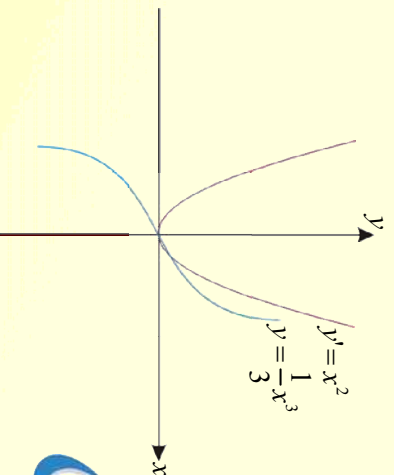
دویم مثال: د $\frac{1}{3}x^3 = y$ د تابع گراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع گراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$

$$y' = x^2$$



درېم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي، د $y^2 + (y^{(9)})^2$ قيمت پيدا کړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق يا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$\begin{aligned} y &= \sin x + \cos x \\ y'_{(x)} &= \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x \\ y''_{(x)} &= -\sin x - (\cos x) = -\sin x - \cos x \\ y'''_{(x)} &= -\cos x - (-\sin x) = \sin x - \cos x \\ &\vdots \\ f^{n(9)}_{(x)} &= \cos x - \sin x \\ (y^{(9)})^2 + y^2 &= (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 \\ &= \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $1 - 3x^2 - 2x^3 - 3x^5 - 2x^6 = y$ د تابع پنځه ځلې مشتق پيدا کړئ.

$$\begin{aligned} y &= 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1 \\ y' &= 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x \\ y'' &= 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6 \\ y''' &= 240x^3 - 180x^2 - 12 \\ y^{(4)} &= 720x^2 - 360x \\ y^{(5)} &= 1440x - 360 \end{aligned}$$

يادونه: که چيرې $n - m$ درجه يي څو جملېني تابع $c_n \neq 0$ راکړی شوی وي $n - m$ ام مشتق يې په لاندي ډول په لاس راځي:

$$\begin{aligned} f_{n(x)} &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n & c_n &\neq 0 \\ f'_{n(x)} &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} \\ f''_{n(x)} &= 2c_2 + 6c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} \\ f'''_{n(x)} &= 6c_3 + 12c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} \\ f^{n}_{n(x)} &= n(n-1)(n-2)x \dots c_n = n!c_n \end{aligned}$$

په عمومي ډول که $k > n$ وي، نو: $f^k_{n(x)} = 0$



د لاندي تابعگانو تر هغې مشتق پيدا کړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

- 1) $y = 4x^4 - 3x^3 - 2x$
- 2) $y = (5x - 2)^3$
- 3) $y = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$
- 4) $y = \sin x$

— که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکي د $f(x)$ تابع دوه اختياري ټکي وي، نو لاندې اړيکه د Newton خارج قسمت په نامه يادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

د منځني ميل په يوه اختياري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

د يوې تابع مشتق: د تابع او متحول د ترايد، د نسبت لمپټ کله چې $\Delta x \rightarrow 0$ وکړو، د مشتق په نامه

يادېږي او په $f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په يوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس ميل د منځني سره د $(f(x), x)$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متناهي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ يعنې کېدای شي يوه تابع په يوه ټکي کې متناهي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منځني $(f(x_0), P(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې د يوه منځني سره د مماس ميل د هغې تابع د مشتق په نوم يادېږي.

که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو يوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د $(x_0 + r, x_0 - r)$ په فاصله کې $x = x_0$ په شاوخوا کې تعريف شوی وي او د هغې لمپټ

موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې يو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منځني د $x = x_0$ په ټکي کې

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

رسم کړو، د دې مماس ميل عبارت دی له:

مشتق قوانین:

$$1) f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2) f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$3) f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

$$4) f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$5) f(x) = \frac{u}{v}, \quad v \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$6) f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7) f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt[n]{u}}$$

$$8) f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

$$1) y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x, \quad y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$2) y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x, \quad y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

که د $y = f(x)$ تابع مشتق مونږکي وي، په بشپړ ډول n -ام ځلي مشتق يې $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ دی.

د دویم څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په ښه کړئ:

1- $x - x^2 = f(x)$ منځني میل د $P(3, 0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

a) 3 b) -3 c) 5 d) -5

2- د $2x^2 = f(x)$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[4, 3]$ په انټروال کې عبارت دی له:

a) 18 b) 14 c) -14 d) 32

3- د $-3x^{-1} - 2x^2 = y$ تابع مشتق عبارت دی له:

a) $y' = 4x^2 + 3$ b) $y' = 4x + \frac{1}{2}x$ c) $y' = 4x + \frac{3}{x^2}$ d) $y' = 4x$

4- د $4 - f(x) = \sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

a) 0 b) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ c) $\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ d) $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $x^2 + 2x^2 = f(x)$ تابع د $x = 1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

a) $y = 5x - 5$ b) $y = x - 3$ c) $y = 5$ d) $y = 5x$

6- د $y = \frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

a) $y' = -4x + 8$ b) $y' = -2$ c) $y' = \frac{4x+8}{(-x+4)}$ d) $y' = \frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $3(2-x^2) = y$ د تابع مشتق عبارت دی له:

a) $y' = -6x^5 + 2x^3 - 24x$ b) $y' = 3(2-x^2)^2$ c) $y' = 3(-2x)^2$ d) هېڅ یو

8- د $y = \sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

a) $y' = \sin x$ b) $y' = \cos x$ c) $y' = -\sin x$ d) $y' = -\cos x$

9- د $y = (1+x^4)^{-\frac{1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

a) $y' = -\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}$ b) $y' = -\frac{1}{5}(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}$ c) $y' = -4x^3$ d) هېڅ یو

10- د $y = \frac{\cos}{1-\cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

a) $y' = \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ b) $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ c) $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ d) هېڅ یو

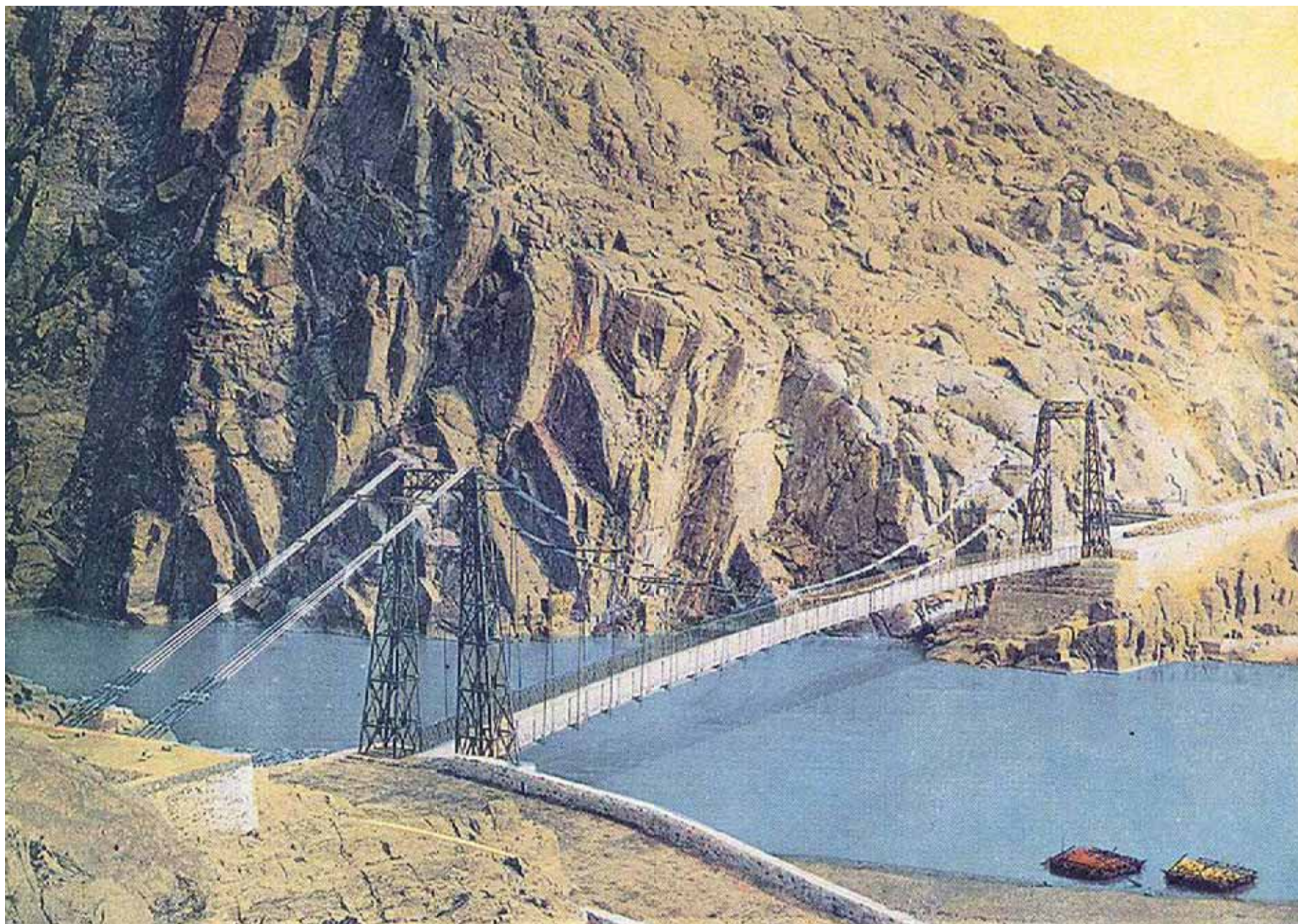
لاندي پوڻينتي مفصل حل ڪري.

1. د $f(x) = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ د تابع مشتق پيدا ڪري؟
2. د $f(x) = \frac{x + \sqrt{x - x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}}$ د تابع مشتق پيدا ڪري؟
3. د $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ د تابع مشتق پيدا ڪري.
4. د $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt{x} + 4)$ د تابع مشتق پيدا ڪري.
5. د $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ د تابع مشتق د $\frac{\pi}{4}$ په ٽڪي کي پيدا ڪري.
6. د $f(x) = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$ د تابع مشتق پيدا ڪري.
7. د $y = \cos x$ د تابع ائمه مرتبه مشتق پيدا ڪري.
8. د $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ د تابع نهمه مرتبه مشتق پيدا ڪري.
9. د $x^2 + xy + y^2 = 3$ د تابع ضمني مشتق پيدا ڪري.

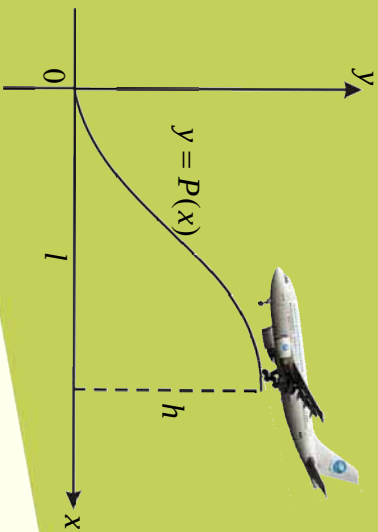
دریم چیر کی

دشتیق د استعمال حایونه





د مشتق د استعمال ځايونه
د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بيان کړئ.

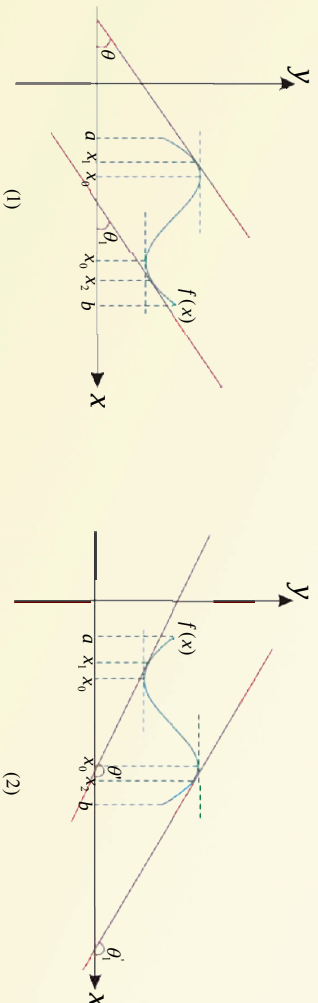


له مشتق څخه په ډيرو ځايونو کې لکه: (په فزيک کې د حرکت، سرعت او تعجيل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخېستې سره حلېږي همدارنګه په کيميا کې هم، د تابع د تحولات، د ځينو ليميتونو په پيدا کولو کې) کار اخيستل کېږي چې ځينې ځايونه يې دلته تر څېړنې لاندې نيسو.

1- د يوې تابع تحولات:



لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



- مترادفې او منتقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د (a, b) په انټروال کې د x_0 ، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شويو مماسونو ميلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جگ ټکي او تر ټولو ټيټ ټکي په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې ونښي چې کومه تابع په کومه ساحه کې مترایده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په مترایده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څیړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

- 1- که د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې متمادي او په (a, b) انټروال کې د مشتق وړ وي، نو که چیرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x) > 0$ وي، تابع په هغه انټروال کې مترایده بلل کېږي.
- 2- که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې متمادي او د (a, b) په انټروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x) < 0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

یادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قیمت په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قیمت په زیاتېدو سره د y یا تابع قیمت کم یا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: ونښئ چې د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع گراف متراید ده.

حل: څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوره پوره چې د تابع د تزايد شرط $f'(x) > 0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونیسو:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد نام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې $(+3)$ ورسره جمع شي بيا هم قیمت يې مثبت دی، نو د $f'(x) > 0$ دی نو تابع مترایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هره انټروال کې متمادی او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x) < 0$ دی، يعنې:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x = \pm 1$$

ليدل کيږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1, 1)$ متناقصه ده.

درېم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعريف ساحه پيدا او وروسته د تابع د تزايد شرط په کې څېړو:

$$D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنگه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزايد ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع گراف ته څير شئ او ونښئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزايد او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

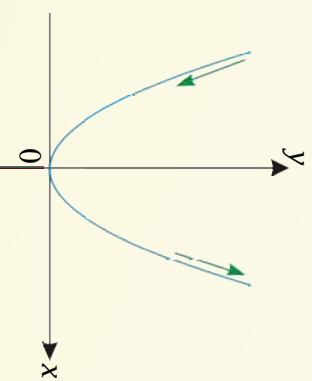
حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزايد وي $y' > 0$ څخه دی، نو ليکلاى شو چې:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$x < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow y' < 0 \text{ د تناقص شرط}$$

$$x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow y' > 0 \text{ د تزايد شرط}$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	-	-	-	0	+	+	+
y	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$



د تابع له گراف څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, +\infty)$ په انټروال کې متزايد ده.



1- د $f(x) = ax + b$ د تابع تحويلات وښئ؟

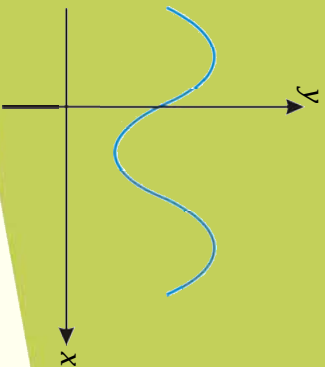
2- د $y = \frac{-3}{4}x - 1$ د تابع تحويلات وښئ؟

3- وښئ چې د $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې مترابده ده؟

4- د $y = x^2 + 3x + 2$ د تابع د تزاید انټروال وټاکئ؟

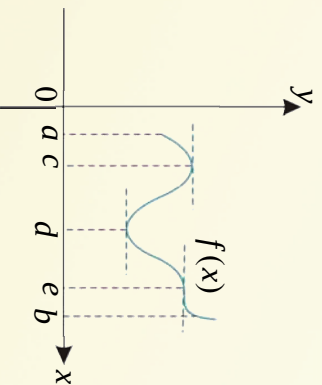
د یوې تابع بحراني (Extreme) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او وواړئ، چې دا ټکي د څه په نامه یادېږي؟



فعالیت

که په لاندیني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a, b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



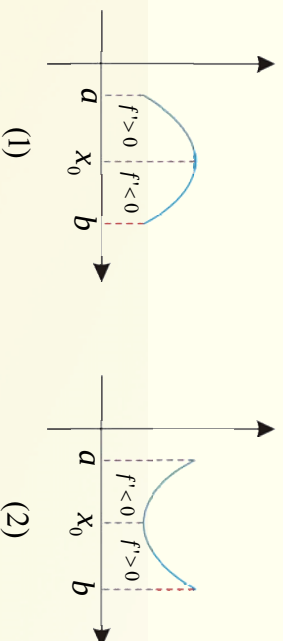
- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لویږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c, d) او (d, e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

د یوې تابع په گراف کې د y پر محور تر ټولو جگې نقطې ته اعظمي (maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته د تابع اصغري (minimum) وایي، د x د هغو قیمتونو لپاره چې تابع اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د بحراني (Extreme) نقطو په نامه یادېږي.

تعريف:

- 1- **ثابتة تابع:** که چیري د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابتة تابع وایي.
- 2- **متزايدة تابع:** که چیري د یوې تابع لومړی مشتق د (a, b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايدة بلل کېږي، یعنې $y' > 0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.
- 3- **متناقصه تابع:** که چیري د یوې تابع لومړی مشتق د (a, b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y' < 0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



- 1- **اعظمي ټکی:** که چیري د $y = f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تولید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي (maximum) په نامه یادېږي.
- 2- **اصغري ټکی:** که چیري د $y = f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تولید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.
- 3- **د انعطاف ټکی:** که چیري مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ راکړل شوی ده د تابع خړد (Extreme) ټکی لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیدا کوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$f'(x) = 0$	x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$	$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$	$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{17}{54}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$
			Max		Min	

په پایله کې وینای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو

کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني (Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړی.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

$$\text{لیدل کېږي چې تابع د } y = \frac{u}{v} \text{ شکل لري، نو } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (2x - 2)(x + 1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = 0.73$$

x	-3	-2.73	-1	0.73	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		Min		Max	

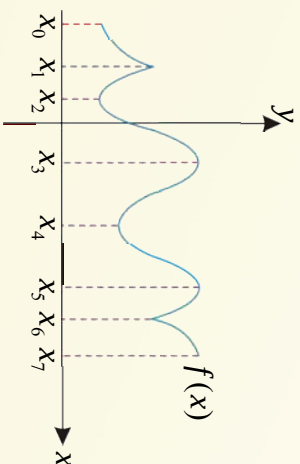
په جدول کې بڼکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغر ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کیدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه ټاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښئ؟



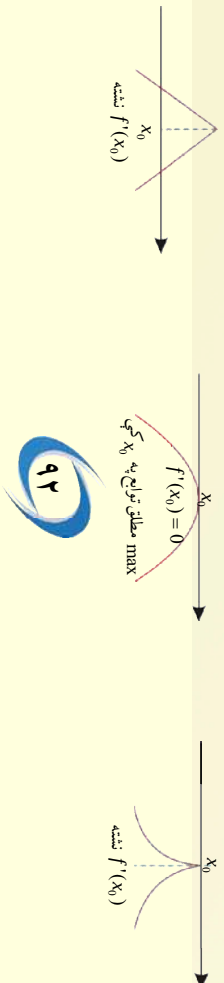
لاندې شکل ته څېر شي:



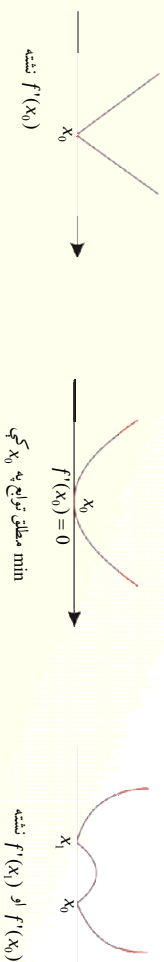
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په گونه کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانو:

مطلق اعظمي Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ نه مطلق اعظمي ولري لاندې شکلونه وگورئ.



مطلق اصغري Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغری پیدا کړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نیسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

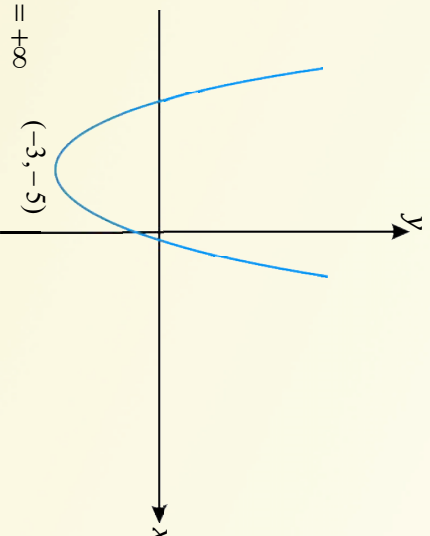
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{1}{2} = +\infty$$



x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

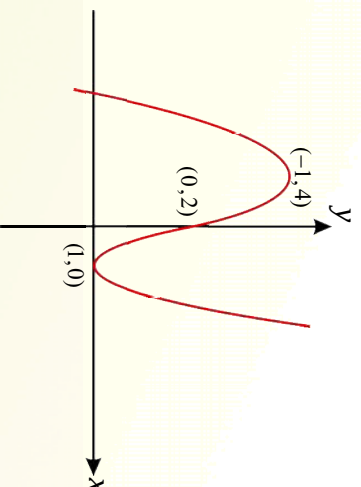
Min

په پایله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قیمت (-5) دی او تابع په $(-5, -3)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفرې ټکي په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = -1 \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \\ f(0) &= 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 \\ f(1) &= 0, \quad f(0) = 2, \quad f(2) = 4 \\ \text{Max } f(2) &= 4 \quad \text{Min } f(1) = 0 \end{aligned}$$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	3	4	2	0	4	$+\infty$

6 Max Min

له جدولو څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, -1)$ او $(1, +\infty)$ په انټروالونو کې مطلقه متزایده او $(-1, 1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1, 0)$ نقطه اصغري او د $(-1, 4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د گراف رسمولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متعادیت او نامتعادیت مطالعه کړو.
2. د قیمو محورونو سره د گراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفرې ټکي پیدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د گراف رسمول.

دویم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کو؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکي د x او y له محورونو سره پیدا کوو:

د y له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \quad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د y محور په $(0, 2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره د گراف د پریکړي د ټکو د پیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیدا کوو:

$$y = 0, \quad 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د x محور په $(-1, 0)$ او $(2, 0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا کوو، ددې کار لپاره د تابع اول او دویم مشتق خپرو.

$$y = 2 + x - x^2$$

خرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0, \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \Rightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې د پېژندنې له پاره د تابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$

$$y'' = -2 < 0$$

ټکو کې خپرو:

خرنگه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی ځکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکي کې یو اعظمي قیمت

لري څرنگه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ کيږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

دامنجنې دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

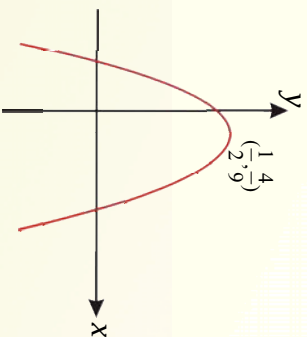
3- په $\pm \infty$ کې دگراف څیرل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + x - x^2) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x - x^2) = -\infty$$

د زنلې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او دتابع ټول بدلون نه په هغو کې په ګوته کړو او وروسته نوموړی گراف رسمو.

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
y'	$+$	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

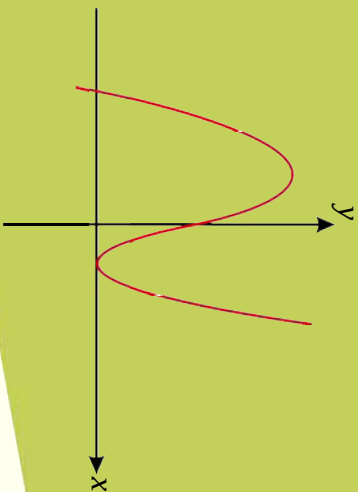


پوښتنې؟

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme وټاکئ.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ c) $y = 3x^2 - 4x + 1$

2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ دتابع مطلقه min پيدا کړئ.

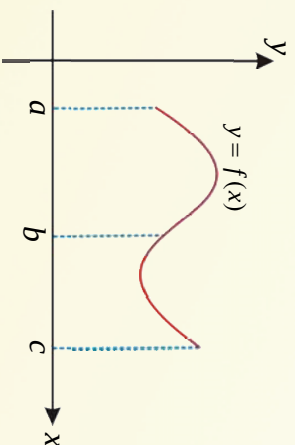


د انعطاف د نقطې ټاکل

هغه ټکي چې د یوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبیت، مقعریت ته او یا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه یادېږي؟ آیا په دې ټکي کې د دویم مشتق علامه او قیمت څېړلای شې؟



لاندینی شکل په پام کې ونیسئ.

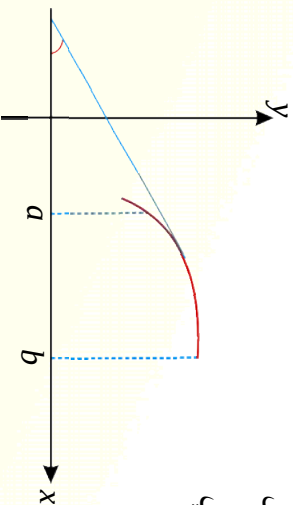


- د $y = f(x)$ د تابع منحنی د (a, b) په انټروال کې څه ډول منحنی بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحنی د (b, c) په انټروال کې څه ډول منحنی بلل کېږي؟
- د (a, b) په انټروال کې په منحنی یو محاس رسم کړئ او له هغه محاس سره یې پرتله کړئ چې د (b, c) په انټروال کې په منحنی رسمېږي.

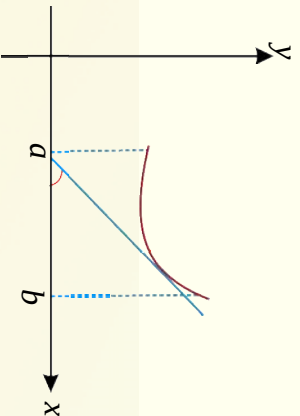
د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانو:

1. د $y = f(x)$ د تابع منحنی په یوه انټروال کې پرسیلی یا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحنی محاس رسم شي، نو محاس د منحنی له پاسه یا پورته خوا ته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دویم مشتق منفي < 0 یا په لاس راځي.

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع گراف یا منځني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منځني په یوه انټروال کې نږتې یا مقعره بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منځني مماس رسم شي، نو مماس د منځني نه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت $y'' > 0$ وي، منځني په دې انټروال کې مقعر بلل کېږي.



تعریف: هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ($f''(x_0) = 0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع گراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅېړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

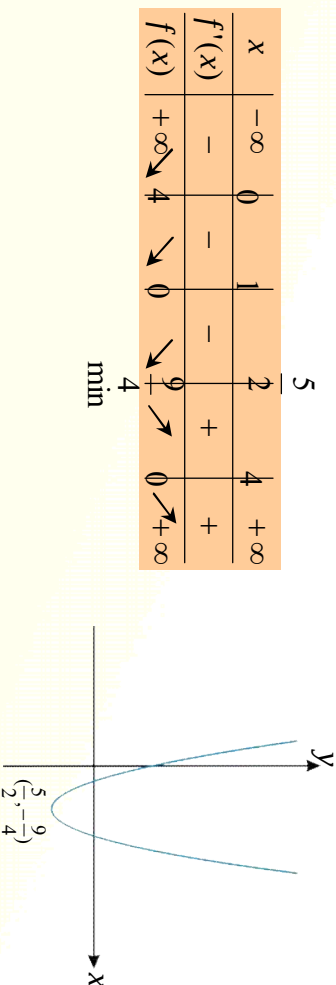
1- د y له محور سره تقاطع

$$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow (0, 4)$$

2- د x له محور سره تقاطع

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4, 0)$ او $(1, 0)$ دي.



د گراف، مقعریت او محدبیت د څیړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 5$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

څرنگه چې $0 < f''(x)$ دی، نو په پایله کې ویلاى شو چې منځني ننوتی یا مقعر دی.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع گراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$y' = 3x^2 + 18x - 6 \Rightarrow y'' = 6x + 18$$

$$y'' < 0 \Rightarrow 6x + 18 < 0$$

$$6x < -18 \Rightarrow x < -3$$

$$y'' > 0 \Rightarrow 6x + 18 > 0$$

$$6x \geq -18$$

$$x > -3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	⤵ ⤴		

مقعر انعطاف محدب

څرنگه چې لیدل کیږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty, -3)$ انټروال کې منفي او د $(-3, +\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول گراف په لومړۍ انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

دروم مثال: د $f(x) = x^5 - 5x^3$ د تابع د انعطاف ټکي وټاکي؟
حل:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 - 30x = 0$$

$$x(20x^2 - 30) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$20x^2 - 30 = 0$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	$-1\frac{1}{2}, 65$	$\cup$	$\cap$

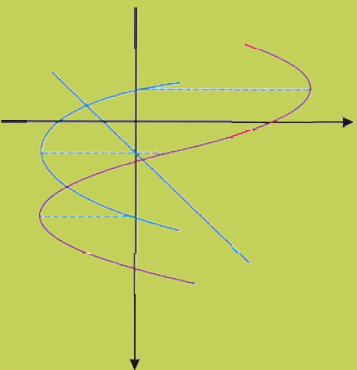
ليدل کيږي چې په $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x = 0$ کې د تابع دروم مشتق صفر دی يا $f''(x) = 0$ علامه بدلولي او په دې ټکو کې محاس رسيدلی شي، چې هغه ټکي د انعطاف ټکي دی.



1. د $f(x) = x^2 - 4$ د تابع محليت او مقعریت وټاکي.

2. د $f(x) = -2x^2 - 1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکي.

د منحنی ګانو رسمول
د دویمې درجې نابېګانو ګراف
د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



- د $f(x) = x + 1$ د تابع ګراف د $f(x) = -x + 1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y = ax^2 + bx + c$ د تابع د تعریف ساحه وټاکئ، آیا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړی تابع لومړی مشتق پیدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور یې وټاکئ.
- د تابع لیمېټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \rightarrow \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي وټاکئ.
- د تھولانو جدول ترتیب او نوموړی منحنی رسم کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- د تابع د تعریف ساحه: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره ټاکلې ده، یعنې:

$$D_f \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعریف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

د $x = \frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ټکی بحراني يعني اعظمي يا اصغري دی.

الف: که $a > 0$ وي، نو: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تابع په $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ټکي کې Min لري.

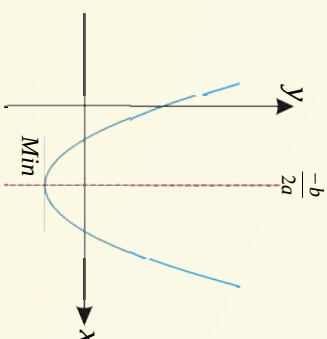
ب: که $a < 0$ وي، نو: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

تابع په $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ټکي کې Max لري.

3- د گراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او گراف یې رسموو:

$$a > 0$$

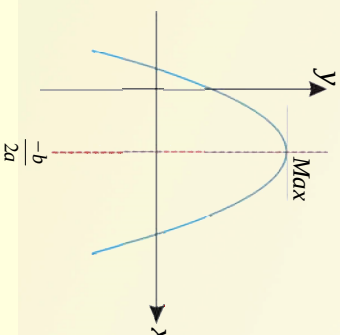
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$+\infty$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$-\infty$



خړنگه چې $a > 0$ د منحنی خوله (جهت) پورته خواره او د $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ اصغري نقطه ده.

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y'	$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$+\infty$



خړنگه چې $a < 0$ د منحنی خوله (جهت) پورته خواره او د $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ اعظمي نقطه ده.

لومړۍ مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.
حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty, +\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره ټاکلې ده، نو تابع په دې انتروال کې ممتادي ده.

2- د تابع د منحنی تقاطع د x له محور سره:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x-1 &= 0 \Rightarrow x=1 \\ x-3 &= 0 \Rightarrow x=3 \end{aligned} \right\} (1, 0), (3, 0)$$

3- د تابع د منحنی تقاطع د y له محور سره:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 - 4 \cdot 0 + 3 \\ y &= 3 \end{aligned} \right\} (0, 3)$$

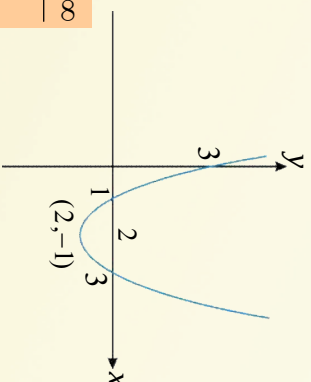
4- د تابع د extreme ټکو د پیدا کولو لپاره د لومړۍ مشتق صفرې ټکي پیدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \Rightarrow V(2, -1) \min$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 - 4x + 3] = +\infty$$



x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y	$-\infty$	$\swarrow$	3	$\swarrow$	0	$\searrow$
y'	-	-	-	+		+

Min

دویم مثال: د $f(x) = -x^2 + 2x$ د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوی ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له: $(-\infty, +\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع ممتادي ده.

2- د تابع د منحنی د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (0, 0)$$

$$-x + 2 = 0$$

$$x_2 = 2 \quad (2, 0)$$

د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحنی تقاطع د y له محور سره:

$$x = 0$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = 0 + 2 \cdot 0$$

$$f(x) = 0 \quad (0, 0)$$

رسمو:

4- د تابع د extreme نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او جدول یې ترتیب او گراف یې

$$D_f \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$f'(x) = -2x + 2 = 0$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$-2x = -2$$

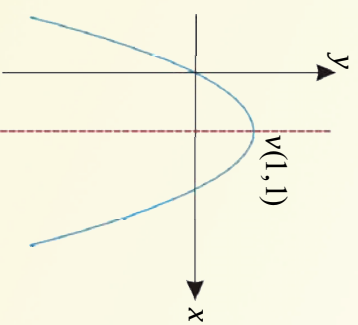
$$x = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$\Rightarrow V(1, 1)_{Max}$$

x	$-\infty$	0	1	$-$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

Max



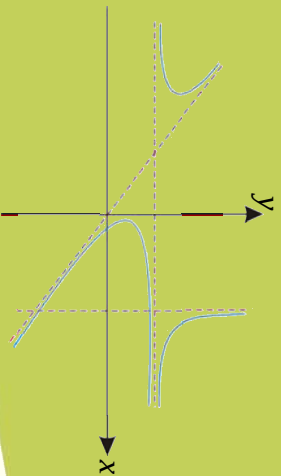
په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تولید-حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1, 1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتنې

1. د $f(x) = 2x^2 - x - 1$ د تابع گراف رسم کوئ.

2. د $f(x) = x^2 - x - 2$ د تابع د گراف بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کوئ.

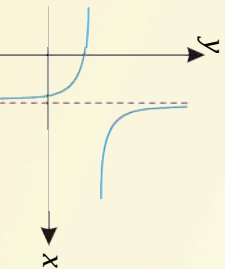
د توابعو د گرافونو مجانبونه
 شکل ته پام وکړئ ټکی کرښې د څه په نامه
 یادېږي، نومونه یې واخلئ.



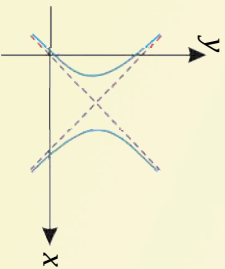
- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
 - مجانبونه، منحنیگان په کومو ټکو کې قطع کوي؟
- د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه له: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحنی لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحنی کرښه غوڅه کوي، هغه تابعگانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متماדי وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

- 1- **عمودي مجانب:** د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \rightarrow a$ او $y \rightarrow \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعگانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړی تابع بې نهایت خوا ته تقریب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



- 2- **مایل مجانب:** د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل $(y = ax + b)$ لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.



لوپړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4} \right) = \frac{1}{2}$$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1

८

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$
$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \Rightarrow x = 0$$

3- افقي مجانب: خرنگه چي تابع ميل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دريم مثال د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرغ مساوي په صفر وضع کوو:

$$\begin{cases} (x+1)(x-2) = 0 \\ x+1 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

نو $x = 2$ او $x = -1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيدا کولو لپاره د تابع لمبیت په لاس راوړو:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = 1$$

نو $y = 1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې د تابع له صورت له وېش څخه پر مخرغ $y = ax + b$ خطي معادله پيدا نه شوه، نو تابع مايل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چيرې د $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتيب سره د صورت او مخرغ درجي وي، نو:

الف: که $m < n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m = n$ وي، نو $y = b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n درجو د حدودو د ضربونو نسبت دی.

ج: که چيرې $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال نې شته.

د: که چيرې $m = n + 1$ وي (که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرغ څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.



پوښتني

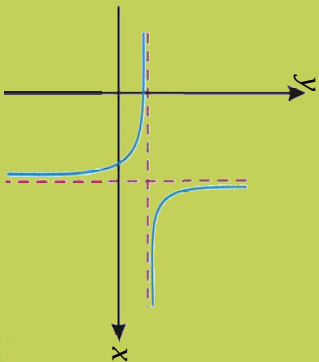
د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

1) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$

د هوموگرافیک تابع گانو گراف
 شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع گراف
 دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښیئ.



فعالیت

- هوموگرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y = \frac{1}{x}$ د تابع گراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا يې رسم کړئ.
- د تابع د گراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعگانې چې د $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموگرافیک تابعگانې بلل کېږي، داسې چې $c \neq 0$. دا

ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

- 1- افقي مجانب يې: $y = \frac{a}{c}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{cx} + \frac{b}{d}}{\frac{x}{cx} + \frac{d}{c}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{d}}{\frac{x}{cx} + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}$$
- 2- عمودي (قائم) مجانب يې: $x = -\frac{d}{c}$

$$cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او گراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

1. خرنګه چې د تابع مخرګ د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x=3$ څخه د منحنی له پیلو قیمتو کې معین نه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحنی تقاطع د x له محور سره:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$

3. د تابع د منحنی تقاطع د y له محور سره:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \quad \left\{ \left(0, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$ یا $\frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$

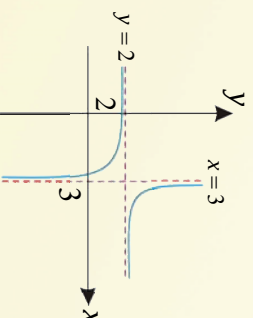
ب- عمودي مجانب: $x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$ یا $\frac{d}{c} = \frac{-3}{1} = -3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کولو او جدول یې ترتیب او گراف یې رسمو:

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - (-5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$



دویم مثال: د $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ د تابع د گراف بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$

1- د تابع د تعریف ساحه $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow D_f$ یعنې تابع په $x = -1$ ټکي کې تعریف شوی نه ده.

2- د تابع د منحنی تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحنی تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودی مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x) = y = 1$

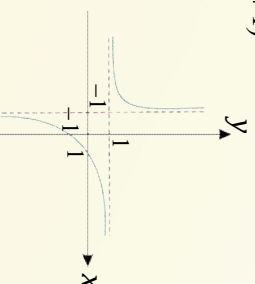
5- د تابع extreme نقطې پیدا کوه، جدول پي ترتيب او گراف پي رسموه:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1	
$f'(x)$	+	+	
$f''(x)$	+	-	
$f(x)$	1	نډی تعریف شوې	1



دریم مثال: غاړو د $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ تابع گراف رسم کړوه.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو

قیمتونو لپاره معینه ده، یعنې: $D_f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x} = 0$$

$$2x-5=0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (2.5, 0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.
 3- **مجانېونه:**

الف- عمودي مجانب: څرنگه چې په معارج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x-5}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x) = \frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - (2x-5)}{x^2} = \frac{2x-2x+5}{x^2}$$

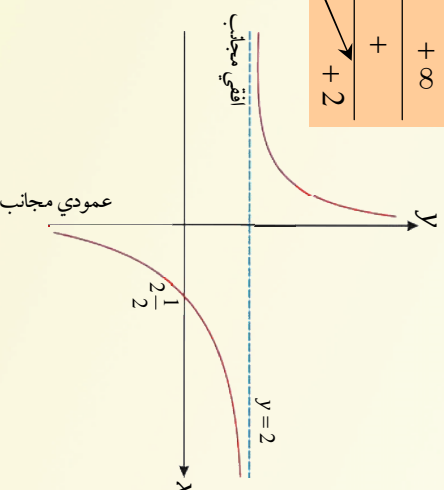
$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

څرنگه چې $f'(x) > 0$ دی، نو تابع متزاېده ده.

د گراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$				$2 5$	$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+
$f(x)$	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↘	+2

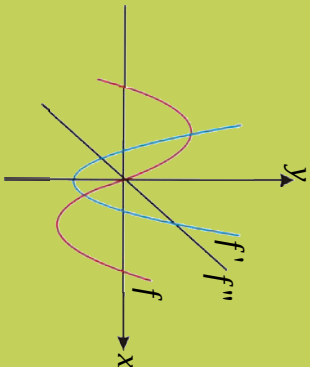
نه دی تعریف شوی



پوښتنې

- د $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.
- د $f(x) = \frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

د دریمې درجې یو مجهول تابع گراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$ مخامخ شکل د ځینو توابعو گرافونه رانښيي تاسې د هرې تابع د گراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



فعالیت

- د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
 - د نوموړي تابع ضربونه او ثابت حد وليکئ.
 - د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورته فعالیت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې به پام کې نیسو که

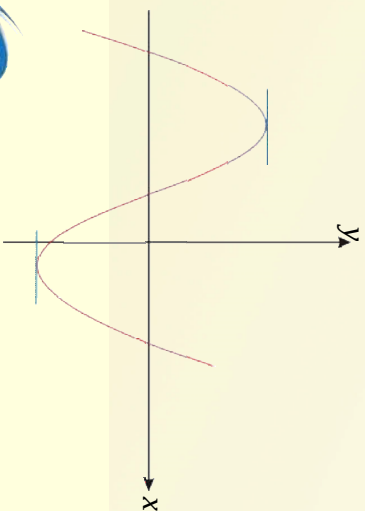
چیرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع به لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دویمې درجې د معادلې حل به پام کې نیسو او Δ یې مطالعه کوو که چیرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی ($\Delta f' > 0$) وي، نو معادله (د تابع مشتق) دوه حله لري، که چیرې $a > 0$ وي منحني له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Maximum) او یوه نسبي اصغري (Minimum) لري.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$



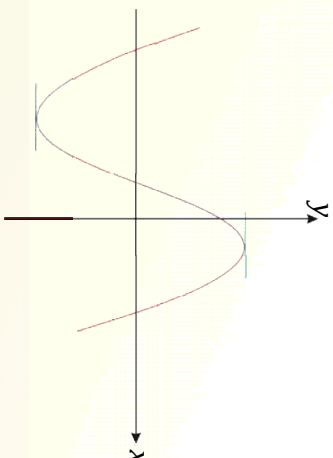
2. د $d = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په تابع کې که $a < 0$ ، $f'(x) = 0$ او $\Delta f'(x) > 0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f' > 0$ نو منځني د کین لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری (Maximum) او یوه نسبي اعظمی (Minimum) نقطه لري.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

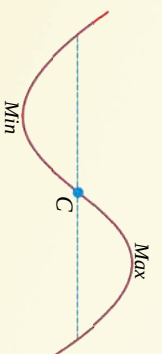
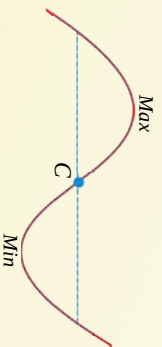
$$a < 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x	x_1	x_2
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منځني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme ډکټر د منځني ټکي یاد انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \right)$$



4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکي د تابع د انعطاف ټکي:

$$f'(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x = -\frac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ په تابع کې که $a < 0$ وي او $f'(x) = 0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x) = 0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x) \leq 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x) \geq 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزايدة ده.



لومړۍ مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته گورو چې تابع په کومه برخه کې متزايدة او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

تحولاتو جدول یې ترتیوو او بیا یې گراف رسموو:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$x(3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad 3x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4$$

$$= -8 + 12 - 4 = 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x = -1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1) = (-1-1)(-1+2)^2 = -2$$

د انعطاف ټکي: $I(-1, -2)$

د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y = 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

$$x-1=0$$

$$(x+2)^2=0$$

$$x=1$$

$$\Rightarrow x+2=0$$

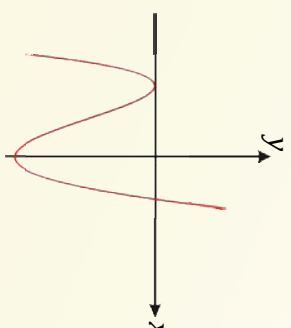
$$\Rightarrow (1, 0), (-2, 0)$$

$$x_2 = -2$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x = 0$$

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow (0, -4)$$



x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		max		min	

دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ د تابع تحولات وڅيړئ او گراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پيدا کوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په

لاس راوړو.

-1

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x_2 = 2$$

اعظمي او اصغري ٺڪي عبارت دي له:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \\ f(2) &= -2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, 0), (2, 4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ -x^3 + 3x^2 &= 0 \\ x^2(-x+3) &= 0 \\ x_1 &= 0, \quad -x+3=0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, 0), (3, 0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ f(x) &= -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, 0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پيدا کولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

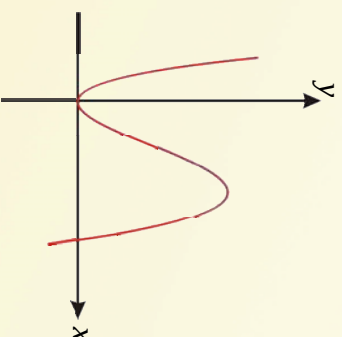
$$\begin{aligned} f''(x) &= -6x + 6 = 0 \\ x &= 1 \\ f(x) &= -x^3 + 3x^2 \\ f(1) &= 2 \Rightarrow I(1, 2) \end{aligned}$$

4- اوس ټي جدول ترتيبوو او گراف ټي رسموو:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	2	4	$-\infty$

نسبي Min

نسبي Max



دريم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x = \frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3 \cdot 1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

د تناظر د مرکز مختصات $C(1, 0)$



پوښتنې

1. د لاندې نابېگانو د نحو لاثو جدول ترتيب او گرافونه يې رسم کړئ.

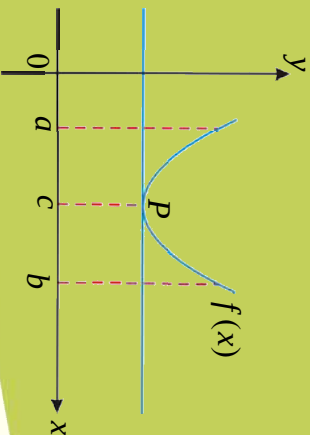
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$, b) $f(x) = -(x-1)^3$

-2 د $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ د تناظر د مرکز مختصات پيدا کړئ.

د رول قضيه

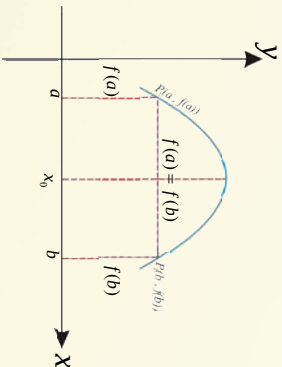
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.



فعالیت

- په مخامخ شکل کې د (a, b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحنی داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازی وي.



- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړ ده.

- که چېرې $f(a) = f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a, b) انټروال کې وڅیړی. د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:

قضیه: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \leq x \leq b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0) = 0$ شي.

ثبوت: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x) = c$ ثابت تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x) = 0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_1, x_2 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع په $[a, b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنگه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کېږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $(\pi, 5\pi) = [a, b]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنگه چې $f(5\pi) = f(\pi) = -1$ سره وي نو د $f(x)$ تابع د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکي ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $0 = (\cos x)'$ شي. څرنگه چې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو باید $-\sin x = 0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي. $\sin x = 0 \Rightarrow -\sin x = 0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې ځله $2\pi, 3\pi, 4\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ تابع په $[-1, 1] = [a, b]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(1) = f(-1) = 0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1, 1]$ کې متمادي ده او په $[-1, 1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

د $y'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

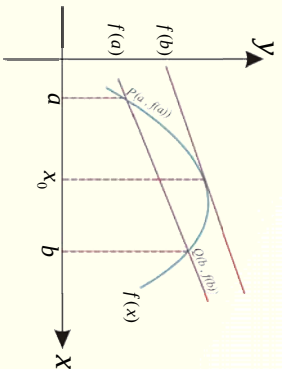
د متوسط قیمت قضیه (لاگرانژ قضیه):



فعالیت

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

- د یوې مستقیمې کرني ميل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟



- د $\overline{PQ}$ د کرني ميل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a, b]$ په فاصله کې متمادي او د (a, b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{چې: } c \text{ یو عدد شته دی داسې چې}$$

$$\text{یعنې: } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ دی.}$$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x \quad \text{ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:}$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \dots\dots\dots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \dots\dots\dots II$$

نو $g(a) = g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a, b) انټروال کې شته دی چې نو $g'(c) = 0$ دی نو:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow g'(x) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \Rightarrow f(b) - f(a) &= f'(c)(b - a) \end{aligned}$$

مثال د: $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[1, 3] = [a, b]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1, 3]$ کې متمادي او په $(1, 3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1, 3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د C د پیدا کولو لپاره لرو:

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنگه چې $x = \sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1, 3)$ کې ګډون لري، نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x = -\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1, 3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.



1- که چېرې د $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ تابع د $[0, 4]$ په انټروال کې راکړل شوي وي د x_0 قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنۍ تابع کې صدق وکړي.

2- که د $2x - x^3 = \frac{1}{3}$ $f(x)$ تابع راکړل شوي وي د x_0 قیمت د $[0, 3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

3- د هوپیتال قاعده, L'Hopital's Rule مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



فعالیت

- د $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ د تابع لمېټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \rightarrow 1$ ته تقرب وکړي.
 - د پورتنۍ تابع د صورت او مخرچ مشتق پیدا او د تابع له لمېټ سره یې پرتله کړئ.
 - د $f(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x - 1}{2x^2 - 4x^3 + 2x^4}$ د تابع لمېټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \rightarrow \infty$ ته تقرب وکړي.
 - د پورتنۍ تابع د صورت او مخرچ مشتق پیدا او د تابع له لمېټ سره یې پرتله کړئ.
- له پورتنۍ فعالیت څخه دا قاعده بیانو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a, b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\frac{f(x)}{g(x)}$ د لمېټ نسبت $x \rightarrow a$ قیمت کې د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x \rightarrow \infty$ کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل

وښي په دې حالت کې د تابع د لمېټ د پیدا کولو لپاره د $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کړو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو

که بیا هم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته ادامه ورکړو... تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x + 1}{2x} = \frac{4 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{x+2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

یا

مثال : د لړپيټال له قاعدې څخه په گټه اخيستي سره د لاندې توابعو لمپټورنه پيدا کړي.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$$

لومړۍ ځواب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

دويم ځواب:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = \frac{4 \cdot 3^3}{1} = 108$$

درېم ځواب:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 4}{14x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$



د لړپيټال د قاعدې څخه په گټه اخيستي سره لاندې لمپټورنه پيدا کړي.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

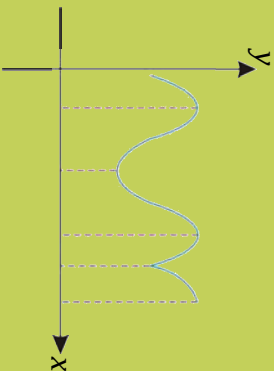
$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{3x^3}$$

د بحراني ټکو تطبيق

په مځامځ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټه ټکی وېنئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.



1- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وويل شي، نو دويم عدد $20 - x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x) = x(20 - x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0, 20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0, 20]$ کې لټوو:

$$f(x) = 20x - x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10$$

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

$$f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

ليدل کېږي چې $(10, 100)$ ، د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x = (t - 2)(t - 3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واکمنۍ کې پيدا کړئ.

حل: د منځنۍ سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنۍ سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3- د کړي د حجم او سطحي تر منځ منځنۍ نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$V_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي گراد (C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $(F - 32) \cdot \frac{5}{9} = C$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر

منځ منځنۍ نسبت وټاکئ.

حل: د منځنۍ سرعت د تعریف $(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شئ:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې 200m دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y ونښو، نو لیکلای شو:

$$\text{محیط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{محیط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100 - x) = 100x - x^2, \quad D_s = IR$$

$$x > 0, \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

$$S' = 100 - 2x$$

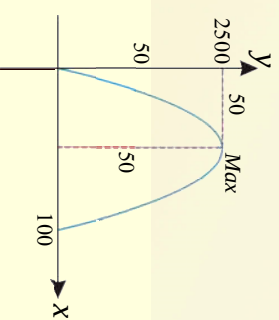
$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = 0$$

x	0	50	100
S'	+	0	-
S	0	↗	↘ 0

2500



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحد وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چیرې دا عددونه x او y وي، نو $x + y = 200$ او که x ، $y = T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$\begin{aligned} T_{(x)} &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (200 - x)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 400x + (200)^2 \\ &= 2x^2 - 400x + 40000 \end{aligned}$$

$$T'_{(x)} = 4x - 400$$

$$T'_{(x)} = 0$$

$$4x - 400 = 0$$

$$x = 100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)} = 20000$

7- د A ټکی د $y = \frac{2}{x}$ د منحنی له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د

مېنې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y = \frac{2}{x}$ د نا ټیځ منحنی پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x, \frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2 \Rightarrow d'_{(x)} = (x^2)' + (\frac{4}{x^2})' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0$$

$$2x^4 = 8$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

8- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د درېو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعي ته x او جگوالي ته یې y وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنگه چې $0 \leq x \leq 12$ او $y \geq 0$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

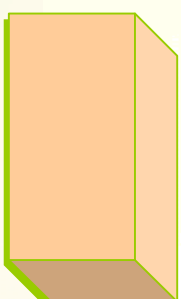
$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$



$$\begin{aligned} V(0) &= 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 \\ &= 0 - 0 = 0 \\ V'(0) &= 0 \\ V(8) &= 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 \\ &= 1536 - 1024 = 512 \\ V(8) &= 512 \\ V(12) &= 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0 \\ V(12) &= 0 \end{aligned}$$

نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.



$$1- \text{ د } 1 + x + x^2 + x^3 = y \text{ د تابع تحولات پیدا او منځني یې رسم کړئ.}$$

2- دوه داسې عددونه پیدا کړئ چې د جمعې حاصل یې 20 او د ضرب حاصل یې تر ټولو لوی ممکن قیمت ولري.

3- که د اوسېنې له یوې تختې څخه چې هره ضلعه یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بیا هغه قاط کړئ کو چټي مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

$$4- \text{ د } y = x^2 \text{ ګراف ته ډیره نژدې نقطه له } A(0, 3) \text{ نقطې سره پیدا کړئ.}$$

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متزايد بلل کېږي، چې د $[a, b]$ په انټروال کې پيوسته او په (a, b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a, b]$ په انټروال کې متصادي او په (a, b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت کم شي.
- په يوه تابع کې تر ټولو جگې نقطې ته موضعي اعظمي (Local Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته موضعي اصغري (Local Minimum) وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د Extreme په نامه يادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $f(x) = y$ د تابع منځني په يوه انټروال کې محذب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منځني مماس رسم شي، نو مماس د منځني پورته خوا ته پروت وي او د تابع دوم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $f(x) = y$ د تابع منځني په يوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منځني مماس رسم شي، نو مماس د منځني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دويم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکي چې د تابع له مقعریت څخه محاسب ته او يا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف (Inflection) ټکي بلل کېږي.
- هغه نابېلګانې چې د $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک نابېلګانو په نامه يادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چیري د $f(x)$ تابع د $a \leq x \leq b$ په انټروال کي متعادي او د $a < x < b$ په انټروال کي د مشتق وړ او $f(b) = f(a) = f$ وي، نو لږترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کي شته چې $0 = f'(x_0)$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چیري $f(x)$ په $[a, b]$ فاصله کې متعادي او د (a, b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a, b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي،
 که چیري $\frac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیت نسبت کله چې $a \rightarrow x$ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \rightarrow \infty$ کې
 د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیت د پیدا کولو لپاره د $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې
 قیمتونه وضع کوو که بیا هم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو... ترڅو د ابهام شکل ختم شي.

د دریم څپر کې پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په ښه کړئ:

1- که یوه تابع په $[0, b]$ انټروال کې متمادی او مشتق وړ وي، نو هغه وخت متراید ده چې :

a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) < 0$ c) $f'(x) > 0$ d) $f'(x) \geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جگې نقطې ته:

a) هیڅ یو Maximum او یا Inflection Minimum وایي

3- د $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکي عبارت دی له:

a) دوه ټکي b) یو ټکی c) درې ټکي d) نه لري

4- هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوی:

a) هیڅ یو b) اصغری ټکی دی c) دانعطاف ټکی دی d) اعظمی ټکی دی

5- د $f(x) = ax^2 + bx + c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $(0, -\infty)$ d) هیڅ یو

6- د $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -2$

7- د هومو گرافیک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a) $y = \frac{a}{c}$ b) $x = -\frac{d}{c}$ c) $y = \frac{c}{a}$ d) $y = -\frac{c}{d}$

8- د $g(x) = \frac{4x^2 - 6x}{x^2 - 4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

a) 4 b) 6 c) -6 d) -4

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هیڅ یو

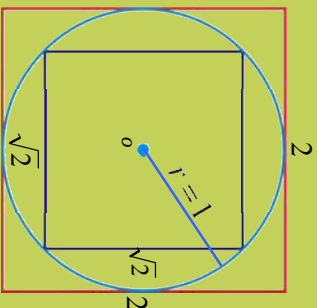
لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x) = x^2 - x$ د تابع د منځني میل د $P(3, 0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.
2. د $f(x) = -x^2$ په تابع کې د $[3, 4]$ په انټروال کې د منځني د بدلون ټکي پیدا کړئ.
3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندیو تابعگانو مشتق پیدا کړئ.
 - 1) $f(x) = 2x$ 2) $f(x) = 3x^2 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$
 4. د لاندیو تابعگانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.
 - 1) $f(x) = 2x - 1$ ، $x_0 = -1$ 2) $f(x) = x^2$ ، $x_0 = 2$
 5. د لاندې تابعگانو د مشتق تابع پیدا کړئ.
 - 1) $f(x) = 2x - 4x^2$ 2) $f(x) = 3x^3 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$
 6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعگانو مشتق محاسبه کړئ.
 - 1) $f(x) = 7x^2 - 3x$ ، $x_0 = -1$
 - 2) $f(x) = 6x^2 - 2x - 1$ ، $x_0 = \frac{1}{2}$
 7. د $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې گراف رسم کړئ.
 8. د $x^3 - 3 = x^2y + 6y^3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.
 9. د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.
 - 1) $f(x) = x^3 \sec x$ 2) $f(x) = \sin(3x - 1)$ 3) $f(x) = \cos^2 2x$
 10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟
 - 1.1. د $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ تابع گراف رسم کړئ.
 - 1.2. د $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ تابع گراف رسم کړئ.
 - 1.3. د $f(x) = \sin x$ مثلثي تابع گراف رسم کړئ.
 - 1.4. د $f(x) = \tan x$ مثلثي تابع گراف رسم کړئ.

خلورم خپرکی انتیگرال







د ریمان مجموعه

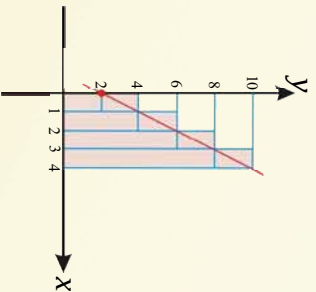
Riemann's Sum

په مخامخ شکل کې کې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي گانو مساحت حساب کړئ او وړایاست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي گانو سره څه اړیکه لري؟



فعالیت

- هغه مساحت چې د x د محور او $2x + 2$ د تابع د گراف په منځ کې د $[0, 4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $2x + 2 = y$ ل تابع په گراف کې د څلورو لاندینو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی پیدا کړئ.

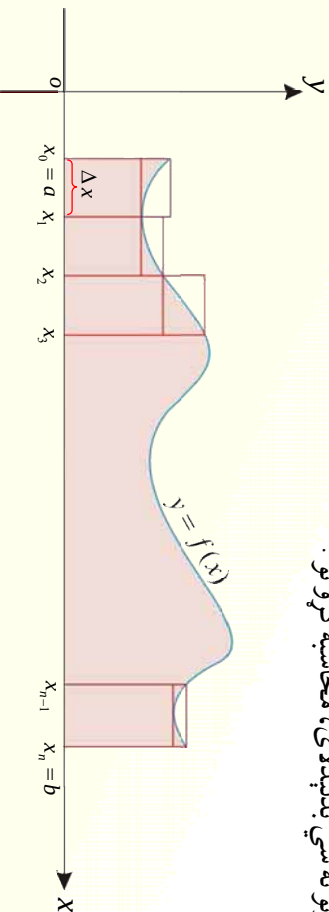


- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه، او د لاندینو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د گراف د لاندینې مساحت سره په ورکړ شوي ولټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د گراف د لاندې مساحت سره په نوموړي ولټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینو مستطیلونو^۱ د جوړولو لپاره د تابع په گراف کې د فاصلې ویش زیات کړو د پورتنیو او لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نږدې کېږي.

^۱ - که چېرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چېرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمیر زیات شي په هم هغه اندازه د گراف لاندینې مساحت د دقیق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

تعريف: فرضو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په تړلي انټروال کې متصادي او تعريف شوی وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د گراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بللېدلای، محاسبه کړو نو:



د $[a, b]$ تړلې انټروال چې په n مستطیلونو وېشو، څرنگه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی. او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $1, 2, 3, \dots, n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندینيو مستطیلونو مساحت په $\Delta x f(x_{i-1})$ او د پورتنيو مستطیلونو مساحت په $\Delta x f(x_i)$ ونښودل شي، نو لرو چې:

$$f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په A ونښو نو: $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ چېرې د رابطې له اطراف څخه لمبیت ونیسو نو لرو چې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = A$$

د سانډويچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو؛ چې:

نو $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ ته د ریمان مجموع او دې مجموعې لږمټ یعنې $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ ته د ریمان د

مجموعې لږمټ وایي.

لومړی مثال: د $[0, 2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشي، د $y = x^2 + 1$ منحنۍ او x محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: که چېرې $[0, 2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو؛ نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1, \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

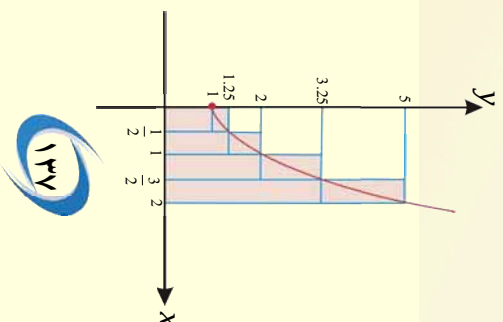
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

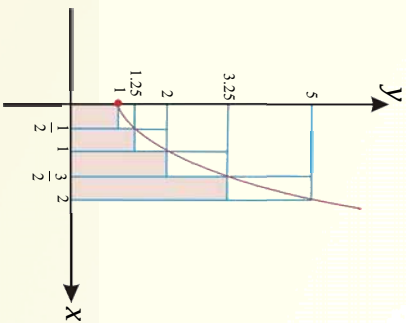
د تابع د گراف د رسمولو لپاره تابع ته قیمتونه اېږدو او د مستطیلونو طول لاس ته راځي:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25, \quad f(1) = 2$$

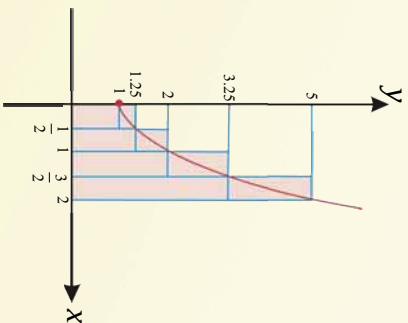
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.25, \quad f(2) = 5$$





دومو مجموعه د مستطيلونو د لاندینو مساحتونو د مجموعه

$$= 1 \times \frac{1}{2} + 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} = 3.75$$



دومو مجموعه د مستطيلونو د مساحتونو مجموعه

$$= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعې لمبې ته په $[1, 10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

حل :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n (a + \Delta x i) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{n} i \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n i \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{1n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9n^2 + 81n}{2n^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} \right]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

بايد به ياد وگيرد:

$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

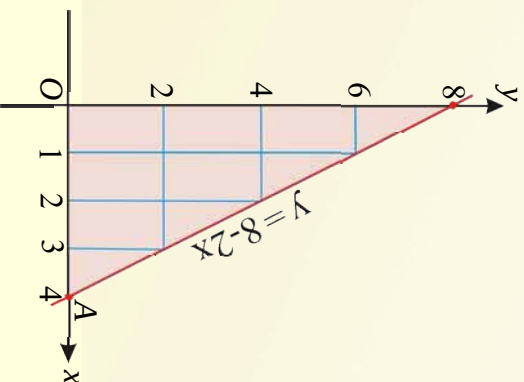
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. د $[0, 3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره گراف رسم، د لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع گراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0, 4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لېمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



د انتیګرال مفهوم

Concept of Integral

خړنگه چې پېر هېږئ د شکلونو لاندیني او پورتنی مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي. آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راورو.



د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لمېست ته انتیګرال وایي (دا) د انتیګرال علامه ده، د $\sum$ د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزیدلی حالت دی، لکه: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int f(x) dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر خپرې لاندې نېسو:

1- غیر معین انتیګرال Indefinite Integral



فعالیت

- که $1 - 2x^2 = F(x)$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنۍ تابع سره برته کړئ او وولئ چې (-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتنۍ تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنۍ فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او وولئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په تړلي انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي، د $F(x) + C$ نابوگانو سټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیر معین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

لومړی مثال: $\int x dx$ پيدا کړئ.

حل: $\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + C$

درېم مثال: $\int x^{\frac{3}{2}} dx$ پيدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$



پوښتنې

لاندې انټيگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[3]{x^3} dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^2}} dx$

b) $\int \frac{1}{x^4} dx$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\left. \begin{aligned} \int dx \\ \int [f(x) \pm g(x)] dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)] dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} dx, \quad g(x) \neq 0 \end{aligned} \right\} = ?$$

د غیر معین انٹیگرال خواص *Properties of indefinite integral*

تاسې د لمبیت او مشتق خواص مخکې مطالعه کړې؟ آیا
کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انٹیگرال کې
هم وي؟



فعالیت

د مشتقونو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنگه چې د تابعگانو د مشتق د پیدا کولو لپاره له ځانگړو قوانینو څخه گټه اخیستل کېږي، غیر معین انٹیگرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

$$\int dx = \int dx = x + C \quad \text{يو ثابت عدد وي، نو لرو چې:}$$

مثال: د $\int 5dx$ انټگرال پیدا کړئ.

$$\text{حل:} \quad \int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{ن: } n \neq -1 \text{ وي، نو:}$$

مثال د: $\int x^4 dx$ انتیگرال پیدا کری.

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5} x^5 + C$

3- کہ چیری a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وی، نو:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیگرال محاسبه کری.

حل: $\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3} x^3 + C$

4- که چیری $f(x)$ او $g(x)$ دوی تابعګانې وي په دې صورت کې د تابعګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیگرال مساوی دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

مثالونه:

a) $\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

b) $\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + C$

5- که چیری د تابعګانو ترادف تر انتیگرال لاندې وي، په دې صورت کې ددوی انتیگرال مساوی دی په: 0:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1] dx &= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int 1 dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوي تابعگاني وي، په دې حالت کې د تابعگانو د ضرب د حاصل انټيگرال مساوی نه دی د انټيگرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توگه، يعنې:

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

مثال: که چېرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع گانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انټيگرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x+1)(x-2)] dx = \int (x^2 - 2x + x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{aligned}$$

حل ب: اوس د هرې تابع انټيگرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضریبوو په لاس راغلي قيمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x+1) dx \cdot \int (x-2) dx = \left(\int x dx + \int dx \right) \left(\int x dx - \int 2 dx \right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + C \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x + C \right) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + C \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq \left(\frac{x^3}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + C \end{aligned}$$

په پایله کې څرگنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعگاني وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انټيگرال مساوی نه دی د هرې تابع د انټيگرال له حاصل تقسیم سره، يعنې:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$$

مثال: که چېرې $f(x) = x^2 + 2x$ او $g(x) = x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع گانو د تقسیم د حاصل انټيگرال په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x+1)(x-2)] dx = \int (x^2 - 2x + x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{aligned}$$

د ب جزء حل : اوس د صورت او مخرج د تابعگانو انټيگرالونه بيل بيل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x+1) dx \cdot \int (x-2) dx = \left(\int x dx + \int dx \right) \left(\int x dx - \int 2 dx \right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + C \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x + C \right) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + C \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + C\end{aligned}$$

په پايله کې څرگنده شوه چې مساوات حقيقت نه لری.

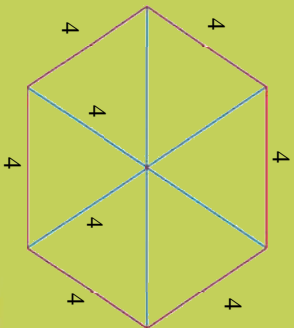


د انټيگرال د خاصيتونو څخه په گڼه اخیستې سره لاندې انټيگرالونه محاسبه کړئ:

- a) $\int -17 dx = ?$
- b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x} dx = ?$
- c) $\int 2x^4 dx = ?$
- d) $\int \frac{1}{x^5} dx = ?$
- e) $\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9) dx = ?$
- f) $\int (2x + 3)^6 dx = ?$
- g) $\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} dx = ?$
- h) $\int (2 + x) dx = ?$

معین انٹیگرال Definite Integral

د شبر ضلعي دڼه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پيدا او د شبر ضلعي له مساحت سره يې پرتله کړئ.



- د $f(x) = 2x$ د $[2, 5]$ په انټروال کې د $n = 5$ لپاره رسم کړئ او د گراف لاندینی مساحت پیداکړئ
- په شکل کې د گراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې متناهي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیت ته کله چې n بې نهایت ته نږدی شي او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدی شي، د $f(x)$ تابع له $X = a$ څخه تر $X = b$ پورې د معین انټگرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

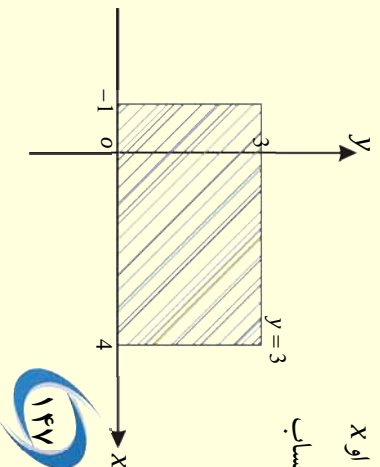
چې a ته د انټیگرال لاندینی سرحد او b ته د انټیگرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ ټاکلي انټیگرال قیمت پیداکړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیداکو او بیا د مطلوب انټیگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y = 3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1, 4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړی.



حل: د $\int_{-1}^4 3 \, dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت راښيي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$ددي مستطیل مساحت = 3[4 - (-1)] = 3 \cdot 5 = 15$$

د انتیگرال څخه په ګډه اخیستې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

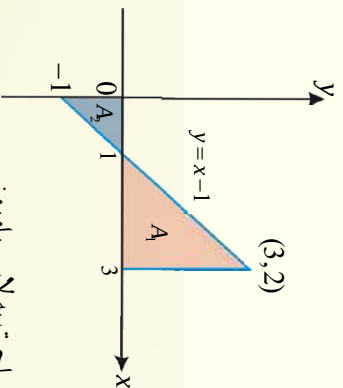
$$\int_{-1}^4 3 \, dx = [3x]_{-1}^4 = 3[4 - (-1)] = 15$$

درېم مثال: هغه مساحت چې د $y = x - 1$ مستقیم

خط او x محور ترمنځ په $[0, 3]$ انټروال کې

محصور دی په لاس راوړی.

حل:



له شکل څخه په ګډه اخیستې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$\int_0^3 (x-1) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیگرال قیمت عبارت دی له: $1.5 = \frac{9}{2} - 3$

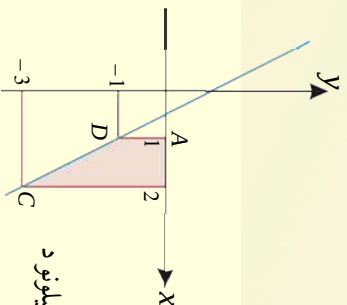
پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستې سره هغه مساحت چې د

$$y = -2x + 1$$

خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس

راوړی.



2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاسنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د

مساحت مجموعه په $[0, 1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړی.

د معین انٹیگرال خواص

Properties of definite integral

آیا کو لای شو چې د غیر معین انٹیگرال د ځانګړنو څخه په ګډه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b c \, dx \\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx \\ \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned} \right\} = ?$$



فعالیت

- د $\sum_{i=1}^4 3^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x \, dx$ د انٹیگرال قیمت د $[-1, 1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1 + 3x) \, dx$ ټاکلی انټیګرال محاسبه کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیا لرو:

د ځینو انټیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلې انټیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انټیګرال د $[a, b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b C \, dx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C \, dx = C \int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a, b]$ انټروال په n مساوي برخو یعنې $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i -ام انټروال

$$f(x_i) = C \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{څخه لرو:}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n}\right) \\ &= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C \, dx = C(b-a) \end{aligned}$$

مثال: $\int_3^4 dx$ ٺاڪي انٽيگراڻ حساب ڪري.

حل: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$

2. ڪهه $d f(x)$ تابع $[a, b]$ ۾ انٽروال ڪي انٽيگراڻ منهنجي وي او يو ثابت حقيقي عدد وي، نو لرو ڇڏي:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

ثبوت: ڪهه ڇيري $d [a, b]$ انٽروال $x_1, x_2, \dots, x_n$ ۾ n مساوي برخو ووڻو نو د ريمان د مجموعي او انٽيگراڻ د تعريف له مخي ليکلائي شو:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \\ &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

مثال: $\int_{-2}^2 4 dx$ ٺاڪي انٽيگراڻ محاسبه ڪري.

حل: $\int_{-2}^2 4 dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4[x]_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) = 4 \cdot 4 = 16$

3. ڪهه $F(x)$ تابع يوه لومني تابع $d f(x)$ او ۾ $[a, b]$ انٽروال ڪي متبادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a)) \\ &= -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

مثال: $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$ انٽيگراڻ مساوات پيدا ڪري.

حل: لومړۍ د کپي لورۍ انټيگرال او وروسته د بڼې خوا انټيگرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x \, dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x \, dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره پايله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x \, dx = -\int_3^2 2x \, dx$$

$$4- \text{که د } f(x) \text{ تابع په } [a, b] \text{ انټروال کې منځني وي په هغه صورت کې لرو، چې } \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

ثبوت: څرنگه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^a f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2 \, dx$ انټيگرال محاسبه کړئ.

$$\text{حل: } \int_3^3 3x^2 \, dx = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a, b]$ انټروال کې انټيګرال منښکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) \pm g(x_i)] \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

مثالونه:

حل:

$$a) \int_0^1 (4+3x^2) dx = \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx = 4 \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5$$

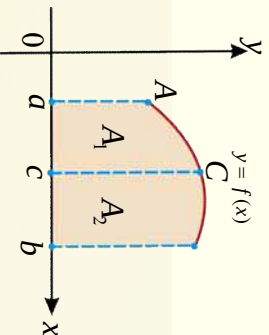
$$b) \int_0^3 (x^2 - 1) dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه تړلی انټروال کې چې د a, b او c ټکی شامل دي انټیګرال منښکي وي،

نو:
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ثبوت: دلته د $[a, b]$ انټروال په دوو انټروالونو د $[a, c]$ او $[c, b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تابع انټیګرال په نوموړی

انټروالونو کې په پام کې نیسو.



د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A = \int_a^b f(x) dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د

$f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a, b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او x د محور ترمنځ د $[a, c]$ او $[c, b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

$$A_2 = \int_c^b f(x) dx, \quad A_1 = \int_a^c f(x) dx$$

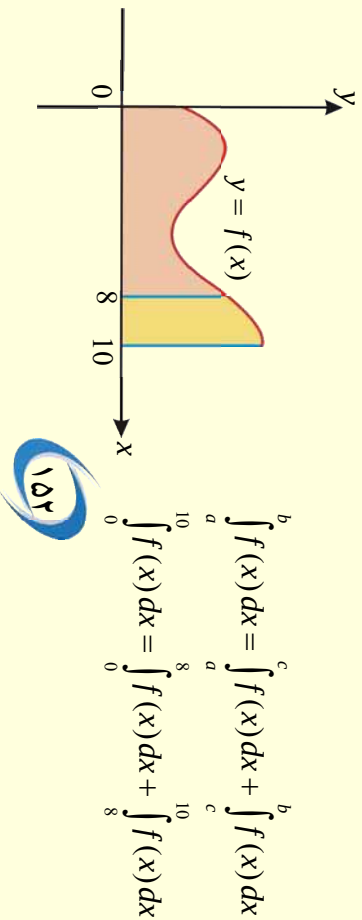
او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

په پایله کې ویلای شو چې:

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ او $\int_0^8 f(x) dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x) dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



اوس د $\int_8^{10} f(x) dx$ انتگرال قيمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د $f(x) \leq g(x)$ تابعگانې په $[a, b]$ انټروال کې انتگرال منومنکې وي؛ نو لرو:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x$$

نو څرنگه $g(x) - f(x) \geq 0$ او $\Delta x \geq 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمېټ هم منفي نه

دی يعنې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

مثال: که چېرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وېنایست چې

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

حل:

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\int_a^b 1 dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b 1 dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12} [x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6} [x^3]_a^b$$

پوهېرو چې $0 < (b-a)$ دی، نو:

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (b-a)$$

$$1 - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq 1 + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq +\frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (b^3 - a^3)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \Rightarrow -1 < 2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې ممتدې او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق

$$\text{اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ثبوت: څرنگه چې $m \leq f(x) \leq M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

چې دا وروستی اړیکه د انټیګرال د تخمینې

قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ انټیګرال په تخمینې توګه حساب کړئ.

حل: څرنگه چې د $f(x) = e^{-x^2}$ تابع په $[0, 1]$ انټروال کې ممتدې ده او $M = f(0) = e^0 = 1$ مطلق اعظمي او $m = f(1) = e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1-0)$$

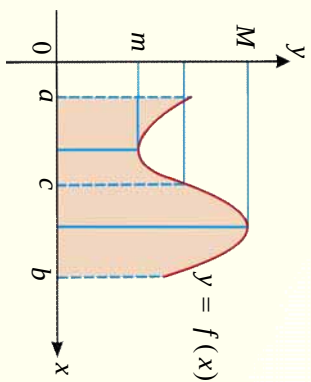
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.3679 \Rightarrow 0.3679 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

په پايله کې د انټيگرال تخميني قيمت د 1 او 0.3679 قيمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c يو حقيقي عدد شته چې: $a \leq c \leq b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $b < a$ لپاره m او M قيمتونه په ترتيب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قيمتونه د $[a, b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انټيگرال د تخميني قضيې څخه په کار اخيستي د $c \in [a, b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضو $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ وي، نو $m \leq f(c) \leq M$ دی او د هر c حقيقي عدد لپاره، $a \leq c \leq b$

$$\text{لرو چې: } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قيمت د قضيې په نامه يادېږي څرنگه چې $f(c)$ د تابع متوسط قيمت په $[a, b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په $[1, 4]$ انټروال کې په پام کې ونيسئ، آيا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{64-1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

حل: څرنگه چې $f(x) = x^2$ تابع ده اوس که د x په ځای د c قيمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c) = c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قيمت د قضيې د فورمول څخه د c قيمت داسې په لاس

$$\text{راځي: } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

اوس په پورتنۍ رابطه کې يې قيمت اېږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2 dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 , \quad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په او $4 < \sqrt{7} < 1$ دی.

له مخکې څخه پرهېږو چې د مستطيل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قيمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منځني لاندې مساحت په $[1, 4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.



1. لاندې معين انټيگرالونه محاسبه کړئ.

$$a) \int_{-1}^1 (x^3 + 2) dx = ?$$

$$e) \int_{-2}^3 3x dx$$

$$b) \int_2^5 7x dx = ?$$

$$f) \int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx = ?$$

$$c) \int_{-2}^4 (-x) dx = ?$$

$$g) \int_{-4}^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = ?$$

$$d) \int_{-1}^3 (2|x| - 3x) dx = ?$$

$$h) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$2. \quad \int_{-1}^4 f(x) dx = 5 \quad \text{د} \quad \int_{-1}^4 f(x) dx \quad \text{انټيگرال قيمت د} \quad [-1, 4] \quad \text{په انټروال کې داسې پيدا کړئ، چې}$$

$$\int_1^4 f(x) dx = -2 \quad \text{وي.}$$

$$3. \quad \text{د} \quad f(x) = x \quad \text{تابع په} \quad [0, 2] \quad \text{انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د} \quad C \quad \text{قيمته په لاس راوړئ.}$$

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

10- د انټيگريال او مشتق اساسي قضيه
يو موټر په $72 \frac{m}{sec}$ چټکتيا سره په حرکت کې دی،
دريور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانيو
ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پيدا کړي.



فعاليت

- د مشتق د تعريف څخه په گټې اخيستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پيدا کړي.
- د په لاس راغلي تابع انټيگريال په $[0, 1]$ انټروال کې محاسبه کړي.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قيمتونه سره پرتله کړي.
- له پورتنۍ فعاليت څخه په لاس راځي، چې:

د انټيگريال او مشتق تر منځ يوه منطقي اړيکه شته چې له دې اړيکې څخه په کار اخيستنې سره کولای شو، د انټيگريال اصلي او اساسي قضيه په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انټيگريال او مشتق لومړۍ اساسي قضيه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې ممتادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

څرنگه چې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې مشتق منځکې ده، نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.
ثبوت: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې ممتادي ده، نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a, x]$ انټروال کې ممتادي ده په پايله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انټيگريال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعريف مطابق ليکو او بيا د x متحول ته د h په اندازه تزايد ورکړو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x) \Big|_{a}^{x+h} - F(x) \Big|_{a}^x}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t) \Big|_a^{x+h} - F(t) \Big|_a^x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

نظر دريم خاصيت ته لرو چې: $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt}{h}$$

د متوسط قيمت د قضیې څخه $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې

h صفر ته تقرب وکړي c, x ته تقرب کوي، همدارنگه د f تابع له متماديت څخه لرو:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

په پايله کې: $F'(x) = f(x)$

مثال: د $\frac{1}{t^2 + 1}$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad ; \quad F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

د زنجیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چیرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a, b]$ انټروال کې متلاوي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

ثبوت: د مخکینۍ قضیې څخه پوهیږو چې که $\int_a^x f(t) dt = F(x)$ دی له دې ځایه د

هر $x \in [a, b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = F'(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) =$$

که د x په ځای په پورتنۍ رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t) dt - F(a) = 0 - F(a) \Rightarrow -F(a)$$

که د قیمت په لومړۍ رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t) dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

يادونه:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \cos^2 x dx = -\cot x + C$$

چې اخیری رابطه په $[F(x)]_a^b = \int_a^b f(t) dt$ په شکل

بنسودل کېږي دغه وروستی اړیکه د لومړنی تابع او

$\int_a^b f(t) dt$ انتیگرال ترمنځ اړیکه بنسټې، چې د

نیوټن “لا اینز” رابطې په نوم هم یادېږي.

مثال د: $\int_0^1 x^2 dx$ انٹیگرال حاصل پیدا کریں۔

حل: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$



1. لاندی مشتقات پیدا کریں۔

a) $F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

b) $F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

c) $F(t) = \int_{-\pi}^t \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

d) $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$

2. کہہ پہ t $f(t) = t$ تابع کی $F(0) = 2$ وی، د $F(b)$ مقدار پہ $0, 0.2, 0.4, \dots, 1$ تک کی پیدا کریں۔

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ پیدا کریں۔

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

11- په تعويضي طريقي سره انټيگرال نيو نه

- آيا کولای شئ چې مخامخ انټيگرال د نامعين انټيگرال له خواصو څخه په کار اخېستې سره حل کړئ.
- که نه شئ کولای، نو د جذر لاندې افاده په يوه متحول سره عوض کړئ او بيا هغه حساب کړئ او وولئ چې په انټيگرال کې د وضع کولو دا طريقه په څه نوم يادېږي.



فعاليت

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$ انټيگرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.

- د u مشتق ونيسي او د dx قيمت پيدا کړئ.

- څرنگه چې نوموړی انټيگرال يو معين انټيگرال دی، نو د $u = 2x + 1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قيمتونه وضع او د انټيگرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انټيگرال قيمت محاسبه کړئ.

له پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعويض شي، څرنگه چې $dx g'(x) = du$ ، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انټيگرال قيمت پيدا کړئ.



حل : د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3 - 5x, \quad du = -5dx \quad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5 \cdot 2 = 3-10 \Rightarrow u = -7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{u} \right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{-2} - \frac{1}{-7} \right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx$ انټیګرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3, \quad du = 6x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx &= \int_1^3 u^5 \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[\frac{u^6}{6} \right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{728}{6} \right] \\ &= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2} \end{aligned}$$



فعالیت

- د $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ انټیګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلې قیمت په لومړني انټیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

- د پورته څخه د $F(x) + C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او د هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u = g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متصادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ انټیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u = 1 - 4x^2, \quad du = -8x dx$$

$$x dx = -\frac{1}{8} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8}\right) du = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C \end{aligned}$$

دویم مثال: $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u = x^4 + 2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$\begin{aligned} u &= x^4 + 2, \quad du = 4x^3 dx, \quad x^3 dx = \frac{1}{4} du \\ \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\ &= \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C \\ &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C \end{aligned}$$



لاندې انټيگرالونه د تعويض له لارې محاسبه کړئ.

a) $\int \cos 3x \, dx = ?$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \, dx = ?$

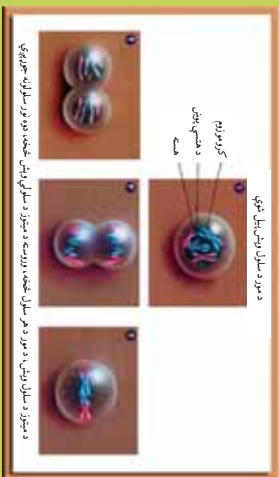
c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x} \, dx = ?$

d) $\int 2\sqrt[3]{(1-4x)^2} \, dx = ?$

e) $\int 2x(x^2+3)^4 \, dx = ?$

f) $\int_0^5 \frac{x \, dx}{x^2+10} = ?$

g) $\int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx = ?$



12- قسمي انټیګرالونه

د حجروي وېش په وخت کې یوه حجره په دوو یا څو حجرو وېشل کېږي. ایا کولای شئ دا لاره (روښ) په نورو شیانو کې لکه: تېره، ښکته او نورو کې ووبښو که ځواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه یادېږي.



فعالیت

- د $\frac{xdx}{x^2+1}$ انټیګرال په تعویضي طریقه حل کړئ.
 - د $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ انټیګرال قیمت په تعویضي طریقه پیدا کړئ.
 - آیا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انټیګرال په تعویضي طریقه وشمېرئ.
- له پورتنۍ فعالیت څخه دې پایلې ته رسېږئ:
- د $\int f(x)g(x)dx$ په انټیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوي مشتق منونکي تابعګانې دي چې یوه له بلې سره د ضرب وړ وي یا نه وي، خو د انټیګرال محاسبه یې اسانه کار نه دی، که چېرې $u = f(x)$ او $v = g(x)$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق یې مساوي په: $u'v + v'u = (u \cdot v)'$ دی.
- له پورتنۍ رابطې څخه $u'v$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انټیګرال نیسو:

$$\begin{aligned} v' \cdot u &= (u \cdot v)' - u' \cdot v \\ \int v' \cdot u \, dx &= u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \quad \text{یا} \quad \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du \end{aligned}$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غیر معین انټیګرال فورمول په قسمي طریقه وايي.

که د u او v تابعګانې په $[a, b]$ انټروال کې تعریف شوي وي، لاندې فورمول د معین انټیګرال فورمول په قسمي لاره (طریقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v' u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

لوہری مثال: $\int x \sin x \, dx$ انٹیگرال پیدا کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx \\ dv &= \sin x \, dx, & v &= -\cos x \\ \int u \, dv &= u \cdot v - \int v \, du \\ \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -x e^x \, dx$ انٹیگرال حساب کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} u &= -x, & du &= -dx, & -du &= dx \\ dv &= e^x \, dx, & v &= e^x \\ \int_a^b v' \cdot u \, dx &= u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u' \, dx \\ \int_0^1 -x e^x \, dx &= [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x \, dx \\ &= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 \\ &= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

یادونہ:

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$



پو پو پو

لاہری انٹیگرالوںہ حساب کریں۔

$$\begin{aligned} a) \int \theta \cos \theta \, d\theta &= ? \\ b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx &= ? \\ c) \int x^5 \cos(x^3) \, dx &= ? \\ d) \int_0^1 x e^x \, dx &= ? \end{aligned}$$

د چیر کی مهم ټکي

د ریډمان مجموعه: فرضو د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې متمادي او تعریف شوی وي او د ناحیې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحنی ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلبدلای، محاسبه کړو.

د $[a, b]$ انټروال چې په Π مستطیلونو تقسیموڅرنگه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطی څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د $1, 2, 3, \dots, n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_i = a + i\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندینيو مستطیلونو مساحت په $\Delta x f(x_{i-1})$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $\Delta x f(x_i)$ وښودل شي او د محصور شوي سطحي مساحت په A وښو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

نامعین انټیګرالونه: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $C + F(x)$ توابعو سټ چې C یو ثابت عدد وي د غیر معین انټګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعین انټیګرالونو خواص (ځانګړتیاوې):

$$\int dx = x + C$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f(x) dx}{g(x)} \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}, \quad g(x) \neq 0$$

معین انتیگرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیت ته په $[a, b]$ انټروال کې کله چې n بې نهایت ته نږدی شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدی کېږي، چې د $f(x)$ تابع ټاکلی انټیگرال د $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

a ته د انټیگرال لاندینی سرحد او b ته د انټیگرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انټیگرال خواص (ځانګړتیاوې):

$$\int_a^b C dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې ممتدای وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

څرنگه چې د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چیرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a, b]$ انټروال کې ممتدای وي، په دې صورت کې

لرو چې:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u = g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او ممتدای مشتق ولري. د زنجیری قاعدې څخه په کار اخیستې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې د مشتق منښکي وي، او $u = g(x)$ همدارنگه $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنگه چې $du = g'(x) dx$ دی، له زنجیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوی مشتق منښکي تابعگانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیگرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چیرې $u = f(x)$ او $v = g(x)$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

له پورتنی اړیکې څخه $v' \cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انټیګرال نیسو:

$$\int v' \cdot u \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

چې اخیری اړیکې ته د غیر معین انټیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که u او v تابعانې په $[a, b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انټیګرال فورمول په قسمي لاره (طریقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v' u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

د څپرکي پوښتني

1- د لاندې ټاکلو انټيگرالونو قیمت پیدا کړئ.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$b) \int_{-4}^4 [2x^2 - \frac{1}{8}x^4] dx$$

$$c) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$d) \int_0^3 4dx$$

$$e) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$f) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$g) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$h) \int_{-2}^0 [\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}] dx$$

$$i) \int_2^3 (x^3 + x^2) dx$$

$$j) \int_{-2}^2 [x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4] dx$$

$$k) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$l) \int_1^2 x^2 dx$$

2- لاندې غیر معین انټيگرالونه حل کړئ.

$$a) \int [\sin x + 8x^3] dx$$

$$b) \int [x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x] dx$$

$$c) \int x(1 - 2x^2) dx$$

$$d) \int \sin x dx$$

$$e) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx$$

$$f) \int \frac{(1-x)^2}{1-x} dx$$

$$g) \int \sqrt[3]{x^3} dx$$

$$h) \int \frac{3x^2 + 8x}{x} dx$$

$$i) \int (2x^2 + 3) dx$$

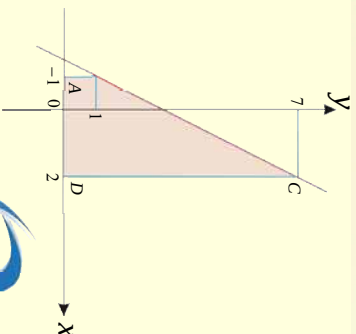
$$j) \int \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$$

$$k) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx$$

$$l) \int (3x^2 + 4x - 1) dx$$

3- د لاندې محصور شوي سطحي مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx$$



4- لاندې انټيگرالونه د تعويضي طريقې په مرسته پيدا كړئ.

a) $\int 3 \cos(2x+1) dx$

g) $\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

b) $\int \sqrt{3x+5} dx$

h) $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{9-x^3} dx$

c) $\int \frac{2 dx}{x+2}$

i) $\int \frac{1}{(x-10)^7} dx$

d) $\int (3x+6)^3 dx$

j) $\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

e) $\int x^3 \sqrt{x^4+2} dx$

k) $\int (4-3x)^7 dx$

f) $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

l) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انټيگرالونه د قسمي طريقې په مرسته پيدا كړئ.

a) $\int x \cos x dx$

f) $\int x \sqrt{1+x} dx$

b) $\int_0^\pi x \cos x dx$

g) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$

c) $\int e^x \cdot \cos x dx$

h) $\int e^{2x} \sin 3x dx$

d) $\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx$

i) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

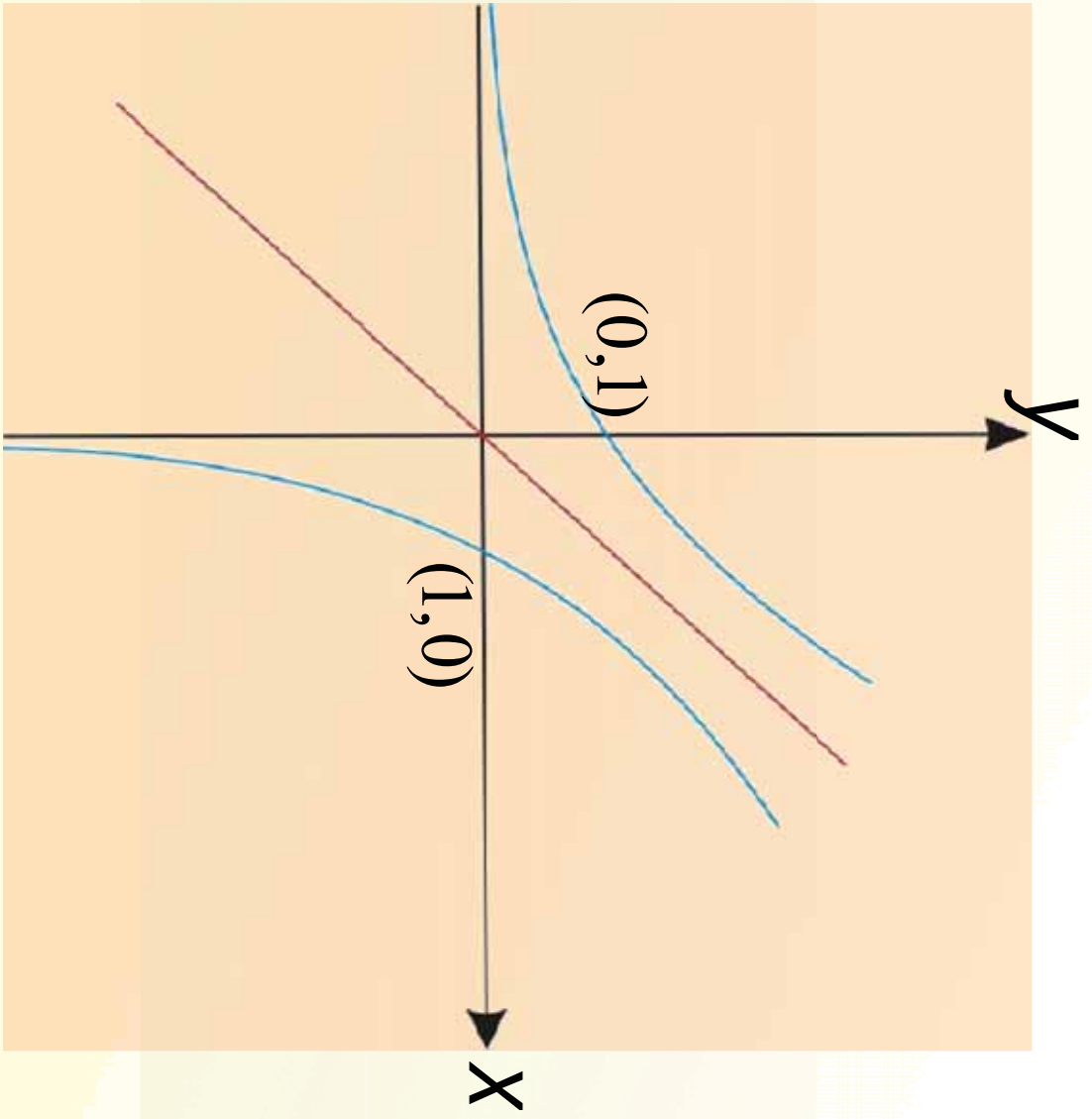
e) $\int x e^{-x} dx$

پنجم خبر کی

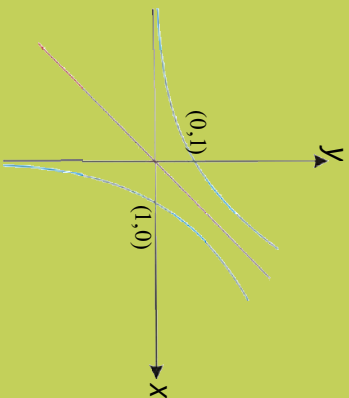
د لو گاریتمی او اکسپونشیل تابعگانو مشتق او

انٹیگرال





د لوگاریتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق
مخامخ شکل د څه ډول تابعگانو گراف رانښيي، نومونه
بې واخلئ.



فعالیت

- لوگاریتم تعریف او خواص بې ولیکئ.
- لوگاریتمي او اکسپوننشل تابعگانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b X$ یوه متصه تابع وي، نو $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبعي لوگاریتم ونیسئ، اړیکه بې ولیکئ.
د بورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ **او** $g(x) = a^x$ **وي؛ نو** $g'(x) = a^x \ln a$ **او** $f'(x) = \frac{1}{x}$ **دی.**

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x$$

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u} = \frac{h}{x}$ دی څرنگه چې $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ ته نږدی کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad \text{نو:} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

پوهیږو چې

قضیه

$$1. \quad \text{که د } x \log_a x = \log_a x \quad f(x) = \log_a x \text{ تابع مشتق منورنکی وي؛ نو مشتق یې } f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$2. \quad \text{که } g(x) \log_a x = \log_a x \quad g(x) \text{ مشتق منورنکی وي، نو } g(x) \log_a e = \log_a x \quad f(x) = \log_a x \text{ او}$$

ثبوت:

-1

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u} = \frac{h}{x}$ کېږي، که $h \rightarrow 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u \rightarrow \infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$2- \text{خواړو ثبوت كړو چې: } e^{\log_a g(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

د زنځيري فاعدي له مخې:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x) \\ &= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e \end{aligned}$$

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

كه $a = e$ وضع شي؛ نو لرو:

پايله:

1- د Exponential تابعگانو مشتق د لوگارتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی ځکه که $y = e^x$ رابطې څخه طبیعي لوگارتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u' e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u' a^u \ln a$

4- د لوگارتمي تابعگانو د مشتق پیدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه ګټه اخلو:

$$\begin{aligned} y &= \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e \\ y' &= \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a} \end{aligned}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$



دویم مثال: د $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 - 5x + 4) \\ g(x) &= x^2 - 5x + 4 \Rightarrow g'(x) = 2x - 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\ln g(x))' &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2 - 5x + 4))' &= \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4} \end{aligned}$$

دویم مثال: د $f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ او $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \log_a \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \log_a \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} (\log_a (x^2 + 1) - \log_a (x^2 - 1))$$

$$\begin{aligned} \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}\right)' &= \frac{1}{2} (\log_a (x^2 + 1) - \log_a (x^2 - 1))' \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} \log_a e - \frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)} \log_a e \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \log_a e - \frac{2x}{x^2 - 1} \log_a e \right] = \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left[\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right] \\ &= \frac{-2x}{x^4 - 1} \log_a e \end{aligned}$$

حل: پوهېږو چې $\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} &= \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)) \\ \left(\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}\right)' &= \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)]' = \frac{1}{2} [(\ln(x^2 + 1))' - (\ln(x^2 - 1))'] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \frac{-2x}{x^4 - 1} \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u' e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[3]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چيرې $y = a^u$ وي نو $y' = u' a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[3]{2} = (2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{3}\right)' \cdot 2^{\frac{1}{3}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبيعي لوگارتم ونيسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y' = a^x \ln a \Rightarrow y = a^x$ دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

$$1) y = \log(x^4 + 1)$$

$$2) y = \log_3(\log_2 x)$$

$$3) y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$$

حل: پوهېرو چې د لوگارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضیې څخه په ګټه اخېستې سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \log_e a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$1) \ y = \log(x^4 + 1) \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

$$\begin{aligned} 2) \ y = \log_3(\log_2 x) &\Rightarrow y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{(\ln 2)(\ln 3) x \log_2 x} \\ &= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3 x \ln x} \end{aligned}$$

$$3) \ y = \log_{x^2-1} x^2 + 1 = \frac{\log_e(x^2 + 1)}{\log_e(x^2 - 1)} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2 - 1)}$$

پوهېرو چې $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ **دې؛ نو لرو:**

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1} \ln(x^2+1)}{[\ln(x^2-1)]^2}$$



پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړي:

a) $f(x) = \ln \sin 3x$

b) $f(x) = \ln \sqrt{3x^2 + 7}$

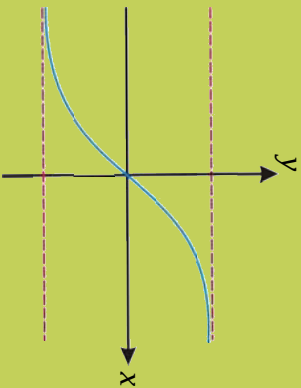
c) $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$

d) $f(x) = \log_{10} 3x^2$

e) $f(x) = y = x^x$

f) $y = \frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$

د معکوسو تابعگانو مشتق
مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟



که چیرې f او g یوه د بلې دوي معکوسي تابعگاني وي، یعنې $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ وي، نو:

یا $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ یا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ځکه چې د تابع او ضمنی تابعگانو له مشتق څخه لیکلای شو:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسي تابع په مرسته پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} y = a^x &\Rightarrow x = \log_a y \\ \Rightarrow y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\log_a e} = y \log_e a \\ y' &= a^x \ln a \end{aligned}$$

د مثالني معکوسو تابعگانو مشتق

د مثالني معکوسو تابعگانو مشتق د لاندې اړیکو په مرسته لاسته راوړو:

$$\begin{aligned} 1) (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ 2) (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ 3) (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ 4) (\operatorname{arccot} x)' &= \frac{-1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ثبوت:

$$1) y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2) y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3) y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1 - \sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخارج په $y \cos^2$ ویشو:

$$(\arctan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$4) \ y = \arccot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\arccot x)' = ?$$

$$(\arccot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخارج په $y \sin^2$ وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5 (\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} y' &= [\log_5 (\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u \ln a} \\ &= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x \ln 5)} \end{aligned}$$

درېم مثال: د $y = \arctan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [\arctan e^x]' = (\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$



پوښتني

1. د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (\arcsin x)^3$

2) $y = \log_2 (\arcsin x)$

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

قسمي کسرونه

د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

په هېرو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل

دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د

$$\frac{2}{x+1} \text{ او } \frac{1}{x^2-1} \text{ کسرونه لاسته راوړئ.}$$



فعالیت

• د $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.

• د پورته کسرونو د جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو راوړئ.

• واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیاوړ:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخخ ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بېلابېلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2} + \dots + \frac{C}{x-x_n}$$

(A, C, ... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخخ پوښتنیم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$$

لیبل کبری، چي نوموړی کسر له دریو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې A ، C ټاکو:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A}{x-5} + \frac{C}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A(x-1)(x+2) + (x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + x^2 - 3x - 10 + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{(A + C)x^2 + (A - 3 - 6C)x + (-2A - 10 + 5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

لیبل کبری، چي د دواړو خواوو د کسرونو مخ جونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حلونو ضربونه سره مساوي وي) څخه په گټه اخستني سره لیکو:

$$\begin{cases} A + C = 4 \\ A - 3 - 6C = -1 \\ -2A - 10 + 5C = -39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $A=2$, 3 او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کوئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقې پرې تطبیقوو:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} &= 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{A}{x-4} + \frac{A}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + (x-4)(A +)x + (2A - 4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x^2 - 2x - 8} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A + &= 4 \\ 2A - 4 &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{5}{2}, \quad \frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

دویم حالت:

که د کسر د مخخرج ضربني عوامل لومړی درجه پولینوم وي، ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x - x_0$ عامل n ځلې په مخخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{\dots}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{\dots}{(x - x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخخرج د پولینوم ضربني عوامل په لاس راوړو:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= (x-1)(x-2)(x-1) \\ \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + (x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A +)x^2 + (-2A - 3 + C)x + (A + 2 - 2C)}{(x-2)(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A + &= 3 \\ -2A - 3 + C &= -6 \\ A + 2 - 2C &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 2 \\ &= 1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخخرج ضربني عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax + \dots}{dx^2 + bx + c}$ بڼه لري.
لومړی مثال: د $\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د معخرج پوښتم ضرري عوامل عبارت دي له:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

څرنگه چې د $x^2 + 2x + 4$ درې جملېي د حقيقي عددونو په ست کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + C}{x^2 + 2x + 4} + \frac{(Ax + C)(x + 1)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} = \frac{(A+C)x^2 + (A + 2C)x + (C + 4C)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 5 \\ A + 2C = 8 \\ + 4C = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 3 \\ = 1 \\ C = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$



لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

-1

a) $\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

b) $\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$

c) $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 9x + 3}$

-2

a) $\frac{1}{x^4(x+1)}$

b) $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

c) $\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)}$

d) $\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

e) $\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

-3

a) $\frac{3x + 7}{(x^2 + x + 1)(x^2 - 4)}$

b) $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$

c) $\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

d) $\frac{x^5}{x^4 - 1}$

د اکسپوننشل تابعگانو انټیګرالونه
مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$



فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلي.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه وليکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشل ډول وليکئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لیکلای شو چې:

$f(x) = e^x$ طبيعي اکسپوننشل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \Rightarrow du = 0 \cdot dx$$

$$dv = a^x \Rightarrow v = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لوپړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انټیګرال غواړو پیداکړو:
د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشل تابعګانو انټیګرالونه پیداکړئ.

$$1) \int 3^{x+1} dx = ? \quad 2) \int 6^{x-1} dx = ?$$

حل:

$$1) \int 3^{x+1} dx = ?$$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$2) \int 6^{x-1} dx = ?$$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6} 6^x dx = \frac{1}{6} \int 6^x dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + C$$



پوښتنې

دلاندې اکسپوننشل تابعګانو انټیګرالونه محاسبه کړئ.

$$a) \int 3^{x-1} dx$$

$$b) \int 2^{-x} dx$$

$$c) \int a^{x+b} dx$$

$$d) \int \frac{1}{a^x} dx$$

$$e) \int 2^x \cdot 3^x dx$$

$$f) \int \frac{2^x}{3^x} dx$$

$$g) \int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx$$

$$h) \int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx$$

$$i) \int (1 + 2^x) dx$$

د لوگاریتمی تابعگانو انټیګرال
 وښئئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$



فعالیت

- لوگاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعگانو گراف رسم کوئ.
- آیا کولای شو چې د لوگاریتمی تابعگانو انټیګرال ونیسو؟

د پورتنۍ فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوگاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوگاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شی، نو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e \, dx$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a x - \int x \frac{1}{x} \log_a e \, dx$$

$$= x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال د: $\int \ln 3x \, dx$ غیر معین انتیگرال غواړو پیداکړو:

حل:

$$\begin{aligned} \int \ln 3x \, dx &= \int (\ln 3 + \ln x) \, dx = \int \ln 3 \, dx + \int \ln x \, dx \\ &= x \ln 3 + x \ln x - x \\ &= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1) \end{aligned}$$

يادونه:

(I) د تعويض Substitution له لارې کولای شو د غیر معین انتیگرال حل پیداکړو.

لومړی مثال: لاندې انتیگرالونه پیداکړئ.

حل:

$$a) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} \, dx$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx}, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u \, du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

$$b) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx}, \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

دویم مثال : د $f(x) = e^{2x}$ تابع انٹیگرال ونیسی:

حل :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

آزمائیت: $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

دویم مثال : د $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انٹیگرال حساب کړئ.

حل :

$$f(x) = x \cdot \ln x^2 \Rightarrow \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln x^2) dx = ?$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

(III) معین انٹیگرالونه هم د بدلون(تعووض) له لارې حل کړئ.

لومړی مثال : د $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$ انٹیگرال پیدا کړئ.

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\left. \begin{aligned} x = -1, u = 2x &\Rightarrow u = 2(-1) = -2 \\ x = 1, u = 2x &\Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$

دويم مثال : د انتيگرال قيمت پيدا كړئ.

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1, \quad u=x^2=1 \\ x=2, \quad u=x^2=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] \approx 2.545$$



لاندې انتيگرالونه حل كړئ.

a) $\int \ln 2x^3 dx$

b) $\int \ln \sqrt{x} dx$

c) $\int \log \frac{x}{2} dx$

d) $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$

e) $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انټيگرال محاسبه
 د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{?}{(x-2)} + \frac{?}{(x-1)}$$

مخکي مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعگانو انټيگرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزې په مرسته لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= \frac{A}{(x-2)} + \frac{A}{(x-4)} \\ \frac{A(x-4) + (x-2)A}{(x-2)(x-4)} &= \frac{Ax-4A + x-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{(A+1)x-4A-2}{(x-2)(x-4)} \\ A+1 &= 7 \\ -4A-2 &= -12 \\ A &= 7- \\ -4(7-1) - 2 &= -12 \\ -28+4 - 2 &= -12 \\ -28+2 &= -12 \\ 2 &= 16 \Rightarrow = 8 \\ A &= 7-8 = -1 \\ \frac{7x-12}{x^2-6x+8} &= -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4} \end{aligned}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx \\ \int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx \\ &= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C \\ &= \ln[(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8] = \ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right] + C \end{aligned}$$

دویم مثال : د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$ انٹیگرال محاسبه کوئ.

حل : مخارج په فکتورونه تجزیه کوو : $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ نو :

$$\begin{aligned} \frac{-5x+9}{x^2+x-6} &= \frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \\ \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} &= \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ (A+B)x + 3A - 2B &= -5x + 9 \end{aligned}$$

د A او عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5) - 2 = 9$$

$$-15 - 5 = 9$$

$$-5 = 24$$

$$= -\frac{24}{5}$$

$$A = -5 + \frac{24}{5} = \frac{-25+24}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6} = \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} - \frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} dx - \int \frac{\frac{24}{5}}{x+3} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{24}{5} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= -\frac{1}{5} \ln(x-2) - \frac{24}{5} \ln(x+3) \end{aligned}$$

$$= \ln(x-2)^{-\frac{1}{5}} + \ln(x+3)^{-\frac{24}{5}} = \ln \left[(x-2)^{-\frac{1}{5}} \cdot (x+3)^{-\frac{24}{5}} \right] + C$$



لاندې انټیگرالونه د قسمي کسرونو په طریقہ حل کوئ.

a) $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} dx$

b) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+13} dx$

c) $\int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2} dx$

د څپر کې مهم ټکي

- که $e^x = f(x)$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $e^x = f'(x)$ دی.
- که $f(x) = a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ دی.
- که $f(x) = \log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ دی.
- که $f(x) = \log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$ دی.
- قسمي کسرونه: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج $(P_n(x))$ د خطي بیلابیلو ضربې عواملو څخه جوړ چې

تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدیلدای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{C}{x - x_2} + \dots + \frac{C}{x - x_n}$$

- که د لومړۍ درجه پولینوم مخرج ضربې عوامل چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x - x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{C}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{C}{(x - x_0)^n}$$

واقعي پولینوم یو تړته کسر $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ بڼه لري.

- د اکسپوننشل تابعگانو انتیگرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$$

- د لوگارتمي توابعو د انتیگرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C, \quad \int \log_a x dx = x \log_a e + C$$

- ځینې تابعگانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

د پنځم څپر کي پوښتني

لاندي پوښتني حل کړئ.

1. د $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ تابع مشتق پيدا کړئ.
2. د $f(x) = \ln \sqrt{x-1}$ تابع مشتق پيدا کړئ.
3. د $y = 2x^2x$ تابع مشتق پيدا کړئ.
4. د $f(x) = \log \sqrt{x^3}$ تابع مشتق پيدا کړئ.
5. لاندي کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$

2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$

3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندي انتيگرالونه پيدا کړئ.

1) $\int 5t^7 dt$

2) $\int \frac{x^3-3}{x^2} dx$

3) $\int (2 \cos x - 5 \sin x + e^x) dx$

4) $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$

5) $\int xe^{-x} dx$

6) $\int \left(\frac{5}{(2x+1)(x-2)} \right) dx$

7) $\int_1^3 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

7. د لاندي تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

a) $y = \ln(x^2 + x + 1)$

b) $y = \ln(\sin x)$

c) $y = e^{x^2+1}$

d) $y = \sqrt[3]{2}$

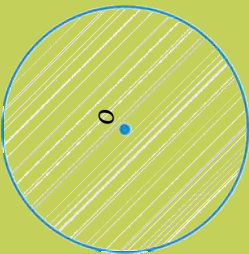
شپریم چیرکی د انیگرال تطبیقات





د یوې منحنۍ د محصور شوي سطحي د مساحت محاسبه Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحنۍ په واسطه تړل شوې دایره ده د مساحت فورمول یی وړیاست.



د $x^2 - 1 = y$ تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (Critical Point) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پیدا او گراف یې رسم کړئ.
- د $x^2 - 1 = y$ تابع او x محور تر منځ د سطحي د مساحت قیمت د انټیګرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنۍ فعالیت د $x^2 + 2x - y = 0$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحنۍ او د x محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:}$$

د $y = f(x)$ منحنۍ او د x محور او د $x = a$, $x = b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

– که د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ تړلی انټیروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $f(x) \geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع گراف تل د x محور پورته خوا ته او که $f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع گراف د x محور لاندې خوا ته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x = 4 - y^2$ تابع د منځني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پریکړې ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او د محورو سره د پریکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

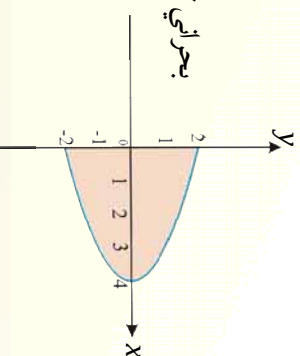
$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0)$$
 بحراني ټکی

$$x = 0, \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), (0, -2)$$
 د محورونو سره د پریکړې ټکي



خرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2, 2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left(\frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د $x = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منځنی د محصور شوی سطحي مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحي د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

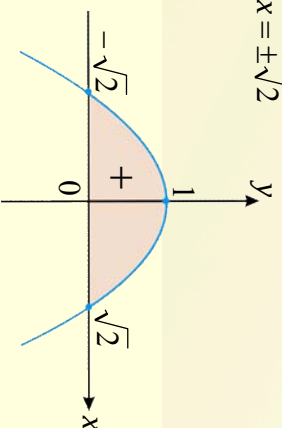
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, \quad y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$
 بحراني ټکی

$$y = 0, \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$
 د محورونو سره د پریکړې ټکي

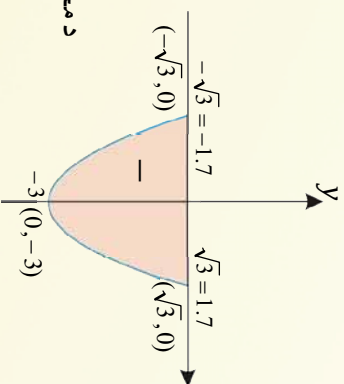


$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2) dx = 2 \left[x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\
 A &= 2 \left(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - \sqrt{8}}{6} \right) \\
 &= \left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\
 A &= 1.8853
 \end{aligned}$$

درېم مثال: د $y = x^2 - 3$ تابع گراف د x له محور سره يوه سطحه رابند وي، د دې سطحي مساحت پيدا کړئ.

حل: لومړی د سطحي د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسمو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 3 \Rightarrow y' = 2x \\
 y' &= 0 \Rightarrow x = 0 \\
 x &= 0, y = x^2 - 3 \Rightarrow y = 0^2 - 3 \\
 &\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3) \text{ بحراني ټکی} \\
 y &= 0, x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \\
 x &= \pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0) \text{ د محورونو سره د پېرېکړې ټکي}
 \end{aligned}$$



څرنگه چې د $y = x^2 - 3$ په $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پېرېکړې ټکي متناظر قيمتونه لري نو گراف يې د x محور څخه لاندې دی او انټيگرال يې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټيگرال د سرحدونو نيماني مساحت پيدا کوو او په 2 کې يې ضربوو:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx \right) = -2 \left(\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}} \right) \\
 &= -2 \left(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0] \right) = -2 \left(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \right) \\
 &= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = -\frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7) = -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = -\frac{9.826}{3} + 10.2 \\
 &= -3.2753 + 10.2 = 6.9247
 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع گراف رسم د منځني او x محور تر منځ د سطحي مساحت په $[-1, 4]$ انټروال کې وټاکي.

حل: لومړی د منځني بحراني ټکی او له محورونو سره د پریکړې ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3, x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, y = x^2 - 3x \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}, (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

بحراني ټکی

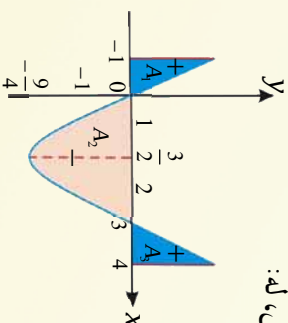
څرنگه چې $0 < y'' = 2$ دی، نو د $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي یې د x

له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right)\right] +$$

$$\left[\left(\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (3)^2\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1-27+64-27}{3} + \frac{3+27-48+27}{2} = \frac{65-54}{3} + \frac{57-48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22+27}{6} = \frac{49}{6}$$

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحنی د x محور او $x = -1$ ، $x = 2$ کرښو تر منځ مساحت پیداکړئ.

حل: لومړی بحراني ټکی وروسته د x محور سره تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

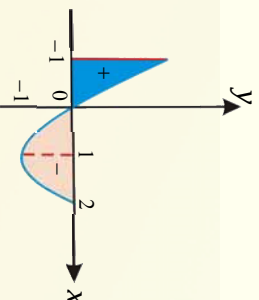
$$x = 1, \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1, -1) \text{ بحراني ټکی}$$

خړنگه چې $y' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1, -1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0, \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



خړنگه چې منحنی د $[-1, 2]$ په انټروال کې له مبدا څخه تیرېږي او د منحنی یوه برخه د $[-1, 0]$ په انټروال کې د x محور پورته خوا ته او بله برخه یې د $[0, 2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خوا ته پرته ده. انټیګرال یې منفي دی:

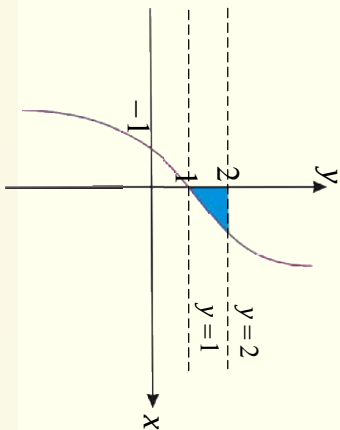
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \\ &= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3}) \\ &= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



1- د $f(x) = \sin x$ منحنی او د x محور تر منځ مساحت په $[2\pi, -2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y = x^3 + 1$ تابع منحنی او $y = 1$ ، $y = 2$

کرنیو تر منځ مساحت وټاکئ.



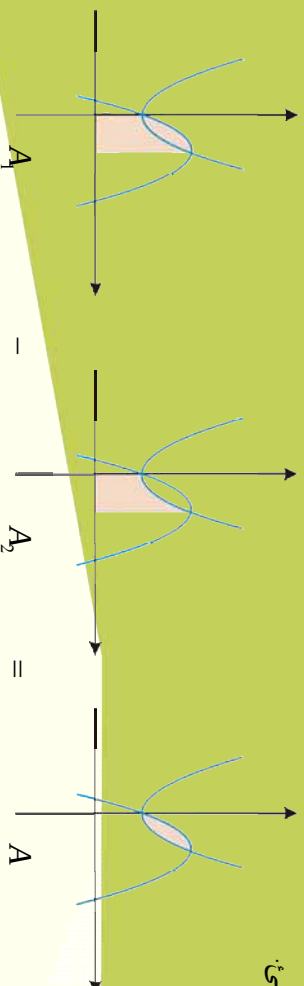
3- د $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1 + x}}$ منحنی او د $x = 0$ او $x = 1$ کرنیو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شویو منحنی گانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سمولي په اړه څه

وبلای شې.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعگانې راکړل شوی وي.

- د $y_2 = y_1$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی گراف رسم کړئ.
- څرنگه چې د y_1 تابع گراف د y_2 تابع د گراف څخه لوړ دی نو د تابعگانو د انټیگرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحنی او $y = x + 2$ د کرني لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحي مساحت حساب کړئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

- که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحنی گانو د محصور شوي سطحي د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع گراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندیني منحنی د x د محور سره مساحت په $[a, b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

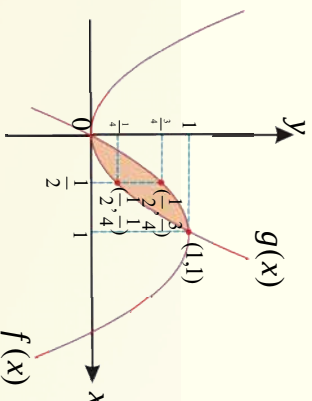
- که چیرې د $g(x)$ تابع گراف د $f(x)$ تابع د گراف د پاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنی گانو د گرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکي پیدا کوز:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x^2, \quad g(x) = x^2 \\ f(x) &= g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \\ 2x - x^2 - x^2 &= 0 \\ 2x - 2x^2 &= 0 \\ 2x(1 - x) &= 0 \\ 2x &= 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 1 - x &= 0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{aligned}$$



لیدل کېږي چې د دواړو منحنی گانو تقاطع $(1,1)$ او $(0,0)$ ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کړو.

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - 2x^2] dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

دویم مثال: د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ تابع او $g(x) = 2 - x$ کرنيې د گرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

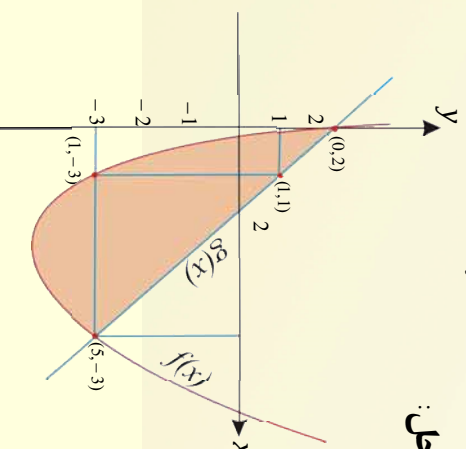
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

د کرنيې او منحنی د تقاطع ټکي $(5, -3)$ ، $(0, 2)$ $\Rightarrow$



له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې گراف د $f(x)$ گراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنی چې $g(x) > f(x)$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx \\ &= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + 5 \cdot \frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \\ &= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

درېم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعگانو د گرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

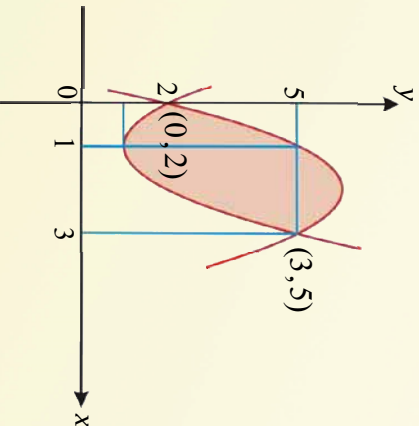
حل: څرنگه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انټیگرال حدوده جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره وضع کوو:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 2 &= x^2 - 2x + 2 \\ \Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ -2x^2 + 6x &= 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0, \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 &= 3 \end{aligned}$$

د دواړو منځني گانو د تقاطع ټکي $(0, 2)$ ، $(3, 5)$

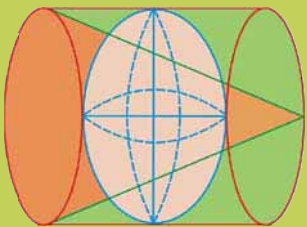
د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت له $(0, 2)$ ، $(3, 5)$ دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $g(x)$ گراف د $f(x)$ له گراف څخه پورته واقع دی نو لرو:



$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x \right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^3 \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 6 - 0 - \frac{1}{3} \cdot 27 + 9 - 6 + 0 \\
 &= -9 + 18 - 9 + 9 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

پوښتنې

- 1- د $y = x^2 + 4x$ او $y = -x^2 + 4x$ منځني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.
- 2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.
- 3- د $y^2 = 2x + 6$ منځني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.



د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پيدا کړئ.

په مخکښو ټولگيو کې مو د جسمونو حجم پيدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معين انټيگرال څخه په گڼه اخيستنې سره ثبوتوو.



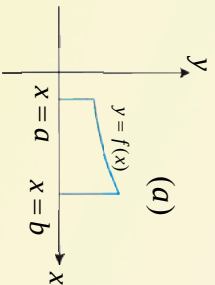
فعاليت

- يو ټکی او يوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونيسئ، چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د يوې مستقيمې کرښې له دوران څخه د يوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم يې واخلئ.
- د نوموړی جسم د حجم فورمول وليکئ او ووايئ چې هغه څنگه ثبوتوو.

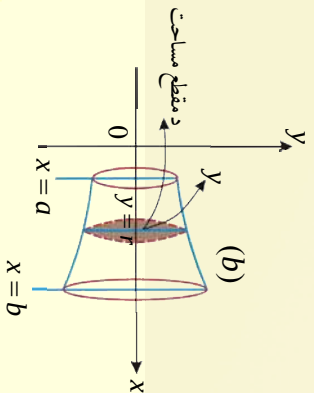
د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيلوو:

- که چيرې د $y = f(x)$ متعدي تابع د منحنۍ مساحت

نظر (a) شکل



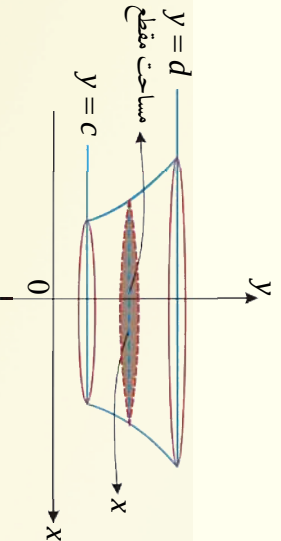
د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحنۍ په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتنۍ تابع د منحنۍ له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقريباً استوانه يي شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوي ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دایري مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع د منځني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع $y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:



$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انټيګرال په مرسته په لاس راځي لکه:

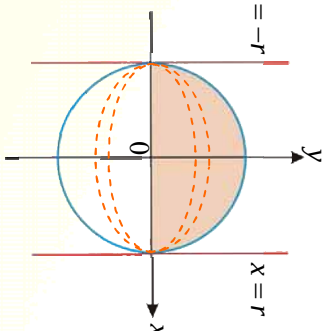
1- د انټيګرال په مرسته د کروي حجم پېدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چېرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دایري معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نیمې دایري حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کړو، چې د دایري بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

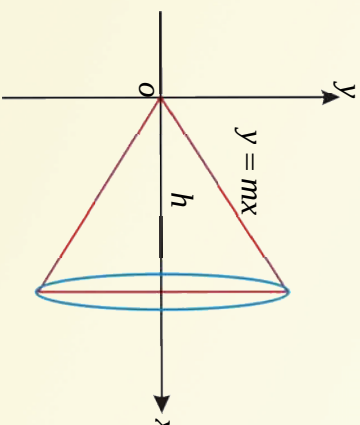
$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= 2\pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] \\
 &= 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) \\
 V &= \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{د کرې حجم})
 \end{aligned}$$



2- د انټیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرني له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h \pi y^2 dx \\
 &= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx \\
 &= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi h}{3} (mh)^2
 \end{aligned}$$



له پورته شکل څخه لیدل کیږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره موازی ده، یعنې $r \parallel y$ او همدارنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، نو د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$\begin{aligned}
 y = mx &\Rightarrow r = mh \\
 &= \frac{\pi h}{3} r^2 \\
 V &= \pi r^2 \times \frac{h}{3}
 \end{aligned}$$

خړنگه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

3- د ایس حجم چې د $1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$ د منحنی او x محور په چاپېر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د ایس د نیمایي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ ایس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

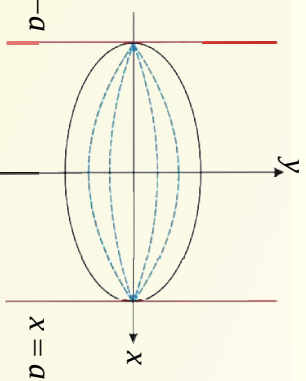
$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx = 2\pi \left[b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^a \quad x = -a$$

$$= 2\pi \left[\left(b^2 a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2 a - \frac{b^2 a}{3} \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2b^2 a}{3} \right]$$

$$V = \frac{4}{3} \pi b^2 a \Rightarrow \text{د ایس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$



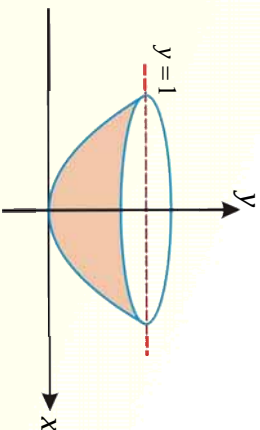
که چېرې د ایس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتگرال حساب کړو د ایس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راشي:

$$\frac{4}{3} \pi a^2 b = \text{د ایس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم}$$

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چي د $y = x^2$ او $y = 1$ کرني ترمنځ پرته مستوي مساحت د دوران
 څخه د y په محور په لاس راځي، پيدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسمو وروسته يی مساحت حسابوو:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi$$

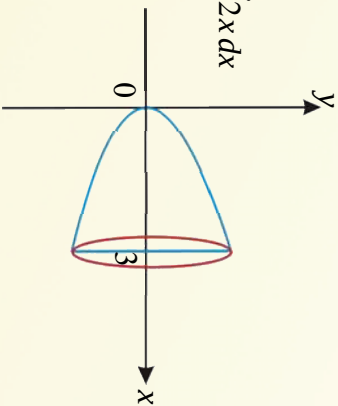
$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$


دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرني ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پيدا کړئ.

حل:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$V = 9\pi$$


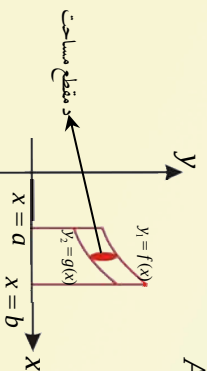
يادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعگانې په $[a, b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم
 حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحنی گانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرنيو ترمنځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته
 راځي:

$\Delta x =$ د استواني ارتفاع

$$A(x) = \pi(y_1 - y_2)^2 = \pi y_1^2 - \pi y_2^2$$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع گراف د

$g(x)$ تابع گراف څخه پورته قرار لري.



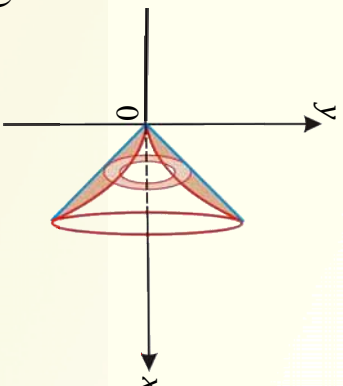
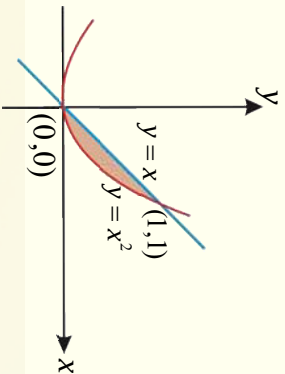
$$V = \int_a^b \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

مثال : د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^2$ منحنی او $y = x$ کرني تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل :



$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, \quad g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \right] = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] \\ &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

پوښتنې

- د هغه جسم حجم چې د $y = \sin x$ تابع او د $x = 0$ او $x = \pi$ دوو کرنيو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.
- د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y = x^3$ منحنی او $y = 8$ ، $x = 0$ کرنيو تر منځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپېر جوړېږي حساب کړئ؟

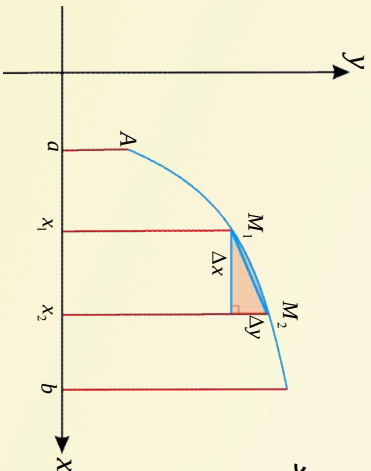
د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

څرنگه کولای شو چې د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟



- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال په پام کې ونیسئ او هغې ته A ووايي، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متصادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a, b]$ انټروال په درېو مساوي برخو ویشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښې فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وايي او د M_1 M_2 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه کولای شو، چې د M_1 M_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.



ثبوت:

له قایم الزاویه M_1 M_2 مثلث څخه په گټې اخیستني سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$f'(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad g'(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t) \cdot \Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t) \cdot \Delta t$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[f'(t) \cdot \Delta t]^2 + [g'(t) \cdot \Delta t]^2}$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t_i)]^2 + [g'(t_i)]^2} \cdot \Delta t$$

$$= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

حل: څرنگه چې د دایرې پارامترې محاسبه په دې ډول

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{array} \right. \quad ds$$
$$P = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt$$

$$x' = -r \sin t, \quad y' = r \cos t$$

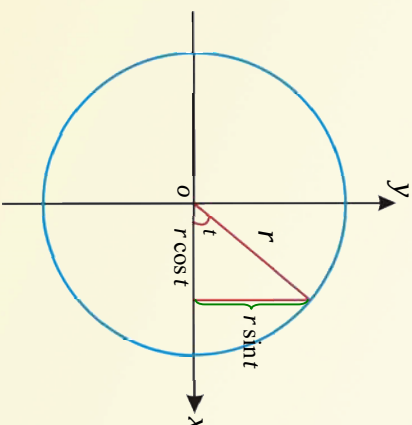
$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} dt$$

د دېرې نيمایي محیط $P = [rt]_0^\pi = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$

$$د دایرې مکمل محیط = 2\pi r$$



يادونه:

1- د $f(x) = y$ منځني معادله په $b \leq x \leq a$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نيولو سره د

$$\text{منځنۍ د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:} \quad \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

مثال: د $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منځني د قوس اوږدوالی په $0 \leq x \leq 4$ فاصله کې حساب کړئ.

$$\text{حل: } f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^4 \\ &= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right] = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) \\ &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 1 + \frac{9}{4}x \\ du &= \frac{9}{4} dx \end{aligned}$$

$$dx = \frac{4}{9} du$$

2- د $x = f(y)$ منځني په $b \leq y \leq a$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر په پام کې نيولو سره

$$\text{لرو، چې:} \quad \int_a^b \sqrt{f'(y)^2 + 1} \, dy$$

مثال: د $f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منځني د قوس اوږدوالی په $1 \leq y \leq 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$\begin{aligned}
 f(y) &= y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}} \\
 &= \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \, dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \, dy \\
 &= \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \, dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \\
 &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
 &= \frac{8}{27} [\sqrt{100} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 1\right)^3}] \\
 &= \frac{8}{27} [\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}] = \frac{8}{27} [10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}]
 \end{aligned}$$

$$u = \frac{9}{4}y + 1$$

$$du = \frac{9}{4}dy$$

$$dy = \frac{4}{9}du$$



1. د $x = t^2$ او $y = t^3$ د منحنی ګانو د قوس اوږدوالی د $1 \leq x \leq 2$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.
2. د $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوږدوالی د $0 \leq x \leq 1$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.

د څپرکي مهم ټکي

- د (a, b) د $f(x)$ انټيگرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی رابښي چې

د $f(x)$ د $Y = f(x)$ منحنی او د $X = a$ او $X = b$ کرښو له خوا رابند دی.

- که د $f(x)$ تابع په $[a, b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د X د محور پورته خوا ته او که $f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د محور لاندې خوا ته واقع او انټيگرال یې منفي دی.

د دوو منحنی ګانو په واسطه د محصور شوی مساحت محاسبه:

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ د ګراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاستنۍ برخه کې واقع وي، لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چېرې د $Y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $X = a$ او $X = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتنۍ تابع له منحنی د دوران څخه د X محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $a - b = \Delta x$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوي ده چې دې سطحو ته مقطع ولایي او یوهیږو چې د دایري مساحت نظر ته $r^2 \pi = A(X)$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د Y له محور سره موازي دی؛ نو $r = Y$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

لاندې ټول دی:

- که د $X = f(Y)$ تابع مساحت د $C = Y$ ، $d = Y$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر Y محور ته $r^2 \pi = A(Y)$ چې ارتفاع یې $C - d = \Delta x$ او شعاع یې $r = X$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ټول دی:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

$$= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \quad \text{د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول:}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad &= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \\ (2) \quad &= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)} dy \end{aligned}$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $0 = 5 - x - y^2$ منحني او د y محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x محور تر منځ پرتې ده، پیدا کړئ.

3. د $2x - y = x^2$ او $y = 6x - x^2$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $3 - 4x - x^2 = y$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $8x + x^2 - 6x^2 = y$ او $4x - x^2 = y$ منحني گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ او $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس حساب کړئ.

7. د هغې سطحې حجم چې د $2 + x^2 = \frac{1}{4}y$ منحني د تابع له دوران څخه د x د محور پر شاوخوا په $[0, 4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.

8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحنی او د $2 = x^2 + y^2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوي وي پیدا کړئ.

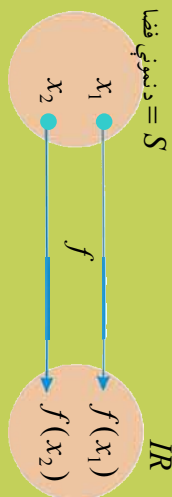
9. د هغه جسم حجم چې د $1 + x = \frac{1}{2}y$ کرښې دوران او د x محور په $[2, 6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.

10. د $4 - x = y$ منحنی د قوس اوږدوالی په $2 \leq x \leq -2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $\frac{4}{3} - x = y$ تابع د منحنی د قوس اوږدوالی په $5 \leq x \leq 2$ انټروال کې پیدا کړئ.

اووم خپر کی احصائیه



موزېٽول افغانان يو.



د احتمال د تابع توزیع

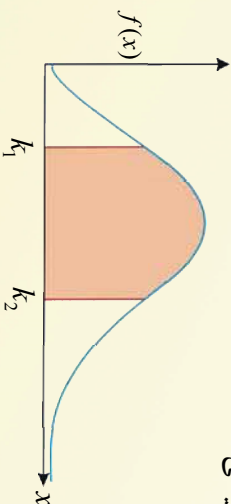
د تصادفي ازماينښت، نمونيزي فضا او ناڅاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندۍ کوي.



فعالیت

- هغه تصادفي متحول چې په احصايه او احتمالاتو کې ترې گټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپیر لري؟

- که $x_1, x_2, \dots, x_n$ د یوه سټ عناصر او $f(x_i) = P(x = x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.



- مخالف شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او $f(x)$ د منځني لاندینی محدود شوی مساحت د انټیگرال په شکل ویشئ.

- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $\sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = [E(x = x_i)]$ ، $[E(x_i) - x_i]^2$ او

$f(x_i)^2 [x_i - E(x_i)]$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیلونو:

– هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

– که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو نو د $[x_n, f(x_n), \dots, [x_2, f(x_2), [x_1, f(x_1), [x_1, f(x_1)$ مرتبو جوړونه د معجز (گسسته) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \leq x)$ وښو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

- که چیرې x پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چیرې x ناڅاپه معجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي معجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنگه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

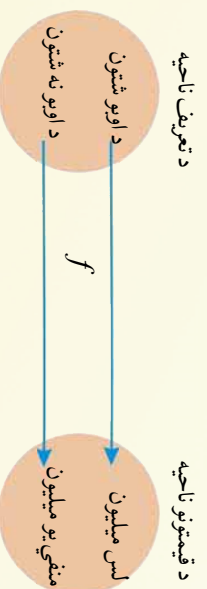
$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډې پر سر د اوبو یوه څاه وکړي، د اوبو څاه په یو میلیون افغاني، تمامېږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس میلیونه افغاني اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کښلو یو میلیون افغاني مصرف په زیان ورکړي.

الف- دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب- که د دې احتمال چې کیندل شوی څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (Expected Value)، وړانس او د x تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړي.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وړانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوی دی:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	وارانس	انحراف معیار
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	

فرض کړو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو ترڅلارو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېر وړل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د مجموعي احتمال تابع پیدا کړي.

د مجموعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستې سره وواړئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او

حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟



د دوه جمله‌يي توزیع او د برونولي ازمویښت

یو ګل‌بون کورونکي د پوهنتون د کانکور په آزمویښه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سورج کوئ چې دا ګلون کورونکي په آزمویښه کې بریالی کېږي او یا نه؟ نتیجه پلټي کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزیع یوه معجزه توزیع ده چې د مختلفو پېښو د

توصیف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.



فعالیت

د لاندې آزمویښتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پایلې په لاس راوړلای شئ:

- خو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شپږ راشي.
- خو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه بې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د یوې جمعې څخه خو ځلې د یوې مړۍ (مهره) اخېستل چې د تورو او سپینو مړۍ لرونکې ده.
- د یوې جمعې څخه چې د تورو او سپینو مړیو لرونکې ده خو ځلې یوه مړۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مړۍ سپینه وي (چې اخېستل شوي مړۍ بیا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بریالیتوب د n آزمایښت څخه ($m < n$) چې ترتیب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه یادېږي او فورمول یې ولیکئ.

- که د m شکلونو د بریالیتوب احتمال د n آزمایښت څخه په P او $n - m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمایښت څخه په q وښودل شي نو د m کامیابي احتمال د آزمایښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور څوابه آزمویښي د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بریالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بریالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر یوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟
- له پورتنۍ فعالیت څخه څرګندېږي چې د برونولي آزمایښت یو ناڅاپه ازمايښت دی، چې کولای شو پایله یې په دوه حالتونو بریالیتوب او نابریالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزیع کولای شو چې په $P(x=m) = P^m(1-P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ په بڼه وښودل شي چې داسې حال کې

چې P د برناليټوب احتمال او $q = 1 - p$ د نابلراليټوب احتمال دی.

که چېرې یو آزماینست n ځلې تکرار کړو، یو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزماینست د برناليټوب احتمال P او نابلراليټوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزماینست څخه د m ځلې برناليټوب

$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

پورتني اړیکه کولای شو چې په دې ډول $B(m, n, p)$ هم وښودل شي.

د پورتنۍ فورمول په پام کې نیولو سره کولای شو، د دوه جملیدي د توزیع اوسط په $np = \bar{x}$ او د دوی توزیع معیاري انحراف د $S = \sqrt{npq}$ په بڼه وښودل شي.

مثال: دیره ناروغ د بڼه کېدو احتمال د شکري له ناروغی څخه 0.4 دی، که چېرې 15 تنه په دې ناروغي اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه بڼه شي او همدل شان پیدا کړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنگه چې $n = 15$ ، $m = 5$ ، $q = 0.6$ ، $P = 0.4$ دی نو:

$$\begin{aligned} P(m=5) &= \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10} \\ &= \frac{15!}{5!(15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191 \\ &= \frac{22.309876}{120} = 0.1859 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3 \leq m \leq 4) &= \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i} = (3^{15})(0.4)^3 (0.6)^{15-3} + (4^{15})(0.4)^4 (0.6)^{15-4} \\ &= \frac{15!}{3!(15-3)!} (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!(15-4)!} (0.0256)(0.6)^{11} \\ &= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) \\ &= \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} = 0.063365 + 0.012650 \\ P(3 \leq m \leq 4) &= 0.076015 \end{aligned}$$



په یوه کلي کې 200 کورنۍ اوسېږي که هر کورنۍ 4 ماشومان ولري ددې احتمال پیدا کړئ چې هره کورنۍ

- حد اقل یو زوی لري.
- یوازې دوه زامن لري.
- یوه یا دوې لوڼې ولري.

د پواسن د احتمال توزیع

$$\begin{aligned} 1) \quad & b(x, n, p) = \binom{x}{n} p^x q^{n-x} \\ 2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} b(x, n, p) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \\ 3) \quad & P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \end{aligned}$$

که چېرې د برنولي دوه جملېي توزیع فورمول په پام کې ونیسو،
ایا ویلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جملېي توزیع کې د P
قیمت صفر ته تقرب وکړي او د n قیمت لایتناهي ته تقرب
وکړي؟ نو د برنولي دوه جملېي توزیع څه سره مساوي کېږي.



فعالیت

که $n = 5$, $p = 0.1$ او $m = 2$ وي د $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ قیمتونه په داسې حال کې چې

، $P(X = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$ او $\lambda = np$ وي محاسبه کړئ او له پواسنو توابع قیمتونه سره یې پرتله کړئ،

ویلای شي چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د m شکلونو د کامیابي احتمال د n آزمایشونو څخه کله چې n لوی
او د کامیابي احتمال P کوچنی وي، د تقریبي محاسبې لپاره وکارول کېږي.

د فورمول عبارت دی له: $P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$

چې $\lambda = np$ او $e = 2.71828$ دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم وریانس له λ سره برابر دی.

مثال: 200 تنو مسافرینو دیوی لونکی ټکټ اخېستلی دی د مخکینو تجارتو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین واپس را نه شي خورمه دی.

حل: په دې مسئله کې د نه راتل (کامیايي ده او همدارنگه لیدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ یعنې د کامیايی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \quad \lambda = n p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$\begin{aligned} P(3) &= \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \frac{1}{7.3890461584} \cdot 8 \\ &= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804 \end{aligned}$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جملېني په فورمول محاسبه کړو، لرو چې:

$$\begin{aligned} P(X = m) &= \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \\ n = 200 \quad \Rightarrow q = 0.99 \\ p = 0.01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3) &= P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.99)^{200-3} \\ &= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.99)^{197} = 0.1814 \end{aligned}$$

څرنگه چې لیدل کېږي دواړه څو اړونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول

وښو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتنۍ فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورنگ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې خلورتنه په لومړيو دريو دقيقو کې راضی وي څومره دی.

حل:

$$\lambda = 60, \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4, \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$\begin{aligned} P(m = 4) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 81 \\ &= \frac{1}{20.0854} \cdot 81 = \frac{4.03278}{24} = 0.168032 \end{aligned}$$



د چاپ د يوه ماشين د جوړولو لپاره په يوه کال کې په متوسط ډول ورتگ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشين د جوړولو لپاره د ورتگ د احتمال توزیع په يوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معيار انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتگ مصرف 100 افغانی وي، د هر ماشين د جوړولو مصرف پيدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې ديوه ماشين د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

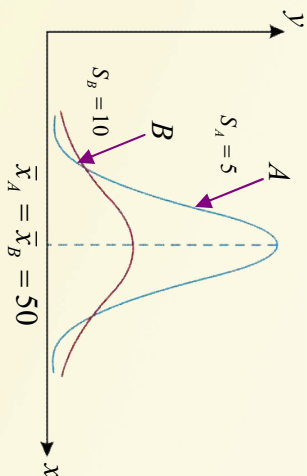


د نورمال توزیع
 پوهنځیو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر له
 زاغولی سره ده، په نورمال منحني کې د پراگندګۍ مرکزي
 شاخص (معیاري انحراف او اوسط) څه ډول
 ځایو نه (موقعیتونه) نیولی شي.

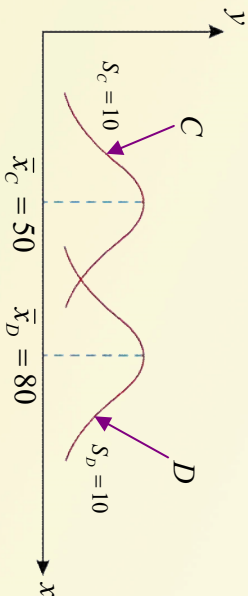


فعالیت

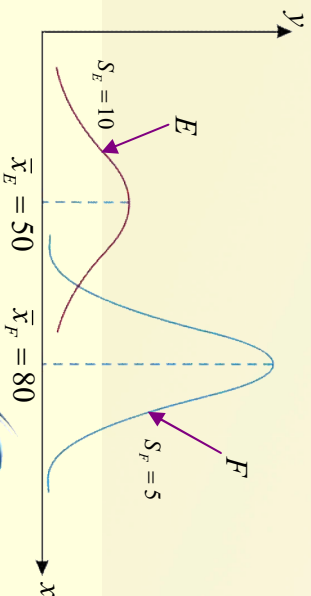
د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکي دي.
 خو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندیني فعالیت له پورتنيو شکلونو څخه په ګټه اخیستې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکي

ده؟

- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکي دي؟
 - د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکي دي؟
 - د نورمال منځني شکل ډاډو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلي دي؟
- د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منځني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

او یا

په داسې حال کې چې $e = 2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف

، x پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منځني جگوالی رښتني.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعگانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګی

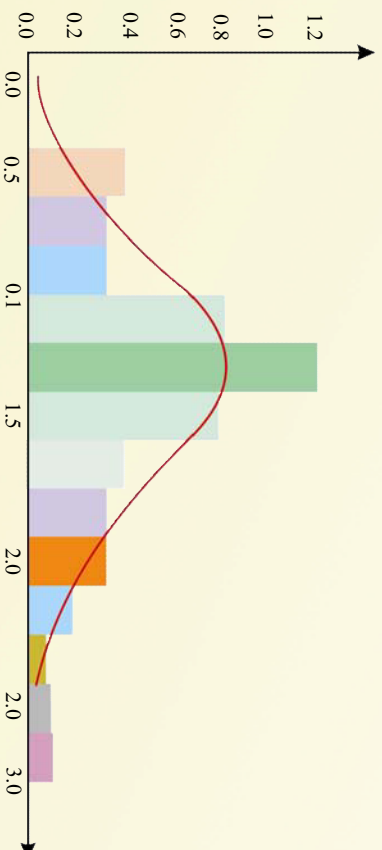
مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، چې د یوه تن په واسطه چې لوړنن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو. یوه اندازه لوګی د نایټروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطلي ګراف د نایټروجن اوکساید میزان د

لاندې نیول شوی. ددې مستطلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونډیې شمېر له $\left(\frac{gr}{mil}\right)$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې

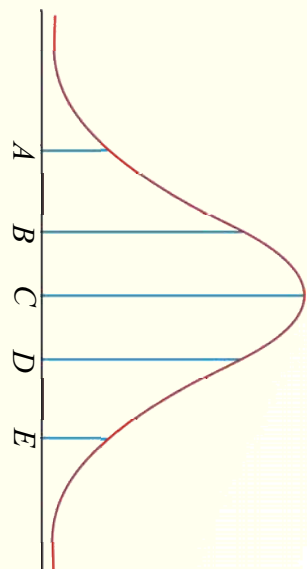
اندازګیری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې (چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.174 = 0.2 \cdot 0.870 = \frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2

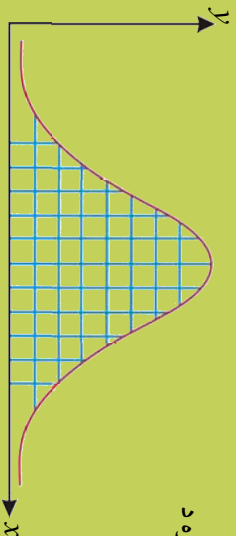
پورې پراته دي.



لانڊني شڪل ۾ پام ڪي وڻيسيءَ A, B, C, D او E ٽڪرو موقعيت د معيار انحراف د اوسط له جنسه پيدا ڪري.



د نورمال توزیع منحنی لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:
د $y = f(x)$ د منحنی لاندې مساحت د محاسبې لپاره د
څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

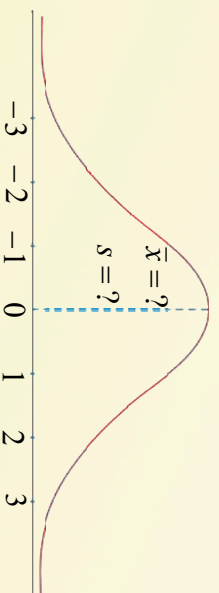


فعالیت

- که چیرې د x تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیار انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انټیګرال په بڼه بې ولیکئ.

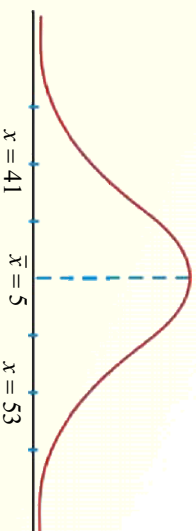
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انټیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟

- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



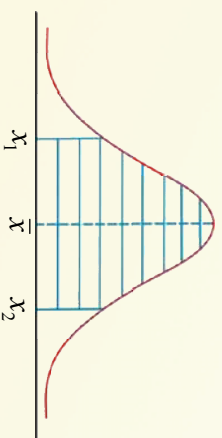
- که په لاندې شکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونه په نورمال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسط او

$$s = 5, \text{ معیار انحراف بنودل شوی دی نو د } Z = \frac{x - \bar{x}}{s} \text{ مقدار په لاس راوړئ.}$$



له پورتنۍ فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انټګرال ونیسو او د منځني لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$\begin{aligned} f(x_1 < x < x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx \end{aligned}$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع ګانو د منځني لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً ډاکټر ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د ستونزو کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې

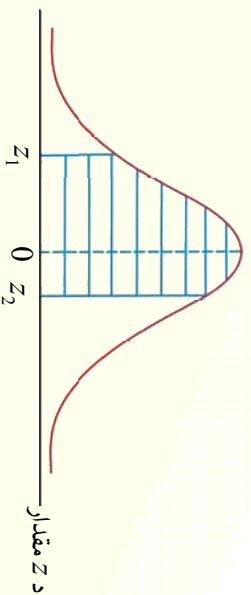
$$\text{اړیکې په واسطه ستونزو کړو.} \quad Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته Z د ستونزو نورمال متحول په نامه او منځني ته د ستونزو نورمال منځني په نامه یا د نورمال احتمال منځني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د Z ستونزو وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف نې دی، همدارنګه د نورمال منځني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

لاندي مساحت د يوه منځني يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لري او کولای

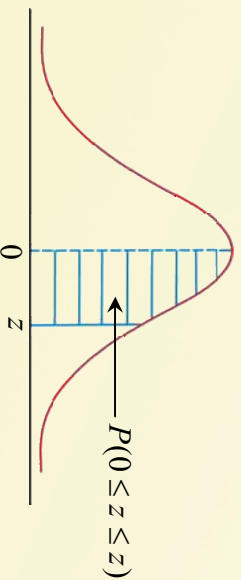
شو چې د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندي ډول وښيو.

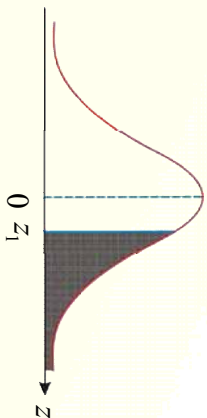
$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$



د x متحول منځني لاندي مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د Z متحول له منځني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډه د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

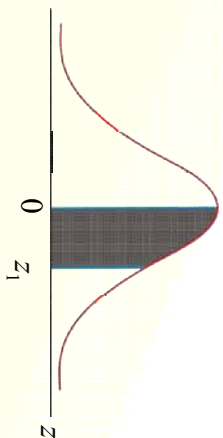
د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډه ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګلرون لري. لاندي جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پای راښيي، هغه ارقام چې د جدول دیپلسه لیکل شوي دي، راښيي چې Z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منځني لاندي مساحت له صفر ټکي څخه تر Z پورې راښيي.





جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول (2)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0050	0.0100	0.0150	0.0200	0.0244	0.0289	0.0334	0.0378	0.0421
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0556	0.0594	0.0631	0.0668	0.0705	0.0743
0.2	0.0743	0.0783	0.0821	0.0859	0.0896	0.0932	0.0968	0.1003	0.1038	0.1073
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1405	0.1441	0.1477	0.1515
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1665	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2421	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2643	0.2674	0.2705	0.2735	0.2766	0.2796	0.2826	0.2856
0.8	0.2886	0.2915	0.2945	0.2974	0.3003	0.3031	0.3059	0.3087	0.3115	0.3143
0.9	0.3159	0.3187	0.3215	0.3243	0.3271	0.3298	0.3325	0.3352	0.3379	0.3406
1.0	0.3438	0.3461	0.3483	0.3505	0.3526	0.3547	0.3568	0.3588	0.3608	0.3628
1.1	0.3649	0.3669	0.3688	0.3707	0.3726	0.3745	0.3764	0.3782	0.3801	0.3819
1.2	0.3841	0.3859	0.3877	0.3895	0.3912	0.3929	0.3946	0.3962	0.3979	0.3995
1.3	0.4015	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162
1.4	0.4179	0.4194	0.4209	0.4225	0.4241	0.4256	0.4271	0.4286	0.4299	0.4314
1.5	0.4332	0.4348	0.4364	0.4379	0.4394	0.4408	0.4423	0.4437	0.4451	0.4465
1.6	0.4479	0.4493	0.4508	0.4522	0.4535	0.4549	0.4563	0.4576	0.4589	0.4602
1.7	0.4615	0.4629	0.4642	0.4655	0.4668	0.4681	0.4693	0.4706	0.4719	0.4731
1.8	0.4744	0.4756	0.4768	0.4779	0.4790	0.4801	0.4812	0.4823	0.4834	0.4845
1.9	0.4856	0.4867	0.4878	0.4888	0.4898	0.4908	0.4918	0.4927	0.4936	0.4945
2.0	0.4954	0.4963	0.4972	0.4981	0.4990	0.4998	0.5006	0.5013	0.5020	0.5027
2.1	0.5034	0.5041	0.5048	0.5054	0.5061	0.5067	0.5073	0.5078	0.5084	0.5089
2.2	0.5094	0.5099	0.5104	0.5108	0.5113	0.5118	0.5122	0.5127	0.5131	0.5136
2.3	0.5140	0.5144	0.5148	0.5152	0.5156	0.5160	0.5164	0.5168	0.5171	0.5176
2.4	0.5179	0.5182	0.5186	0.5189	0.5192	0.5196	0.5199	0.5202	0.5205	0.5208
2.5	0.5211	0.5214	0.5217	0.5220	0.5223	0.5226	0.5229	0.5231	0.5234	0.5236
2.6	0.5239	0.5241	0.5244	0.5246	0.5248	0.5251	0.5253	0.5255	0.5257	0.5259
2.7	0.5261	0.5263	0.5265	0.5267	0.5269	0.5271	0.5273	0.5275	0.5276	0.5278
2.8	0.5279	0.5281	0.5283	0.5285	0.5286	0.5288	0.5289	0.5291	0.5292	0.5294
2.9	0.5295	0.5296	0.5297	0.5298	0.5299	0.5300	0.5301	0.5302	0.5303	0.5304
3.0	0.5305	0.5306	0.5307	0.5308	0.5309	0.5309	0.5310	0.5311	0.5311	0.5312
3.1	0.5312	0.5313	0.5314	0.5314	0.5315	0.5315	0.5316	0.5316	0.5317	0.5317
3.2	0.5317	0.5318	0.5318	0.5318	0.5319	0.5319	0.5319	0.5320	0.5320	0.5320
3.3	0.5320	0.5321	0.5321	0.5321	0.5322	0.5322	0.5322	0.5323	0.5323	0.5323
3.4	0.5323	0.5324	0.5324	0.5324	0.5325	0.5325	0.5325	0.5325	0.5326	0.5326
3.5	0.5326	0.5326	0.5327	0.5327	0.5327	0.5327	0.5328	0.5328	0.5328	0.5328
3.6	0.5328	0.5328	0.5329	0.5329	0.5329	0.5329	0.5330	0.5330	0.5330	0.5330
3.7	0.5330	0.5331	0.5331	0.5331	0.5332	0.5332	0.5332	0.5332	0.5333	0.5333
3.8	0.5333	0.5333	0.5334	0.5334	0.5334	0.5334	0.5335	0.5335	0.5335	0.5335
3.9	0.5335	0.5336	0.5336	0.5336	0.5337	0.5337	0.5337	0.5337	0.5338	0.5338
4.0	0.5338	0.5338	0.5339	0.5339	0.5339	0.5339	0.5340	0.5340	0.5340	0.5340
4.1	0.5340	0.5341	0.5341	0.5341	0.5342	0.5342	0.5342	0.5342	0.5343	0.5343
4.2	0.5343	0.5343	0.5344	0.5344	0.5344	0.5344	0.5345	0.5345	0.5345	0.5345
4.3	0.5345	0.5346	0.5346	0.5346	0.5347	0.5347	0.5347	0.5347	0.5348	0.5348
4.4	0.5348	0.5348	0.5349	0.5349	0.5349	0.5349	0.5350	0.5350	0.5350	0.5350
4.5	0.5350	0.5351	0.5351	0.5351	0.5352	0.5352	0.5352	0.5352	0.5353	0.5353
4.6	0.5353	0.5353	0.5354	0.5354	0.5354	0.5354	0.5355	0.5355	0.5355	0.5355
4.7	0.5355	0.5356	0.5356	0.5356	0.5357	0.5357	0.5357	0.5357	0.5358	0.5358
4.8	0.5358	0.5358	0.5359	0.5359	0.5359	0.5359	0.5360	0.5360	0.5360	0.5360
4.9	0.5360	0.5361	0.5361	0.5361	0.5362	0.5362	0.5362	0.5362	0.5363	0.5363
5.0	0.5363	0.5363	0.5364	0.5364	0.5364	0.5364	0.5365	0.5365	0.5365	0.5365
5.1	0.5365	0.5366	0.5366	0.5366	0.5367	0.5367	0.5367	0.5367	0.5368	0.5368
5.2	0.5368	0.5368	0.5369	0.5369	0.5369	0.5369	0.5370	0.5370	0.5370	0.5370
5.3	0.5370	0.5371	0.5371	0.5371	0.5372	0.5372	0.5372	0.5372	0.5373	0.5373
5.4	0.5373	0.5373	0.5374	0.5374	0.5374	0.5374	0.5375	0.5375	0.5375	0.5375
5.5	0.5375	0.5376	0.5376	0.5376	0.5377	0.5377	0.5377	0.5377	0.5378	0.5378
5.6	0.5378	0.5378	0.5379	0.5379	0.5379	0.5379	0.5380	0.5380	0.5380	0.5380
5.7	0.5380	0.5381	0.5381	0.5381	0.5382	0.5382	0.5382	0.5382	0.5383	0.5383
5.8	0.5383	0.5383	0.5384	0.5384	0.5384	0.5384	0.5385	0.5385	0.5385	0.5385
5.9	0.5385	0.5386	0.5386	0.5386	0.5387	0.5387	0.5387	0.5387	0.5388	0.5388
6.0	0.5388	0.5388	0.5389	0.5389	0.5389	0.5389	0.5390	0.5390	0.5390	0.5390
6.1	0.5390	0.5391	0.5391	0.5391	0.5392	0.5392	0.5392	0.5392	0.5393	0.5393
6.2	0.5393	0.5393	0.5394	0.5394	0.5394	0.5394	0.5395	0.5395	0.5395	0.5395
6.3	0.5395	0.5396	0.5396	0.5396	0.5397	0.5397	0.5397	0.5397	0.5398	0.5398
6.4	0.5398	0.5398	0.5399	0.5399	0.5399	0.5399	0.5400	0.5400	0.5400	0.5400
6.5	0.5400	0.5401	0.5401	0.5401	0.5402	0.5402	0.5402	0.5402	0.5403	0.5403
6.6	0.5403	0.5403	0.5404	0.5404	0.5404	0.5405	0.5405	0.5405	0.5405	0.5406
6.7	0.5406	0.5406	0.5407	0.5407	0.5407	0.5408	0.5408	0.5408	0.5408	0.5409
6.8	0.5409	0.5409	0.5410	0.5410	0.5410	0.5411	0.5411	0.5411	0.5412	0.5412
6.9	0.5412	0.5412	0.5413	0.5413	0.5413	0.5414	0.5414	0.5414	0.5415	0.5415
7.0	0.5415	0.5416	0.5416	0.5416	0.5417	0.5417	0.5417	0.5418	0.5418	0.5418
7.1	0.5418	0.5419	0.5419	0.5419	0.5420	0.5420	0.5420	0.5420	0.5421	0.5421
7.2	0.5421	0.5422	0.5422	0.5422	0.5423	0.5423	0.5423	0.5424	0.5424	0.5424
7.3	0.5424	0.5425	0.5425	0.5425	0.5426	0.5426	0.5426	0.5427	0.5427	0.5427
7.4	0.5427	0.5428	0.5428	0.5428	0.5429	0.5429	0.5429	0.5430	0.5430	0.5430
7.5	0.5430	0.5431	0.5431	0.5431	0.5432	0.5432	0.5432	0.5433	0.5433	0.5433
7.6	0.5433	0.5434	0.5434	0.5434	0.5435	0.5435	0.5435	0.5436	0.5436	0.5436
7.7	0.5436	0.5437	0.5437	0.5437	0.5438	0.5438	0.5438	0.5439	0.5439	0.5439
7.8	0.5439	0.5440	0.5440	0.5440	0.5441	0.5441	0.5441	0.5442	0.5442	0.5442
7.9	0.5442	0.5443	0.5443	0.5443	0.5444	0.5444	0.5444	0.5445	0.5445	0.5445
8.0	0.5445	0.5446	0.5446	0.5446	0.5447	0.5447	0.5447	0.5448	0.5448	0.5448
8.1	0.5448	0.5449	0.5449	0.5449	0.5450	0.5450	0.5450	0.5451	0.5451	0.5451
8.2	0.5451	0.5452	0.5452	0.5452	0.5453	0.5453	0.5453	0.5454	0.5454	0.5454
8.3	0.5454	0.5455	0.5455	0.5455	0.5456	0.5456	0.5456	0.5457	0.5457	0.5457
8.4	0.5457	0.5458	0.5458	0.5458	0.5459	0.5459	0.5459	0.5460	0.5460	0.5460
8.5	0.5460	0.5461	0.5461	0.5461	0.5462	0.5462	0.5462	0.5463	0.5463	0.5463
8.6	0.5463	0.5464	0.5464	0.5464	0.5465	0.5465	0.5465	0.5466	0.5466	0.5466
8.7	0.5466	0.5467	0.5467	0.5467	0.5468	0.5468	0.5468	0.5469	0.5469	0.5469
8.8	0.5469	0.5470	0.5470	0.5470	0.5471	0.5471	0.5471	0.5472	0.5472	0.5472
8.9	0.5472	0.5473	0.5473	0.5473	0.5474	0.5474	0.5474	0.5475	0.5475	0.5475
9.0	0.5475	0.5476	0.5476	0.5476	0.5477	0.5477	0.5477	0.5478	0.5478	0.5478
9.1	0.5478	0.5479	0.5479	0.5479	0.5480	0.5480	0.5480	0.5481	0.5481	0.5481
9.2	0.5481	0.5482	0.5482	0.5482	0.5483	0.5483	0.5483	0.5484	0.5484	0.5484
9.3	0.5484	0.5485	0.5485	0.5485	0.5486	0.5486	0.5486	0.5487	0.5487	0.5487
9.4	0.5487	0.5488	0.5488	0.5488	0.5489	0.5489	0.5489	0.5490	0.5490	0.5490
9.5	0.5490	0.5491	0.5491	0.5491	0.5492	0.5492	0.5492	0.5493	0.5493	0.5493
9.6	0.5493	0.5494	0.5494	0.5494	0.5495	0.5495	0.5495	0.5496	0.5496	0.5496
9.7	0.5496	0.5497	0.5497	0.5497	0.5498	0.5498	0.5498	0.5499	0.5499	0.5499

د مثال په ډول که چیرې $z = 1.56$ وي لومړۍ هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ور سېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منځنۍ د لاندې اړوندې سطحې د $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې:

$$P(0 \leq Z \leq 1.56) = 0.9406$$

لومړۍ مثال: د څښلو (نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي لیتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي لیتره او معیاري انحراف یې 4 ملي لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي لیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

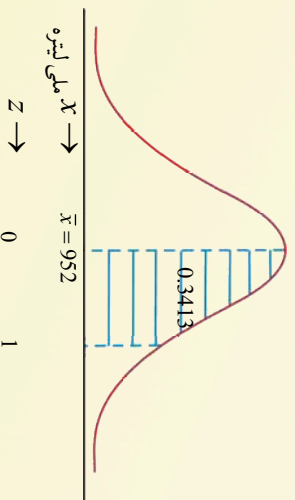
حل: لومړی z له x جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي. د لوست د پیل له جدول (2) څخه په ګډه اخیستې سره لرو $P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي لیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډکې شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي لیتره نوشابه لري؛ یعنې:

$$\begin{aligned} P(0 \leq z \leq 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$



دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده کوونکو د نښرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستندرد جدول څخه په ګډه اخیستې سره له 54 څخه تر 84 نښرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

حل : د مسألې حل په لاندې ډول په ترسېمي بڼه ښودل شوی دی.

$$x = 54 \text{ لپاره لرو: } z_1 = \frac{54 - 70}{8} = -2$$

$$x = 84 \text{ لپاره لرو: } z_2 = \frac{84 - 70}{8} = 1.75$$

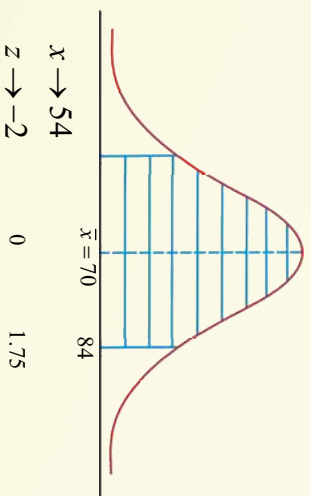
څرنگه چې د سټېنډرډ نورمال منځني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی؛ نو له نورمال سټېنډرډ جدول (2) څخه لرو:

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

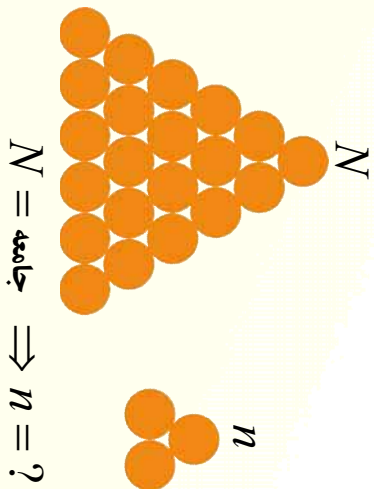
د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.4772 + 0.4599 \\ = 0.9371$$



د لومړۍ مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي لیټرو پورې نږدې لري.

نمونه اخيستل
په دي متل كې ((موتى د خړوارو نمونه ده)) څرنگه
تحليلوى.



فعاليت

- كه چيرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولگي د زده‌كونكو ونې(قد) اندازه كړئ ددې كار لپاره څه ډول لارې وړاندېز كوى.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل كېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو كومې يوي ته غورځولئ وركوي؟ ولې؟
- د نمونه گيرۍ لپاره ښكاره خپل دلايل شته ايا كولای شي يو يا دوه دليلونه يې وړايئ.
- سوچ كولای شي چې د اوسط او معيار انحراف عددي ځانگړنې چې د ټولنې د توزيع او د نمونې د توزيع لپاره ورڅخه گټه اخيستل كېږي، پر شان وي.
- ايا د نمونگيرې او ليدل شويو ناڅاپه متحولينو د مقدارونو ترمنځ توپير شته؟
- له پورتنۍ فعاليت څخه پوهېږو چې د نمونه اخيستنې بېلې بېلې لارې شته دي.
- ناڅاپه نمونه اخيسته: د ټولنې ټول عناصر په ټاكل كېدو كې هم چانس دی.
- سيسټميك نمونه اخيسته: د ټولنې عناصر په منظم ډول كود وهل شوى دى.
- طبقه‌بنۍ نمونه اخيسته: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوى وي.
- خوشه‌بنۍ نمونه اخيسته: كه ټولنه ډېره لويه وي، هغه په بېلابېلو ځانگړو وېشو او له هرې ځانگړې څخه يوه نمونه ټاكلو.
- د هرې ټولنې عددي ځانگړنې (اوسط معيار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وايي.
- د هرې ټولنې د عددي نمونگيرې ځانگړنې (اوسط معيار انحراف) ته آماره وايي.
- د نمونې پايلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولينو په بڼه په پام كې نيسو.
- د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناڅاپه متحولونو يوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ويل كېږي.

که چیرې تابع یې په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$$

مثال: فرض کړو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې گلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 گلولې بیرته یوه ځای په ځای کول (د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2, x_3 ناڅاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړۍ پړاو کې د x_1 ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې گلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې گلولې ټاکلو په لومړۍ پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې گلولې او د (1) عدد سپینه گلوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د x_3 ناڅاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې گلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه گلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2, x_3 ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

خرنگه چې نمونه اخیسته ناڅاپه ده، نو د x_1, x_2, x_3 ناڅاپه متحولین یو له بل څخه پیل دی نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلي نه دي، هغې ته آماره وايي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه گڼه ناڅاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثال بیان کړئ؟
3. فرض کړو چې د یوې ټولنې څخه مو ناڅاپه نمونه را نیولی ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

$$\sum_{i=1}^n x_i = ?$$

د نموني د اوسط توزیع
 دولت غواړي ویوهېږي چې دیوه بنسار د وگړو متوسطه
 گټه(سپما) څومره ده؟
 ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نموني اوسط محاسبه کوي.
 اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟



فعالیت

- د لاندې data د دریو زده کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله رابښي:

نوم	داود	سلیمان	پرواک
نمبري	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده کوونکو د نمبرو اوسط او معیار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبري د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه گوني نموني د ځای په نیولو) اریه او د هرې نموني اوسط د جدول په ښه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د توزیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي گرام رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

له پورترتي فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, \dots, x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

$$E(\bar{x}_n) = \mu$$

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط،

$$U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta$$

د $\bar{x}_n$ متحول وړانس،

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

د نمونې وړانس

$$E(S^2) = \delta^2$$

د نمونې وړانس اوسط،

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ نمونې اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وړانس S^2 د

نمونې وړانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه گونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x = 1, 2, 3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وړانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیبي گراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

الف:

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^3 x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^3 x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

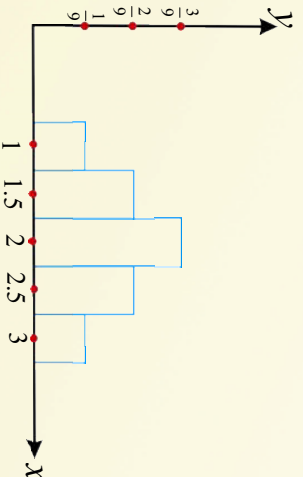
ج: لاندې جدول ټولې دوه گونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هریوه اوسط رابڼې:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي گراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کپري چي:

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$



1. فرض کړو چې یوه ټولنه د 2, 4, 6 او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه گونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي گراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړي.

د مرکزي لمېټ قضیه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$

پوهېږو چې د ټولنې کښت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کښت ته نمونه بې اوسط ویل کېږي د $\bar{x}$ او s د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې پوښي.



فعالیت

- که د لویې ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ چې N د ټولنې عناصر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او s معیار انحراف دی) وښو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟

- که د $x_1, x_2, \dots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه پیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟

- که $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناڅاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوی وي او د μ اوسط لرونکی وي او σ^2 وریانس وي ویلاى شو چې د $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې N د یوې لویې ټولنې د μ متناهي اوسط او σ^2 متناهي وریانس لرونکي یوه ناڅاپه n ګونه نمونه وټاکو،

په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu = \mu_x$ اوسط $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ وریانس دی او

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

قیمتونه لپاره (1) ته نږدی کېږي. په حقیقت کې بې لمېټ هغه وخت چې $n \rightarrow \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

مثال: د يوه لوی ټولګی څخه چې د زده‌کونکو د رياضي مضمون نمبر نورمال توزیع د 71 اوسط او معیار انحراف يې 9 دی. يوه 9 ټاپي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چيرې په تصادفي ډول يو زده‌کونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمونې يې له 80 څخه زیاتې وي محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیار انحراف لرونکی دی، نو لرو:

$$\begin{aligned} P(\bar{x} > 80) &= P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9} = P(z > 3)\right) \\ &= 1 - P(z) \leq 3 = 1 - 0.9987 = 0.0013 \end{aligned}$$

همدارنګه د $n = 1$ لپاره لرو:

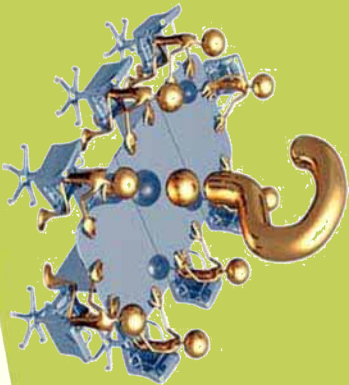
$$\begin{aligned} P(\bar{x} > 80) &= P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9} = P(z > 1)\right) \\ &= 1 - P(z) \leq 1 = 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راورو.



1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250\text{ gr}$ او معیاري انحراف یې $\sigma = 20\text{ gr}$ وي. مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ ټاټوبي د جعبو کوچنی له 240 gr وي.



د نمونه يي توزیع نسبت

د A په یوه ښار کې n کسان غواړي د B یو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راښي او x د موافقو کسانو شمېر وښيي ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.



فعالیت

- که چیرې x د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

که چیرې $\hat{P} = \frac{x}{n} \Rightarrow x = n\hat{P}$ وي د x قیمت په تعویض سره په پورتنۍ فورمول کې $f(\hat{P})$ ولیکئ.

- د $\hat{P} = \frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناڅاپه متحولینو د $x_1, x_2, \dots, x_n$ له مجموع څخه

تشکیل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چیرې x ناڅاپه متحول، n د برونې د آزماینښتونو مجموعه، P د هر آزماینښت بریالیتوب احتمال وي په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x) = nP$ اوسط npq د $V(x) = npq$ ناڅاپه متحول وړانس وي.

د دوه جملېي د توزیع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} (1-p)^{n(1-\hat{P})} \quad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحولینو اوسط (Expected Value) او وړانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_p = E(\hat{P}) = P$$

$$\delta^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} = \frac{P(1-P)}{n}$$

$$z = \frac{x - nP}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

د نورمال ستنداره توزیع بې عبارت دی له:

مثال: د کالیور د بڼه والي احتمال $P = 0.3$ دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه $n = 6$ ګرځونه ټاکو که چیرې x د ناقصو

کالیور ښوونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

حل: د x ناڅاپه متحول د دوه جمله‌يي توزیع د $P = 0.3$ او $n = 6$ پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \quad x = 0, 1, \dots, 6$$

د دوه جمله‌يي توزیع جدول څخه په ګډه اخیستنې سره لاندې احتمالي محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$ قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

$$P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 B(x, 6, 0.3) = 0.9294$$

په پورتنۍ مثال کې:

$$P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 3) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

اویا:



1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ (تېروتنې) څخه ډک کړي

$P = 0.7$ وي، یوه نمونه د $n = 200$ ګرځونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلی وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د $0.05 \pm$ داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولېږي.

- ددې احتمال محاسبه کړي چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

د څپر کې مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د بڼې تابع په عنوان په احصايه او احتمالونو کې ترې نه گڼه اخیستل کېږي.
- د يوه معجزا ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحیه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو ناحیه سره د تعريف د ناحیې د عناصرو اوونده احتمالونه گډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحیه کې هغه عددونه گډون ولري چې د x ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کړي او د قيمتونو ناحیه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه پيوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحیه يې د x ټول پيوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او د قيمتونو ناحیه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x معجزا ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وړيلنس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \bar{x}$$

$$V(x) = S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع،

- د دوه جملېني توزيع،

$$P(X = m) = P^m (1 - P)^{n-m}$$

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\bar{x} = np$$

- د دوه جملېني توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S = \sqrt{npq}$ ،
- د پواسن د احتمال توزيع يو معجزا احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

- که N له بڼې نورمالې جامعي څخه د n ځلې(ښايي) ناڅاپه نمونه ونه کوو د $\bar{x}$ د نمونېي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکي له $\mu = \mu_{(\bar{x})}$ اوسط سره او $\delta^2 = \frac{\delta^2}{n}$ او $\delta = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{n}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.

- د نورمال توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحیې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع

$$f(x) = \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\delta} \right)^2}$$

يې عبارت ده له:

- چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحنی لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انټیګرال

$$\text{څخه ګټه واخلو:} \quad P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

- که چېرې x د دوه جملېبې توزیع د n شمېر د بېرلو کې پر له پسې آزمایشونه، P د کامیابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر آزمایش د ناکامیې احتمال وي، په دې صورت کې د احصایه د اوسط نمونه او د x ناڅاپه متحول وړانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$ ، $E(x) = np$ او $V(x) = npq$ همدا رنگه د دوه جملېبې توزیع، اوسط، وړانس او د ستودړو توزیع او $\hat{P}$ ناڅاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P, \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{\hat{P}} P^{\hat{P}} q^{(1-\hat{P})}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}, \quad V(\hat{P}) = \frac{Pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه یې د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په ستودړو نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه.
- د نمونه گیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناڅاپه نمونه گیری، منظمه نمونه گیری، ګروپي نمونه گیری، خوشه یي نمونه گیری.
- د x نمونې ناڅاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$
- که چېرې x د ټولنې یوه ناڅاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $\mu = E(\bar{x}_n)$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \sigma^2$ د ټولنې وړانس، δ^2 د ټولنې وړانس او σ^2 ته د نمونو وړانس وايي.

د څپرکي پوښتني

- دوه سکي، څلور ځلي پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
 - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
 - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونډني فضا سره نسبت ورکړئ.
 - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
- که چیرې د یوې جوړې بوټونو د تقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
- د یوه شرکت په گام کې 500 باني کمیټیټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 باني نقص لري، یو اخیستونکی له هغې څخه 10 باني کمیټیټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 باني جوړو اخیستی وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلي. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$ ، s ، $\bar{x} + s$ ، $\bar{x} - s$ او $\bar{x} - 2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جگوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $s + \bar{x}$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جگوالی وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x} + s, 0.6h)$ څرنگه چې د نورمال منحني منظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $s - \bar{x}$ هم سرته ورسوئ. اوس د $2s + \bar{x}$ ، $s - \bar{x}$ د پاسه دوه ټکي د h او $0.15h$ په جگوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلي، په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او وړایئ چې دا منحنی په کومو فاصلو کې محذب او په کومو فاصلو کې مقعر ده.

- په یوه روغتون یوه څېړنه رابښي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پراسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
 - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمپلده ده؟
 - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
 - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړي وي؟ ولې؟
- فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پراسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبي احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل يوه ټاپيې تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقيقاً 5 ټاپيې تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپيې تېروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کړو چې د هغه بستون قطر چې د يوه اتوماتيکي ماشين په واسطه جوړېږي په نورمال يا اوسط ډول 25

- ملي متر او معيار انحراف يې 0.5 ملي متره توزيع شوی وي.
- کله چې د بستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال يې څومره دی.
- د بستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چېرې 1000 بستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.

- د توليد شويو بستونونو څو فيصده د 24.56 ملي متره معادل قطر يا له هغه څخه زيات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \dots, x_n$ د x ناڅاپه متحول يوه تصادفي نمونه وي ايا د $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ، $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$ او

$$\frac{x_1 + x_2}{x_4} \text{ او } x_3 - x_2 + 3x_1 \text{ تابع آماره دی.}$$

9. که چېرې x يو ناڅاپه متحول او د μ او σ^2 پارامترونه وي آيا د $\frac{3x_1 - 2x_3 - \sigma}{8\mu + x_2}$ ، $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$ او

$\mu - x_3 + x_1$ توابع μ او σ^2 مجهول وي آيا پورتنیو نابېلگانو ته احصايه ولې شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې گډون لري، که د عمرونو اوږدوالی يې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي يوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کړو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو

د عمر اوږدوالی راوښتي:

- د x د احتمال توزيع وليکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د يوه ښار د وگړو د گڼې اندازه چې د غيرنورمال توزيع $\mu = 90$ افغاني اوسط او د 25 افغاني معيار انحراف سره دی که چېرې د 225 کسيز د وگړو د يوې نمونې د گڼې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زياته وي، احتمال يې څومره دی؟

12. پوهيږو چې %56 وگړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه گونې يوه نمونه کې حداقل %60 وگړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P = 0.4$ وي، يعنې ددې احتمال چې يو وگړی د A کانديد طرفدار وي 0.4 دی، يوه $n = 200$ گونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لاقل 100 وگړی د A کانديد طرفدار وي.

آتم خیر کی احتمالات







بېلې شوي (غیر متمدادي) او نښتي (تمدادي) فضاگانې
 په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اړه په ځمکه توپیري ویلای شئ چې له دې نلرونو څخه په ځمکه د اړو د څانګو د تولیدو توپیر په څه کې دی؟



فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې بېلې کومې دي؟
- آیا د ونې څخه د یو بې پخې منې د لویدلو وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لویدلو نمونه یي فضا ولیکي.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لویدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یي فضا عبارت له هغه ټاکلي او یا نا ټاکلي سټ یا مجموعې څخه ده، چې د ځینې عناصرو یې د شمېر وړ، او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.
 هغه نمونه یي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر (countable) او تشخیص وړ وي د پریکړې یا ګڼسټه (شلیدلي) نمونه یي فضا یا متصل په نامه یادېږي او هغه نمونه یي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتي (پیوسته) یا متمدادي نمونه یي فضا په نامه یادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یي فضاګانو څخه کومه یوه نښتي (پیوسته) او کومه یوه پریکړې (ګڼسټه) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د یوې کرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي گرېډ څخه تر 1000 درجو د سانتي گرېډ پورې.

ه: د 30° او 45° زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونېي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوی، نو پریکړې یا ګسته فضا ولې (ب، د او ه) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تشکیل (جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نښتې یا پیوسته فضاګانې دي.

دویم مثال: خیبر د کور د ګالانو د اوبو لږ لپاره یو ولټریمپ اخیستی دي.

که چېرې د ولټریمپ عمر د ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د ولټریمپ د عمر د اوږدوالی نمونه یي فضا چې کیدای شي هر مثبت حقیقي عدد د ولټریمپ د وړاندې په صورت کې د کار د مودې قیمت شي؛ په دې ډول د داسې ناڅاپي حادثې پېښېدل صفر هر حقیقي عدد کیدای شي چې د نمونېي فضا یوه غیر متمادي، نښتې یا پیوسته نمونه یي فضا ده؛ یعنې $\{t \text{ د ولټریمپ د وړاندې وخت، } t \geq 0 : t \in IR = S$ چې په پورتنۍ نمونه یي فضا کې t د ولټریمپ د عمر اوږدوالی رانېي.

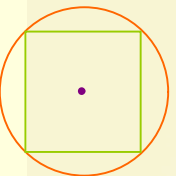
يادونه:

1- د لومړي مثال الف او ج جزو په محدودې نمونېي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر یې د شمېر وړ دي، د ب او د جزو نو کې نامحدودې نمونېي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقیقي عددونه اخیستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونېي فضا متصل یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتني

1- یو غشي وېشونکی دیو د دایروي د سګ په دننه چې وړانګه یې I ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه یي فضا اړایه کړي. وړیاست چې دا څنګه یوه نمونه یي فضا ده.



2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې په دننه کې یو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.

3- یو طبعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پیدا کړي چې عدد د 4 مضرب وي.



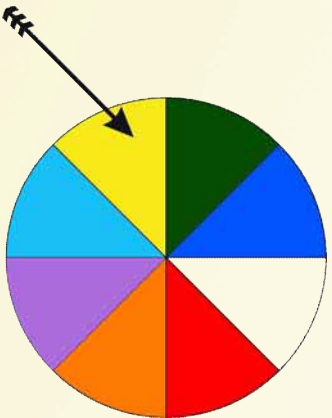
هم چانسې پېښې

د یوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1 او یا 5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس یو له بل سره څه اړیکه لري؟



فعالیت

د معماڅرخ شکل په څېر یوه دايره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې یو ښکاري غشي وولې لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنگه ناحیه او شین رنگه ناحیه کې د غشي لگېدل یو له بل سره څه اړیکه لري؟
- د غشي د لگېدو چانس د کچه په اړه د نارنجي او سیتو رنگونو سره په پرتله باندې څه ویلای شي؟
- د غشي د لگېدو د چانس کچې په تور رنگ څومره ده؟
- د تجربې، نمونې، فضا یې ولیکئ.
- لومړني ناڅاپه پېښې لست کړي او د هر یو احتمال پیدا کړی دی؟
- د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ویلای شي؟

د پورتنۍ فعالیت له اجرا کولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوي د پېښېدلو چانس په یوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسېه پېښو په نامه یادېږي. لکه:

که چېرې $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = S$ یوه نمونه یې فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i = 1, 2, \dots, n$ لپاره یوه ناڅاپه لومړنۍ پېښه ده که $0 \leq P(\{e_i\}) \leq 1$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنیو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له یوه سره ده.

$$P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$

مثال: خلور تنه په يوه لوبه کې گډون کوي. تاسې د هر يوه د گډلو احتمال پيدا کړئ؟ په داسې حال کې چې نمونه يي فضا هم چانسې وي.

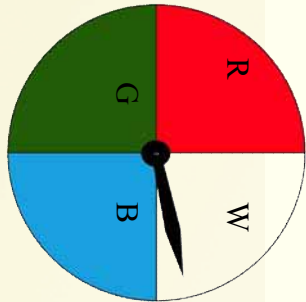
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه يي فضا وي، نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دي.

لرو چې: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسې دي.

پوښتنې

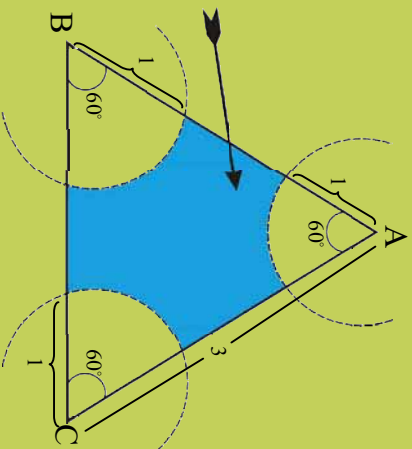
- 1- مخامخ شکل په پام کې ونيسي، که چېرې د عقربې (سټي) د درېدلو احتمال په آسماني او سپين رنگ 0.30 او د سره رنگ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنگ پرمخ درېدلو احتمال به څومره وي؟



- 2- لاندي د کثرت جدول د رمل يوي دانې د اچولو لپاره په پام کې ونيسي. هغه احتمال پيدا کړئ، چې د رمل دانه (د) شميره راشي.

درمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

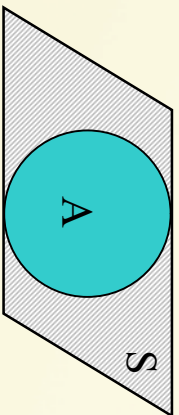
- 3- د رمل يوه دانه داسې ډکه شوی چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که يو چا په شرط وهلو کې (د) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پيدا کړي.



د نښتي يا پيوسته(متمادي) فضاگانو احتمال
 د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحد ده، يو غشي ولړ، ددې احتمال چې د غشي د لگېدلو ټکي د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



- آیا ویلای شي چې د یوې توبه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکي یو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړیکه لري؟
- آیا کو لای شئ دا مسئله په فضا د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

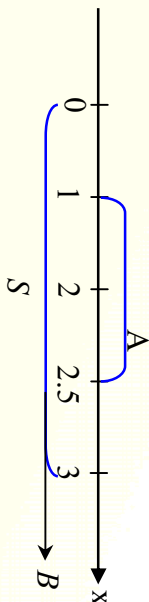


پیوسته(متمادي) نمونېني فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده، چې شکل یې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنگه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د توبه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو. معمولاً اعداد له محور څخه په ګڼه اخیستې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو لکه x ، y او z څخه ګټه اخلو.

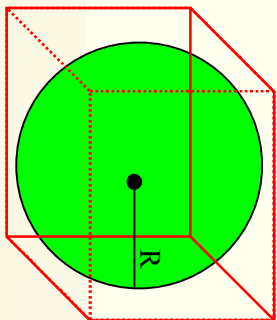
لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0, 3)$ په انټروال کې د x یو ټکی په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې $2.5 < x < 1$ وی؟

حل: د حقيقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلي د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نيولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A) = \frac{\text{د } A \text{ ټوټه کړنې اوږدوالي}}{\text{د } B \text{ ټوټه کړنې اوږدوالي}} = \frac{2.5-1}{3-0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



دويم مثال: په ناڅاپه ډول يو ټکی د يوه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې 2 واحدونه وي ټاکو پيدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکي د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې a واحدونه ده، محاطه وي، نو د کُرې شعاع $r = \frac{a}{2}$ کېدای شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کُرې د حجم او S نمونه يي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A) = \frac{\text{د کُرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3} \pi (1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$



- 1- د حقيقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0 \leq A \leq 3$ او $-2 \leq B \leq 0$ وي، ددې احتمال پيدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.
- 2- که چېرې يو ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پر مخ وټاکو، ددې احتمال پيدا کړي، چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نږدې وي.



مشروط احتمال

له يوه ولايت څخه (20) تنه نارينه او ښځينه زده کونکي د کانکور په آزمونه کې د طب پوهنځي ته بريالي شوي دي، د هغوي له جملې څخه يې 5 تنه ښه کار له بازاران دي. که په 15 تنو برياليو نارينه وو کې 4 تنه يې ښه کار ته بازاران وي. د نوموړو محصلينو له مېنځ څخه په اتفاقي ډول يو تن ټاکو احتمال د دې پيدا کړئ، چې:

- ټاکل شوی محصل يوه کار ته بازه نځلي وي؟
- په پورتنۍ سوال کې هغه نځلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بريالي شوي؟



فعاليت

له 2500 زده کونکو څخه 1600 تنه يې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده کونکو څخه يې 70% نارينه زده کونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده کونکو لپاره احتمال يو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نيولو سره د يوه تن زده کونکي ټاکل د ښوونځي له زده کونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M: نارينه زده کونکي دي.

F: يوه ښځينه زده کونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پيدا کړئ چې د مطالعه کونکو له مېنځ څخه ټاکل شوي زده کونکي نارينه وي؟
- ددې احتمال پيدا کړئ چې د مطالعه کونکو له مېنځ څخه ټاکل شوی تن يوه ښځينه وي؟
- ددې احتمال پيدا کړئ چې ټاکل شوي زده کونکي يو نارينه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعاليت د سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

په حقيقت کې د هغه نارينه زده کونکي د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونښي فضا او $|\Omega|$ نمونښي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

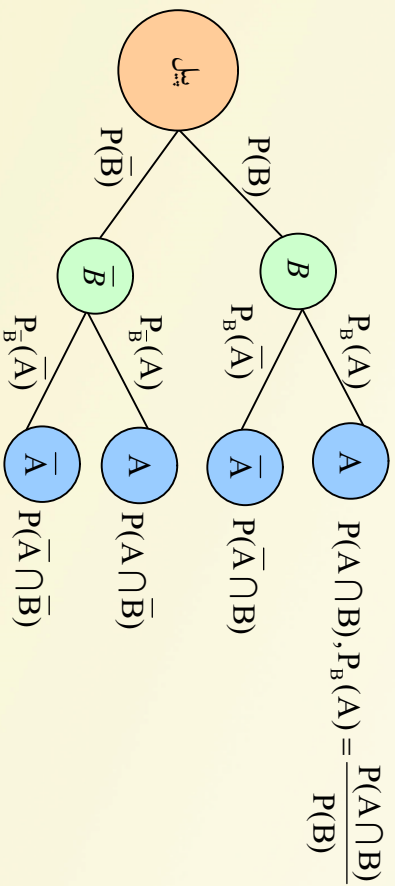
$$P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{|M \cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{|M \cap R|}{|R|} = \text{د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.}$$

$P_R(M)$ د هغې پېښې له احتمال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونښي فضا A او B د نمونښي فضا دوي ناڅاپي پېښې وي، په داسې حال کې چې $P(B) \neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ چې د A ناڅاپي پېښې

احتمال نظر د B ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونډیز دیاگرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

1- د مسیر د لومړي قاعدې څخه لرو:

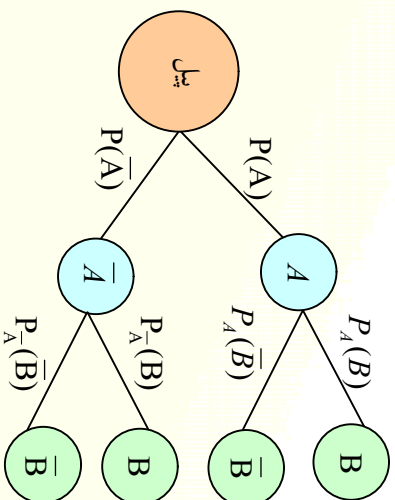
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

مسیر له دویمې قاعدې د څخه په ګټه اخیستې سره لرو:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

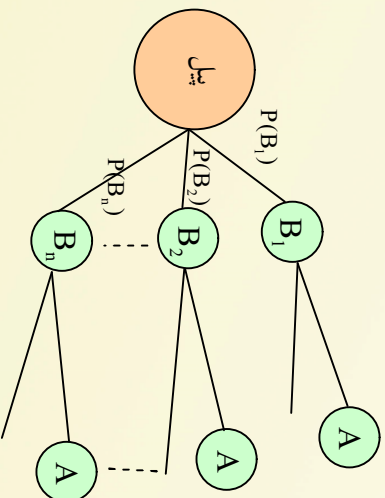
2- ونډیزه(درختي) دیاگرام له مخې $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$

3- که چېرې نوموړی حالت د Ω نمونه يي فضا ناڅاپي پېښو $B_1, B_2, \dots, B_n$ اختياري ویش لپاره عمومیت ورکړو د ونې په ډول د ډیگرام د په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i) = \frac{P_B(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_B(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \quad i=1, 2, \dots, n$$



لومړی مثال: یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګاډي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

B: په ټاکلي وخت رسېدل

A: د ګاډي په واسطه راتلل

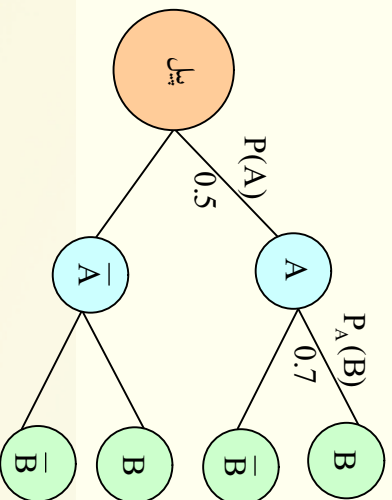
وي په دي صورت کي د A مشروط احتمال نظر B ته يعني $P_b(A)$ مطلوب دي؟

حل: د نوموړي احتمال د پيدا کولو لپاره د ونهيز يا درختي ډياگرام په پام کي نيولو سره نظر فورمول ته په لاندې

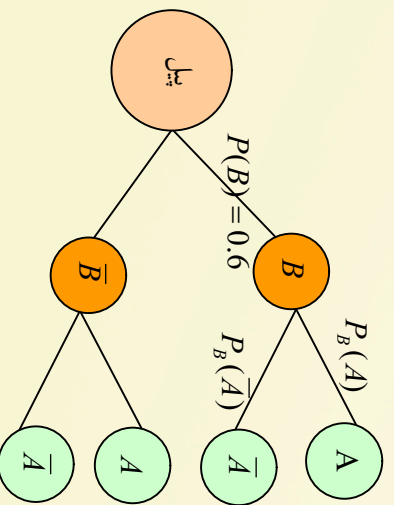
$$P_b(A) = \frac{P(A) \cdot P_a(B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

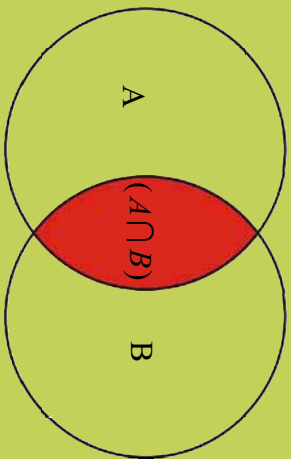
چول په لاس راځي:

نو په دي اساس د گادي په واسطه د رسېدلو احتمال په دي شرط چي په ټاکلي وخت په بنورونځي کي وي 58.33% سلنې سره برابر دي.



له لاندې ډياگرام څخه په گټه اخيستي سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل بنورونځي ته په دي شرط چي د گادي په واسطه سرته رسېدلي وي، يعني $P_a(B)$ د ناڅاپه پېښې احتمال بنورونځي ته په ټاکلي وخت رسېدل، په دي شرط چي د گادي په واسطه نه وي راځلي يعني $P_a(B)$ مطلوب دي.





د حاصل ضرب اصل

د A ناڅاپه پېښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناڅاپه پېښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



فعالیت

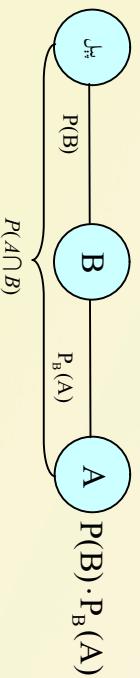
- که چیرې A او B دوي ناڅاپه پېښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناڅاپه پېښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونډیز دیناګرام څخه په ګڼه اخیستې سره د $P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناڅاپه پېښو احتمال د A او B ناڅاپه پېښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګڼه اخیستې سره ولیکئ.

- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړي.
 - آیا کولای شو چې موضوع د ډیرو ناڅاپه پېښو لپاره عمومیت ورکړو.
- د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضا کې د A او B د دوو ناڅاپه پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره

$$\text{لرو: } P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

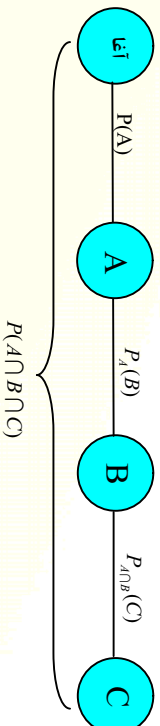
دا مسئله کولای شو چې د ونډیز دیناګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$



دا مطلب د دریو A، B او C پیښو لپاره په لاندې ډول پراخوړ.



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناڅاپي پیښو لپاره هم په لاس راوړو.

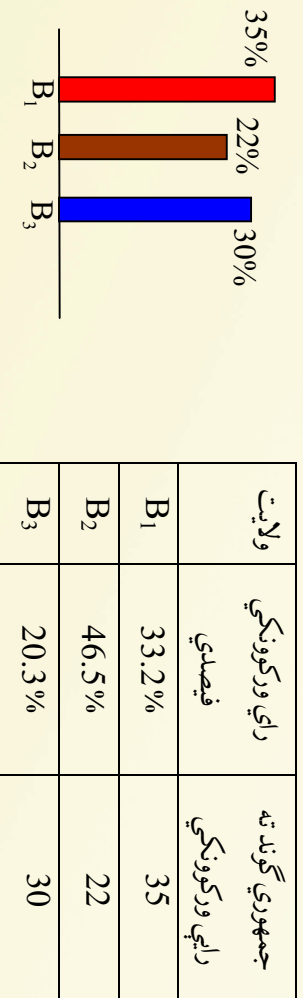
مثال: د B_1 ، B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هریو لپاره د ټاکنو د گډون کوونکو فیصدي او د جمهوري گوند برخه فیصدي ورکړل شوي ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو گډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري گوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناڅاپي پیښې تعریف او نوموړو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې د جمهوري گوند بې ټاکلي دي.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي $B_1 - B_2 - B_3 \dots B_{(m-1)}$ لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



د B_i ($i=1,2,3$) ناڅاپه پیښې په حقیقت کې بې د S نمونه یي فضا یو وېش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډه عناصر نه لري.

2- د S نمونه یي فضا لپاره $B_i = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ دی، نو $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ پېښه یو له بل سره یو په یو مستقل لپاره صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 = 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 \\ &= 0.2794 = 27.94\% \end{aligned}$$

تعریف: که چیرې د $B_1, B_2, \dots, B_n$ څرنګه چې $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1, \dots, n$ یو i پښتو عمومي حالت د S په نمونه یي فضا کې یوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپه پښتې لپاره لرو:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز (Bayes) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i = 1, \dots, n$ د S نمونه یي فضا یو پښتې لپاره چې $P(B_i) \neq 0$ ، $i = 1, \dots, n$ او د A د ناڅاپه پښتې احتمال چې $P(A) \neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayes) فورمول:

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n = 2$ لپاره $B_1 = \bar{B}$, $B_2 = \bar{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه یي فضا پښتې وي لرو:

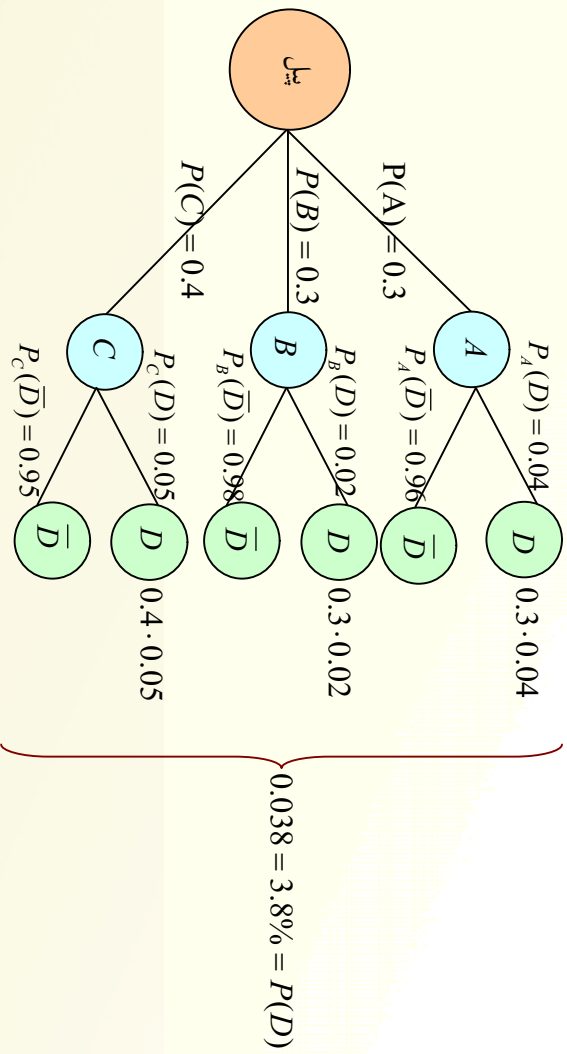
$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n = 2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

مثال: په یوه فابریکه کې د A ، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برقی ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4% ، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

(a) ددې احتمال چې یو اخیستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.

- b) په کوم احتمال خراب څرخ شوی گروپ د C ماشین پورې اړه لري.
 c) یو نوی تولید شوی گروپ لرو، په کوم احتمال سره به B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$\begin{aligned} P_{\bar{D}}(B) &= \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_{\bar{B}}(\bar{D})}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} \\ &= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\% \end{aligned}$$



- 1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمیره وهل شوي ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچړل شوي ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړي، هغه احتمال چې په ټاکل شوي دانه په سم ډول شمیرې وهل شوي وي؟

د ناڅاپه پېښو استقلاليت

له مشروط احتمال څخه پوهېږو چې د A او B دوو ناڅاپو پېښو يا حادثو د B د پېښې پېښېدل د A په پېښه تاثير اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونيسو.

د هغه حالت لپاره چې د A ناڅاپه پېښې پېښېدل پر B ناڅاپه پېښې اغېزه ونه لري او برعکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A \cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړيکه لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

تعريف: د A او B دوي ناڅاپه پېښې چې يوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناڅاپه مستقلو پېښو په نامه يادېږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



فعاليت

- د S نمونه يي فضا او A او B دوي يوه له بلې څخه مستقلي پېښې چې د S نمونه يي فضا کې شامل وي، په پام کې ونيسئ.

- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B يوه له بلې څخه مستقلي دوي پېښې وي د

$$P_B(A) \text{ او } P(A) \text{ احتمالونه يو له بل څخه څه توپير لري؟}$$

- د $P(A \cap B)$ ناڅاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟

- د $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ د پېښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې

چې A او B گډو ټکي ونه لري څه پايله اخلي؟

د پورتنۍ فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

1: د A او B دوي پېښې مستقلي بلل کېږي که چېرې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (د ضرب د حاصل اصل)}$$

2: که چېرې A او B پېښې د گډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ (د جمع د حاصل اصل)}$$

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترگو رنگ او دکاوت یو پر بل پرتله له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره به ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار دکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي تورې سترگې ولري.

پیدا کړي هغه احتمال چې ټاکل شوي زده کوونکي په ناڅاپه توګه هوښیار دکي او توري سترگې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکي هوښیار او توري سترگې ولري لیکلای شو:

خرنګه چې $P(H) = P(H)$ بر سیره پردي $P(B \cap H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت: د $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، $(n \geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلي بل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرتله له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A \cap B$ ، $A \cap \bar{B}$ ، $\bar{A} \cap A$ او $\bar{B} \cap A$ ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانی په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهیږو چې د A او $\bar{B}$ ، B او $\bar{A}$ په پای کې $\bar{A}$ او $\bar{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلي دي؛ نو لرو:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1 - b)$	a
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = b(1 - a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - a)(1 - b)$	$1 - a$
	b	$1 - b$	1

2: د A، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلي دي، لرو:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوی سینه او دوی توري مری پرې دي. دوی یوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مری د پورته کولو نه وروسته هغه بیرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مری واپس کېږدول شي.

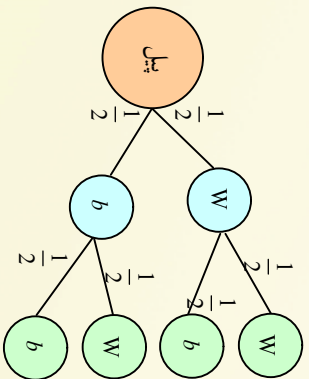
د A پینه: په لومړۍ ځل سینه مری راوړي. B: دویم ځل مری سینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلي یا تړلي (وابسته) دي.

حل:

a) څرنگه چې $P(A) = \frac{1}{2}$ او $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ وي او

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$$

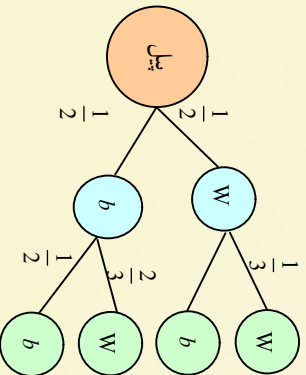


b) څرنگه چې:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه تړلي یا وابسته دي.



دویم مثال: د لاندې مقاطع جدول خاليه چې په نښه شوي دي وکت یې کړئ:

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	⑦
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	⑧
	⑨	0.6	

حل: څرنگه چې $P(\bar{B}) = 0.6$ دي نو لرو:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلېږي.



یو سټ چې عناصر یې 2, 3, 5 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابو، که چیرې A_1 ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوي او د تقسیم قابلیت په k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څپر کې مهم ټکي

بېلې شوي (غیر متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخیص وړ وي، د پروبکړۍ يا گسسته نمونه يي فضا په نامه يادېږي؛ لکه د رمل يا د سګي اچولو تجربې نمونه يي فضا.

نښتي (متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پيوسته يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضا کې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرگندېږي.

هم چانس پېښې:

د يوې نمرته يي فضا لومړني پېښې چې د هغوي پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسې پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

د نښتي (پيوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په يوه تجربې نمونه يي فضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

که چېرې A او B د S ، د نمونه يي فضا دوي ناڅاپه پېښې چې $P(B) \neq 0$ وي په دې حالت کې د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ته $P(A)$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي په دې شرط چې د B پېښه له

مخکې پېښه شوي وي.

يوه له بلې څخه مستقلي پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلي بلل کېږي، که چېرې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(د ضرب د حاصل اصل)

د څپرکي پوښتني

1. د لاندي نمونه يي فضا گانو څخه کومه يوه سره نښتی. يا پيوسته او کومه يوه پرېکړې يا گسته دی؟
 - الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه
 - ب: د يوې سگې د اچولو تجربه
 - ج: د يو غشي لگېدل په يوه دايره
 - د: د يوې فلزي مېلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته
2. د يو چارتراش چې اوږدوالي يې L دي په ناڅاپه ډول په سور اړه کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددي شته دي چې د کين اړخ اړه شوي برخه د ښي اړخ له درې برابر څخه کوچنې وي.
3. د يوه خصوصي شرکت يو کارگر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځاي کې چې د مامورينو په گاډي کې د کارته د تگ لپاره گډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځاي ته رسېږي څومره احتمال ددي شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.
4. د $[0.3]$ تړلي فاصلي څخه په ناڅاپه ډول دوه عدونه ټاکو، پيدا کړي ددي احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنۍ او د 2 څخه لويه وي.
5. په ناڅاپه ډول يو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې وړانگې يا شعاع يې R او جگوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پيدا کړي ددي احتمال چې ټکي د محاطي کړي دننه په دي مخروط کې قرار لري.
 - 1- د ميخانیکت خرابېدل
 - 2- د خودکار د نيچې خرابېدل
6. د يو خود کار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:
 - 1- د ميخانیکت خرابېدل
 - 2- د خودکار د نيچې خرابېدل
7. که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددي احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنۍ دلايل مستقلي او يا غير مستقلي پېښې دي؟
8. خيبر خوازي هغه څلور کلي گانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازي قلف قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د درېي کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اوږند کلي وي، په هغه صورت کې چې:
- a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په هغه جيب کې اچوي.
- b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library