شمېر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځیدلی چاپ

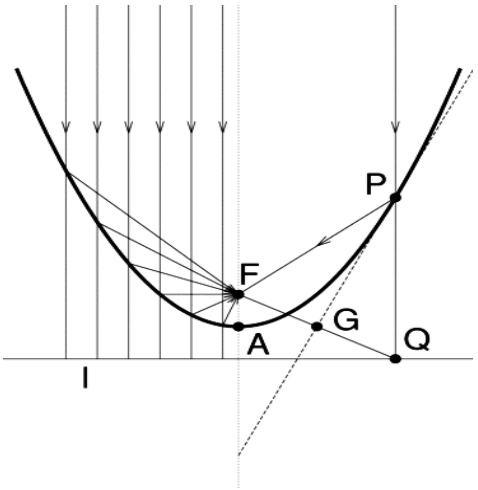
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیر پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي څېښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زمور د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میړی،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګوابښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګوابښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وپښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه تړې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي وړه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي وړه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانۍ وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانۍ وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخبنې

۱ ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ ۰ ۲ ۰ ۲	وینا	۵
۱ ۰ ۲ ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۱ ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بنه او کوانتورونه	۱۳
۱ ۰ ٥	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ ۰ ۸	تمرینونه	۳۸
۲ ۰	ډیر ی پوهنه	۳۹
۲ ۰ ۱	د ډیرې پوهنې کلیمه	۴۰
۲ ۰ ۲	د ډپریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخډېرې	۴۶
	د يوې ډېرې توان يا تواندېرې (توانست)	۴۸
۳ ۰ ۲	په ډېرې کې کارونې يا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅډېرې يا متقاطعډېرې	۵۲
	د يوې ډېرې يا ست کمپلیمنت	۵۷
٤ ۰ ۲	څیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۰ ۳	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۱ ۰ ۳	د ګڼونو- يا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۱ ۰ ۱ ۰ ۳	پیدایښتي يا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیدایښت يا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیدایښت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونې(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د ریيلګنې اکسپوننت یا جګګنې سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ٥	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ٥	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ٥	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپو هنه یا هندسه	۱۶۹
۱ ۰ ۱ ۰ ٦	ټکی او کرښه	۱۶۹
۲ ۰ ۱ ۰ ٦	کونج	۱۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ٦	درېګوډۍ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
٥ ۰ ۱ ٦۰	ولاړکونجیز دریګوډۍ	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډۍ کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردۍ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٥٠٦	تریګنومتریکي کتمتوالی	٢٠٥
٥ . ٦	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	٢١٥
٠٧	کمپلکس ګڼونه	٢٢٢
٠٨	د ښوونې یا ثبوت متودونه	٢٣٥
١٠٨	سیده ښوونه	٢٣٥
٢ . ٨	ناسیده ښوونه	٢٣٧
٣٠٨	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	٢٣٩
٩	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	٢٤٣
١٠٩	لاینیز برابرون	٢٤٤
١٠	کومبیناترویک، د بینوم جمله	٢٦٦
١٠١٠	فاکولتیت یا فاکتوریل	٢٦٦
٢٠١٠	د بینوم ځله ونه	٢٦٧
٣٠١٠	د بینوم جمله	٢٧٠
٤٠١٠	کومبیناتوریک	٢٧٤
١٠٤٠١٠	پرموتیشن	٢٧٥
٢٠٤٠١٠	واریېشن	٢٨٠
٣٠٤٠١٠	کمبینیشن	٢٨٦
٤٠٤٠١٠	د پرموتیشن، واریېشن او	٢٩١
٠١١	لانیز الجبري برابرونونه	٢٩٥

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورې ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورې برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳۰۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤۰۱۲	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسځیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۰۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲۰۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۳۰۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱۰۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱۰۱۰۱٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱۰۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲۰۱۰۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳۰۱۰۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰۱۰۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲۰۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱۰۲۰۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲۰۲۰۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳۰۲۰۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱۰۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰۱۵	د بلواک خويونه	۴۳۳

د ستر کتاب دويمه برخه

۱۶	د هواري يا سطحي شننيزه هندسه ...	۴۶۶
۱۰۱۶	کربنه	۴۶۶
۲۰۱۶	ګردی	۴۷۵
۳۰۱۶	ايليپسي	۴۸۲
۴۰۱۶	هيوپربول	۴۸۷
۵۰۱۶	پارابول	۴۹۲
۶۰۱۶	ټولګه	۴۹۴
۱۷	وکتور شميرنه	۵۰۲
۱۰۱۷	د وکتور پيژند يا تعريف،	۵۰۲
په کارتيزي کواوردينات سيستم کي د وکتور انځورونه		۵۰۲
۲۰۱۷	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۵۰۹
۳۰۱۷	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۵۱۲
۴۰۱۷	غبرګهواريز يا موازي الاضلاع ضرب	۵۱۷
۵۰۱۷	په شننيزه ځمککچ کي د وکتورونو	
۱۰۵۰۱۷	د يوې کربنې وکتوري انځورونه	۵۲۱
۲۰۵۰۱۷	د هواري يا سطحي وکتوري انځورونه	۵۲۴
۵۰۱۷	د هواربرابرونونو سکالارفورم يا ۰بنه	۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۰۱۸	پیل	۵۳۳
۲۰۱۸	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۰۲۰۱۸	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۲۰۲۰۱۸	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۳۰۲۰۱۸	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۲۰۱۸الف	لړۍ	۵۵۰
۲۰۱۸ الف ۱۰	هندسي لړۍ	۵۵۵
۲۰۱۸ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
٤۰۱۸	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۰۱۹	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۲۰۱۹	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۳۰۱۹	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
٤۰۱۹	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د څېرکي ټولګه	۶۱۶
۲۰	دفرنځیالشمیرنه	۶۲۶
	د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت)	۶۲۶
	په یوه ټکي کې د تابع ګراف ...	۶۲۸
	د لحضوی(سترګورپ) تغیر...	۶۳۰
	کمښتوښ (تقسیم تفاضل؟)	۶۳۱
	دفرنشلوښ یا رابیلیدنه یا مشتق	۶۳۳
	کمښتوښ او مشتق یا رابیلیدنه	۶۳۶
	د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق	۶۴۳
	د تانجنت پیژند او خویونه	۶۴۷
	د تانجنت او عمود یا ولاړ تولیز مساوات	۶۵۰
	په بیدیا کې جګوالی	۶۵۲
۲۰ـ ۱ ۰ ۱	الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی	
۲ ۰ ۲۰	د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې	۶۵۶
	د درېګوډیزو یا مثلثاتي	۶۶۲
	د اکسپوننشل یا په جګ توابعو....	۶۷۰
	د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې	۶۷۶
	د ایمپلیځیت توابعو مشتف	۶۸۳
	د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول	۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ټولګه	۶۸۸
	د يوې تابع د مشتق قابليت	۶۹۱
	د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق	۶۹۸
۲۰	۳. د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه	۷۰۱
	د رول قضيه	۷۱۰
	د وايرشتراس قضيه	۷۱۱
۲۰ ٤.	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی	
	د دفرنشل منځ ارزښت قضيه	۷۱۲
	يوعړيزې توابع	۷۱۵
	ځای اړوند افراطي ټکي	۷۲۰
	د انعطاف – يا اوړونټکی	۷۲۴
	د کوې يا منحني بحث يا خبرې	۷۳۳
	ناټاکلي حدونه يا پولې	۷۴۶
	د برنولي او د لو پيتال	۷۵۰
۲۰ ۰ ۵	د غټو ګټو پرابلم	۷۵۷
	تمرينونه	۷۶۷
	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	۷۷۸
۲۱	انتيګرالشميرنه	۷۸۷
	پيلراوړنه	۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنۍ تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنۍ تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ ته چمتو ليکنې او ژباړې

د ژباړې يا ليکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکی خدای ﷻ په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !

یو څه چې پیل لري نو پاې هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مړښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی ځمور په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوې په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.

مور ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوییو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعاً افراد ملامت نه دې، بلکه ځمور دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبې د ودې دنده د حکومتونو ده، چی ځمور په هیواد کی ځمور حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چې په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژژبه دې څه کار وشي.

ګرانو لوستونکو !

داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځی، په علمي توګه په المانی ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کي ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی څانګی لري. دا چی ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمرینی ډول سرته رسیږي.

نن ټړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستونځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې ځموږ د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم

-د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول

-دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسی وګټم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوښونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځی د خوښونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.

-په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غږوالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چی مور افغانان یی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځې د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کږښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. مور افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پریښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپریښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیک لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه وربانديې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځی د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کی پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودي او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهی د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبی پرمخوده یو بل باندې سیده او په څټ اغیز من دي، چی ولس وروسته پاتی وي، ژبه یی وروسته پاتی ده او که یوه ژبه وروسته پاتی وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کي سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد خان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چی کم له کمه بنسټیزې کلیمی په افغاني واړوم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنسټیزې کلیمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځي هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتی وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات رانتوخي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید مور هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږی، چی څوك د ژبی سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسی یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونی نه ده.

دلته غواړم چی دې ته هم ګوته ونیسم، چی د نومونو په تاکلو کی ما کله کله دوه نومونو کارولی، چی هغه مي په ټول کتاب کي شاید اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چي په هدف کی ستونځي نه پیښوي لکه د بیلګي په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلی وه، چی وروسته می شمیر پوهنی باندې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کي مي نه وي شمیرپوهنه کړي. دربګوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چی دا هم شاید د کتاب په اوږدوکي نه وي اصلاح شوی، داسی نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چي د پوهیدلو لپاره دا کومی ستونځي ه پیښوي.

۲ - تخنیکی ستونځی:

د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځی، چی څمورِ لپاره د داسی کتاب لیکلوپه لار کی تخنیکی ستونځی هم خورا زیاتی دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنی د فرمولونو لیکلو سره ستونځی لرودي، نو له دې امله می د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتی کړې او دلته می سرینبی کړې، چی کله کړې هم سرینبی شوې دي او په دې هم پوهیږم، چي دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چی د رااخستلشووکتابونو لیکونکی او چاپوونکی به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښی څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چی املایي غلطی به شوي وي، ، خو په پوهیدلو کی به ستونځي پیښي نه کړي، د هغي بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم خنډولی، ځکه چی ډیر ورسره ستړی شوم.

ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چی زه دې داسی یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت اینبوولی دی.

لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالې کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتې پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړې دي.

دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چې هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.

ځنی څه په همدې لړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځې پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځې لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چې یو کتاب د بنسټیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنې بیا په کی ځای کړم.

ما د بنسټیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–ټریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعنې منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کې څیړل شوی.

ځما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمو، په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاټړ کاوه، چی بی ددې له ملاټړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن شاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خدای(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاټړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی څخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.

زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.

که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوڅوییو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چې د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی خلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما څخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او المانی الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	ځ	چ
څ	ځ	خ	ح	خ	د	ډ	ذ	
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط	
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل	
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ۍ	ے

يوناني الف بی

A	α	*A*	*α*	Alpha
B	β	*B*	*β*	Beta
Γ	γ	*Γ*	*γ*	Gamma
Δ	δ	*Δ*	*δ*	Delta
E	ε	*E*	*ε*	Epsilon
Z	ζ	*Z*	*ζ*	Zeta
H	η	*H*	*η*	Eta
Θ	ϑ	*Θ*	*ϑ*	Theta
I	ι	*I*	*ι*	Iota
K	κ	*K*	*ϰ*	Kappa
Λ	λ	*Λ*	*λ*	Lambda
M	μ	*M*	*μ*	My
N	ν	*N*	*ν*	Ny
Ξ	ξ	*Ξ*	*ξ*	Xi
O	ο	*O*	*ο*	Omikron
Π	π	*Π*	*π*	Pi
P	ρ	*P*	*ϱ*	Rho
Σ	σ	*Σ*	*σ*	Sigma
T	τ	*T*	*τ*	Tau
Y	υ	*Y*	*υ*	Ypsilon
Φ	φ	*Φ*	*φ*	Phi
X	χ	*X*	*χ*	Chi
Ψ	ψ	*Ψ*	*ψ*	Psi
Ω	ω	*Ω*	*ω*	Omega

المانی الف بی

A	a	𝔄	𝔞	a
B	b	𝔅	𝔟	b
C	c	𝔠	𝔠	c
D	d	𝔇	𝔡	d
E	e	𝔈	𝔢	e
F	f	𝔉	𝔣	f
G	g	𝔊	𝔤	g
H	h	ℌ	𝔥	h
I	i	ℑ	𝔦	i
J	j	𝔍	𝔧	j
K	k	𝔎	𝔨	k
L	l	𝔏	𝔩	l
M	m	𝔐	𝔪	m
N	n	𝔑	𝔫	n
O	o	𝔒	𝔬	o
P	p	𝔓	𝔭	p
Q	q	𝔔	𝔮	q
R	r	ℜ	𝔯	r
S	s	𝔖	𝔰	s
T	t	𝔗	𝔱	t
U	u	𝔘	𝔲	u
V	v	𝔙	𝔳	v
W	w	𝔚	𝔴	w
X	x	𝔛	𝔵	x
Y	y	𝔜	𝔶	y
Z	z	ℨ	𝔷	z

اومیګا
پښتو دینه

پدې المانی حرفونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي	=
نامساوي (نوروکتابونو کی)	$(=)\models$
کوچنی له	<
لوي له.....	>
کوچنی یا مساوي له	≤
لوي یا مساوي له	≥
ډیر کوچني	≪
ډیر لوي	≫
ورته یا متناسب.....	~
کونګروانیځ	≃
همداسی یا شبایي یا په ګوره کوي	
کتمټ.....	≡
غبرګ	∥
ناغبرګ.....	∦
ولاړ په	⊥
دریګوډی	△
ګردی	○
نیمی یا قطر.....	⌀
کونج	∠
د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج	$\angle(g,h)$
کرښه، له A و B ته	$\overline{AB}$
له A و B ته لوریزه کرښه.....	$\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده..... AB

مطلقه ارزښت د ..... |a|

ایماجینار یوون(واحد)..... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي $\rightarrow$

ناپای..... ∞

د x فنکشن یا په واک چې بلواک مو بللی f(x)

(لوستل یې (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: $x \rightarrow f(x)$ $f: x \rightarrow$

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله..... lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواک	تانجنت	tan
	کوتنجنت.....	cot
	ارکوس ساین.....	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواک	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ګڼونه.....	$\mathbb{C}$
ریښلګڼونه	$\mathbb{R}$
ټولګڼونه	$\mathbb{Z}$
نامنفي ټولګڼونه یا	
طبعي ګڼونه د صفر سره	$\mathbb{N}^*$
طبعي ګڼونه	$\mathbb{N}$
تعریفډیری	D
ارزښتډیری.....	W
حلډیری	L
د ډیرې A پوتنځډیری	P(A)
ډیري.....	M,N,A,B
تشډیری	$\emptyset$
برخه ډیری.....	
پورته یا لویډیری (چې بل ډیری خوندي لري)	
ټولنډیری.....	$\cup$
غوڅډیری	$\cap$
د A کومپلیمنټ	CA , A'
د ډیریو ورته والی	$A \sim B$
د ډیریو ځل.....	$A \times B$
لوستل B اتیران A یا - ځل -	
توپیرډیری : A بې له B ده	$A \setminus B$
دلته: a د b پرویشونی ده یا b ویشې	$a \mid b$
د a اوb غټ ګډ په ویشونی (لنډ : غ گ و)	ggt(a,b)
د a اوb کوچنې ګډ زیاتځله (لنډ : ک گ خ)	kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی	$a \in M$
او a د M توکی نه دی	$a \notin M$
تولنخښه (د تولو x لپاره باور لري)	$\forall$
د موجودیت نخښه: یو x موجود دی	$\exists$
کونیونکشن A او B لیکو	$A \wedge B$
دیسینکشن A یا B لیکو	$A \vee B$
(کله کله الترناتیو)	
ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي	$A \Rightarrow B$
نیګیشن یا نه والی	$\neg$
د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت	$A \Leftrightarrow B$
له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.	
ماتریکس..... A تورو کتابونو کې	$\|A\|$
دیترمینانت	$\|A\|$
د a څخه n–امه ریښه	$\sqrt[n]{a}$
د x اکسپونتشلبلواک	
د n – فاکولتیت یعنی n!=1.2.3....n	$n!$
بینومځلوونی	$\binom{n}{p}$
لوستل:n په p باندې	
له a تر b واز اینتروال	$]a,b[$
	$= \{ x \mid a < x < b \}$
له a تر b بند اینتروال	$[a,b]$
	$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$
کیڼ واز اینتروال	$]a,b]$
	$= \{ x \mid a < x \leq b \}$
ښی واز اینتروال	$[a,b[$
	$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتون نخښه (سیګما)
$\sum_{i=1}^{n}$
که د زیاتوننخښه داسی وي
لوستل: له i = 1 تر n پوري
ځلنخښه (پي)
$\prod_{i=1}^{n}$
که داسی لیکل شوي وي
لوستل: له i = 1 تر n پوري
پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دی او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودی شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمې به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې مانا وي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبی ویناودود څخه ګټه اخلي۰

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده۰

له دې املې شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې املې یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي۰

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوي سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي۰

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربي همغۀ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دښستیزو نخښۀ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنستیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمي

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو ټرنې په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(ټل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ,e او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا ست (په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز ۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز ۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي ۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګډونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<, >$، $=$, $\leq$,$\geq$,

- د نښلونو،کارونو، ټرنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی تري منځ ته رائی۰

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(2a + 1) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6– 3a).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفست هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټست یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه ست یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پېژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: T, T_1, T_2) په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني يا متحولي نه لري په Tسره په نخښه کوو او ليکو: T=126 + 3/4 يا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني يا متحولي x لري يانې T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټيزې يا ـډېرې دې يا د طبيعي اعدادو ډيرې°Nوي

تعريفډيرې د بنسټيزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني يا واريابلی x پۀ ځاي يو پيدايښتې ګڼ يا طبيعي عدد 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دې : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x يا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دې چې دوه متحولي لري او په T(x,y) سره يې په نخښه کوو ۰ د اووښتونو يا متحولو بنسټيزې دې د پيدايښتي يا طبيعي اعدادو ستN وي, نو د x لپاره تعريفډيرې °N ده۰ د y لپاره N (پيدايښتې ګڼوندېرې°N تعريفډيرې لپاره ترم نه دې تعريف ياپيژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دې تعريف يا پيژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x يا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشميرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده: T(2,3) = (2+6) / 2 = 4

يادونه: د ګڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼوندېرې ورکړ شوي دي۰

۲۰۲۰۱ وينا Aussage

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه تري د هغه څه ریښتون حالت یا ځانګړتیا ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځانګړتیا په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. مور نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغۀ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همغسی ښایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبې له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځانګړتیا) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد Einheit, unit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا ریښتیا او یا ناریښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «ریښتیاارزښت » ،، ریښتیا یا نا ریښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(ریښتیا یا ناریښتیا) دی۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیړل کیږي۰

ویناوې د لاتین په لویو تورو*A , A پـه نخښه کوو او داسې نور۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چې وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنی افاده یا وییـنه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چې د وینـاارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د ریښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم مور څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چې د هغه شي حالت (څانګینونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چې پریکړه وشي۰

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د ریښتیا ویناو ټولګی او د ناریښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دی

تکرار : هره جمله، چې « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«ریښتیا وینا ده۰

ب : 7 = 4 + 3 ریښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناټیک وینا ده۰(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورې یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که يو کاربن له دوه اکسيجنه سره يوځاي يا زيات شي، نو کاربن دوه اکسيډ CO_2 وښايي

د دي پرځټ يا مخامخ يا پر خلاف يا برعکس : ويناوې نه دي:

د کابل ښار NaCl; ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په ديرش کلن جنګ کې

لاندې ويناوې

کيميا يوه طبيعي يا پيدايښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بې له پاتې (باقي) نه ويشل کيږي

د وينا «ريښتيا ارزښت » ريښتيا لري

لاندې ويناوې

برلين يو کوچنۍ ښار دۍ

3 > 5 پنځه له دريو کوچنۍ دۍ

ټول لومړنۍ اعداد يااګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سين پروت دۍ

هره يوه له دې ويناو « ريښتيا ارزښت » نا ريښتيا لري

نومه وني: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد يو جوړه وليکه، نو طاق ته ناجوړه وايو٠

په لاندې کې به وڅيږو، چې ويناوې شته، چې نورې ويناوې د خپلې برخې په ځير په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري٠ داسې ويناوو ته يوځايښوې يا يوځای ايښول شوې يا ځنځيري ويناوې وايو او که غواړۍ ! مرکبې ويناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بيلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زياتون يا پرته جمعه په 3 ويشړ وي، نو داعدد يا ګڼ په 3 ويشړ دۍ، يانی که عدد 1521 ولړو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ويشړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ويشړ دۍ٠

که کومه وينا په داسې ويناوو ويشړ يا ټوټه کيدونکې نه وي، نو دې ته بيا ساده وينا ويل کيږي٠

لکه : سپين غر يوه خورا جګه ځوکه لري

يوه بله بيلګه د يوځای شوې(ځنځيري) وينا لپاره

سپينغر خورا خواريکښ دۍ، هغه په دې پوهيږي، چی نور کار ته وهځوي٠

ځرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخويناو په ځير يوځاي شوي ويناوې دي: » سپينغر خورا خواريکښ دۍ« همدا ډول » هغه (سپيغر) پوهيږي، چی نور کارته وهځوي«٠

دا ويناوې کيدی شي په نورو ډولونو هم يو له بل سره داسې وټرل شي، چې رښتيياارزښت يې همغه پاتې شي٠

د بيلګې په توګه:

١ - سپينغرخورا خواريکښ دۍ٠ يا هغه پوهيږي، چی نور کار ته وهځوي

٢ - ځکه، چی هغه پوهيږي، نو کار ته وهځوي، نو سپينغر خورا خواريکښ دۍ٠

٣ - دا چی سپينغر پوهيږي، چی نور کار ته وهځوي ، نو سپيغر خورا خواريکښ دۍ٠

٤ – سره له دې، چی هغه پوهيږي، نور کار ته وهځوي، هغه خورا خواريکښ دۍ٠

ګورو، چی په دې ډول يو له بل توپيريدونکی ټرلې يا ځنځيري، يا يوځاي شوی ويناوې جوړيږي، چی په خپله رښتيياارزښت کی يو له بل توپير کيدۍ نه شي٠ د دوي توپير د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو څرنګوالي له لارې مخ ته پروت دی یا رامنځ ته شوی دی۰ په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنی وییني(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

مورږ د سم اند یا منطق ستړینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یوائی او یوائی د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي۰

بیلګې

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي۰

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید۰

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا ربښتیا تابع» وپیژنو. مورږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. مورږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه۰

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځای ویناټرنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا ټراو یا ویناټرنی(عملیې) «نه والی»: دیوی وینا P نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یوائی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چې P ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري۰

مور د وینا P نه والی نفی په P نه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬ په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬ نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬ ¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغې لومړنۍ وینا رښتیاارزښت لري

په پیداینښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي۰ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غۍ۰ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دۍ۰

نه والی ته بیلګه : د وینا $\neg A$ نه والی : "7 < 3 „ وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو $\neg A$ نارښتیا ده۰

ټرنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ټرنه، دلته د « او (and)» ټرنه یا ټراو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څټ یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یاعقیدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو بڼه رنګ دۍ۰

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي۰ یوه د نخښو لړۍ کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

$5> x + 3$ د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا۰ دا له دې املې وینا نه ده۰ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ۰ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا تري منځ ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځای یې نور د پیدایښتي ګډونو توکی ځای په ځای شي، نو بیا ناریښتیا ویناوې منځ ته تړي راځي۰

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټیزې یا بنسټ ستې څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتونې د خپلواک یا ازاده اووښتونې(متحولې) په نامه یادیږي۰

پیژند :

یوه ویناښه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځای د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتونې تړلو څخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه تړې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونټکی، تړاولغات» ښایې په سم اند کې تړنه یو څرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکي (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی۰

د « او» تړنه او نخښه یې /\

پیژند ۱ ۰ ۳ :

p/\q دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو ریښتیا ارزښت ریښتیا لري، چې p اوq دواړه ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري۰ که له دې څخه یوه وینا هم ناریښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه ناریښتیا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تړنې نخښه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p

مور د « او » تړنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w رښتیا او f نارښتیا په معنا دي

p	q	p/\q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » تړنې ته بیلګه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا : ,, 7 > 3 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی رښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنۍ او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: مور ګران لوستونکي به سره یوځاي فکر وکړو، چې دا پریمګڼونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو ۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړیږي۰ مور به یې زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا تړنه یا کنجنکشن، چې مختلف رښتیاارزښتونه ولري یاني د A وینا: 3 ,, 7 > (رښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی (نارښتیا)، نو A/\B وینا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتیا) ده۰ دا ویناتړنه ویناارزښت نارښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» تړنه دA وینا: 7 > 3 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعددی» یوه نارښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چې د « او » ټرنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادې) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وټرل شي:

غوټۍ «پټیدځای» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله» ۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ټرنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګې په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځای پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځای پیدا کړ« او » دا پټیدځای یې پټ واسته۰

۱) هلمند موږ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چې برلین کوچنۍښار دی،هلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونۍدی

په ټولیزه توګه د « او » ټرنه هلته ربنتیا ارزښت ربنتیا لري، چې د جملې ټولې برخې ربنتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کې ونیول شي۰ په وینا ټرنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخې سره په ټرنه « او » وټرل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ټرنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative التر ناتیو یا د » یا « ټرنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ټرنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چې تري تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه تري نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ټرنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا \/ د یا ټرننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	Q	p\/q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » ټرنه p\/q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » ټرنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي۰ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نوp\/q هم نا رښتيا دی۰ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي۰ يوه د «نه خوندیکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييئه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا۰۰۰ او يا ۰۰۰» ليکل کيږي۰

بيلګه (د « يا » ټرنې ته):

د دوه ږپښتينو ويناو د « يا» ټرنه د A وينا: ,, 7 > 3,, اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه رښتيا وينا A\/B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»۰

د دوه ويناو ټرنه، چی مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 7 > 3 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 7 =3 ,, (نارښتيا) ، نو A \/ B ده، چې 7 > 3 يا 7 = 3 دا وينا ټرنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") ټرنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دی یوه نارښتیا وینا A\/B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

التړناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوي : دا د » یا « ویناټرنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي.

بیلګه : (دوه التړناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دی» د التړناتیو په نامه داسې دی « ۳ یا له ۷ کوچنی دی او یا یو لومړی ګڼ دی» نارښتیا دی.

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې w (Wahr) د رښتیا اوf(Falsch) د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناټراو

A	π پي ټولګڼ دی	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دی	W
D	π پي له دری کوچنی دی	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π ټولګې نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A\/C	π ټولګې او له صفر لوي دی	f
B/\C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A\/C	π پي ټولګې یا له صفر لوي دی	W
A\/D	π ټولګې یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خړځلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بیلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ټرنې«
ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ټرل شوي دي،

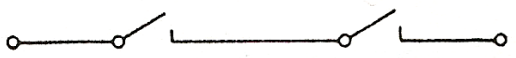


Bild 7.1

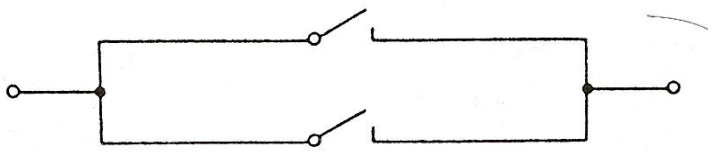


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس رښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځای شوې ویناوې جوړیدې شي، په کومو کې چې له یو زیات ټروني موجود وي۰

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (رښتیا - بلواک یا رښتیا فنکشن » نهp \/p دې۰ د دې لپاره هم د رښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي۰ د رښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا pنه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دې

د یوې وینا نه والی

نهp\/pنه	نهP	p
W	f	w
w	w	f

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکې نه ده یوه وینا نهp\/p تل رښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې رښتیابلواک کتمټ یا identisch(identic) رښتیا دې(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکي یا واریابلې ته هر رښتیاارزښت ورکړ شي یانې رښتیا یا نارښتیا تل د رښتیا ارزښت رښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو رښتیاارزښت بلواک کتمټ نارښتیا دې (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دي د وییني یا افادي نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دي د نهq\/نهp رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویږني یا افادي $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو ـوینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعأ همغه نه پاتیږي، لکه د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول « له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه ټرنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB ټیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوی ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړېبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا وییني په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړۍ برخه ریښتیاوي او دویمه ناریښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړۍ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې ریښتیا همداسې نا ریښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې ټوله وینا ریښتیا ده، که لومړۍ برخه وینا ناریښتیا او معکوس دویمه برخه ریښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله ناریښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، ریښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د ریښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: q د p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې pاو q خپله ترنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي۰ د ایکویوالنت سومبول دې ≈ د دواړو ویناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≈q په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ۰ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته ریښتیا دی، که دواړه ویناوې ریښتیا یا دواړه ویناوې ناریښتیا وي۰

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په څټ دي په دي مانا وي، چې له p څخه q لاس ته راځی او په څټ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا –فنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د ترنوینناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو وینناارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چې ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چې سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	.....W
w	*f*	f	f	*w*	.....*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.....F
f	*f*	w	w	*w*	.....*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم بنوول کیږي

(p <=>q) <=>(p => q) (q => p)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناټرنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو ۰ له دې ځخه پيچلو ټرنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي۰

د دې ورته والی ويناټرنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1).....\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2).....\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

۱ ۰ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده ټوليز کيدی شي۰ د بيلګې په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د وينا پر ځاي د وينافورم ځخه خبري دي، يا غږيږو ۰ دا داسی ژبنی وييني يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي۰ بيلګې يی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار ځلورګوډی(ځلورضلعي) » دی۰

دريم : «u له v ځخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته ربښتيا يا نارښتيا وينا لاس ته راځي۰ که په دويم کی دz پرځاي «ډيرگوډی» (کثيرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو يوه ربښتيا وينا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو يوه نارښتيا وينا لاس ته راځی۰ دريم يوه اړيکه(ريليشن(ده، چې هلته د انفراديو د ايښولو ترتيب هم يو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا ربښتيا وينا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پريديکات په شکل۰(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري ديکات first-order logic سم اند يا منطق وايي۰

بيرته داسی ليکو P(x), Q(z), R(u,v)

يوه بله کارونه يا عمليه شته، چې له وينا بڼې څخه وينا جوړوي۰ چې کوانتيفيکيشن Quantifikationبلل کيږي۰ دا ويناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وينا بڼی افراد همغه خويونه ولري، چې ټولوينا (Allaussage) ورته وايو۰ياچې په پوښتل شوي چاپريال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خويونه ولري، دې ډول وينا ته مورِ د شتون يا موجوديت وينا يا Existenzaussage وايو۰ زمورِ په بيلګه کې يی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پيدايښتی يا طبيعي) ګڼونه يا اعداد شته، چې په دوه ويشل کيږي

پنځم : ټولې څلورۍ (مربع) هوارې ډيرګوډۍ يا کثيرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور يا ټولوينا لپاره نخښه∀

د شتون- يا موجوديتکوانتور يا شتونوينا لپاره نخښه ∃

يادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څير ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څير ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکوني وروسته اووښتونې (وياريابلی يا مجهولی) ورکول کيږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی يي لولو، چی يوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دی (یا د ټولو ۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰ ۰ ۰ شته»د ویناښی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځای په ځایونه شته وي کومه چې ویناښه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو ست R توکی دی او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یوx له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R:$ $x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$\exists x \notin R: x^2+1=0$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتوندېرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي۰

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دی » د جوړه ګنونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا ست (وینااووښتوندیرۍ یا واریابلډیرۍ) ټرنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتوندیرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1).....\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګنونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دی)

$$(2).....\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو ریيلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $0 \leq x \leq 1$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B (« کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګې د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – وینا A : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو ریبل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دي ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګې په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی٠

۲ - وینا A : „n > 7“

وینا B :وي دې :n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو ریبلګې ن له ٦ څخه لوي دی۰ که اړیکي، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې ریبلګونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي۰ د بیلګي په توګه ٥ ،٦ یا شپږنیم

د ب) فرمولبندې وایي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چې وینا A باور ولري۰

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ۰

بیلګی د اړیین(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګې n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګې پر3 ویشونی وي۰ یو ګې، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی۰

۲ - وینا A : » څلور ګوډی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي۰

د برابروالي یا برابرارزښتي (ایکویوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وایي، چې A د B لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی۰ « دا وایي، چې A ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – وینا A : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکي وي۰

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعي»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعي) ولري۰

۱ ۰ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(تري پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي۰ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو تري ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده۰

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د ټیک څرګندې پوهنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې تري تیریدل نه شي کیدای۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتونې ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کیږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري ۰

اکسیوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتینې وینا ته اکسیوم وایي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې(فرضیې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه یا ښوونه) په بر کې- یا خوندي لري۰

که دا وینا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي۰

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی (پیانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونی نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پیښه د پیښې امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درې ګوډی ولاړ کونجیز وي، نو(پس) د پیتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: یو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه(فرضیه) ده (که یو پریم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت یې (هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کیږي پس لومړی ګڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوړه یاطاق دی)په څټوالي یا تضاد کې پیژندل کیږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتینوالی څخه دې د جملی په څټوالی یا تضاد هم ربښتیا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (ربښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځني او یواځني ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \backslash / \quad 22x +3 = 113$$

په کین ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی۰

که ترمونه T^ او T° د برابرونخښنی = باندې یو له بل سره وټرل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: T^ = T° ۰

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, < , > او(نابرابرونخښه =|) یو له بل سره وټرل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي۰

دا یا ریښتیا یا ناریښتیا وینا کیدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتونې یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیزې ګڼونه ولیکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفیزې څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون ریښتیا وینا کړي۰

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وینابڼه پیژند - یا تعریفیزې پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیزې یا حلیزې L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې ټرلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره ریښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره ریښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 => L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 => L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کټمټوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرۍکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T^\circ < T^\wedge \quad T^\wedge > T^\circ$ $2x < 6 \qquad 6 > 2x$	$T^\circ = T^\wedge \quad T^\wedge = T^\circ$ $3x = 5y \quad 5y = 3x$
۲) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیرۍ خوندې وساتل شي یا ځای کړي	$T^\wedge < T^\circ \Rightarrow$ $T^\wedge \pm T^\circ < T^\circ \pm T^\wedge$	$T^\wedge = T^\circ \Rightarrow$ $T^\wedge \pm T^\circ = T^\circ \pm T^\wedge$
یا تغیر ونه خوري٠ مخامخ یا کین لوربیلګه کې تفریقډیرۍ تغیر خوړلی	$3y < 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	$2z = 8 \Rightarrow$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر څټ بیلګه

$2z=8 \mid\Rightarrow 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$نه دې تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $z - 3$ یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دې

۳) د وینافورم دواړه $T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T \quad T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې $T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$

له همغه مثبت ترم سره $T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T \Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ}:T$

ځل او یا په همغه ترم که $T > 0$ که $0 < T$ وي

وویشل شي $3y - 12 < 30z - 90 \Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30 \Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$

$4x + 2 = 10x - 6 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3 \Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$

٤) د یوه برابرون $T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T \Leftrightarrow T^{\wedge} = T^{\circ}$

دواړه خواوې کیدی شي، $T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$

چې له یوه منفی ترم سره $T^{\wedge} : T = T^{\circ} : T \Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$

ځل شي یا دواړه خواوې په $T < 0 \quad T < 0$

همغه ترم وویشل شي، $-2y < -4 \quad 3x = 12$

که په دې فورم کې $y > 2 \Leftrightarrow -9x = -36$

نابرابرونه وي نو د $10y > 20 \Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په تولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندۀ توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د ربښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د ربښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا ستې تیوري باید خپل ځای په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپیوهنې یا ستې تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې مور ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا ستې دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (ستې تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوولە لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم ست يا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولگی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرۍ ډيرۍ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو ست يا ډيرۍ.

د ډېرۍ پوهنې کلمه: مور په افغانستان کې هم د ډيرۍ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پردیو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډيرۍ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چې د ډيرې پوهنې (ست تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي.

ډيرئ پوهنه د شميرپوهنې سټه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانګې په ډيرۍ پوهنه

ودانې دي. نن شميرپوهنه بې له ډيرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه يې وزي.

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرۍ يا ست د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولګه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرۍ يا بنسټ ست څخه ، چې د پيژندلشويو اصولو يا کرکتريين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د المانې شميرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زمور د خيال يا ليد څرګند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولګې (يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرۍ وايي او هر شي ته، چې ډيرۍ يې جوړه کړې يا ډيرۍ تري جوړه شوې وي، د ډيرۍ – يا ست توکی وايی.

(Set and elements of set ډيرۍ او د ډيرۍ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولګې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرې وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیرو۰

ت : څرګند شیان د ګډو ځانښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې ځانښو له امله یوځای ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرې یا سټ تشکیلوي۰ ګډې ځانښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي۰

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډیرې یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرې د ځنو شیانو زیات یوځای کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرې په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه A,B,.. او یا M,N, X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,... او m,n,x,v,...

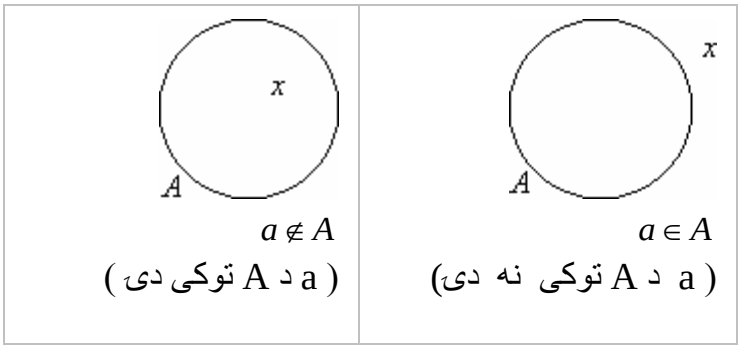
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرې A توکی دې که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرې A توګی دې.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرې A توکی نه دې

دا پورته لینکدود له ښې وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسې لړې یې ساتلې پاتې شي۰ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځې لرم۰دا لاندې یې دیاګرام دې، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډيرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه يې ليکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډيرۍ يا ست نخښه ده

يادونه : دا د ډيرۍ کلمه مور په افغانستان کې ست set بولو ، چې انګريزي ده، په فارسي کې يې مجموعه بولي، چې ډيرۍ د شيانو مجموعه يا ټولګه ده او په المانې کې ورته مينګې Die Mengeوايي۰ هغه بنسټيزه خبره يې په پيژند يا تعريف کې ده، که مور يې چې هرڅنګه وبولو، خو د يو بل څخه کره توپيرکيدونکو شيانو ټولګی ته ۰۰۰ وايو. د ټکو پر ځای ، چی هر څه ليکی، خو مور ګورو، چې په پښتو يې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډيرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه يا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاريږي او زمور ولس د دې نامه سره بلد دۍ، چې په پوهنه او لا نور ښه په شميرپوهنه کې بايد وکارول شي۰ زه بيا په دې ټينګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی يا بل څوک يې که بل ډول بولی د انګريزي يا المانې يا بل پردي نوم څخه ښه او پوهور دی۰ د ست مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګوروچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زيات کاروي او وايي، چې ډېرۍ يا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل Mايندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې index(indeces) ايندکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړيو ګڼونو ډير ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو يا مساواتو د اوبيونو(حلونو) ډيرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بيلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډيرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو ياګڼونو ډيرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډيرۍ لکه، چې ومو ويل د توکو د خويونو له لارې هم څرګندیدی شي يا ورکول کيدی شي۰

M = { x | د xخوويونو ۰۰۰ سره }

(لوستل: M د ټولو x ډيرۍ ده له خويونو ۰۰۰۰۰ سره)

بيلګه ۲ ۰ ۳

الف) M = { x | د xټولو سټ ، چې هلته x يو لومړنی عدد يا ګڼ دی }

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)\ldots\ldots\ldots M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشډیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډیرۍ یا خالي ست بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\emptyset = \{\}$

دا دې د یوې ډیرۍ یا ست سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\} \neq \{\} = \emptyset$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0\} = \{ 1/2 , -3/2\}$$

کوم ټولګې یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګنونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دویمې نیمایې میاشتو ست یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A,\ jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میږو ، غواوو او وزو ډېرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۀ ګنونو ډیرۍ(عددونو ست) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاې سټ ده داسې وایو، چې ډیرې یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیدایښتې یا طبیعي ګڼونو ډیرې(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4....\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرې(سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی مور پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو۰

۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیونې یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاې لرلو) اړیکې دي۰

پیژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیرې یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرې یا سټ M_1 هر توکی د ډیرې یا سټ M_2 توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي۰

برابرې ډیرې برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګې په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډيرۍ(سبسټ subset)

پيژند ۲ ۰ ۳ :

يوه سټ M_1 د سټ يا ډېرۍ M_2 برخډيرۍ (لاندې ډيرۍ، خوندي ډيرۍ يا سب سټ) بلل کيږي يا M_1 په M_2کې ځای ده يا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده,، ليکندود يا ليکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډيرۍ M_1 هر توکی دسټ يا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کيدی شي، چې M_1 د M_2سره برابر هم وي، که برابروالی يا مساوات نا شوني وي نو بيا د اصلي برخډيرۍ يا اصلي سب سټ څخه غږيږو۰

پيژند ۲ ۰ ٤ :

يوه ډيرۍ يا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډيرۍ ده او داسې يې ليکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

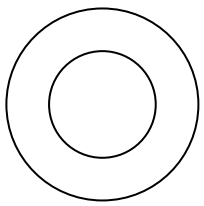
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 يو توکی د M_1 توکی نه وي٠

بيلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوريو (مربعو) ډيرۍ د ټولوڅلورګوډيو(څلور اضلاعو) اصلي برخډيرۍ ده٠

پ) څيره ۱ ۰ ۱ په هواره يا سطحه کې ټکوډيرۍ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډيرۍ يا-ستټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څيره کې وګورو، نو يوه ګردۍ (دايره) M_1 په بله لويه M_2 ګردۍ کې خوندي ده٠

تشډيرۍ په هره ډيرۍ کې خوندي ده٠ هره ډيرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډيرۍ په څير خوندي ده٠

يا دا پيژند :

$A \subseteq B$ که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بيلګه:

$A \subseteq A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{3,4,5\}$ B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يی ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:
$\{\} = \theta \neq \{0\}$

د يوې ډېرۍ توان يا توانډېرۍ (توانست)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوتنځډيرۍ يا په توانډيرۍ(-ست) بلل کيږي او داسې يې ليکو:P(M) په توانډيرۍ توکي لري، چې هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډيرۍ دا لاندې په توانډيرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يې۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور |M| لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياګنون پوهيږو ۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: |M| = |N|

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو يا مساواتو او خوندې ساتنو خويونه

الف) رفلکسيو- يا د انعکاس(هنداروني‌ز) اړيکيreflexivity

هغه اړيکې، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ريښتوني ويناوې ورکړ شوي وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړيکې رفلکسيو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هيڅ ډيرۍ د خپل ځان اصلي برخډيرۍ يا برخست نه شي کيدۍ٠

ب) سيومتريکي اړيکې Symetric relation

هغه اړيکې سيومتريک بلل کيږي، چې د شيانو ترمنځ چې کارول کيږي يا استعماليږي يو له بل سره بدليدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سيومتريکي اړيکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړيکی $M_2 \subset M_1$ نارښتيا يا ناټيک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزيتيويتي Transitivity يا وړون اړيکې

ترانزيتيويتي هغه اړيکې دي، چې له يوه نه وبل ته يې د وړلو امکان شته يا موجود وي٠

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسي لولو: که M_1 د M_2 برخډیرۍ او M_2 د M_3 برخډیرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډیرۍ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکي یا خویونه دي

۲ ۰ ۲ په ډیرۍ کې کارونې یا عملیي

ټولنډیرۍ (د اتحاد ستټ)

پیژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډیریو M_1 او M_2 ټولنډیرۍ(unionاتحاد ستټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته وایو ده:

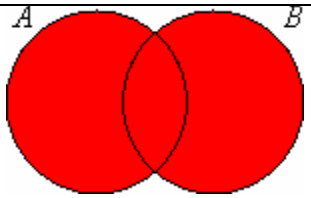
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسی پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډیرۍ یا ستټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ –مه برخه د یا سره پرتله) یانې دا د ټولنډیرۍ توکی د M_1 یا M_2 او یا د دواړو توکي دي۰

یا لاندې دیاګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A) (x د A سره B اړيکي لري)

بيلګې

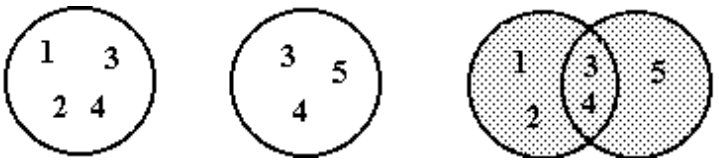
الف) M_1 دي د ځوانانو ډيرۍ وي، چې بکلوريا لري او M_2 دي د هغو ځوانانو ډيرۍ وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرئ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري٠

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

يا په لاندی توګه پيژند او بيلګه: A او B دي دوه ډيرۍ وي د دي ډيريو ټولنه داسې ليکو

$B\} \in x \vee A \in B = \{x \mid x \cup A$
$\cup A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,4,5\}$ A
$B=\{1,2,3,4,5\}$



تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرۍ ټولنډيرۍ په ګوته کوي٠

پ – ځيره ۲ ٠ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي۰ ب) ګډ ټکی لري۰

پ) اړيکي $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلي دي۰

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ۰۰۰ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

$$1\ ,\ 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4+, 1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري۰

اسوځياتيو قانون باور لري۰

$$(M_1 \cup M_2) \cup M = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع ستټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع ستټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډيرۍ M ټول توکي د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکی وي٠

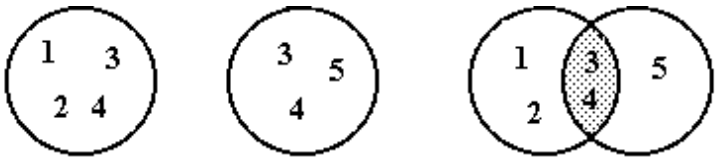
د غوڅډيرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکي دي (د ۱ –مې برې د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريو A او B غوڅۍ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلګه:

$$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{3,4,5\} \Rightarrow A \cap B = \{3,4\}$$



يادونه: دې پورته ډول ديا ګرام ته د ون ديا ګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايی

بيلګې :

لومړۍ : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا څخه راځي، چې په M_1 يې په نخښه کوو٠ يوه بله ډله ، چې په M_2يې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښايو، دي٠ د دې دواړو ډلو غوڅډيرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

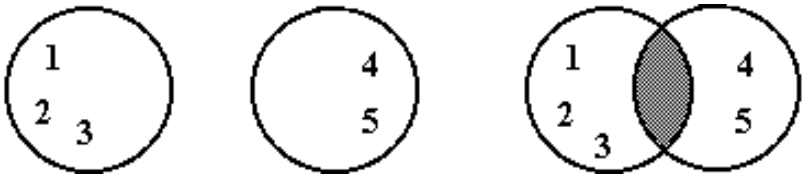
د پکتيا زده کوونکي دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

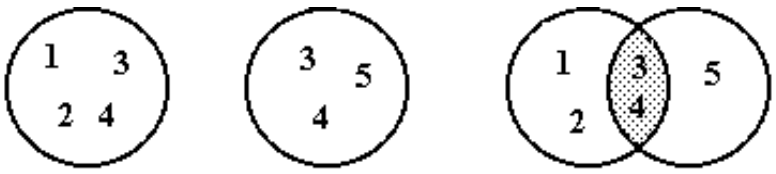
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M = \{r, l\}$$

دريم څيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګڼون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړيکی

$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بيلګه:

$A \subseteq$ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډيرۍ اصلي برخډيرۍ ده

دوه ډيرۍ، چې غوڅډيرۍ يې تشډيرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردې بلل کيږي

د غوڅډيرئ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډيرۍ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډيرۍکارونو يا ډيرئ عمليو يانې ټولنډيرۍ او غوڅډيرۍ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يواځې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق ست M_2 د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M کموالی يا فرق دی او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرۍ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرۍ M_1 توکي نه وي٠

ليکنود ياليکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A اوB توپيرډيرۍ ياکمونډيرۍ يا تفريقډيرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دی

بيلګې :

لومړۍ : په يوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډيرۍ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي٠

M_1 / M_2

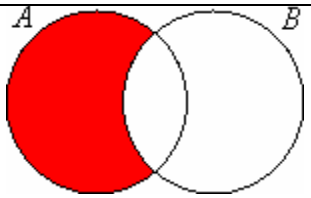
د هغو زده کړو ډيرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرۍ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي٠

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A\backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړيکي لري)	

دويم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون يا تفريق پيژند او بيلګې را په ګوته کوي په ټولېزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

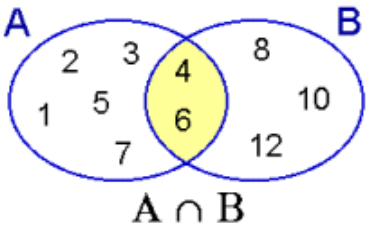
د يوې ډيرۍ يا ستټ کمپلمنت يا پوره کوونکی :

دا کارونه يا عمليه د نورو کارونو څخه توپير لري، چې په ډيرۍ کی مو څيړلي٠ دا يوه يوځاييزه کارونه ده او دا نورې دوه ځايزې کارونی يا عمليې دي٠

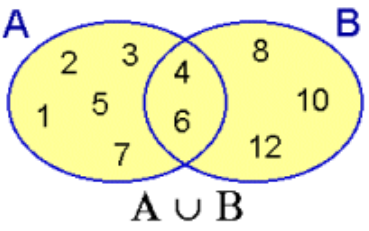
مور بنسټډيرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډيرۍ، چې U کې پراته دي يانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته يانې د M توکي نه دي پوره ډيرۍ يا کمپليمنت بولو او د $\bar{M}$ سره يې په نخښه کوو٠

په لاندې څيره کې بيا د ډيرۍ غوڅی، - ټولنه او – کمون او برخډيرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زيات پام را اړوو٠

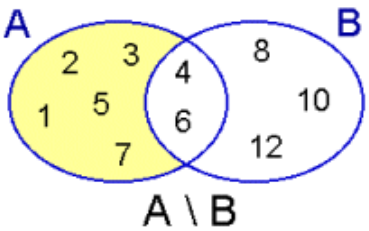
(c) ketabton.com: The Digital Library



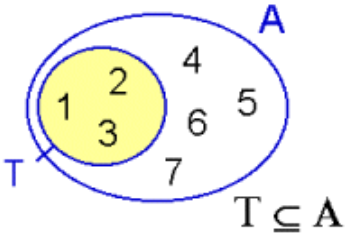
A ∩ B



A ∪ B



A \ B



T ⊆ A

پېژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ ټیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي۰

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي۰ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي۰

۲ ۰ ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه کې لومړی د ډیرۍ ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو٠

پیژند ۲ ٠ ۹ : د دواړو ډیریو M یو او M 2 ډیریضرب(اټیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره ځلیږي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیرۍ ده٠

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې ځل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو ریېلګنونو ډیرۍ وي٠ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیرۍ٠ RxR د ټولو ریېلګنونو جوړو ډیرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیرۍ ده٠

پیژند ۲ ٠ ۱۰ :

د څیرونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیرۍ $M_2 \times M_2$ برخډیرۍ پوهیږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې څیره شي۰

داسی هم ویلی شو: د M 1 توکي د M 2 په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا څېره کیږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y څیره توکی بلل کیږي۰

د ټولو اصلي توکو ډیرۍ پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژندډیرۍ یا تعریفډیرۍ بلل کیږي او د ټولو څېره توکو ډیرۍ د څېرونې ډېرۍ، ارزښتورشو یا ارزښتډیرۍ بلل کیږي۰

بیلګی

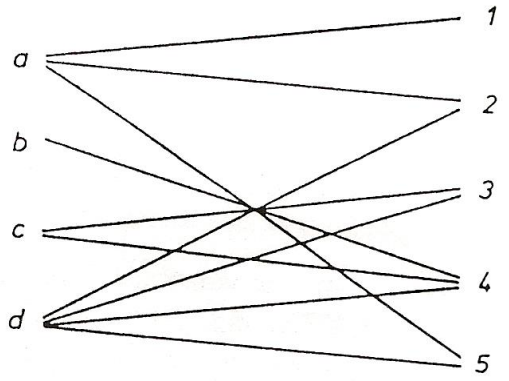
$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه د M یو توکو څېرونه ونه یا څېره کوونه د M دوه په توکو

څېره توکی	اصلي توکه یا څیره کوونکی توکی
a ----------→	1 , 2 ,5
b ----------→	4
c ----------→	3,4
d ----------→	2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه:

$$F = \{ (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)\}$$

(د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توکو جوړو ډيرۍ)

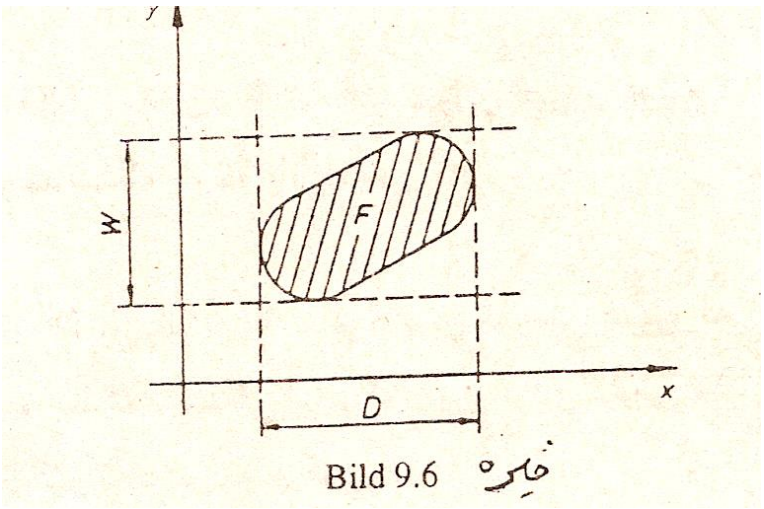


Bild 9.6 څېړه

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځيره کيږي٠ داسې پيژند شوې يا تعريف شوې ځيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلی شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ ۰ پیژندډیرۍ یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونوډیرۍ ده او ارزښتډیرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرۍ ده ۰

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده ۰ د ښوونکو ډیرۍ د ځانګړو ټولګیو په ډیرۍ کې

مورِ د څېره وني څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي ۰

له یوې څیرونې Fغږیږو د1 M په M2 باندې ۰ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غږیږو له M1 په M2 کې (دلته دې « په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیږو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راوړل شي ۰

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غږیږو له M1 په M2 باندې ۰ دلته څلورمه بیلګه د بیلګې په توګه راوړو ۰ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي ۰

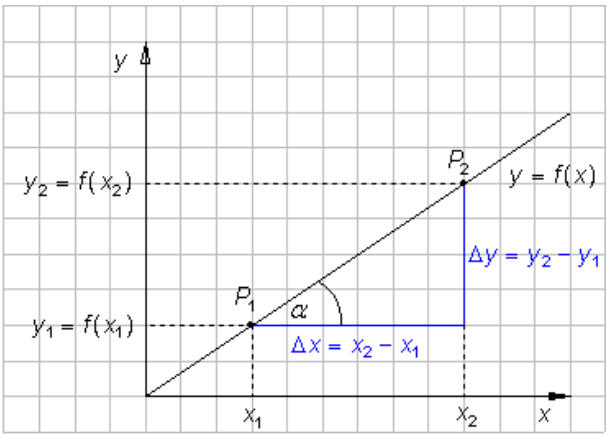
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید ځیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دی۰ زما مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلې ده۰

بیلګه ۲ ۰ ۵ : مونږ په هواره یا سطحه کې څرګند شوي کړی د ډیریځل RxR په ځیر د برابرونونو له لارې رانیسو(R د ریبلګونو ډیرۍ د ګډکړښې ټکي دي(ګډونه دې وکتل شي))۰

الف) $y = 2x$ یوه ځیره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$



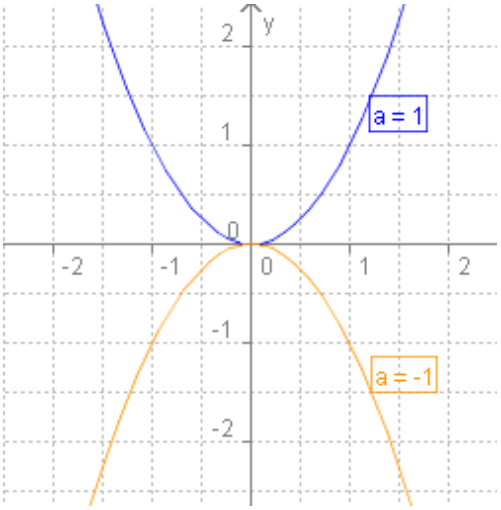
یادونه : په پورته ځیره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

ب) $y = x^2$

یوه ځیره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ W = [0, \quad] \quad \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



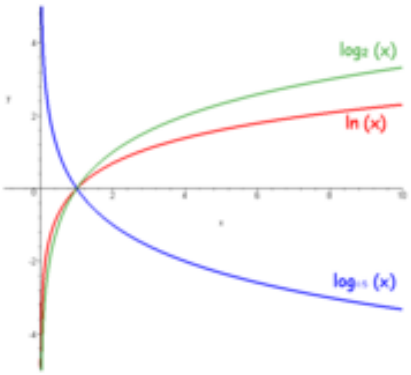
يادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې $b = 0 , c = 0$ او $a = 1 , a = -1$ ايښول شوي دي٠

پ) $y = \log x$

يوه څيره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري٠

$$D = (0,\infty) \wedge W = R$$

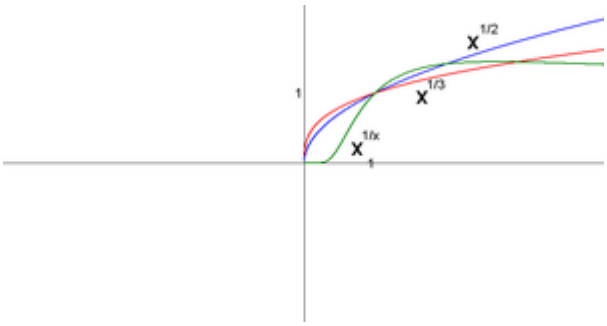


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکې څخه په مننه راکښته شوي دي۰

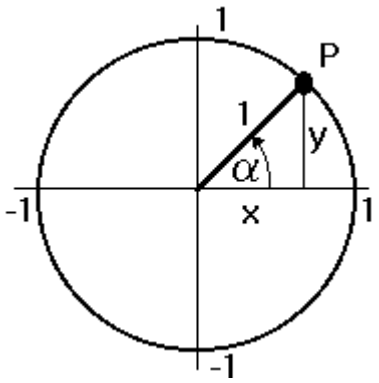
پیژند ۲ ۰

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي۰ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$ باندې څیره شي۰ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$ تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي۰ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي۰

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې ټولې څیرونې فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر څټ لاندې برابرون (یوونګردۍ یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [-1,1] (D=W فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لرې پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرځټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرځټ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیرۍ ده له $(x, y) \in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنیF او F^{-1} یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیرونې نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ مور پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي.

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډپې یا ستټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړئ

الف {x لومړی عدد او $x < 20$ | x }(لوستل: د ټولو عددونو x ډپرۍ یا ستټ، چې xلومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x|x^2+x-6=0$ او $x> 0$ | x} دا په نوکانوکې ټول له کینې ښي لور ته لولو

ت) { x | x ریښلګنې او $x^2 + 1 = 0$ }

۲ – د توکو x , y , z اړلرونوالی و ډیرې M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنیو ګنونو ډیرۍ

$x = 4 , y = 5 , z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیرۍ (اوبیډیرۍ)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0 , y = 2 , z = 3$

پ) M د ریشنلګنونو ډیرۍ چې په اینټروال [3 ,-3] کې پراته دي

$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$

ت) M د ریښلګنونو ډیرۍ چې په اینټروال [3 ,-3] کې پراته دي

$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومې اسړیکې پرتې دي

الف) M_1 د ټول جفت ګنونو ډیرۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د تولو تولګنونو ډیرۍ

ب) د تولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو–) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د تولو ګنو ډیرۍ چې پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د تولو ګنونو ډیرۍ چې په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د تولو ګنو ډیرۍ چې په ۱۲ ویشل کیږي!

۴ – د ډیرۍ { a,u,t,o } توټ برخډیرۍ ورکړئ!

۵ – د لاندې ډیریو څخه تولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او دواړه ټوکډیرۍ جوړ کړئ !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x + - 2 = 0 \}$, $M_2 = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیرۍ $\emptyset$ تولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړئ!

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدې ډیرۍ تولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړئ!

۸ – وې دې $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$,$M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړئ : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړئ

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

پ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وې دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\}$,

$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$

$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}$, $M_1 \setminus M_2 = \emptyset$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینټروال ټکي ډیري:

$M_1 = [-3, 3)$, $M_2 = [1, 7]$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ خل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څیرونی دي

$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$

$F_2 = \{(1,a),(3,a)\}$,

$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$,

$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\}$,

$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$

په ټولو حلمونو (اوښیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په څټ څیرونه ورکړی

ت) د څیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ټرنی، کارونی یا عملیي)

۳ ۰ ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبيعی اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ وديينه کې هڅې وکړې، چې له ډيرۍ (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيرۍ پوهنه هم څيړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چې دا ډيرۍ تشريح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعيت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وی(کلمه يا لغات) راپيداشوی، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د ريښتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعی اعداد و څخه په ګټلو يا که غواړې شميرلو کې ګټه اخستل کيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰۳ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګڼونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۱۰۳:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيرې په ځير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيرې يا ست په نامه يادېږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرځومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي اوهمداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند (منطق) کې دي وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يواځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترڼی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسې سملاسي يا ترڼی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسې راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډیرې M صفر د توکي په ځیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسې ترلې راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په ځیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډېرئ یا –ست یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په المانې کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا ځیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لږ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعې سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د ځیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز ځیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو ځیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري ځیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه: CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کیږي لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنۍ ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګې په توګه: XC = C - X .

بیلګې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم (پوزیشن سیستم (Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستنې په بنسټ ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + ... + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې a_i، g دا $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k\, a_{k-1} \ldots .a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسیز سیستم (ګڼخای ارزښت) باندې کیږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کې ګڼخای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګي کې خای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډک، زیاتونسیستم(جمعی –) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چې دا په لاندې ډول څانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واړی) په یو ګڼ کې پرله پسې یا څنګ تر څنګ راشي

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M, خورا زیاته یو خل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کې راتلی شي.

۳ – که بنسټیز نخښه I, X او یا .....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ خای په خای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انخورنې (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بسټیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انخور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC

۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښی په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چی مور ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چی عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی، چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چی څیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چې دلته تړې بنسټیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چی ګوته مو ورته ونیوه، زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چی د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زیاتون باندې انخور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انخورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي (مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نخښه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انخورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انخورولو نخښی، لکه د مخه مو چی انخور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنسټیزه نخښه ده. دا چی نور ګڼونه نه انخوریږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسی (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسې جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخښو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، خمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري(set , die Menge ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي:۱،۲،۳،۴، او داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

مور ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا رینښتوني

(رینښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی.)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (څیفر) توپیر ته پام وي.

مور دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}.10^{n-2} + ..+ a_2.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو څیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (څیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئيز سيستم	لسيز سيستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \; a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ :
$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرۍ يا ستې داسې په نخښه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرۍ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1, 2, \ldots. \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې مور نه ځیرو۰ زمور لپاره غوره هغۀ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چی مور ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خونې یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه یا ځیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بیا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیدایښت ګڼونو، په ټولیزه توګه د ریبل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم يا ترتيب يا لوي واړه ترتيب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کې يا د نخښې خوله کې عدد يا ګڼ لوي دې او د وتلې کونج يا لوي کونج >که نخښه يا داسې کونجکې يا څټ يا ککړه کې ليکل شوی عدد کوچنی دې. که ګڼونه يا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لويواړه اړيکې داسې ليکو، يانې که 23 > 15 ولرو نو تر ټ څرګندېږي، چې عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنۍ دې .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړيکو څخه ټيک يوه اړيکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری وليکو هم a = a به وي اينه ونه يا هندارونه يا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سيومتري، انډول، ورته والي Symmetry)

د انعکاسي (ايينه ونيز – يا هندارونيز) برابروالی يانی که چيري دا عددونه وراينه يا هنداره يا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بيرته سره برابر دي يا برابرېږي. که انعکاسي(اينه ونيز)برابر نوم ورته کېږدو، نو هم مناسب به وي، خو مور به يې همغه سيومتري وبولو.

٤ ـ له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c(ترانزيتيو Transitivity)

ترانزيتيو ګورو، چې يو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چې دا ګڼونه يو د بل سره په واکوالي تړلي يا له يو څخه وبل ته ځی يا وړل کېږي.

٥ – له a < b او b < c => (لاس ته راځی) a < c يا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړانديز : که چيری دا پورته وي يا لغاتونه يا نومه ونی په همغه لاتين نومونو وليکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شميرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهيدنه ښه او اړيينه ده٠

ب : د زياتون (جمع) .Addition n بنسټيز قوانين

که چيرې له طبيعي اعدادو څخه يو ، دوه يا څۀ ګڼونه يو په بل زيات شي، نو يو پيدايښتي ګڼ تړې لاس ته راځی او دا کارونه(عمليه) «زياتون يت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه يو په بل زياتيږي٠

پيژند: د همغه ډول شيانو يا يو څه يو په بل زياتيدلو ته زياتون (جمع) وايو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزيات کړو نوعدد ۲۸ تړې لاس ته راځی يا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کي ۱۰ او ۱۸ يو پر بل زياتيږي، نو له دې امله يې «زياتيدونی» (ما تراوسه زياتووني بللي، خو فکر کوم،چې زياتيدوني يې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کيږي ٠ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وايه ٠ + زياتوننخښه ده او = برابرونخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعي يا زياتون بنسټيز قوانين

۱ - د دوه طبيعي اعدادو a اوb لپاره تل يو زياتون (جمع) a + b شته دی

۲ - يواځنوالی : له a’ = a او b’ = b څخه لاس ته راځي: a’+b’ = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتيو- يا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځياتيو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – يا همغږيزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له a <b څخه لاس ته راځي a+c < b+c

يادونه : په a+b=c کي a اوb زياتۍدوني a+b زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کي لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په N° کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: a+0=a

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې نااړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې a>b وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: a - b = x

که x= a -b شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a تری کمونی يا مفروق منه a +b کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

مور پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښنی ليکو، چی ساده يي ونوموو:

20 – 10 = 10

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی مور له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله يې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «تري کمونی »، ځکه، چی تري کميږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کميدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره د پيدايښتي ګڼونو په ډيرې کي تل يو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم ليکو ab په پورته کې a او b ځلوونې (ضربيونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعي) لنډه طريقه، چی ۰۰۰۰وي یا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زمور لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راويستلي وي۰

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضريبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له a = a´ او b = b´ څخه لاس ته راځي a´b´ = ab (يواځيتوب)

۳ - لرو ab = ba کموتاتيو – يا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوځياتيو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ويشوني- يا ديستريبوتيو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتيتوالي يا يوغږيزوالي قانونMonotony

ټ – د ويش بنسټيز قانون Division

پيژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبيعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي يانی صفر نه وي يو طبيعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ يا b/a د b او a ويش (تقسيم) بلل کيږي، چی ماتګن(کسر) يي هم بولو

۱ – که $a / b = x$ يا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته يا موجود وي ، نو يواځنی شته دی(يواځني په دي مانا، چې بل ګڼ x نه شته او يواځي همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کي a/b وښ x ويش ارزښت، b ويشونی يا ويشه وونی دی، ځکه چی په يوځه ويشل کيږي او a پرويشونی بلل کيږي، ځکه، چی څه پر ويشل کيږي يا مقسوم، مقسوم عليه يا قاسم ، حاصل تقسيم ۰

ګورو چی له قاسم يا مقسوم او همداسی د مقسوم عليه او حاصل تقسيم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- يا پرې ويشونی ، ويشه ونی اوويش ارزښت يا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشينی به وه وايم، چی تراوسه په شميرپوهنه کی ورسره نابلد يو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچي پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچي رسیږي۰ ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی۰ دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې املـه څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې املـه ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګنونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انګریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده)۰

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې تري څرګندیږي، له ښی لور کیږ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیږ لور ښی لاس ته راځی۰ یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ۰

ټولګنونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي۰که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانی ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چی ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیدایښتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی۰یا 80 – 100 = -20

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترپکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی۰ اوس يوه د اعدادو بلې ډيرۍ پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګنونوډيرۍ ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيرۍ کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګنونو ډيرۍ ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{....-3,-2,-1,0,1,2,3.....\}$$

د دې لپاره، چې تړي کمونی د کمۍدونی کوچنۍ وي ، نو پيدايښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيدايښتي ګڼونو مخنښنه په کموننښنه يا منفي نښنه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زمونږ هيوادوال د څټ نښنی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نښنه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايې د ګڼ کين لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنښنه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګنونوډيرۍ

$$Z = \{ \ldots. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots. \} $$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيدايښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګنونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګنونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګن x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ . ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، دري ، څلور ۰۰۰ بنسټیزو څیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنسټیز څیفر (د اخر دوه، دري ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیز څیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او مورږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونخښو(څیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ التر نیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چې پروت کمون هم ورته وایی له بنستیزو څیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زیاتون کمون پوهیږو ، بی له دې، چې ځاي ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چې الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 37ځکه چې |20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلګې : 37604 | 7 ځکه چې 567 | 7 ⇔(604-37)|7

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پیداپښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداپښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دي مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي يانې ګڼ a په ګڼ b وېشړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو ېې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ ېې ټيټ يا کم وي . يانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ يانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي يانې د دواړو ګڼونو پروېشونی

دې او خورا غټ پروېشونی هم دې. يانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسي ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه یي : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته ,,خورا

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

Greatest commom divisor(g c d)(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)

اوس بیا داسي مخ ته ځو:

په پورته کي هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یاني خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا پې سره خله وو، چې لاس ته

تري راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یاني ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یاني ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یاني ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یي: خ ګ ځ) یا
Least common multiple(l.c.m.)(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» (او یا هم a د bپرویشوني دې او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دې) که یو ټولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپرویشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیرې کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځاي کوو، چې په راتلونکې کې تر ې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) 1 ± او a± ویش (دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٢) د ١ پرويشونې ١ او ١ - دي

(٣) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 يواځې په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c => a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ،که c |= 0 وي ، نو د دې په څټ هم باوري دي، دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري،د ګڼونو ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څټ ac| bd لنډه ليکنه يې(که ن ج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(٧) له a | b او b| a لاس ته راځي $a = \pm b$

(٨) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x اوy لپار

(٩) ټيک هلته a|b کله چې وي|b| | |a|،

(١٠) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي |b| < a < |b| -

حل (اوبی) : (١) له a = (-a)(-1) = a1 لاس ته راځي

(٢) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي 0u = a او له کومې چې لاس ته راځي a = 0 .

(٣) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که a | b او b | c , نو ټولګنونه u او v د au = b, bv = c سره موجود دی . له دې لاس ته راځي c = bv = a(uv) ، پس a | c .

(۵) که a|b ، پس یو ټولګنی u د au = b سره موجود دی، او هم د (ac)u = bc سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي ac | bc . د c |= 0 لپاره دا اخرښخیر په څټ کیدی هم شي.

(۶) د a|b , c|d او (۵) څخه لاس ته راځي چې ac|bc او bc|bd ، د (۴) له مخې ac | bd .

(۷) د a | b او b | a څخه د ټولګنونو u او v موجودیت لاس ته راځي د au = b او bv = a سره. برسیره پر دې لاس ته راځي a(uv) = a , پس a=0 یا u=v=±1 . په لمړي حالت کې د a | b له املې b = 0 , پس a = b . په دوم حالت کې a =± b دی.

(۸) د ټولګنونو u , v لپاره دي au = b او av = c ، نو له دې a(ux+vy)=bx+cy لاس ته راځي، پس a | (bx+cy) د ټولو ټولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې a|b . له a | b ، a | |a| او b | |b| څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې |a| | |b| . په څټ: که |a| | |b| باورلرې، نو د |a| | |b| ، a | |a| او |b| |b| څخه په ورته ډول لاس ته راځي a | b .

(۱۰) دی a | b ، پس د (۹) هم |a| | |b| . که b |= 0 وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د |a|u = |b| سره، له کوم چې |a| ≤ |b| لاس ته راځي.

که a|b د ټولګنونو a,b لپاره د b |=0 سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او b همداسې د «کومپلیمنټ پرویشونې» بلل کیږي)، چې لرو a = bq .

په ټولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a اوb دې ټولګونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي ټولګونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \quad /\backslash \quad |0| \leq r < b$

هر یو ټولګې کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې ټولګې زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادۀ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګې، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري مور ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګنې د پیدایښتي ګنونوتوکی دی۰

هریو ټولګې، چی لومړنی ګنې نه وي د لومړنیو ګنونو په ځلونو(ځله وونو)(ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

$$240 = 24 \cdot 10 = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad - 1$$

$$2310 = 2 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \quad -2$$

$$3750 = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګنې ۲ د دواړو پر ویشونی دې او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دې یانی $6 = 2.3$ برسیره پردې ګنې ۵ هم نو $30 = 2.3.5$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بیلګو کي ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰گ۰پ دی

پیژند ۳ ۰ پ :

a اوb دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1)d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2)t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a اوb خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰گ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

d = (a,b)

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ۰گ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: (a,b) = 1 نو a اوb پروښ پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووښل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کي لنډونه په درېټورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ گ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کي بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرېd او *d دواړه دa اوb غ گ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d^*, d \geq 0$ له املې لرو $d^* = d$

لاندې جملې به وښايي ، چې داسې غ گ و تل شته دی

جملې ۳ ۰ ۳ :
په خوښه ټولګټونو a او b لپاره دې غ گ پ d شته وي، نو ټولګټونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل (اوبې): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ گ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کې دې وي چې د (a, b) تعریف په a او b کې سیومتریك دی) له املې اجازه لرو چې $b \mid = 0$ ونیسو.
مور اوس رکورسیف (rekursiv) (دا په دې مانا چې د مخې غږي څخه وروستی یعنې ورپسې غږی لاس ته راوړلکیږي)
ټولګټونه..... $r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$ او ..... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو : وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \mid = 0$ لپاره ټولګټونه r_i , q_i داسې تعینوو چې $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چې له جملې (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفې ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو $r_n \mid = 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چې بې له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسې لاس ته راځي، کوم چې ناشونی (ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاړشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$
$$b = q_2 r_1 + r_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د ښکته پورته وويل شي، نو په ترتيب (يو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1}\ ,\ r_n \mid r_{n-2}\ ,\ \ldots\ r_n \mid b\ ,\ r_n \mid a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b يو غ گ و دی. t دې د a او b يو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو يو په بل پسې لرو

$$t \mid r_0\ ,\ t \mid r_1\ ,\ t \mid r_2\ ,\ldots,\ t \mid r_{n-1}\ ,\ t \mid r_n$$

دا په دې مانا چې $r \mid$ د a اوb غ گ و دی.

هر د دې ګڼونو r_i د ($-1 \le i \le n$) سره، په خانګړې ډول r_n او ددې سره (a , b) يو د a او b لاينې کمبينيشن دی ، په لاندې ډول au + bv , چې u او v ټولګڼونه دي.

د $r_{-1} = a$

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د يوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که يو د a او b يو لاينې کمبينشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پيداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د يوې داسې r_i د څاي په څاي کولو له لارې هم ، چې په دې ډول د ايندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

يادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چې پورته او په لاندې بيلګه کې راوړل شي د اويکليد الګوريتم"Euklid Algorithmus" د يوې ګڼيزې دندې يا کارونې (عملیې) شيماتيکي اوښيونې(حل) متود په نامه يادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپليځيتExplizit (لاتين: څرګند، واضح، روښانه) شميرل کيدی شي.

بيلګه:

غوښتنه $d = (2124 , 1764)$. د اويکليد الګوريتم کارونې له لارې لرو:

$2124 = 1 . 1764 + 360$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاریږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په خپله کې د ګټونوتیوري دنده ده، چې په ګټونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګټونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګټونو سره انځور کړای شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګټونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبيونه : د شرايطو ضرورت سم د لاسه له ۳ بر ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرايط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګټونتېرې پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۳ . ۱۰

a اوb دې ټولګټونه وي، د a اوb هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ګ پ دی چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

ليما۳ . ۱۱ (جمله ګی)(اويکليد): په خوښه ټولګټونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعريف ۳ . ۱۲ : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دې ټولګټونه وي $(n \geq 1)$، او d دې يو نه منفي ټولګټ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d|a_i$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره

ب : له $t|a_i$ څخه د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره لاس ته راځي $t|d$.

نو d د $a_1, \ldots, a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسی ليکو $(a_1, \ldots, a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_1 , ... , a_n$ لپاره د داسی غ گ و يواختتوب په ۳ . ۵ کی کتل کيدی شي او د موجوديت لپاره يی لرو :

جمله ۱۳ . ۱ : د خوښي ټولګنونو $a_1 , ... , a_n$ لپاره ($n \geq 1$) غ گ و موجود او d د $a_1 , ... , a_n$ خطي (لاينې) کمبينيشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو ټولګنونو $x_1 , ... , x_n$ لپاره.

يادونه : له دې بيا لاس ته راوړل کيدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه ټولګنونو $a_1 , ... , a_n$ د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1,...,a_n$ غ گ و پل په پل د اويکليد الګوريتموس له لارې پيدا کړي، چی دلته يی د اوبی يا حل څخه تيريږو.

د اوبی يا حل لپاره يی د n په لور د پوره ايندکشن څخه کار اخستل کيږي چې په ۸ –امه برخه کې څيړل شوی دی.

بيلګې:

۱ - ګنونه 240 او 3750 غ گ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ گ پ دی: 17 . <2>2 = (408,748) یا دا لاندي که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ گ پ د ګڼونو او غ گ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا مور پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

مور په لاندي کي د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک گ ز) کلیمي په ځیرنه پیل کو ۰ دا کلمه و غ گ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، مور په لاندي دول سملاسي تولیز پیژند ورکوو

تعریف ۳ . تې : $a_1, \ldots, a_n$ دي ($n \geq 2$) تولګنونه وي، او v دي یو داسی نه منفی تولګنې وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $v \mid a_i$ د $i = 1, \ldots, n$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د $i = 1, \ldots, n$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1, \ldots, a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله(لنډ : ك گ خ) بلل کیږي او داسې یې لیکو

$$v = [a_1, \ldots, a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دي ټولګڼونه وي او v دي يو داسي نه کميز يا نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) v|a او v|b

(۲) که a|w او b|w څخه لاس ته راځی v | w

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کيږي او په لاندي توګه يې ليکو

v = [a,b]

جمله :

په خوښه ټولګڼونو a,b,c,…,n لپاره ک ګ ز شته دی او دا يواځنی دی

[a,b,c,…,n]

يادونه: مور لاندي مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو :

دټولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1 , \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $[a_1 , a_2] = |a_1 a_2|$ (a_1 , a_2)

لاس ته راوړنې (داهم په همدي مانا مګر د جملی په څير دی): د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره باور لري: له a | c , b | c او (a,b) = 1 څخه لاس ته راوړو ab |c

د ګټيوري بنسټيزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژنده :

يو ټولګن $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشونv بل پرويشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله): که p يولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1,\ldots,a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \le i \le n$ سره.

حل (اوبی): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دي . له مخته تيري جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \le i \le n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بنسټ.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيدايښتي (طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پوري، په يواځني او يواځني (يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي) د $n = 1$ لپاره باور لري. که. لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په ځير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $n >$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. مور اوس ټول د n پرويشونې $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسې ګڼ شته لکه n . که p د دې پرويشونو کوچنۍ پرويشونې وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پرويشونې q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چې q د n پرويشونې وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چې $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د ځل په څير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دي $n = p_1 p_2 \cdots p_r = p'_1 p'_2 \cdots p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيو ګڼونو د ځل په څيرليکنه . له $p_1 \mid p'_1 \cdots p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د يو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچې بيا $p_1 = p'_1$ باور لرې، نو لاس ته راځي $p_2 \cdots p_r = p'_2 \cdots p'_s$ ، له کومو چې د ايدکشن له نيونې لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزې جملې د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په تيک يو ډول په لاندې فورم انخوريدلی شي
$n = \prod_p p^{\nu_p}$ ($\nu_p = 0$ له ν_p يواځې د پای ډيرو p لپاره). (ν ښوولې ټول کيږي)
چيرته چې p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکې لړۍ پرلپسې کې خغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p/bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)=(a,c)=1$ () سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} \quad , \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$

او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا خواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي خواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړنې : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \quad , \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$

او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

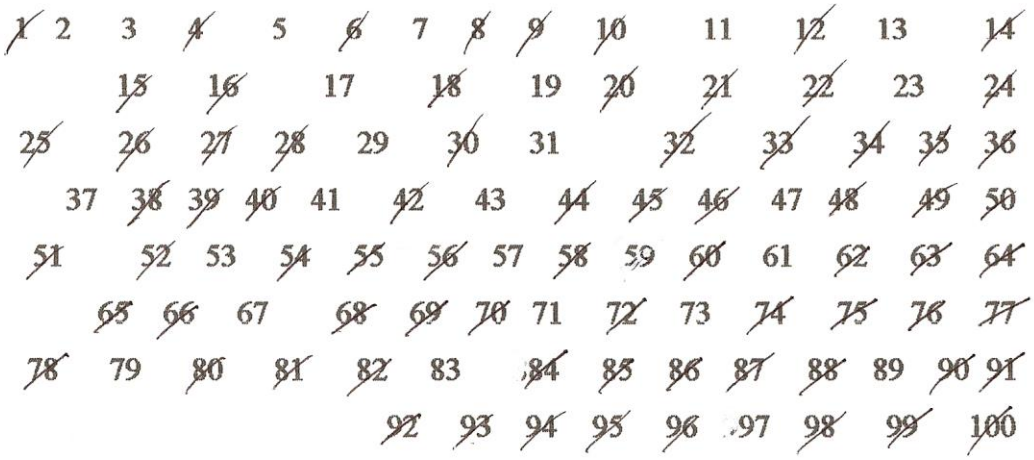
یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا خواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي خواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبی) : مور جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخې لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دغږ متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو



۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چی دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راڅیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چیa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابروننخښه ده۰ دا په دې مانا، چی b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرې کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بيا هم ويشa : b (دلته هم b پرa ويشل کيږي) کيدونی شي» سره له دې، چې ويش تل په ټولګيونوکی پيژند نه لري يا تعريف نه دی يا صورت نه نيسي« بايد د ټولګيونو ډيرې ماتګيونو(کسر) ډيرې ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده يا وييني b/a سومبوليک مانا لري، د نوو ګيونو په ځير نيسو او په ټولګيونو يې ور زياتوو، نو هغۀ ګيونه، چې لاس ته راځی مورږ ورته راشنلګيونه وايو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په ځير ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ اوa |b د ماتګڼ په ځير ورکړ شوي وي

د راشنلګيونو ډيرې، چې په Q سره ښايو د ټولګيونو ماتګيو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګيونو له ډيرې وي، د ټولګيونوپراخوالی دی او ټول د مخه تير بنسټيز قوانين په کې باور لري او د ويش بنسټيز قانون ته داسې پراخيدلی شي

ټ : د ويش(تقسيم) بنسټيز قانون(دوام)

۲ ـ د دوه راشنل ګيونوa ،$a \neq 0$ او b لپاره يواځنی راشنل ګڼ x = b/a شته دی، چې برابرون يا مساواتax = b پوره کوي

راشنل ګيونه هم د ورځنيو اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلی

بيلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وويشو، نو د هر تن نيم من غن, راسيږي، چې دا نيم يې

راشنلګڼ دی، يانې $2 : 1 = 1 / 2 = 6 : 12$ يا $\frac{1}{2}$

دا بايد په ګوته کړو، چې راشنل ګيونه د پای يا ناپای لسميز ګڼ په ځير ليکل کيدی شي

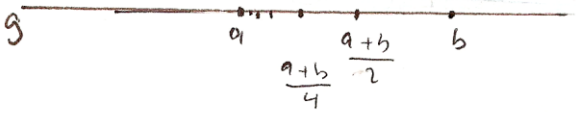
(c) ketabton.com: The Digital Library

٣ ٠ ١ ٠ ٤ - ريیل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنۍ تيوريکي اړتياوي چې د شميرعمليو بې بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبې شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چې اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريشنلګڼ له لارې کيدی شي چې د کرښې اوږدوالی تيک ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کې هم ناپای زيات ګڼونه، چې په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کې هر ټکی د ريشنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښې هر ټکی د ريشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چې د «ايريشنلګڼونو»په نامه يادېږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړۍ نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلګې په توګه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چې د مربع يو اړخ ١ وي نه شي کيدی چې په ريشنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملې په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رييلګې کليمه يوه ژوره کليمه ده چې د پوهيدلو لپاره يې «پولې» (ليمس lim) ته اړتيا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څيړنې لاندې ونيول شي.

ډير اينتروالبنديدل چې په همغه يوه ټکې راڅرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتين :مساوي ارزښته) ليدل کيږي

رييلګنديزې R چې په ريشنلګنديزي د ايريشنلګنديزي ورزياتول دي چې له $\sqrt{2}$. ۱ . ۱ تر $\sqrt{2}$. ۱ . ۳ برخې پورې ټول بسټزقوانين په کې باور لري. د رييلګې له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نيول کيدی شي. په دې ډول رييلګنونه ټولې د شميرلو او اندازه کولو اړتياوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رييلګې حل يا اوبی نه لري. دلته د دې ګنونو پراخوالي ته اړتيا پيښيږي چې کمپلکسګنونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر څيړنې لاندې ونيول شي.

يا دا لاندې په لنډه توګه:

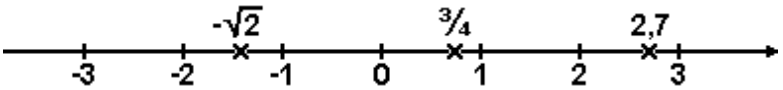
موږ ګنونه يا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګنونه نه دي يانې که موږ د ۲ ګڼ ريښه(جذر) ونيسو، نو داسې يو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسميزه توګه پاي ته نه شي رسيدی يانې پريوديکی (تل بيرته راګرځيدونی يا پسې نور هم پراخيدونی) دي۰ داسې ګنونو ته ايراشنل ګنونه وايو۰

تل بيرته راګرځيدنيز (periodi(cal تل بيرته راګرځيدوني ,Period د ګنونو ځنځير نه شليږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګنونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګنونوتولنی ته ریيل ګنونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ مورِ د ګنونو د ښوولو لپاره لاندې ګنونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیدایښتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګنونه کښل شوي دي یانې ریل ګنونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د ریيل ګنونو لپاره رابیل شوي قوانین څیړو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په ریيلګنونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (ویینی) سره شمیرنه (نوکان ایښوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلوونې له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندې (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته مورِ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفريق (زياتون او كمون)

د زياتون او كمون بنسټيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a \ , \ . \ \ a - b = a + (-b),$$

$$(a+ b + c \ldots -c -d- \ldots) + (e+f +\ldots -g-h- \ldots) = a+b+\ldots -c-d- \ldots +e+f+\ldots -g-h- \ldots$$

دا دا مانا لري، چې كه چيرې د نوكانو دباندې زياتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوكانو څخه ويستلو كې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي٠ كه د نوكانو د باندى كموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوكانو ايستلو په حال كى د نوكانو دننه نخښى بدليږي٠ يانى كموننخښه زياتوننخښه او زياتوننخښه كموننخښه كيږي٠ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a +b+\ldots -c-d- \ldots)-(e+f+\ldots -g-h-..)= a+b+\ldots -c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots +g+h+\ldots$$

په همدې ترتيب كيدى شي نوكان هم ځاي پرځاى شي٠

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼكرښه د صفر څخه د يوه رييلګڼ واټن په ګوته كوي،

د كوم لپاره چې ليكو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بې اړيكو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او كميزه نخښه يا مثبت او منفي نه ليكل كيږي يا يون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټيک او ټيک يو ګڼ ښايج او بس٠

$$|a| = a \ ; \ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a| = 0 \; ; a = 0$

$| a| = -a \; ; < 0$

يانې که a زياتيزه يا مثبت وي،نوa پخپله ليکواو که a کميزه يا منفي وي، نوa- ليکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخبنی قوانين باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چيرته ډير نوکبندونه راګرځيدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بيلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بيلګه ۱ . ۳ :

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2v)(4u - 2v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په ځير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$(3a^2b - 6ab^2 + 12abc) : 3ab = a - 2b + 4c$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سړی د ګډو ځلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې څايه کيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{پاره } ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعې وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \quad \text{پاره } a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۷ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b \quad \text{پاره } a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad \text{پاره } ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:
باقي يا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b} \quad \text{پاتې } a\neq b,$$

بیلګه ۱ . ۱۰

$$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}\,v)=4u-\sqrt{2}\,v \text{ Rest } v^2 \quad \text{پاتې} \Leftrightarrow$$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \mid= -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال ورِ د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دې اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولینوم درجه د ماتلاندې پولینوم درجې لوې یا مساوي وي($n\geq m$).

موږ نیسوچې: $a_n\mid=0, b_m\mid=0$ او $Q_m(x)\mid=0$.

د دوارو ویشو« توته ویشو» (پارځیالویش(Partialdivision)) دا دی چې دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom 1}+\frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چې د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنۍ ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سړی یواځې د جګ نظم غړي $a_nx^n:b_mx^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چې د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – ټوټه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجې سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجې کوچنی وي.

د ټوټه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۳ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x)$: $Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1)x^2Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بيلګه ۱۲ . ۱۲ : د ټوټه ويش بيلګه ۱ . ۱۱د $F(x)$ غلطي ته دوام ورکوو، ترڅو چې د ليکنې شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) = (9x^2-6x)$$

پاتي = $3x+1$ ياباقي

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

ياباقي = 3 پاتې =

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توټه ويش کيدی شي په لاندي ډول مخ ته يوړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $6x^3-4x^2$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $9x^2-6x$

(6) $3x+1$

(8) $3x-2$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

(2) $18x^4 + 6x^3 - 6x^2$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $9x^3 + 3x^2 - 3x$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $3x^2 + x - 1$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګنونو m,n څخه د ریشنلګنونو انځورونو لپاره تعریف شوې۰ کیدی شي، چې دا کلمه a/b ته، چې a او b رییل ګڼونه دي، وغزول شي۰

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګې په توګه:

ویش a/(b-c) ټیک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید $b \mid = 0$ وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه۰ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا مورِ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو۰

بیلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b \mid = 0 , c \mid = 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b \mid = 0, c \mid = 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b \mid = 0 , c \mid = 0 , d \mid = 0$$

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په څو واره ماتګنې کې باید اصلي ماتکربنه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{a}{\frac{b}{c}}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګنې a / b, b|=0 په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یاني ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګنې لنډوالی ددې لپاره بنه دی، چې ماتګنې ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډيدی دا $(a+c) : (b+c) = a:b$

باور لري،چې $b \mid = 0, c = 0 \setminus / -c \mid = a, a = b$

پراخوالی يا غزول د دې لپاره اړيين دی، چې ډير ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې يواځې هغۀ مات يو په بل زياتيدی يا يو له بل کميدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چيرې پرځټ يا برعکس ماتګنونه a / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زياتوو او يا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې بايد راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بيلګې په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتګنونو ګټلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بيلګه باندې ښايو

بيلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا٠م٠ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ٠ م ٠ ل ٠

کیدی شي، چې ا٠م٠ل٠ د لومړنیو ګنونو ځل په ځیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3٠. 3.٠2٠36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ یا لوړ جګګڼ یا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانیول کیږي٠ چې ګڼل خورا ساده کوي٠

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار ځنګه د ماتو په ټولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یې ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دې $a\neq 0\wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$ab(ab)(a^2b).(ab^2)=a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دې

a = a

b = b

ab = a b

$a^2 . b = a^2$ b

ab^2 = a b^2

دا ۱۰م۰ل۰ په لاندې توګه دې $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادي

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا٠م٠ل٠- چۀ دا په همدي وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوي افادي لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دي مات ماتباندي صفر دي‌په دي ډول په پورته پيل کي ورکړ شوي افاده يا وينه د صفر پيچلي ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندي قاعدي باور دي:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},b\neq\wedge d\neq\Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c};b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0\Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

$$a\neq 0,a\neq b,a^2-a+b\neq 0$$ د

لپاره۰ دا په دي مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,\forall\,|\,a\,|\neq|\,b\,|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی۰ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل۰ د ګڼۍنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

او په دې کڼونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه۰ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

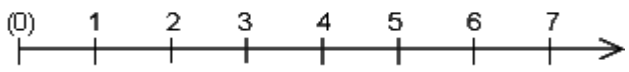
مور هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي۰

ګڼونډیرۍ (لنډه ټولګه)

پیدایښتي – یا طبیعي ګڼونډیرۍ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایښتي ګڼونو انځورونه

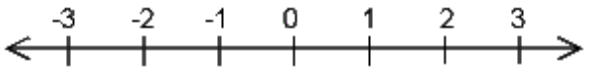


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګنونو ډيرۍ

$Z = \{ ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$

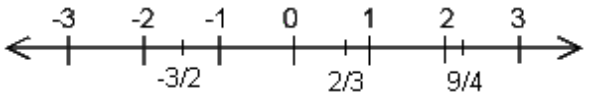
د ټولګنونو ډيرۍ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګنونو ډيرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} | \, p,q \, | \, Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګنونکرښه راشنلګنونه د ټولګنونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدۍ شي

د ماتو سره شميرنه

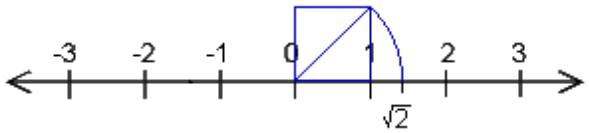
د دوه راشنلګنونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګنونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يي هم ترمنځ نور ګنونه يا ځايونه هم شته، چې ګنونه په کې ځاي دی او دې ګنونو ته مو ايراشنل ګنونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دۍ

راشنل او ايراشنلګنونه رييل ګنونه جوړوي

د رييل ګنونوډيرۍ يا حقيقي اعدادو ست

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رییلګنونو ډیرې د ګنونکرښې ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګنونکرښه کې روښانه ده



په رییلګنونوکې بې له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګنونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړۍ پوړۍ

Addition:زیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون a + b = b + a

د زیاتون اسوځیاتیو قانون (a + b) + c = a + (b + c)

و زیاتون ته د یوه بې اغیزه یا ناپیلی توکی شتونa + 0 = a

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد0 = (-a) + a

کمون:Subtraktion

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ تري کمه وونی – کمه ونی = کمون

a + x = b ⇔ x = b – a

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شميرډولونه:

دويمه پوړۍ

ضرب يا ځل: فاکتور (ځله وونی ضريب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
$12 = 3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$.د زياتون تکرار، بيلګه

د ضرب يا ځل کموتايتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب يا ځل اسوځياتيو قانون$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستريبوتيو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د يوه ناپيلي توکي شتون(بي اغيزه توکی يې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت يا برعکس قيمت$a \cdot (1/a) = 1$

يو ضرب ټيک هلته صفر دئ، چې د صرب يو ضريب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ويش:
ويشونی : پرويشونی = ويش (لوستل يې له بنې وکيڼ لورته)

ويش د ضرب يا ځل په څټ کارونه ده) $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

z.B.: $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$ د بيلګې په توګه

په صفر ويش پيژند نه لري يا تعريف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا ست کي د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې يا لارې باور لري؟

يادونه: دلته دې تري کمونی يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونی يا مفروق او پروېشونی يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضرب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ربنتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوتۍ وني له لارې په نږدې ۵ ځایونړ ټیک پیدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او څلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړی

a) $7a-3b+(-a+2c)-(3c-6b)-(6a-3c)$
b) $5a+[7c-(2a-3b)]-(4c-a+b)$
c) $7a-[3a-(7+5b)]+[a-(4-6b)]-(2a+7b)$
d) $8a-\{a+[(3a-2b)-(5a+3b)]-[(-a+6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b-a-c)$
b) $2a[a-(b-3a)]$
c) $3(a+b+c)-5(a+b)-c-2(b-c-a)$
d) $|a|\cdot(b-2a)-b\cdot(a+2b)$

2.3. a) $(2a-b)(9a+4b)$ b) $(9a-2b)(7a-3b)$
c) $(a+b-c)(a-b-c)$ d) $(3a+2b)(4a-3b)(5a-7b)$

2.4. a) $(7a-5b)(3a+4b)-(5a-9b)(4a-b)$
b) $(a+4)(a-2)-(a+2)(a-1)$
c) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$
d) $(1-a)(a-1)-2(a+1)(a-2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a) $(-a+3b)^2$ c) $(-a-b)(a-b)$
b) $(-1+a)(a+1)$ d) $(-1+a)^2-(1-a)^2$

3.2. a) $(4a^2-3)(4a^2+3)-(3a-4)^2+(5a+1)^2$
b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16\,(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)\,(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)\,(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4\,(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وېينې يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24\,b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .

۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وېينې يا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b\,(a + 1)$
d) $8\,(7a - 5b) - 5c\,(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$ c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$ d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسی!

a) $n^2 + n + 1$ c) $(1 - 2n)^3$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوی.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسی، کوم چې $a,b,\ldots$ يې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$ c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$ d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$ c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$ d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا کسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ کړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پيدا کړئ

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نومیزو يا برابرمخرج کسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو کسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې کې ضربيونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ ـ د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په تولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$ b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$ c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$ d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=1,2,3 سره د a=3,4,5 سره د a=2,3,4 سره د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړی.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\frac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\frac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\frac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\frac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$

c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$

c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$

c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$

c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دي وي a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس تري راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دي (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر يا مات (b² - a²) /(-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده يې کړئ.

ت- ورکړی دي وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج يا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وېينه يا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ٠ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅيړنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو ٠ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي٠ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي٠

د ريښې پيژند د خلاف يا پر ځټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونې يعنې هغه ګڼ، چې ريښه يې وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښې نخښې لاندې ګڼ او هم د ريښې ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي٠ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دې يا باوري دې، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي٠

٤ ٠ ١ توان (پوتنځPotenz) په ټولګنيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ٤ ۰ ۱:

د یوه په خوښه ریل ګڼ توان لاندې مونږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهیږو ۰ د دې لپاره لیکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1,2,3,\ldots$

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنځ یا توان ارزښت بلل کیږي ۰

د بیلګې په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

$a \mid= 0$ سره $a^\circ = 1$ د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کیږي (4,1) د

د پیژند یا تعریف پر بنسټ (اود څه بندیزونو په څلوردیوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کیدی شي، چې د خوښې یا زړه پورې ریبلګنونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګنونو اکسپوننت یا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړیکي د ټولګنیز مثبت جګ یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدی شي، چې ټولګنونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1,2,3,....,..a \neq 0,.....(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګ(اکسپوننت) لپاره بې بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو ریبل بنسټونو یاني د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي .۰ په (4,5) کې بیا بندیز $m \geq n$ اړیین نه دی۰

د توان قوانین کیدی شي په بڼه بدلونکو افادو یا وییزو وکارول- یا استعمال شي۰

بیلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y]^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بیلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$
$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$
$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي۰

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه5 . 4

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخبني کې دې توپیر وشي۰ پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنخبني سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترڅ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري۰

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ۲ – ریښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ٤ ۰ ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ریښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1,2,3,.....(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0.....(4,9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا ګڼ، چې ریښه (جذر) یې نیولکیږي(مور دا ریښه نیووني یا ریښه ویستونی بولو) او n دریښې جګ(اکسپوننت) اوb د ریښې ارزښت یا ریښه ارزښت بلل کیږي.

باید پردې ټینګار وشي، چې ریښه یواځې د نامنفی رادیکاند یا ریښه ویستوني (ریښه نیوني) $a \geq 0$ راوستل کیږي یا نیول کیږي او پخپله په لاندې توګه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کونې لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,\ldots$ لپاره د $a<0$ سره ریښه b په رییلګنونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کږي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی.

۲ – د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرون $b^n = a$

په خټه په ریښتوني دوه ریيل اوبیوني یاحلونه لري د بیلګې په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاني $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله مونږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه $n= 1 , 3 , 5 .$ او $a \geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځنې زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b \geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځنې یو منفی اوبی یا حل لري۰ یانې $b < 0$ د بیلګې په توګه دا $b^3 = -8$ یواځې اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه $n=2,4,6\ldots$ ګڼونو لپاره $a \geq 0, b \geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو۰ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو۰ له بلې خوا به ریښی د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ریښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $\sqrt[3]{-8} = -2$

بلکه $\sqrt[3]{8}$=-2- لیکو۰ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,10)$$

څلورې ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګنونو a لپاره تعریف شوي۰ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه $b \geq 0$ نفي کوي.

په ځانګړي حالتونوکي به د (10 , 4) بنول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یاني د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4) ټیک داسي لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,11)$$

$$= \{ -a \ , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د ریښي یا جذر له پیژند (4 , 9) , (4 , 8) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښي قوانین ولیکل شي د.... $n = 1,2,3$ او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots (4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12). ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پیژندل کیږي، چې د ریښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په ریښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \text{.....(4,16)}$$

لپاره $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ د

د بیلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n}.a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0 \text{.....(4,17)}$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n اوm لپاره د پوتنځقوانین (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو یوائې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یاني a>0, b>0 نیونه شوې وي۰

د ریښې شمیرلو لپاره باید اساساً د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او ریښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیوني تل و ازمایلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پاي کیدډول وښایو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت a = 0 لپاره شته دی یا باور لري، د a|=0 یا $a \neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یا a- پیژند نه لري یا تعریف نه دی.

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدښونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي. شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری.

بیلګه ٤ . ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلګه ٤ . ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ . ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې ($m < n$ ($m , n > 0$ او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي($N^* \neq 0 , a > 0$)

$$Z \Big/ N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N^*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N^*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N^*a},\ldots\ldots\ldots(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ . ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورۍ- یا مربع ریښې زیاتون یا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بیلګه ٤ . ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بیلګه ٤ . ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوټنخ) د حقیقي – یا رییل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بندیزه ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعني a,b>0 ، برسیره پردې دې باید توان $a^{\alpha};\ a>0$ د ناریښتوني یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو مورِ د ۳ . ۱ . ۴ برخي سره سم انتروالونو بندولو په بنټ لرو: $\propto = \{a_n; a'_n\}$. دلته $a_n; a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غړي یې (۴،۲) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

$$\sqrt[10000]{2^{1412<2^{\sqrt{2}}<\sqrt[10000]{2^{14143}}}}$$

نو لرو

۳ ۰ ٤ تولګه : د a>0, b>0 ریبل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ بیلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^{\circ} = 1, \frac{1}{a^{\alpha}} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیین وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو

۴ . ۵ . تمرینونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفریق یا زیاتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څیر یې ولیکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$

c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$

c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګې یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع – یا څلورې ریښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ ـ د ریښو جمعه او تفریق)زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ریښو یا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$

c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ریښې ریښه وپستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$

c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$

c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترځیرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوي، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څیرو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

مورِ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیرنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیرو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^c = a\,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګنc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریل مثبت ګنې a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریل ګنې c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګنې a تري لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, \ldots\ldots\ldots\ldots (5,2)$$

(5,1) او (۵ ۰ ۲) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2 = \log_x 36$ د $x^2=36$ سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، يوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره يو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره يو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x (-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$a = b^{\log a}$,.....(5,3)

$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1$,.....(5,4)

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,5)$$

د lga لوګاريم ته لسيز لوګاريتم وايي او lna ته پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم وايي(e وروسته ځيرو) زيات وخت د لشميز لوګاريتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog ځو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ بايد وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاريتم قوانين

د لوګاريتم د پيژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاريتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاريتم بنسټ 0 =| b ، b>0 او د زياتيز(مثبت) 0 < y , 0 <x لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1,2,\ldots,\ldots\ldots\ldots(5,10$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړاندېز وړ د لوګاريتم ژورې ځيړنې لپاره تمرين ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log\ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b(x+y), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) بنوونه د (5,12) له املې د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه څټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^{3}b^{2}}{\sqrt[3]{c}(a+c)^{2}}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۰۵ ۰۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځای لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې c > 0 (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دی۰ په بنې اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځای په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه ۰۵ ۰۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بیا $a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، b لپاره هم باور لري،د کومو لپاره چې پورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي a > - b , a > b له املې هم و|a >|b ته راغوندې شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي ----------

ته دي هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیر اوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), \ldots\ldots\ldots\ldots (5,15)$$

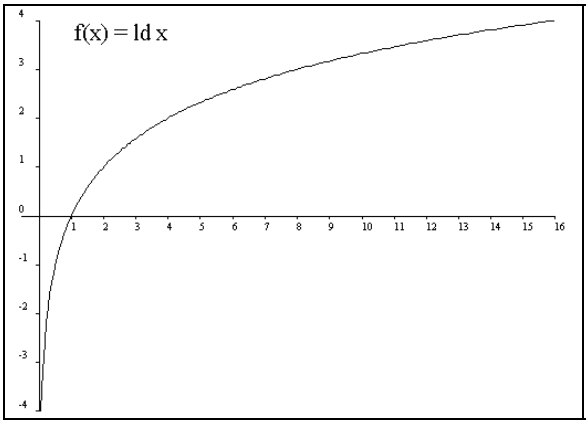
د

لسیز لوګاریتم اړول په پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

$$Lga = (lge)(lna); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$$Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga; \ldots\ldots (17)$$

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429\lg a, \ldots\ldots\ldots\ldots (5,17)$$

	د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

binär	dezimal
2^{-1} 0,1	0,5
2^{-2} 0,01	0,25
2^{-3} 0,001	0,125
2^{-4} 0,0001	0,062.5
2^{-5} 0,0000.1	0,031.25
2^{-6} 0,0000.01	0,015.625
2^{-7} 0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8} 0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9} 0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ تولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څټ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ ریبل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم

قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n \lg (a+b) + n \lg (a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوگاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ګونومتري (کونجکچ يا مثلثات Gonometry)

دا برخه هم د ښوونځي له امله يو تکراري خوي لري. ددې وظيفه به داوي چې د کونجکچ چټکتياته (ګونومتري شميرنې ته) په ګراد- او لينده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجيز - او عمومي درېګوډيود تريګونومتري فرمولونو په استعمال د تريګونومتري افادو په څيره بدلون ته پر مختګ ورکړي يا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټيزې هندسي کليمې او قوانين مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټيزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کليمی،کم له کمه په څيره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم يا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ ۰ ١ بنسټيزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټيزې هندسی مهمی بنسټيزې کليمی دي. دا ابسترکتی(خيالي، فکري ، نه ليديدونکی) کليمي په خورا ټيك راوړوندود هم نه شي تعريف کيدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړيکي کيدی شي په شميرنه کی په خورا زياتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه ليدو ړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کې پيښ شوي. دلته کرښې په g ښوول شوي او غښی يې ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غښي انځورونه دکرښی په انځورونه کې پريښول کيږي يعني نه انځوريږي، که دا مو و ناريښتياو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کيدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څير ونيوله شي) څيرې په غور وګورې

وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه يا ټوټه کرښه Line segment

A B

دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بيلګې په توګه لاندې ويناوې باور يا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې يوه کرښه ټاکل کيږي(پورته څيره وګورې)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي يا پخپل بر کې لري .

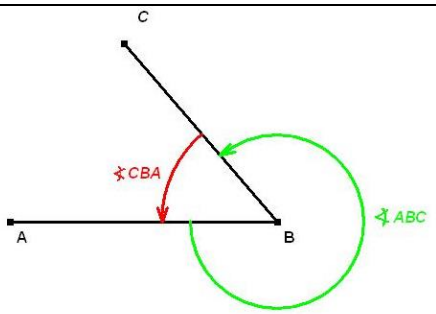
- دوه ناغبرګي او په يوه هواره کې پرتې کرښې يو بل ټيك په يوه ټکي کې سره غوڅوي (پورته څيرو کې کتل کيږي)

يوه وړانګه s_1 له يوې لور په يوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او يوه پايکرښه له دوه ټکو A او B بنده يا راګير کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

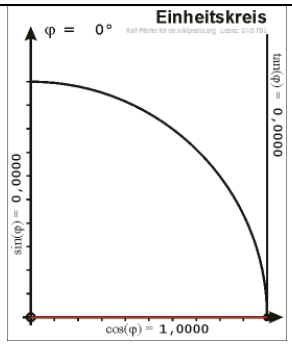
٦ . ١ . ٢ کونج angle يا زاويه

که يوه وړانګه s_1 د خپل پيلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څيره ۴ . ۲الف) ته يووړه شي، نو دا وهل شوي هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښې او په همدې ډول S د کونج α (الفا) ککره بلل کيږي.

که څرخون د ساعت نخښې په څټ يا مخامخ وي نو دا څرخونلورمثبت يا زياتيزه او همداسی کونج مثبت يا ز ياتيز کونج بولو او بل ډول څرخونلور يی منفي- يا کميز کونج بلل کيږي. په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی	

کيدی شي چی يو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$

په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی يو په بل ولاړ کرښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) يی جوړوي، له 90° سره مساوي وښايو(لاندې څيره ، که نورېځيري و نه کښل شوې) . کيدی شي چی کونج x (ايکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لينده اندازه هم ورکړ شي $x = b \qquad (6.2)$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په ځیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګټلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کې انځورو دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښای (ځیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسې یا ددې په تعقیب یو د °360 کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته ځیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدۍ ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وځیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیې نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوتونکي وښکاري۰

بیلګه .٦. ١ :

کونج "47°12'36 = a دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دځیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیې دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12'=720"

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په تولیزه توګه "756 = '36+720 له دې لاس ته راځی

1'=(1/3600)° (<=)

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12'36"=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به مور په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې مور تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ يا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

0,701° د a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701° اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

0,701° = 0,701.60' = 42,06', 0,06' = 0,06.60=3,6"

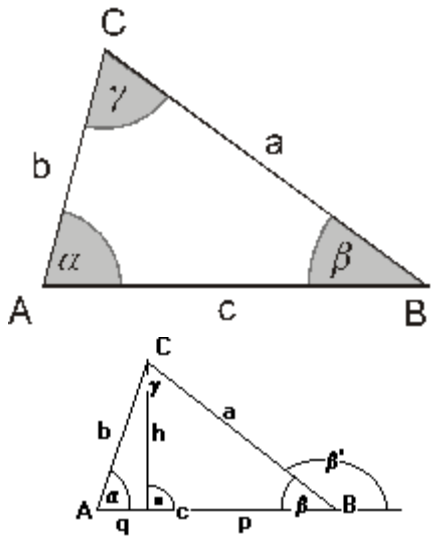
پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6"$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کيږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقيقي او ۶ ، ۳ ثانيي

۳.۱.۶ دريګوډی

يادونه: مورږ دلته بيا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کيږو. هغه هواره چی له کرښو راګير وي دلته له دري کرښو يا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه يا ګوټونه ولري، مورږ دا ۰۰۰ کونجي يا۰۰۰ ګوټي او يا ۰۰۰ګوډي بولو. ځمورږ ژبه او المانې تر يوې ډيرې اندازی په ترکيبي نومونو کی او يا نورو نومونو ډولونوکی يو بل ته ورته دي او په المانې کی هم دي ته ځانګړي نومونه شته. ماته يو کونج چې له دباندي ورته کتل کيږي او د يوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاريږي. مورږ په ورځنی يا مروجه ژبه کی وايو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنيکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی يعنی ګوډ دی. که يو کونج له دننه وګورو نو هغی ته مورږ تل کونج وييلی. که ځوك په يوه ګوټه کی ناست وي نو وايي، چه په هغه کونج کی دلته نو بيا ګوډ نه وايي. ما د کتاب په اورږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم يا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټوليزه توګه په يوه سطحه يا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه يو مثلث يا دريګوډی جوړيږي، چې ګوډونه يې C . B . A ، اړخونه يې c. b. a او کونجونه يې α,β,γ دي (د مثلث دننه کونجونه يا زا ويې او دباندې ګوډونه دي، چې مورږ يط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ ځيرې دې وکتل شي	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کيږي

- په دريګوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دې يا π دې
- يو دباندنی کونج د په نه پراته دنننې کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون 360° يا 2π دې.
- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمې په يوه ټکي کې يو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دريګوډي » دروندټکی يا دثقل مرکز « دې. اړخنيمې يو بل په تناسب د ۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځانګړونه يې ۱ :۲ ده) په څيره کې وګورې) د يوه دريګوډي منځولاړې

يو بل په يوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپير ګردي) هغه ګردې يا دايره چې دريګوډی په خپل دننه کې نيسي يا بهتره، د دريګوډي خوندیګردې(منځټکی دې).

د يوه دريګوډی کونجنيمې يو بل په يوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردې) ګردې چې د دريګوډي

په دننه کې ده يا ګردې يا دايره کې خوندي دريګوډی (منځټکی دې) لاندې کې ې څيره شته) د يوه دريګوډي جګې يا د ارتفاع کرښې په يوه ټکی کې سره غوڅوي.)
څيرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې څيرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري.

Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*), د جګيو غوڅټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

Umkreismittelpunkt (*U*) circumcenter ۰د دباندنی- يا په راتاو ګردی منځټکی

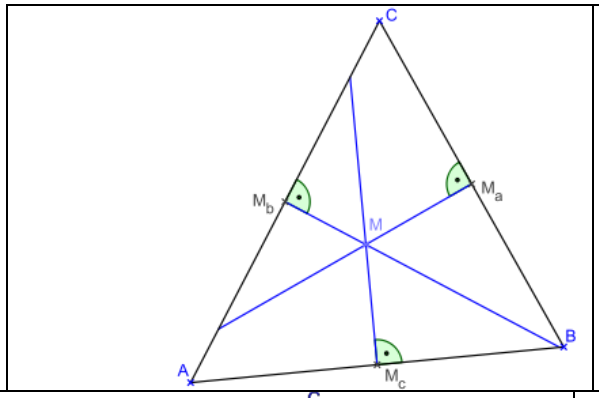
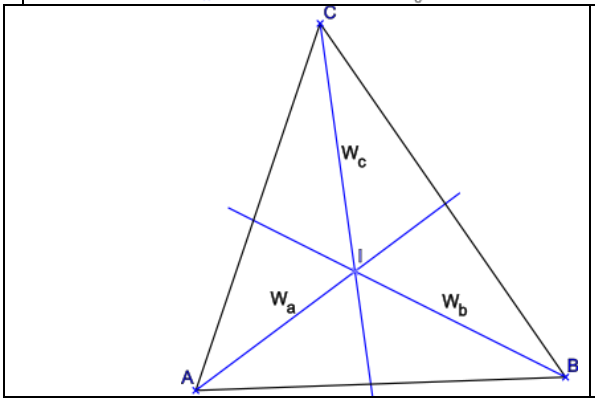
Seitensymmetralen), ۰د اړخسيومتريو غوڅټکی seid symetry

Inkreismittelpunkt (*I*) inscribed circle, incircle den ۰د دننه ګردی منځټکی

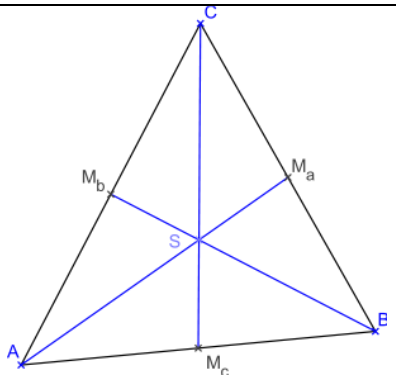
Winkelsymmetralen r ۰ د کونجسيومتري

Schwerpunkt (*S*) r ۰ دروندټکی centroid

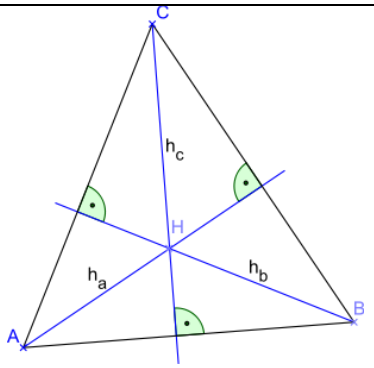
Seitenhalbierenden) median ۰اړخنيمی

مخامخ څيره کې مثلث ياد دريګوډي په منځ عمود يا - ولاړې کربنې بنايي	
دامخامخ مثلث هغه کربنې بنايي، چې کونج نيموي او مورِ يې کونجنيمی (ناصف الزاويه) بولو (په پورته څيره په نيم اړخ ولاړې کربنې دي)	

(c) ketabton.com: The Digital Library

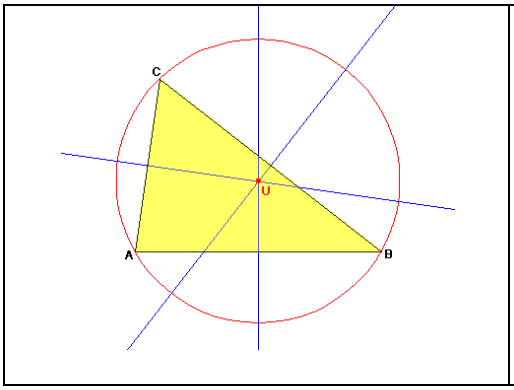


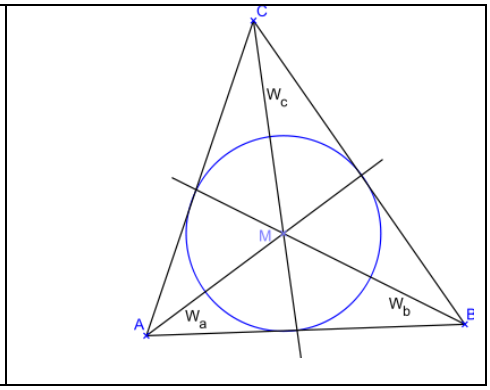
لاندې مثلث کې هغه کربنې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمۍ یا ناصف الاضلاع بولو٠



لاندې څېره کې د مثلث هغه کربنې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګې یا ارتفاع بللې دي٠

په پورته څېره کې کونجنیمۍ دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردۍ یا دننه ګردی منځټکی هم دۍ



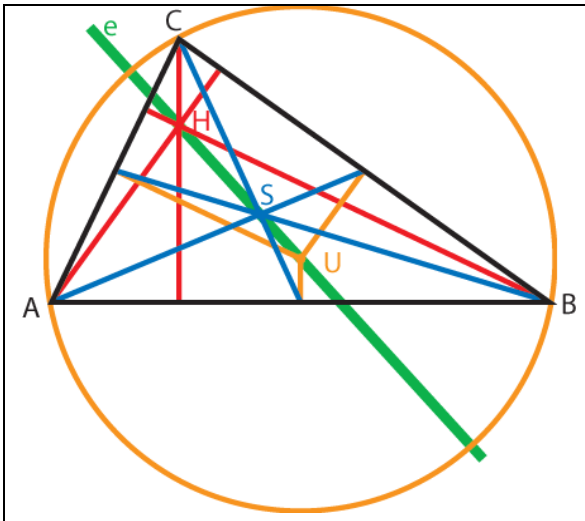


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کربنې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو ګردیز یا چاپېرګردیز منځټکی دی۰

دا په یو ډول دري کربنې هري دري یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوڅټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردیز کړه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردیز د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردیز په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S درونديزکی، U د چاپېریالګردیز منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کربنه په لاندې ځانګړتیا یا تناسب پراته دي :دا په لاندې څیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

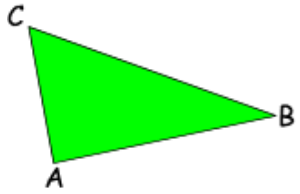
۴ . ۱ . ٦ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهتCongruence and Similarity

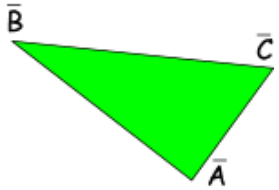
دوه دریګوډي ABC او 'A'B'C یو بل سره کونګروانټ یا برابر پټووني دي یانې برابرارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$ABC \cong A'B'C'$

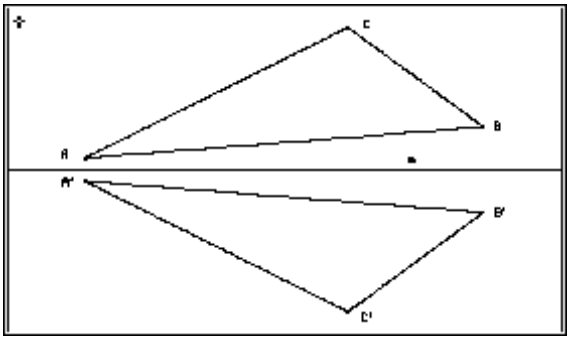
(4.4) که وکښنول شي يانې که هرې لورته يووړل شي(وکښنول شي) او وځرخول شي او اينه ونه يا هندارونه يې يو بل پوره پټ کړي يا يو په بل پوره پريوځي (لاندې ځير)





که دريګوډي سره کونګروايخ وي، نو بايد کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کې يو بل سره مساوي وي

.په څټ يې هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دريکوډي ټيك هلته کونګروانځ دي چې يو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کې SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کې SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کې SSW

۴ - يوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کې ،WSW

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چې که دريګوډي په کونګروانځ جملو کې ورکړشوو اصلي برخو کې سره برابر وي، نو دا کونګروانځ دي. د کونګروانځ جملو په بنسټ کيدی شي په ځانګړي توکه دريګوډيجوړښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروانځ جملو کارونې په څير لیدل کيدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو يا اړوند درې کونجونو کې يو بل سره برابر وي او د همغو يا اړوند اړخونو تر منځ يې تناسب يا ځانګړتيا موجود وي .

دا جملې هلته هم باور لري که د کونګروانځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دريګوډي ټيك هلته يو بل ته ورته دي که يو دبل سره برابر وي، په :

۱ - درې اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نيونې يا تناسب کې

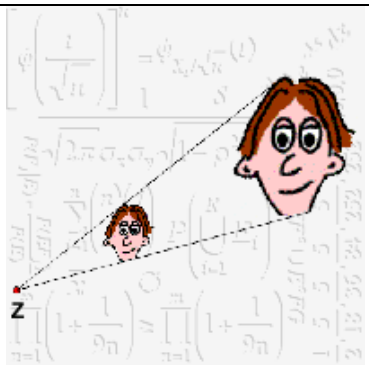
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کې

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب يا ځانګړتيا کې

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کې

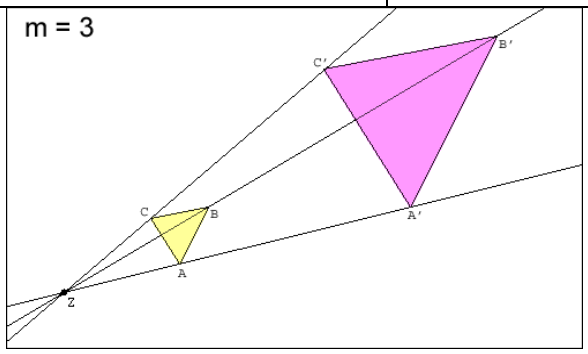
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ څيرې ورته دي ، که د دې دوه کربنو پای سره په يوه کربنه وټړی او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کربنې سره غبګه کربنه وباسی، نو دوه ورته درېګوډي لاس ته راځي

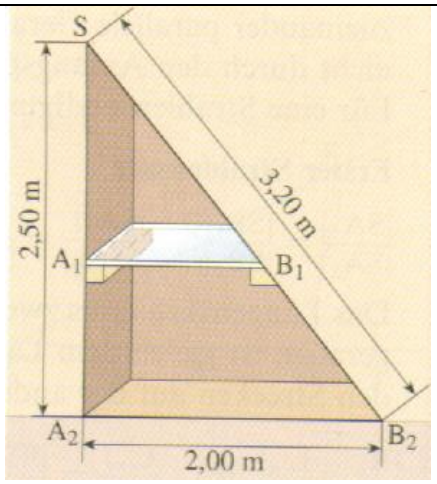


په لاندې څيره کې کښل شوي دريګوډي ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:

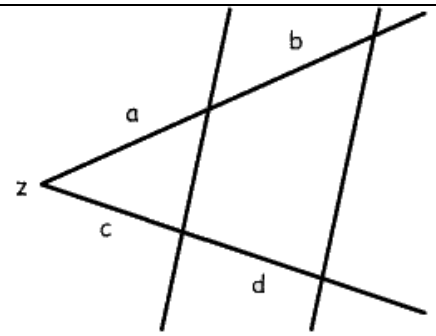


په دې پورته څيره کې درېګوډي يو بل ته ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې لومړۍ جمله:

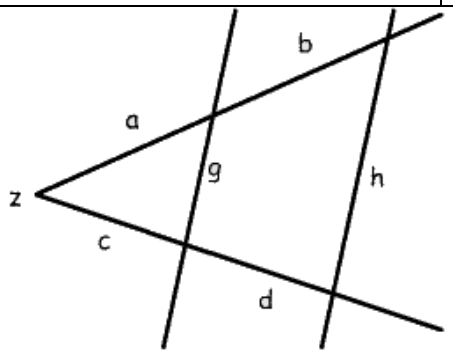
دوه له يوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې يې لاندې اړيکی سره لري۰ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$



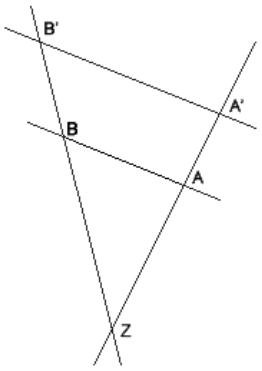
د وړانګې دويمه جمله:

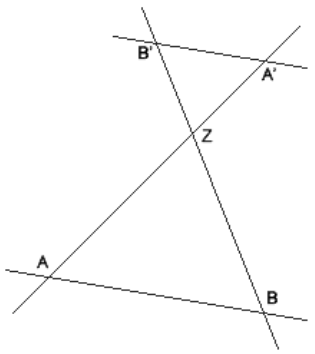
که له يوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بيا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړيکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نيول کيدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپير ته هم پام نيولی شو

$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$ $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$



يا دالاندې، چې هرڅه يې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که دري په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښې g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګې په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2 . 1

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتې ورته برخی په مساوي تناسب یا ځانګیونی سره پرتی دي:

A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2 . 2

دا په دې مانا چې: په وړانګو پرتې ورته برخی په مساوي تناسب یا ځانګیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککړی اندازه شوې برخي چې په وړانګه پرتی دي.

A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3 - ۳

دا په دې مانا چې: په غبرګو پرتی کرښې په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځانګیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککړه د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

يو دريګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څيړني لاندې نيسو

a >c - 1

موږ کاږو AB = c او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B يو ګردليزده کاږو د a

په کچه چې د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څيړه دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

a < c - 2

دلته دري امکاناته شته دی(د دې دري امکاناتو څيړه وکاږئ)

۲ . ۱ : د ګردليزده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي، په کومو کی چې اوبی يواځنی نه دی.

۲ . ۲ : ګردليزده د α ازاده پښه لمسوي.

۲ . ۳ : ګردليزده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

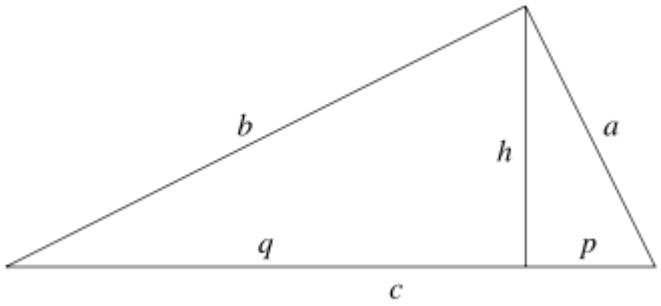
(۳ a = c

ګردليزده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې کوي. دې لپاره چې حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل يواځنی حل ولرو، نو a > c نيونه په دريم کونګروا ينځ جمله کی ضرور ده

۶ .۱ . ۵ .ولاړکونجيز دريګوډی مثلث قايم الزاويه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دريګوډيو څخه موږ په لاندې برخه کې ولاړ کونجيز دريګوډی ترڅيړنی لاندې نيسو .په ولاړکونجيز دريګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتينوزې) Hypotinuse(بلل کيږي، نور دواړه اړخونه کاتيتونه يو: کاتيت ( ) Kathetenبلل کيږي. هغه ولاړکونجيز دريګوډي ته روڼنی يا ورسره بلدې يا مروجی په نخښه کونه يا لنډ په نخښونه به له څيرې ۴ . ۱۳ څخه واخلی



په ولاړکونجيز دريګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړيکی باور لرې چی دلته يی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

يادونه : په ولاړګوډيز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او يا په دې لاتين نوموونو يانې مخامخ کاتيټ او (په کونج) پروت کاتيټ.

د پيتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د هيپوتينوزې مربع هواره د دواړو کاتيتو د مربع هوارو زياتون سره برابر يا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتيتو(د ولاړارخونو يا د مخامخ او په پراته ارخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د کاتيت مربع هواريزمساوي ده د ولاړ کونجي هواري سره، چی له هيپوتينوزي او ددي کاتيت له پرويکشن يا پريوستون څخه لاس ته راځی:

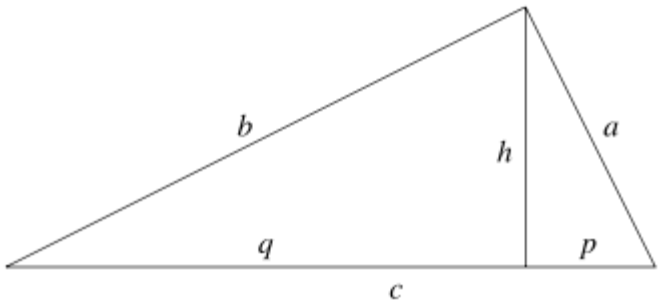
$$a^2 = p.c \ , \ b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د هيپوتيزي په جګي مربع هواريزمساوي ده د هيپوتينوزي (لوي ارخ) برخو څخه منځ ته راغلي ولاړکونجي هواري سره

$$h^2 = q \ . \ p \qquad (6. 7)$$

يا په لاندي کي لنډ بيا ورکړ شوي



لنډ: (ددي لپاره دي پورته څېره وکتل شي)

پيتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اويکليد د کاتيتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

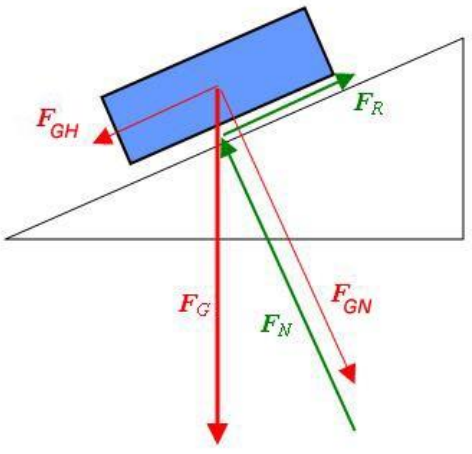
د اويکليد جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بيلګه ۴ . ۴ : (څيره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا يوه فزيکي دنده هم ده(څېړه وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چې په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلې هوارې سره غبرګ په يوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزيه کيږي. د ښوولو ده چې، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی

يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې څېړې سره داسې بدلوو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی

$$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$$

ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کښې لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

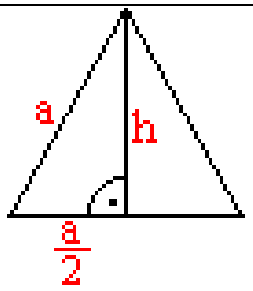


(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې $G||AC$ ځغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي۰

یادونه : داسې بیلګې، چې څیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې څیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي۰ زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم۰

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کې دې (لاندې څیره) جګې و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخې لرو(جګې په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمې هم دې، دا په دې درېګوډي کې وکاږې)



$h^2 = a^2 - (a/2)^2$

$h^2 = a^2 - a^2/4$

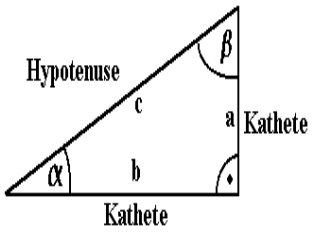
$h^2 = (3/4)a^2$

$h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کې د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دې، چې یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې جوړیږي(لاندې څیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت gegkathete a د مخامخ اړخ په څیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوی اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کې لاندې اړخځانګیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چې $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چې د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,11)$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۶ .۳.۰ په یوونګردی کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو Konkrete(اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که α د خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لارښودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو ځمونږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \quad (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیږ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکي کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کي شني کرښي د ساین دي او سرې کرښي کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چي د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیړنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :360°) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(180°) لري .

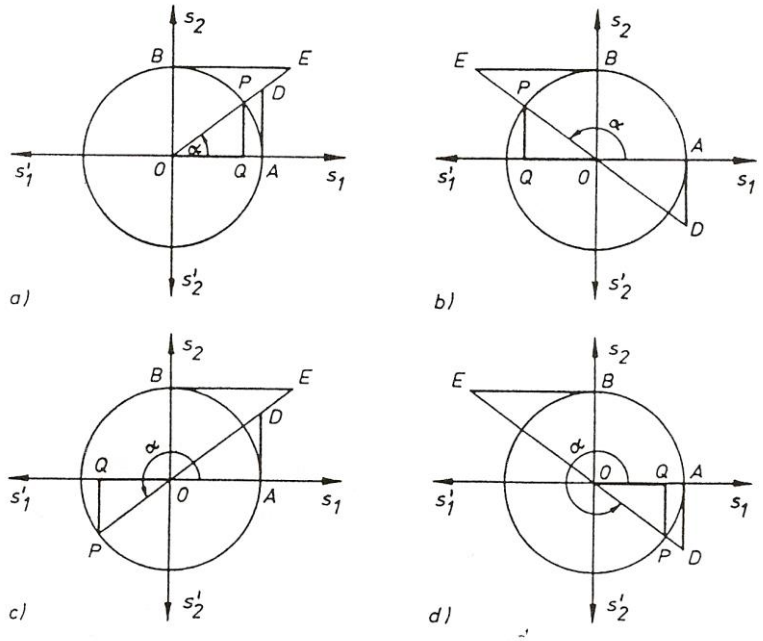


Bild 4.17 څېره

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.14)$$

په
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

ټوليزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګنونو ....3 , 2, 1,0,1 ,2 ,3-..-3,-2,-1,0,1 ,2 , 3.... = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنښنه

	لومړئ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جښمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جښمیري اړونه ده، په غوښتل شوي فنکشن کې) په « DEG » سمو او بیا لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخبنه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α د هر تمرین د جښمیرني سره په لاندې ډول یا همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چېα په درجه اندازه یا لینده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin] 2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan] 4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیادα هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $\alpha_0 = -28{,}810793^\circ = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206^\circ = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تيرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي يا څنګيز حل يا اوبى،،

1. $\beta_0 = 180^\circ - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د ليديدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013^\circ = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701^\circ = -2{,}1531606.$

د x ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له املې په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ = \alpha_0 + 2k\pi,$
   $\alpha = \beta_0 + k \cdot 360^\circ = \beta_0 + 2k\pi,$
3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180^\circ = \alpha_0 + k\pi.$

بيلګه ۴ . ۹: لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شميرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۴ . ۱۰ : په بيلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لويي دي، که په مايل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کيږي) او مائلی هواري مايلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28°$$
$$= 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$
$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28°$$
$$= 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴.۶ دساين- او کوساين جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټوليز يا عمومي دريګوډي کی شميرنی پلی کړای شو

۱ . د ساين جملهد څيرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

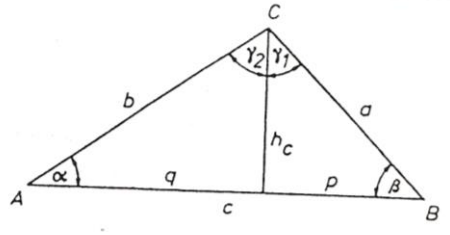


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دي امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کيدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څيره پورته او لاندې کښل شوي، دا يو ولاړکونجيز درېګوډی کښل کيږي(پورته او لاندې څيرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کيدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساين جمله کيدی شي استعمال شي، که د يوه دريګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته مخامخ کونج - SSW يو اړخ او داړه پري پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساين جمله

د څيرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$
$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$
$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. لرو او همداسې:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

د کوساين جله استعماليدی شي، که په يوه درېګوډي يا مثلث کې

- دري اړخونه يا ضلعې يا

- دوه اړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج يا زاويه

ورړ شوي وي.

بيلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شميرل کيږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسيره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څيره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوي، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړيکي هم معلوميږي .په دې پسی په ABCدريګوډي کی، F1 = c, F2 = aاو ss' =180° - ss معلوم دي، α

او R = b لټوونکی يا غوښتونکی لويي دي؟

د کوساين جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی يا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\ cos(\ 180° - ss')$$

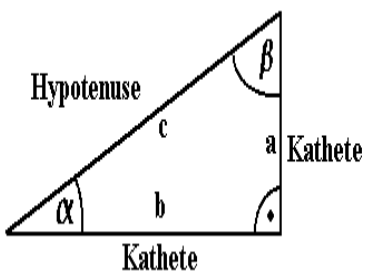
او د ساين له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α ټاکل کيدی شي .

لوي اړخ او ولاړ يا عمود اړخونه (هيپوتينوز او کاتيتونه يا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجيز دريګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هيپوتينوز يا لوي اړخ بولو٠

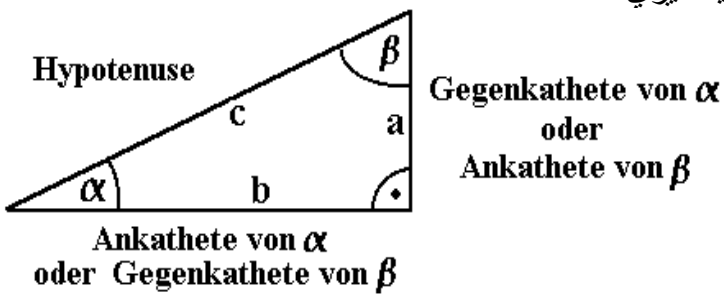
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – يا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ يا ولاړ اړخونه يا کاتيتونه بولو٠

مخامخ دريګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت يا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت يا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي دې اړخونه او دې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

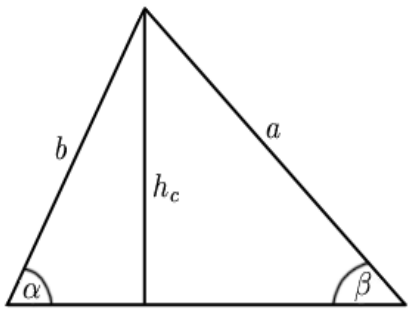
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال $[0°;180°]$ کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګروا ینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

بنوونه : (دا څیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې يې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

د برابرايښوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وويشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پيدايښتي توګه جګی h_a او يا h_b لاس ته راکوي

د کارونې بيلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\text{cm}\ ,\ b = 3,8\,\text{cm}\ ,\ \alpha = 73°$$

دا نورې لويې دې په درېګوډي کی پيداشي

د β شميرلو لپاره د ساين جمله کارول کيږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونيوله يو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، يانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زياتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زياتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساين جمله

په تريګونومتري کې کوساينجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو ترمنځ اړيکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

يادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو ډيټاګوراس جملې له مخې لرو:

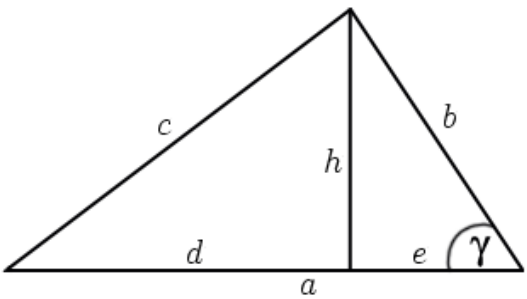
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساين جمله استعماليدی شي، که په يوه درېګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) يا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه يې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم يې پيداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کين لور د ډيټاګوراس قضيه استعمالوو، چې د c^2 لپاره يوه شميرافاده يا – ويينه پيداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو يا کاتيتو اوږدوالی څلوری يا مربع بايد پيدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بني اړخ لپاره د پيتاګوراس قضيي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بينوم فرمول)

د پيتاګوراس جملې له مخې د کين لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پيداشوي شميروييني يا- افادې سره زياتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b}(\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځای په ځای کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بيلګه:

يو درېګوډیABC ، جې اړخونه يې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9\ \text{cm}$ ،

$b = 2{,}8\ \text{cm}$

$c = 3{,}5\ \text{cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2 - (2{,}8\,\text{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identities زیاتون او کمون کټمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګټمتوالي

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګټمتوالی

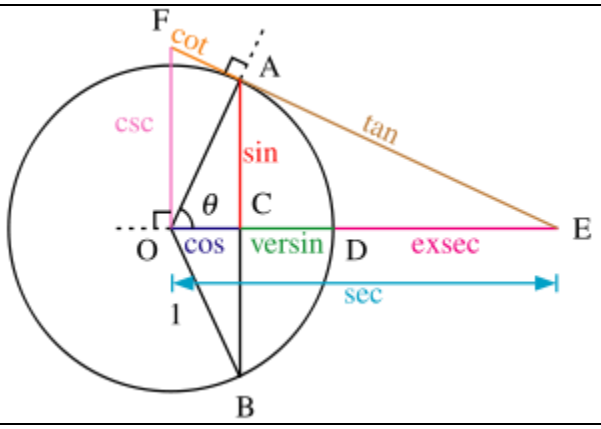
$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

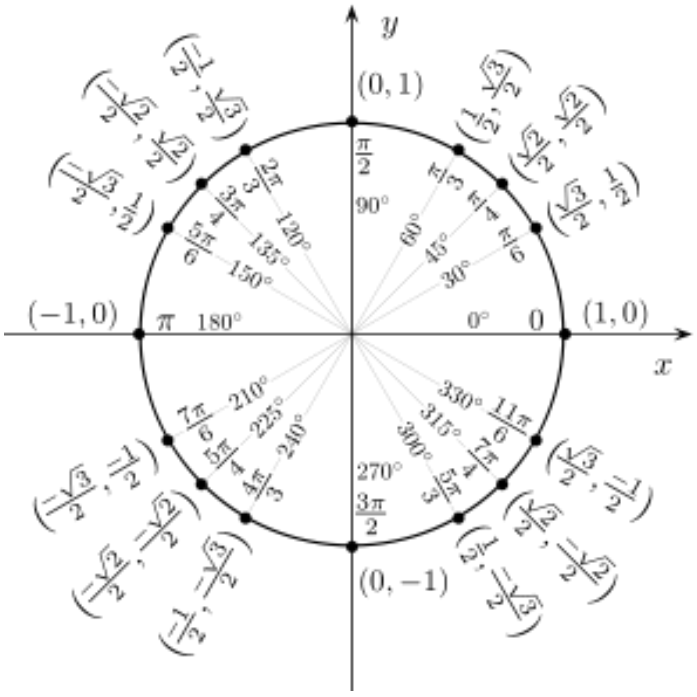
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تريګونومتريکي کتمتوالي ليست List of trigonometric identities



نوره ژوره څيرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نيسو، چې په لاندې څيره کې تريګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي



د يوه کونج θ ټول تريګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د يوې يونګردی ترم له لارې ورکول کيدی شي (يونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي)

مخامخ:

يوونګردی(يووالي يا واحد ګردی)

The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationليکنښه

دا لاندې ليکنښه يا - ډول د ټولو تريګونومتريکي – يا مثلثاتي فنکشنونو ساين، کوساين ، تانجنت ، کوتانجنت ، سيکانت، کوسيکانت لپاره باور لري، د لنډونې لپاره په لاندې جدول کې يوائې ساين او کوساين ليکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کيدی شي$\sin^{-1}(x)$ وليکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره بايد بدل نه شي

Definitionsپيژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بيرته راګرځيدنه ، سيومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په يوون(يووالي-) ګردی يا دايره کې ساده ليدل کيږي

Periodicity تل بيرته راګرځيدنه

ساين ، کوساين ، سيکانت، کوسيکانت تل بيرته راګرځيدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبيرته راګرځيدنه π لري(نيمګردی يا نيمدايره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سيومتري

د تريګونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندي کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ،يا $x \to \pi - x$ په لاندي ډول ده

$$\begin{array}{lll}
\sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\
\tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\
\sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\
\csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x)
\end{array}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{array}{ll}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\
\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\
\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\
\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\
\csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x)
\end{array}$$

د پيتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دي بنسټ د پيتاګوراس قضيه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زياتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زياتوننخښې په ورته ترتيب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کين لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لاري لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

Half-angle formular د نيمکونج فرمول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ريښې لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1+\cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1-\cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نيمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$ که کیږدو

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$ **نو لرو:**

د ځل و زیاتون ته کتمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کتمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi=\text{half circle},$ =که

او *نو یا* $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$

$$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

Trigonometric conversions تریګونومتریکي په څټوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري۰ داسي اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسي چې $\psi(\arcsin\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\arcsin\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر ووښلی شي یا افاده شي۰

داسي فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : مونږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

φ \ ψ	sin	cos	Tan	csc	sec	cot
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
Cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
cot	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طيلايي نسبت φ له امله لرو

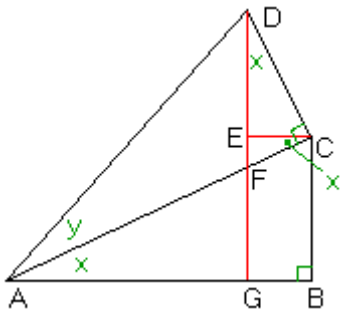
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جيومتريکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs

sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ ځيره کې کونج x د ولاړکونجيز درېګوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډيز درېګوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی



(c) ketabton.com: The Digital Library

BAC = Angle x کونج =ACE کونج

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$
$$= \frac{DG}{AD}$$
$$= \frac{EG+DE}{AD}$$
$$= \frac{BC+DE}{AD}$$
$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$
$$= \frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$
$$= \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$
$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

د پورته ځيري څخه کار اخلو:Using the above figure

$$\cos(x+y)$$
$$= \frac{AG}{AD}$$
$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي y- کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي y- پردو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تريګونومتريکي يا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك يا کونجفنکشن د شميرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، يوه د اړيکو ډله شته) د زياتون)جمع(تيوريم(، له کومو يې چې دلته يوځو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چې فرمولونه په کې راتول وي(کې لاندې فرمولونه پيدا کيدی شي

$$\sin(x\pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a;.....(6,19)$$

$$\cos(x\pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y;.....(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;.....(6,21)$$

$$\tan(x\pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1\mp \tan x.\tan y};.....(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};.....(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};.....(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړيکو ښوونه يوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښايو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مورِ له خيرې ۴ . ۱۸ خخه مخ ته خو، او خاي په خای کوو $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساين له جملي لاس ته راځي

$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, $a^2 = p^2 + h_c^2$, $b^2 = q^2 + h_c^2$, $c^2 = (q+p)^2$

$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2$,

$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ خخه لاس ته راځي

$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a)$,

$\cos\gamma = \cos\gamma_1 .\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$

$\cos(x+y) = \cos x .\cos y - \sin x . \sin y$

خه چې د ښوولو وو

يادونه: خای په خای بايد دې ته ګوته ونيسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفريق يا زياتو او کمون تړاو ته کلک يا کلک نښتی دی.

بيلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وېينې يا افادې دې ساده شي

a) $y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره يو- يا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتيجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسيږو، له کومې چې لاس ته راځي

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ ist.

بيلګه ۶ . ۱۴ برابرون يا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرينونه

۱ – بنسټيزه هندسه يا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګنل(که غواړی شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) 15°	b) 225°	c) 105°	d) 277,5°
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) 4,24°	b) 70,9°	c) 31° 17' 20"	d) 228,1923°
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4,5\ cm$, $b = 12,2\ cm$ او $c = 11,7\ cm$ سره ورکړ شوی دی. دا درېګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یې ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوډی جوړ کړی

a) $a = 11,7\ cm$, $b = 9,2\ cm$, $\gamma = 43,5°$

b) $c = 16,1\ cm$, $\alpha = 84,6°$ $\beta = 51,9°$

وښایې چې ولی دواړه درېګوډي ورته دي؟

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوډی A'B'C' داسې په دننه کې ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ خغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده(څیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

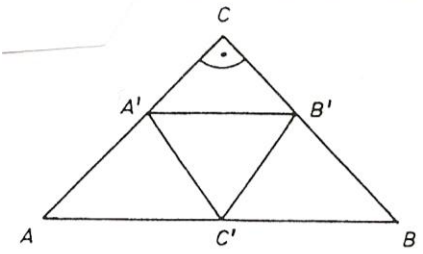


Bild 4.20 څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د
څیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدور ډول
په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع
اړخونه وشمیرې
الف) له کانتو څخه
ب) له هیوپوتینوزېبرخو څخه

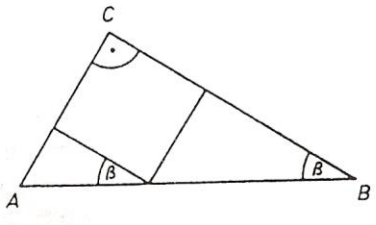


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوتاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15°$, b) $\alpha = -390°$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج ß دې د $\sin ß = a$, $\cos ß = a$, $\tan ß = a$, $\cot ß = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په خاې بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm ، ب) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm

کوم ازښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ
شوي اړخونه وشمیرې ، لاندې لویې مورِ ته معلومي دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $ß = 59°29'$

۳ . ۳ – وشمیرې ! h_c , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي
پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = ß$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) دري قوې دې د زوريا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\,N$ او $F_3 = 157\,N$
سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه يو دريګوډی جوړوي. د دې دريګوډي
کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دی؟

پ) دوه ټکي A او B چې يوه کور يې
مخه پته کړې وي، يو له بل څومره لرې دي.
که $\overline{BC} = 75{,}25\,m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$
او $\sphericalangle BCA = 71°15'\,45"$ وي (څيره ۴ . ۲۳)

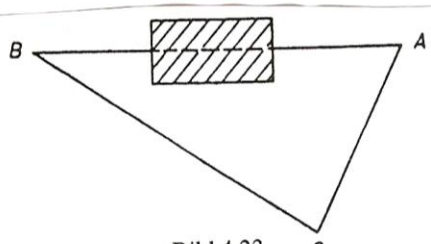


Bild 4.23 حاکره

ت) د دوه يخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2
ترمنځ يو د مخالف ټيم لوبغاړی G
ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته
وهي چې توپ په يوه ديوال ولګيږي.
(څيره ۴ ، ۲۳ وګورئ).
د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لرې والی څومره
دی؟ که د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2{,}5m$
همداسې $a_2 = 6{,}5\,m$ وي او توپ د يوه
دې ديوال سره په يوه کونج $\alpha = 42°$
ولګيږي.؟

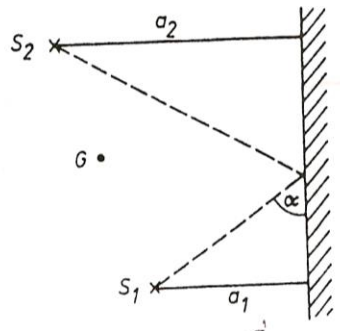


Bild 4.24 حاکره

۵ . د تريګونومتريکي يا درېګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه دري فنکشن ارزښتونه دي وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2\cos \alpha = 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3 \alpha}{1-3\tan^2 \alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2(6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7,1) د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \ldots\ldots\ldots(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

تاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځای نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګنې imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګنې یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)i =z یو ځانګړی ایماجینارګنې b=1 دی

د تولیزې څلورې (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوښی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

<=لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \qquad (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره ریيل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف ریيل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي.

که $P^2 < 4q$ وي، نو ریيل اوبی نه شته دې

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیوني یا حلونه لاس ته راځي

$$\chi_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګنونه کمپلکس ګنونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi \ , \ i^2 = -1; \ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګنونوډیرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي۰ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې ریيل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګنونه برابر بلل کیږي، که دوي په ریيل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مور ِ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ ایښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

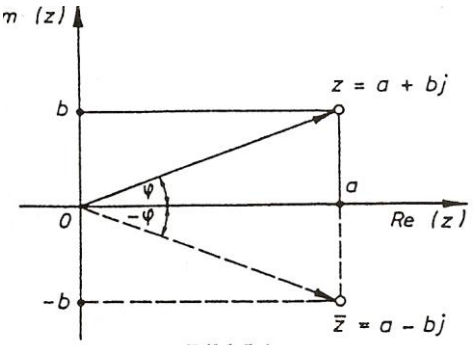


Bild 5.1

مور ِ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطحې رییلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یې‌ایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(مور ِ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریبل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), \ldots\ldots(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$| z_1 | = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعني د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېړې ۵ (په همدې توګه د څېړې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

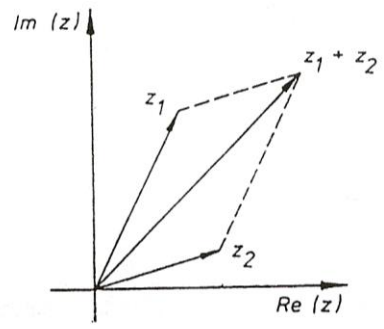


Bild 5.2 څېړه 7.2

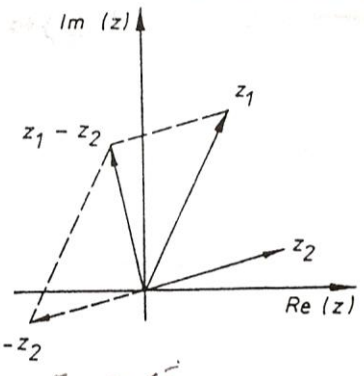
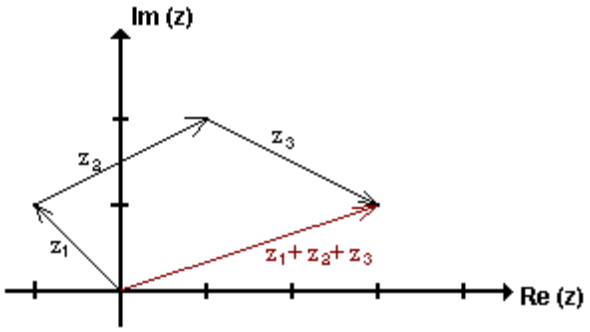


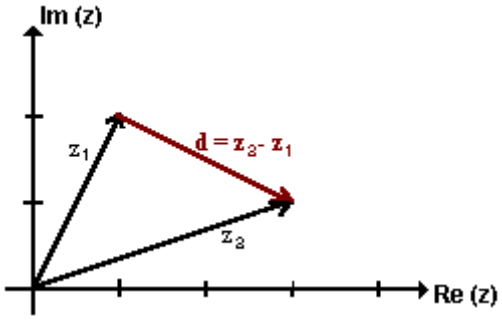
Bild 5.3 څېړه 7

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کملپکس ګنونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګنونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګنونو ارزښت بلل کیږي۰

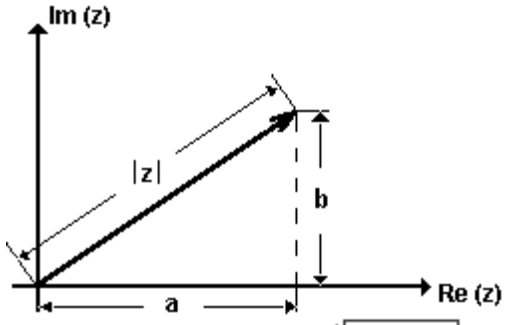
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فیثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څیره موږ ته د کمپلکس ګنې

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په دې ګوډي کې د اړخونو ځانګړتیا یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \quad \text{.....(7,18)}$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګنونوځل:

د ورسره بلد نوک اینسوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکي وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$ = (a+bi) (a-bi)

او (۷ ، ۱۵) له املې لاس ته راځي:

$$z.\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \qquad (7 , 22)$$

۷ ۰ ۳ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} =$$
$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} =$$
$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ . ٤ :د او Z1 لپاره له Z2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط يا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z|=\sqrt{2}$ b) $|z|<\sqrt{2}$ c) $|z|>\sqrt{2}$ d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفريق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(x+y\,i)(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1.a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$

b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$

d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2.a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$

b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$

d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3.a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$

b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رايوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه يا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرينونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کې د ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه ټرنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسي Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسي څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ –م جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې ربښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له املې لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له املې لاس ته راځي:

$6x + 3 \geq 3x+6$.

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$ لاس

ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه ربښتیا دې۰ مګر دا د ښوولو وینا یوازې د شرایطو$b \geq 0, a \geq 0$ لاندې باور لرې۰ له دې املې که له ربښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسدإه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوښیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې ریبل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوښیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورۍ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره صربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورۍ وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د $4ab$ کمونې څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کېنه لور د څلورې ۰ مربع په بنه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنې کیدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دې یا غلط دې، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دې ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ریښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دې

اوښیونه یا حل : د غوښتنې نفیې ده، چې : د ۲ ریښه $\sqrt{2}$ ریشنل ګڼ دې (د ریشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل ګڼونه q, p ,د $q\neq0$ سره شته وي، چې دا باوري شي: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه((جفت) ګڼ دې۰ نو له دې امله p هم یو جوړه ګڼ دې، ځکه چې یوائې د جوړه ګڼ مربع یا څلورې جوړه کیدی شي $p=2p'$ له مربع یا څلورئ کولو او پر ځای اینسوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو څلوری یا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی۰ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي۰

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ د ن د پښې لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي۰ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي۰

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1) = n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینسیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کې‌لیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی تري لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځای پرځای کیږي یا راوړل کیږي۰

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځای لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^\circ = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B => V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د n = 1 لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B => V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښې خوا د يوه بينومځلورى(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښى خوا انځورونې څخه د بينوم څلورى(-مربع) لاس ته راځى :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړى شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې موږ دري څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دى، چې ما اوبى يا اوبيونه بللى(اوبې پښتو ده او ښه کړه، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دى، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبى، خړوبى، چې موخه تري همدا اوبى دى او په نورو ژبو کې هم همداسې دى)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پاى ټکى ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ټرنې په ډول ورسره مل کړو ۰ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګى په لار يم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی.

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n + 1)\, n}{2}$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n + 1)\,(n + 1)\, n}{6}$.

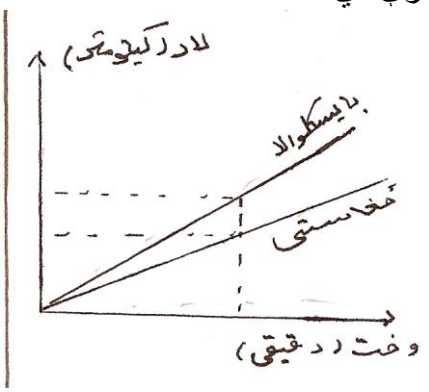
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کربنیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړی کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړی کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مور دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقیقه (په t بنایو لار) کیلومتر(په s بنایو د لارانځورونی څخه په ګراف کی څرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وبنایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتنې ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوږیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوږیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دی. دا کلیمي به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کی پوره تر څیړني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې بنایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعآ زیاتیز یا مثبت دی ورته دپلي چی په lیې بنایو وهلي لار هم ټاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وبنوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي.
وهل شوي لار :
د بایسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$
د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاینیز- یا کربنیز مساوات :

د کربنیز مساوات فرمول د یوې اوښتوني یا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقیقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبیونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقیقي اعداد وبنوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کيدی شي چی د حقيقي عددد مساوات دواړه خواوي په يوه عدد سره ځل يا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ويش په د $A \neq 0; \frac{1}{A}$ ځل سره برابر دی نو ليکل کيږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9,2)$$

دا د (۱ . ۹) يواځنی ممکن حل دی،که په څټ يا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه يو د بل توپيروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بيا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا يو مخامخوالی يا تضاد يا نوره هم ښه په څټوالی تشکيلوي ، نو په دې حالت کی حقيقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بيا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نيسي

0.x = 0

دا برابرون بيا د ټولو ريیلګنونو xلپاره پوره (يڅ) دی. يا برابرون پوره کوي.

دا بيا داسی هم ليکل کيږي : (په خوښه x = (bel پس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره يواځنی ټاکلې اوبيونه (۹ .۲) لري،د A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبيونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ريیلګنې x اوبيونه يا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د يوې اووښتوني يا مجهولی سره د ريیل برابرونونو د ګډلو ټوله تيوري خوندي ده .

يو لاينيز برابرون (مساوات) (يو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاينيزو برابرونونو ترمونو زياتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاينيزو ترمونو د هدف په لور زياتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بيرته رااړوي، دا د II . 2 بنسټيز قانون له مخی يو ورته فورمبدلون يا ښه بدلون دی)(د اوبي يا حل ډيری تغير نه دی خوړلی) د بيلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کيدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زيات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تريې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x-b_1x-a_2x+b_2x=c_2-d_2-c_1+d_1;.....(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کين لور او ثابت د برابرون په بڼي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A=a_1-b_1-a_2+b_2;a=c_2-d_2-c_1+d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کتمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x=\frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x=\frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x-b^2}{a}-\frac{a(b-ax)}{b}+\frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a\neq 0;b\neq 0$ وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x-b^2)-a^2(b-ax)+b^2=a^2b$$

$$a^2bx-b^3-a^2b+a^2x+b^3=a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx+a^3x=a^2b+b^3+a^2b-b^3$$

$$a^2(ax+b)=2a^2b$$

د $a\neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a+b\neq 0,(a\neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوګونی يا يواځنی اوبيونه يا حل دی
که(a = -b) $a + b = 0$ ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبيون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زياتي اوبيوني يا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نيونی يا فرضيي له امله چی بايد $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زياتي بيلګی کيدی شي راوړل شي، چې ضريب يا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته يواځي دومره يادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی يا متحولي ولري، همغهسی شميرل کيږي، لکه په رييلعددونو کې۰
دلته هم بايد دي ته پام وي، چې ماتلاندي صفر نه شي۰ که چيرې اړيينې وي او يا ګرانو لوستونکو يې راوړل وغوښتل، نو زه به بيا دا کار سرته ورسوم او بيلګي به هم راوړم او که چيرې کوم د شميرپوهنې مينه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅيږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره يادونه کوم، چې په دې هکله زما د شميرپوهنې بنسټيز کتاب کې زياتې بيلګي راوړل شوي، خو نه پوهيږي، چې دا کتاب به چا ته ورسيږي او که نه

بيلګه 9 . ۲ :
برابرون (x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c =1 يواځي
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه يوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: 6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc
ورپسی نور، په لاندې ډول، د ځرګندو شميرلارو يا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:
$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$
$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$
(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)
دا بيرته د لاينې مساوات (۹ . ۱) بنسټپنه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات يواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر رييل کې x اوبيونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د څيړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول يی لاينيزوالی يا لاينيزتوب پيژندل کيږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرينځيپ) کی کرښيز يا لاينيز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.

ددې لپاره لاندې کی دری ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :

برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$

د لومړي ځل لپاره څلورې برابرن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلورې(مربع) غړي لري. د یو له بل ځلولو یا ضربولو وروسته څلورې غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ یواځې هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a - b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :

مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$

یواځې هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر ځنګ ولاړو فاکتورونو يا ضريبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکيږي.

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيړو چې مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کيدلي يا تجزيه کيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چې يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.....2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.....2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$.....x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له املې په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چې په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کيونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چې بايد تل پوره وي:

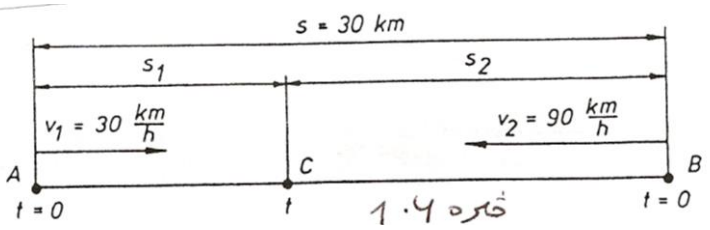
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډي تمځايونه Aاو B يو له بل $30km$ لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره $30km/h$ په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزيږي. د Bځخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته دري فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانګړتيا لپاره ځيره ځيره وکاږئ



پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A ځخه و C ته لريوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلريوالي وC ځخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته دري اوړېدونې يا مجهولی مخ ته لرو s2 , s1 او t .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \quad , s_2 = 90\ t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پريښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا دري مجهولی s2 , s1 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s2 , s1 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون ځخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چې ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x , 4x = 30 \quad x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5 \text{ km} , s_2 = 22 , 5 \text{ km} , t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x , t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x= 22,5$,

$s_2 = 22,5\text{km} , s_1 = 7,5 \text{ km} , t = (22,4/90)h = 1h/4=15 \text{ min}$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتوني یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 \; x = 30$

$20x = 30$

$x= 30 / 120 = 1/ 4 , t = (1 /4)h = 15 \text{ min}$

$s1 = 30t = 30 /4 \text{ km}=7,5\text{km}$

$s2 = 90 \; t = 22,5 \text{ km}$

دوارې ګاډي له ټکی A څخه د 0,25 h= 15 min حرکت وروسته په 7 , 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځې هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیرنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټیک د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.گ.خ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$

$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$

$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې یي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې یي له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

ټیک د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0 \quad , \quad |x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$a^2(2bx-1) + b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1) + b^2(2ax-3) - b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 + b^2$$
$$2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له املې په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي (یعني په مساوات کی خای ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

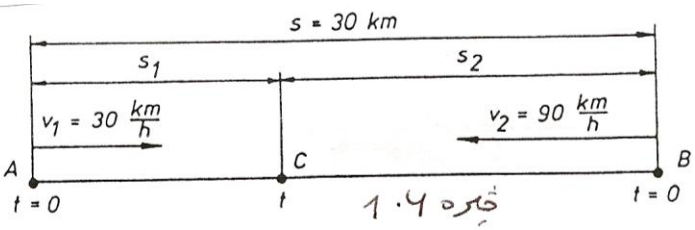
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمخایونه A او B یو له بل 30 km لري دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. د B څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته دري فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶. ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته دري مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورۍ ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \quad , s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونو پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت بنایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دري مجهولی s_1 , s_2 او t دی د دري مساواتو سره چی حل به یی په ۶ الف او یا همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s_1 , s_2 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\,,\quad 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\,\text{h} = \frac{1}{4}\,\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که $s_2=x$ کیږدو،نو شمیرنه په لانې دول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30-x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$\begin{aligned} 3\,(30 - x) &= x,\\ 90 &= 4x,\\ x &= 22{,}5,\end{aligned}$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\,\text{h} = \frac{1}{4}\,\text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې $x=t$ ، نو باور لري:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 30x + 90x = 30,\\ 20\,x &= 30,\\ x &= \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\,\text{h} = 15\ \text{min}.\end{aligned}$$

$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$

$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوي وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$

b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$

d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$

b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$

d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴ . ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$

b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$

d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$

b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$

d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرينونه

۱ . ۷ . ۱ – که د يوه ګڼ څلور څله او ۱۴ زياتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۲ – که د يوه ګڼ څلورڅله او ۴ زياتون ددې ګڼ او ۱۴ زياتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د يوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلورېرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴ تري کم شوی او ۱۱ لاس ته تري راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی. لکه د د ي ګڼ دري څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی. لکه ددې ګڼ دوه څل او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ څله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور څله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته تري راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر یې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسي تناسب کې دي، یا یو بل ته داسي خانونه نیسي . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې یې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه خاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه خاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه خایګڼونو سره مګر په څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو پرینخیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښې په څیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه تاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی تاکل شوی. ددې ریښي مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړۍ ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول / 2 غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د څان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چې درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زور دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم څله زور دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه څوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي:« که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره څل یا ضرب کړم او له دې څل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا ټوپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسې ټرلو مقاومتونو کې لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونک ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷ . ۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کې د فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چې په هدف به پوه شو) دی a) 1000Ω , b) 2000Ω یو مقاومت 4000Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یې دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یې درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) 12kΩ, b) 300Ω وي؟

. ۲۱ . د دري غبرګو مقاومتونو څخه یې دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یې درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) 12kΩ

ب) 300Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کې یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چې د لمبیدو استعداد یې ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه معلومیږي چې دا څه شی دی) $4\ \frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانک د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري. څومره تیل او څومره بنزین په ټانک کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د بنار د بنکلا لپاره د بنارمنځ د سرک په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرک بیا ۲۰ ونی زیاتی کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته څومره لویي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واوروملړه کی ، دا وروسته وړونکی د پروسږکلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښې څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو ځومره والښاي او که څو ګڼونهخپل ځاي بدل کړي دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ ۱او ۲۰۱۰ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیځینت (بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب پوهیږي، یعنی n.(n-1).(n-2)....1.2 = ! n برسیره پر دې تعریفوو: !0 = 1

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چې (n+1)! = n!.(n+1) لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله ووني،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :
الف n! : د n = 5 لپاره په دې ډول دی: 5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120
ب : په دې ډول دی : 0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48
پ: په دې ډول دی: 5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20
ت : په دې ډول دی
(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)
= n.(n+1).(n+2)

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (ویيل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله ووني یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیدایښتي یا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد بنایي،په مات لاندې کې د لومړیو k پیدایښت یا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور n - 1 ، دریم n-2 ترk –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړي ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك دیوه بینوم پوتنځ یا توان شمیري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د یوا-
ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځله ووني ویل کیږي.

بیلګې :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ، } \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چې 1 / 3 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k}=0$

که n یو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنۍ وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سړی د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چې په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده یا وییِنه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله وونې په ځیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سړی د دوه توکو (ګنونو) زیاتون پوهیږي. یعنې: x+y
د بیونم جمله مونږ ته ښایي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدایښتې ګڼ n یی ایکسپوننت یا جګکڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په ځیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$(x+y)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x+y$$
$$(x+y)^2=\ldots\ldots\ldots\ldots x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=\ldots\ldots\ldots\ldots x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=\ldots\ldots\ldots x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=\ldots. x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی. ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ...1 , 0

د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګنوندریګوډی جوړوي .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کینې-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بې له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8,... .. لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، n ,...., 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په

څیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډی د اویلر سومبول استعمال په څیرولیکل شي نو لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{0}{0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}\dots$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیځینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال دریګوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیځینته سره مساوي دي. داچی هر کو-ایفیځینت ورباندې پورته کوایفیځینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)

د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په استعمال

د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوښونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کړۍ پرتی) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راتول (یوځای) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},...,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرې د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخې یوځایېولو په څېر راوړل شي، په یوځایېولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راوځایېولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دي امله د یوځاییولو یا ټولګی دري ډولونه توپیروو(Komplexion هم ورته وایي)، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندي برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو بنوول شي

۱۰ . ۱۱ ۰ ٤ ۰ پرموتیشنPermutare

(لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن (ځاي بدلون)بي له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی

چي n غړي په یوه د زړه پوري ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه

تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځایبدلونونو په مانا ده

بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د دري غړو پرموتیشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایې ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایینتي ده، چې د پښتو لیکسیکایې ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

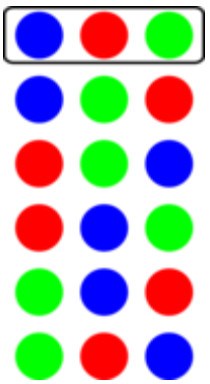
amsu	masu	samu	uams
amus	maus	saum	uasm
asmu	msau	smau	umas
asum	msua	smua	umsa
aums	muas	suam	usam
ausm	musa	suma	usma

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعآ له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کټ مټ« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړۍ مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکښطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته دري غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې ډول دی : $n = Pn!$

اوښونه : د پوره ایندکشن له لارې :

دایندکشن پیل : $(n = 1) :$ $P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k) :$ $P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1) :$ $P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په ځیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چې د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$P_{k+1} = P_k (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوښی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چې i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د k, ... , 2 , 1 = i لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چې غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چې a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

aabbb	ababb	abbab	abbba
baabb	babab	babba	
bbaab	bbaba	bbbaaa	

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له کومو چې i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوښیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګڼونه دn ایندکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره !ni پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په n_i ! باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دویم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، $n \leq k$) هر له k غړو یوځایکول (نوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړو a,b,c واریشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

ab ba ca
ac bc cb

۲ - د څلورو غړو a , b , c , d واریېشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc

د څلورو غړو a , b , c , d واریېشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دي

dab cab bac abc

dac cad bad abd

dba cba bca acb

dbc cbd bcd acd

dca cda bda adb

dcb cdb bdc adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریېشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51 41 31 21 12

52 42 32 23 13

53 43 34 24 14

54 45 35 25 15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو وk -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوښونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر وارییشن لپاره، په دې وارییشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دي یو د k+1 ټولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $V_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریښنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یود k+1 ټولګي وارییشن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ (k , 2 = n = 4, k) باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو وارییشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو وارییشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو وارییشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو وارییشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو وارییشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو وارییشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c وارییشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ca ba aa

cb bb ab

cc ba ac

۲ - څلور غړو a , b , c , d د دویم ټولګی واریېشنونه د تکرار سره دي:aa
da ca ba

db cb bb ab

dc cc bc ac

dd cd bd ad

۳ - د دري غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واریېشنونه دي(دا لاندي ولاړ ترتیب له کیني وښي لور ته دی، خو په لاندي کي په څټ شوی)

311 211 111
312 212 112
313 213 113

321 221 121

322 222 122

323 223 123

331 231 131

332 232 132

333 233 133

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$: سره دی د تکرار $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چې له n غړو څخه n واریيشنونه،چې هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چې k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چې له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چې په واریشنونو بی له تکرار شوي ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د دري غړو و دوم ټولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض وارییشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{\bar{3}}^{(3)} = 3^3 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دی

$$V_{\bar{2}}^{(1)} + V_{\bar{2}}^{(2)} + V_{\bar{2}}^{(3)} + V_{\bar{2}}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره ټړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته ($n > k$) یو کمبنیشن هغه دی چې هر یو له k غړو یوځای دروولو څخه ، کوم چې له n غړو، بې د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له وارییشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

bc ac

ac ۰۰۰۰۰

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دی

cd bc ab

bd ac ۰۰۰۰۰

ad ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کینې لاندې لورته په بښې لور لیکل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریشنونو په دې توپیریږي، چې ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چې ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي .له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاټري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ ټیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه ټوکاي کیږي، چې له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ ټیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چې یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰۰۰۰۰۰

cc bc ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

bb ab ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

cc bc ac ۰۰۰۰۰۰۰۰

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندې لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دي له ښوونی(چې په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د دري غړو و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دځلورو غړو و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د دري غړو و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واریییشن،کمبینیشن ټولکه

دا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	واریییشن	پرموتیشن
د تول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګنون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو واریییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګنون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګنون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړووارییشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیری

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړی

a) (n+1)! / (n-2)! b) (2n)! / n! c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیری!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیری!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وګنی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2-y/3)^4$ e) $(2a+3b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړی!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(ab-1)(-a-ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو خل یی بیل (تجزیه) کړی!

a) $25a^2+10ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130ab+25b^2$ d) $2x+2.\ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳ ،۴ پرموتیشنونه په لکسیکوګرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو خایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دی.

۹ - الف) په څو خایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه خاي ونیسی؟
ب) څومره پنځهٔ خیفري ګڼونه د پنځه څیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي وليکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړو a,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ - الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه خله رامنځ ته کیږي.
ب) د دي پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړي د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ - د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4 , 2, 0 موجود دي؟

۱۳ - یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرڅونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو خل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره؟

۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – څومره مختلفی ازمایښی ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځاي نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له څیڅرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خاموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وټرل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟

څومره تلفون ټرل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –ارخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یي د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښایي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښيز-، خطي – يا لاينيز الجبر

يادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بيا دې ته ګوته نيول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتين متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .»
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې يا مجهولی يا ناپيژندونکی لري، وقف ده، چيرته چې m د برابرونونو ګڼون يا تعداد n د ناپيژندونکو يا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او يا کوچنی کيدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپيژندونکو يا مجهولو سره د برابرونونو سيستمونه تر څيړنی لاندې نيول کيږي، چې د ښوونځي شميرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سيستمونه د ناڅاکلوځلونو يا ضريبونو يا فاکتورونو سره هم راوړل کيږي، چې د حالتونو توپيريدنه يې اړيينه ده.
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی دري ناپيژندونکو يا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زياتوناپيژندونکو ته وغزيږي، په ټولو برخو کی پل په پل د ديترمينانت کليمه او د ګاوس الګوريتم د کار ډګر ته را اچول کيږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجينو برابرونونو سيستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نيسي.
يادونه : ولې لاينيز برابرونونه او نه کريز يا بندکرښيز يا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

مور د برابرونونو له څيړې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړې انګريزي يې لاين نومولی۰ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګې سره يې توپير وي،نو مور هم ورته له دې املې لاينيز وايو۰

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسې يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سره هکيدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کيدی شي چې ناپيژندونکی لويې x او y په خوښه ريیل ګڼونه وي چې يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتونې) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چې د هغې څيرې په x,y کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ددې مسيئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱۰) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيرې ده، چې(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)\,x + c/b \qquad (11.2)$$

کيدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. گورو چې ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيرې يا اوبيډيرې L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)\,x + c/b \} \qquad (11.3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيرې ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل y = -(a/b)x+c/b- ، د خوښی x ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کيدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندي کی مور د درېو يا ډيرو ناپيژندونکو يا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, \ldots$ سره .

ددي په نخښونو سره کيدی شي چی په څرګند ډول وښايو:

لاندي برابرون د دوه ناپيژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \ldots\ldots\ldots\ldots(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دي مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپيژندونکو يا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کيدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots(11,5)$$

x_2 په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,6)$$

x_1

په خوښه

د 0 = b =a2 =a1(لپاره ناپای ډير ځوابونه 0) 0.x1+ 0.x2= b

د په خوښه

$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په څټوالی يا تضاد يا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چی د ناپيژندونې يا مجهولی

x_i

لپاره ..i = 1,2 په خوښه ناپای ارزښتونه نيول کيدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاينيز برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سره

د دوه برابرونونو سيستم د دوه ناپيژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I.....a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$

$$II.....a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2; .....(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کيدی شي چی په اووښتونو يا واريابلو x1 او x2 کی د بلواکبرابرون يا فنکشنمساوات په څير ونيول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسيستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې يو بل غوڅې کړي نو دا د مساواتو په سيستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو يوګونی(بهتره : يوګونی، يواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبيونه ده يا حل دی.

که دواړه کرښې يو په بل پريوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسياکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې ټيك يا فقط مساوات I يا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډير

∞^1

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کيدی شي چی فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څيړو. دا څيړو چې، که دا برابرون اوښيونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کيږي، چې کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر يو په بل نه وي پرتې.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپيژندونکو يا اووښتونو سره، کيدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - يو يواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سيستم مخامخوالی يا تضاد لري)

۳ - ناپای ډير ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او يا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډير ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخې چې دوه ناپيژندونکی لري، کيدی شي په اسانتيا وپيژندل شي، چې د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی.

په سيستمونو کی چې درې يا زياتي واريابلی يا اووښتوني لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پيژندلی چې کوم حالت تر مخ لرو. دلته بايد فورمال پرمخ لاړ شو، دا چې څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چې د پوښتنو په فورمال ځواب پيل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پيدا کړو. دلته بايد دري بنسټيز د مساواتسيستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر يا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د يوې نامعلومی په لور اوبی کيږي(د بيلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې ليکي او په دې ډول يو برابرون د يوې نامعلومي سره منځ ته راځي.

۲ - يو د بل پر ځاي کيښولو متود:

برابرون يا مساوات د يوې ناپيژندونکي (د بيلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کيږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کيږي، په دې ډول د يوې ناپيژندوني برابرون منځ ته راځي (د بيلګي په توګه دx يو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .

دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.....a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;.....a_{11} \neq 0$$

$$II.....a_{22}x_2 = a_2,.....a_{22} \neq 0;.....(11,9)$$

دلته نو

$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $x1 - 2x2 = -5$

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

$2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 8$

په اسانی ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی. دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیوني ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سيستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډيله څرګنده ده چې برابرونونه يو د بل تضاد يا يو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندي ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سيستم ۳ اوبيونه نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۱ :

سيستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي ايښوولوکارونه يا عمليه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.....;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کيښولوکاروونه (عمليه) : II د x1 په لور ځواب کيږي او بيا په I کی ځاي په ځاي کيږي.

$$II':;.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زياتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (2-) ځله د II برابرون و I ته زيات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I : .....2x_1 + 3x_2 = 4$$
$$(-2)II : .....-2x_1 + 4x_2 = 10$$
$$I - 2II : .....7x_2 = 14$$
$$.....x_2 = 2$$

کيدی شي، ود بيلګي په توګه، له II څخه x1 وشميرل شي:
$$x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

د زياتون کارووني په کلکه يا تل استعمال څخه کيدی شي
x2
له منځه يو وړل شي، په دې شکل چی د II دري برابره د I دوه ځله ته ورزيات کړی شي.

$$2.I : .....4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3.II : .....3x_1 - 6x_2 = -15$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$2.I + 3.II : .....7x_1..... = -7$$
$$.....x_1..... = -1$$

يادونه : په پورته کې يا نورو کومو ځايونو کې ، چې ټکی چيرته ايښول کيږي، پوهيږو، چې چيرته ټکی د ځاي غزونې او چيرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بيلګه ۱۱ . ۲ :
سيسم ۲ دې په پورته دري متودو ځواب شي:

الف (مساوي ايښوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چې
x2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
x1 = 2 - (3/2)x2 او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي اینسوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,
په II کی اینسول کیږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8
8-6x2+6x2 = 8
0.x2 = 0 x2
په خوښه له II' لاس ته راځي
I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
2.I 4x1 + 6x2 = 8
II 4x1 + 6x2 = 8

II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
x1 = 2-(3/2)x2
x2په خوښه
په همدي ډول:
x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,
دلته x1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

I' : $x1 = 2 -(3/2)x2$

II' : $x1 = 5/2 -(3/2)x2$

$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$

$0.x2 = 1/ 2$

۳۰۴ ۱۱ کربنیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

دا یو په څټوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو ریيل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: , I' : $x1 = 2 - (3/2)x2$

په II کی دی په ځای شي

II': $4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$

$8 - 6x2 + 6x2 = 10$

$0.x2 = 2$

دا مخامخوالی یا په څټوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

2 . I $4x + 6x = 8$

II $4x + 6x = 10$

_____

2.I - II $0.x + 0.x = -2$

په څټوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لاربښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بنه برابرونسیستم ورکړ شوی:

I $x /(a+b) +y/(a-b)$

II $x /(a-b) +y/(a+b)$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a = |b|$ او $b = -a$ وي، یعنی $|a| = |b|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چې دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلې ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بنې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له 1 /(a+b) او II ځل له -1 /(a-b) څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له 1 /(a+b) او IIله -1 /(a-b) سره ځل شي کیدی شي: چې y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

۳۰۶ ۱۱ کربنیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځموږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

1. a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

2 . a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په څټوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلونې په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي y , x راپیدا کړو . مور ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13$ <=> $11u+18v=13$

$27v-2u=1$ $-2u+27v=1$

مور د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

$37u=37$

$u=1$ => $v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y)$<=> $2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y)$ <=> $3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5 , y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - a_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دي (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

۳۰۸ ۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i,k=1,2)$ د

د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجټري یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، تري کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنټري(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجټرې یا قطر د توکو ځل ځخه د څنګ یا فرعي دوه کونجټرې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماځخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا مټه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنې اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دي) ١١،١٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ١١ . ١ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يواځنی تاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي. د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ١١ . ٢ :
که په (١١ . ١٣) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

0 = D (11,18)

او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (11 ,14) يا (11 , 15) باوري وي

D1|=0 \/ D2 |=0 (11,19)

نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چې برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

D=D1=D2=0 (11 . 20)

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دی) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار تري اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دي اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پوري بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيري ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0;\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

۳۱۰ ۱۱ کرښيز-، خطي – يا لاينيز الجبر

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0;\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډير ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D = 2 3 =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0لهشميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

مور بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{a^2-2ab+^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab| = 0$:

دلته ديترمينانت $D| = 0$ او دا د برابرونسيستم يواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}.\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a} \qquad (\text{د } D1 = D2 \text{ له امله})$$

دوم ۱ حالت $a=0,b|=0$: دلته $D = 0$ مګر

$D1 = D2 |= 0$

او د مساواتسيستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډير ځوابونه موجود دي چی په بيلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

دلته مساواتسيستم هدفمند نه دی (په صفر ويش مخ ته پروت دی) مشوره کيږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دي د لاندي بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دي یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$

$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي څیړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددي په مرسته تولیز د برابرونسیستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = a_1$$

$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که $a22 |= 0$ وي، نو لاس ته راځي:

الف) $x2=a2/a22$

ب) برسیره پر دي که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=$$
$$(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)$$

۲ . که $a22 = 0$ او $a2 |= 0$ وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که $a22= 0$ او $a2 = 0$ وي، نو ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دي ډول کمیږي، چی دا سیستم په درېګوډی بڼه یا – څیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم درېګوډی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې (11 . 8) سیستم په روڼنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1 x2 RS			
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د بڼي خوا (ښ خ) یا بنی لور یا بنی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون ځخه کم شي ، نولرو

	x_1	x_2	Rs .....
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1 x2 RS		
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2	b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 =| 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b2 =|0 , b22 = 0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم بنوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x2 = -1$ $x1 = 2 - (3/2)$-

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (څیړو. دلته د لمړۍ لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳				سیستم۲			
	x1	x2	RS		x1	x2	RS
I	2	3	4	I	2	3	4
II	4	6	10	II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	2	II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګې په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخې او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۱ . ۱۲ :

سيستم I دي په څلور ډوله يا واريانتو د ګاوس الګوريتم په مرسته وڅيړل شي

دوم واريانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3

اول واريانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7

څلورم وايانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114

دريم واريانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2

1. 2 -1 2. 2 -1 2.

2. -1 2. 2 -1 2.

دا دلته د يو ګڼ په چوکات يا څلورګوډيز کی نيول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپيژندونکي د مساوات څخه شميرل کيږي، کومه چی په هغه ليکه کی پرته ده چی چوکاټ شوی، دا په يوائځي ډول دا مانا لري :

واريانت ۱:

ا) له I څخه دي x1 و شميرل شي

ب) له II' څخه دي x2 وشميرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شميرل کيږي:

x2= -7 / (-7/ 2) =2

ت) په 2 کی x1 له I شميرل کيږي:

x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1

واريانت ۲ :

ا) له I څخه دي x2 وشميرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې x1 وشميرل شي
پ (له II' لرو: x1 = -1
ت) له I څخه لرو: x2 = 2
واريانت (امکان) ۳
ا) له II څخه دې x2 وشميرل شي
ب) له I' څخه دې x1 وشميرل شي
پ) له I' لرو x1 = -1
ت (له II لرو x2 = 2
واريانت (امکان) ۴
ا) له II دې x1 و شميرل شي
ب) له I' څخه دې x2 وشميرل شي
پ (له I' لر x2 = 14 / 7 = 2
ت) له II لرو:
x1 = -5+2.2 = -1
ټولې څلور واريانتې يا امکانات برابر ارزښتونه لري، خو دا چې په څلورمه واريانت کې په ټولګټونو شميرنه کيږي، »مخته وونه« يا مخوونه(برتري) يا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کيږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زيات برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سره هره

که څوک له دوه زيات برابرونونه د دوه اوښتونو يا ناپيژندونکو سره ځواب کوي، په ټوليزه (عمومي) توګه بايد په نخښه شي چې لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کې ځای په ځای شي تضاد ته رسيږو. د دوه ناپيژندونکو سره له دوه زيات مساوات په ټوليزه توګه حل نه لري. يوائې په ځانګړې حالت کې دا سيستم ځواب لرودی شي. مونږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلاري ځيږو او بيا د ګاوس الګوريتم له لارې.

بيلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سيستمونه ورکړ شوي دي

a) I x1 + 2x2 = 3 b) I x1 + 2x2 = 3
II 2x1 - x2 = 1 II 2x1 - x2 = 1
III 3x1 + x2 = 2 III 3x1 + x2= 4

له I او II څخه د څرګندو يا معلومومتودونو له لارې په دواړو سيستمونو کې لاندې، په لومړی ځل يوائنی پيژندل شوی، ځواب لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b څخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په a) کي :3.1+1.1 = 4 |= 2, په b) کی : 3.1 + 1.1 = 4

نو سيستم a) ځواب نه لري او سيستم $\hat{b}$) يواځني ټاکلی ځواب لري

يعني x1=x2=1

بيلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بيلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوريتم له لارې ځواب کوو.

a) x1 x2 RS b) x1 x2 RS

	I	1	2	3		I	1	2	3
	II	2	-1	1		II	2	-1	1
	III	3	1	3		III	3	1	4
II'=II-2.I		0	-5	-5	II'=II-2.I		0	-5	-5
III'=II-3.I		0	-5	-7	III=III-3.I		0	-5	-5
III''=III'-II'		0	0	-2	III=III'-II'		0	0	0

په a) کی تضاد پيژندلکيږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته يا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' څخه لرو:

x2 = 1 او له I څخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاينيزبرابرونتسيستم د دري ناپيژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ يو برابرون د دري ناپيژندونکو سره

مو ږ يو مساوات د دري ناپيژندونکو سره تر څيړني لاندې نيسو:

a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 (11 . 21)

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

I . a11=a12=a13=0 (11 . 22)

دلته x2 , x1 او x3 يو له بل پوره خپلواك ټاکل کيدی شي. ويل کيږي چی ناپاي ډير ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

2. a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 (11 . 23)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

0x1+0.x2+0.x3 = a1 |= 0

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړي i , k لپار دي aik |= 0 = وي. (بي د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دي a11|=0 وي (. کيدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3) په خوښه x1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د دري ناپيژندونکو سره

لاندي د دوه برابرونسيستمونه د دري اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

a11x1+a12x2+a13x3=a1 (11,25)

a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,25)

مورِ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په ځير وي (ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ځټوالي يا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. مورِ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت ځيرو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کيږي او دا نوري دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې (x1 او x2) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي (ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

x1 x2 x3 RS

---

1 1 1 3 I x1+x2+x3=3

II x1+2x2+3x3=6 1 2 3 6

II'=II-I 0.x1+x2+2x3=3 0 1 2 3

له II' لاس ته راځي

x2 = 3 -2x3

له I ځخه لاس ته راځي

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
$x1=x3, x2 = 3 -2x3$, x3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دريمه درجه ديترمينانت او د کرامر قاعده

اوس دري برابرونونه يا معادلې يا مساوات د دري ناپېژندونکو سره څېړو

I $a11x1+a12x2+a13x3= a1$ (11 . 26)

II $a21x1+a22x2+a23x3= a2$ (11,26)

III $a31x1+a32x2+a33x3= a3$ (11,26)

له دې سيستم څخه کيدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر ليکلو او يو د بل په ځای ليکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زياتونتيورم (-قضيه) فکر غواړي او د دريمي درجي ديترمينانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سيستم ځواب پيدا کولو لپاره هڅوي

پېژند ۱۱ . ۲:
رييل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (يو دري درجه منظم د ديتمرمينانت سيستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,27)$$

لاندې سړی لاندنی رييلګې پوهيدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_1a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});\ldots\ldots\ldots\ldots(11,28)$$

له دې سره د دريمی درجي ديترمينانت شميرنه د دوهمی درجی ديترمينانت په شميرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعريف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضيح کيدی شي:

پېژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د ديترمينانت D لاندېديترمينانت Aik لاندې هغه دومه درجه ديترمينانت پوهيدلی شو، چې د D ديترمينانت i- می ليکی او k - م درځ يا متې د لرې کولو يا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتريکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کي دا ليکي او متې يا ستي له منځه نه شم وړلی، خو دا کومي ستونځي نه پيښوی ، ځکه، چي لاس ته راوړنه يي پسي ليکل شوي)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{22} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چی د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :
د دريمی درجي ديترمينانت D لاندې، چی په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي ځخه، چی دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چی دوه ناپيوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ځخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx1 = D1 , Dx2 = D2 , Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونوديترمينانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ يا ستن يا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots(11,30)$$

مورِ دا نتيجه بي له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونوديترمينانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم يواځنی ځواب لري

$x1=D1/D$; $x2=D2/D$; $x3=D3/D$ 11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di \neq 0$ کم له کمه د يوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه يو برابرون له ضرورته زيات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم کيدي شي چې د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندي ځواب شي (وړاندیز دی چی د ګاوس الګوريتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بيلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندي سيستم

I $x1 \quad -x3 = -2$

II $x1 \; +x2 \; -x3 = 0$

III $2x1 - x2 = 0$

کی دی

$$D = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 11-1 \\ 2-10 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 11 \\ 2-1 \end{pmatrix} = -1-0-1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -20-1 \\ 01-1 \\ 0-10 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1-1 \\ -10 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 01 \\ 0-1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1-2-1 \\ 10-1 \\ 200 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0-1 \\ 00 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1-1 \\ 20 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 4:$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10-2 \\ 110 \\ 2-10 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 11 \\ 2-1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.
x1=D1/D=2/2=1, x2=D2/D=4/2= 2 ,x3=D3/D=6/2=3

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :
په لاندې سیستم
I x1 + x2 + x3 = 0
II x1 -x3 = 0
III 2x1 + x2 =1
کې دی.
دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښایي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، D = 0 او D1= -1 |=0 ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم
د ګاوس الګورتیم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې دري ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې دري ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.
د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کې پرته ده چې (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.
I a11x1+a12x2+a13x3=a1 (11 . 34)
II b22x2+b23x3=b2
III c33x3=c3
بنسټیز حالت : که a11|=0,b11|=0 ,c11|=0 وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چې له III x3, او له II x2, وشمیري. مګر په (11 . 34) کې ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:
-که c3|=0,c33=0 وي، نو یو په څټوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري
- که c3=c33=0 وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.
- که c33=c3=0او برسیره پر دې a11|=0, b11|=0 وي، نو x3 په خوښه ټاکل کیدی شي او x2له II او x1 له I چې x3 ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)
-برسیره پر دې که b2|=0 , b22=b23=0 وي، نو ځواب وجود نه لري
-که نور هم ولړو چې c33=c3=0 او b22=b23=b3=0وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له a11|= 0 کیدی شي چې x2 او x3 په خوښه وټاکل شي، او x1له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چې x2 او x3 ته اړ (په واك کې يا تابع) وي (ناپاي ډير ځوابونه ځوابونه) . که ټول ځلونه او د مساواتو ښې خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوريتموس د دري ناپيژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دی لومړی پل (قدم) : نيسو چې په (11 . 2 6)کې 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو) بې له ورکړ شووحالتونو) چې ټول 0 = aik وي) . دلته I ورکول کيږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سيستم لاس ته راځي:

(11 . 35) I a11x1+a12x2+a13x3=a1

II b22x2+b23x3=b2

III c33x3=c3

دويم پل (قدم) : د 0=| b22 نيوني سره په II' او III' باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوريتم استعماليږي : سړی II' بې تغيره پريږدي اوله III' دا b32/b22-ځله د II' کموي، له دې راپيداکيږي

(11 . 37) I a11x1+a12x2+a13x3=a1

II b22x2+b23x3=b2

III c33x3=c3

د ګاوس د شيما فورماليتي سره سم بيا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I	b22	b23		b2
III' = III-(a31/a11)I	b32	b33		b3
III'' = III' - (b32/b22)II'		c33		c3

x3 = c3 / c33

x2=(1/b22)(b2-b23x3)

x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سيستم ۰(مقايسه بيلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2
II x1 + x2-x3 = 0
III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوريتم سره په لاندي ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0	2	6	

x3=6/2=3

x2=2……

x1=-2+x3=-2+3=1

بيلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I x1 + x2- x3 = 0
II x1 -x3 = 0
III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوريتم په مرسته په لاندي ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III"=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1" تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 +x2+x3 =3
II x1+2x2+3x3=6
III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III" = III'-II'	0	0	0	0

x3= په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ . ۳۰ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

مور په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونې پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1.....(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$.....$$
$$.....$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه يا ازاد پريږدو چې د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپيژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو يا وظايف مور دلته له څلور ناپيژندونکو څخه نه پورته کيږو او يواځی لاندې دوه متودونه څيړو

۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱ د n - م درجی ديترمينانت او د کرامر قاعده

پيژند ۱۱ ۰ ۵ :

د n رييل ګڼونو aik يوه منظم سيستم n- م درجي ديترمينانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};.....(11,38)$$

لاندې سړی لاندنې رييل ګڼ پوهيږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې ديترمينانت Aik د (n-1) - م درجی ديترمينانت ده، چې پاتيږي، که په Dکی i - مه ليکه اوk - م درځ ، مټه يا ستن (ليکه او درځ چې aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي يا کرښه پرې تيره کړي، يعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی ديترمينانت شميرل و- (n-1)-ام درجی ديترمينانت شميرلو ته راتيټيږي .

په ځانګړي توږه د څلورمی درجی ديترمينانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};\ A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};.....A_{1n}\ etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپيژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تيورم په مرسته داسی سيستمونو لپاره لاندې نتيجه لاس ته راوړو

Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn (11 . 42)

د Di ديترمينانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونويا ضريبونو په ديترمينانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ مټي يا ستن د برابرونسيستم د بنې لاس سره بدل کړي .

د بيلګی په توګه يوسيستم د ۴ مساواتو او۴ ناپيژندونکو سره (پرتله مقايسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې يا ضريب ديترمينانت (۱۱,۳۸) لپاره د يوه مساوات سيستم د n مساواتو د nناپيژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باورې دی

D |= 0 (اصلي حالت) (44 . 11)

نو دا برابرونسيستم يواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. (11 . 45)

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د يوه i لپاره نو دا سيستم حل نه لري .

که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه يو مساوات غير ضروري دی (دلته د اوبيونې لپاره د ګاوس الګوريتم وړاندیز کوو)

بيلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سيستم دې حل شي

I $x_1 + x_3 = 0$

II $2x_1 + x_2 + x_4 = 0$

III $x_2 - x_4 = 4$

IV $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}\right|=4-2+2(-2+4)=6$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوريتم:

موږ وليدل چې د ګاوس الګوريتم له لارې د مساوتو يو دريکوجشکل سيستم لاس ته راوستی شو، چې د هغې له مخې څرګندولی شو چې کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بيلګه څرګندوو

بيلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بيلګه ۱۱ . ۲۱ کې ورکړ شوی سيستم د ګاوس الګوريتم له لارې حل کړو، نو لاندني شيما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2
x3=1/2(4+3.(-2))= -1
x2=0+(-1)(-2)= 2.....
x1 = -(-1) = 1 .....

بيلګه ۱۱ . ۲۳:
دا برابرونسيستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4
II x1 -x2 -x3 +x4=0
III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل يا اوبيونه ى نه لري، لکه د ګاوس له شيما څخه چى ليدل کيږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III" = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III" په څټوالی يا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بيلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سيستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپيژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چې oe1 (ناپای ډير) اوبيونې لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III"' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V"'=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چې III"' او V"' تضاد نه لري. سړی کړي شي چې x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 II" له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 IV' او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښه x4 ټاکو

يادونه : هغه ګڼ يا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي يا له منځه وړو هغه مو شنه کړي.

سړی د ګاوس شيما په دوم بلاك کی پيژندلی شي، مساوات، کوم چې په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غير له هغی چې په II' اړه لرونکي دي. کيدی شو چې په III' او V' ليکو مو کرښه تيره کړي وی) له منځه وړي وی (. دريم بلا ك به يواځي له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوريتم به له دې سره پاي مينډلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژين مساواتسيستم:

د n مساواتو يو سيستم د n نامعلومو سره چې د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګين مساواتسيسمتم بلل کيږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سيستم بلل کيږي

I a11x1+a12x2+a13x3= 0.....

II a21x1+a22x2+a23x3= 0 (11. 46

III a31x1+a32x2+a33x3= 0.....

يو داسی هموژينسيستم تل يوه اسانه اوبيونه يا اسان حل لري

x1=x2=x3=...=xn=0 (11. 47)

که د ځلوونو د يترمينانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شيما څخه يواځي اسان trivial اوبيونه ياحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : یو هموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هموژین برابرونسیستم

I x1 +x3=0

II x1 -x2 =0

III x1 +x2 +x3=0

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه x1=x2 =x3= 0 لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

I x1 +x3 = 0

II x1 +x2 = 0

III x1 +x2 +x3 = 0

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

	x1	x2	x3	RS
	0	0	1	1
I				
II	0	1	-1	0
III	0	1	1	0
II'=II-I	0	-1	-1	0
III' = III	0	1	1	0
II'' = II + III'	0	0	0	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

گورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځي-x3=x2 او له I ځخه لاس ته راځي -x3=x1نو x3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نو x3 په خوښه

تمرينونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بيايي و ازمايو. د لته دې د زياتون يا جمعې قانون او همداسي د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$

b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$

b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$

d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$

b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4 + y = x$

$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$

$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$

$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$

$3x_1 + x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$

$5x_1 - 2x_2 = 9$

$7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$

$9x_1 + 2x_2 = 5$

$3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$

$3x_1 + 5x_2 = 5$

$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$

$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$

$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$

$x_1 - 1{,}5x_2 = 5$

$0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$

$ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$

$2x_1 - 3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2-4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسې حا لې چې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګنونو څخه هر یویی په 2 لویوي، نو ګنونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګنونوڅخه 3 کم شي ، نو داسی لاس ته راغلی ګڼ څان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه ګنونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګنونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی. هر یو ددې دوه ګنونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګنونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره څل یا ضرب شي، نو د څلونو زیاتون یی 2222 دی. هر یو له دې ګنونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګنونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګنونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پرېکشن یا پریوستون یی د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې دننه په 100 m² زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللاري لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له څوي څخه ۳۶ کاله زور دی په ۵ کاله کی پلارد څوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د څوي عمر لري اوس پلار او څوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دي ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 المانې مارکه (DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډک شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو.ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دي وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دي کار لپاره ضرورت ولري ؟ ارتیادوی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۱۶ . د يوې ګردۍ په چاپيرې چې ۱۰۰ مترە اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقيې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقيقې، که هغوي يو د بل په څټ لور حرکت وکړي، هر بدن په يوه ثانيه کې څومره واټن تې کوي يا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په يوه ګردۍ چې چاپيرې يې ۹۹۹ مترە اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانيوکې. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واړه لوي لکه د دوم ؟ی

۲

۲ . کرښيز مساوات سيستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$, $2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$, $\frac{2}{3}x - z = 1$, $-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲ . ۲ – مساوات سيستمونه د ناټاکلو ضريبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښي زياتو مجهولو سره

a) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$0,5x_1 + x_2 + 1,5x_3 - 0,5x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

b)
$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 1$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10$
$6x_1 + 0,5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$

d)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1$
$6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$

b) $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

c) $20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$
$-12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$
$8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

d) $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاينيز- يا ناکرښيز- يا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته (اکويوالنت) نه وي ، نالاينيز – يا ناکرښيز مساوات بلل کيږي او عمومي فورم يې په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی يوه ناکرښيزه يا ناخطي وييني يا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پيدا شي د کومو لپاره چې (12 . 2) باوري وي. بايد په پام کی ونيول شي چې ايا يوائي رييل ارزښتونه پيدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پيدا کړو. د بيلګی په توګه لاندې ناکرښيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره يې مساوات باوري کيږي .ددې په څټ يا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړيکو ته پاملرنه وشي: اړيکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونې بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څټ يا برعکس (12 . 2) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی يا اوښتونی دی.

د (12 . 2) برابرون يا مساوات اوبيونې يا حل ته د برابرون د (x) F صفرځای يا د مساوات F(x)=0 جذر يا ريښه هم وايي.

هغه برابرون يا مساوات چې په (۱۲ . ۲) فورم نه دی ورکړ شوی کيدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګې په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

f(x)=g(x) او $\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونډه (اختمامیه، رابنده، راټرلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چې د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريکو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چې په دې او راتلونکی څېرکي يا لکه چې ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چې اوبيونې يی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح يا روښانه ، افاده شوی، اکسپليځت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چې په لاندې نورمال فورم يا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 .....(12,3)$$

دلته په (12 . 2) کی يو نالاينيز بلواک يا – فنکشن (x) Fد يوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره يوائی رييل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چې ځلونه يوائي رييل وي، يوائی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کيږ اړخ ته n - م درجه پولينوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 .....(12,4)$$

ته ټول ريشنل (- ريښتونی) بلواک يا فنکشن هم وايي، ځکه چی د ريشنل شميرله عمليو زياتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واريابلی او ai د رييل ضريبونو، ځلونو يا فاکتورونو باندې د ويش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .توليز برانرون يا

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 .....(12,5)$$

کيدي شي په bn|= 0 ويش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاينيزفنکشن يا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واريابلي يا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمير کارونې يا عملیي او بالاخره دويش کارونه وکارول شي يا اجرا شي او رييل پارامتر (Parameterپه شميرپوهنه کي ثابت (همغۀ) او يا مرستندويه لوي ده) تشکيل شي نو فنکشنونو ته بيا مات ريشنل فنکشنونه ويل کيږي. دا تل د دوه پولينومونو يا ريشنل فنکشنونو د ويش په څير انځورو دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; .....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) يا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا بايد په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره يواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چيرې د نالاينيزبلواک يا - فنکشن جوړولو کی د ريشنل شميرعمليو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) يا پوتنځ کول او جذر نيولوته هم اجازه ورکړل شي نو بيا سړی د الجري فنکشنونو څخه غږيږ يعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ويل کيږي او (۱۲ . ۲) برابرون بيا الجبري برابرون بلل کيږي ، دا ډول مساوات هم کيدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ريښه يا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د G(x) افادې يا وييني له منځه وړل کيدی شي, که چيرې څوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو يا معلومو بيلګوڅيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځيرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - مې درجې برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چې الجبري برابرون نه دي، ترانسځيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چې په برخه ۱۳ کی به تر ځيرني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چې څلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې توليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,8)$$

په b2 يې ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې يا مربعتکميل څخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2_1}{4}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چې (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a1/2]^2=(a1^2/4)-a0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a1^2/4)-a0>0 <=> a1^2-4a0>0 <=> a1^2>4a0 \qquad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.....(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.....(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلورې یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رییل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.....(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.....(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونې څلورې برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.....(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې ټیک یو رییل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a/2;.....(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0\Leftrightarrow a_1^2<4a_0;...../12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) ریبل حل نه لري. که په کمپلس ګنونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}\wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};.....(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};.....(12,21)$$

نو لاندې جمله بی راغونده داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلورې یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلورې- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

تیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف ریبل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو ریبل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره بنوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د څلورۍ - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبيوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2 ;.....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2);.....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجييز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا توټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,25)$$

چيرته چې x1 او x2 د ځلورې برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) ځخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ ځخه دې ته راهځول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ريل اوبيو ځخه خبرې وکړو (وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن $y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$ خيږو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرځومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) اوهمدارنګه x هرځومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ريښو ځايونو x1 او x2 کی غوڅيږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يې لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري يا نه وررسيږي (پرتله ځيره . ۱۲ . ۱)

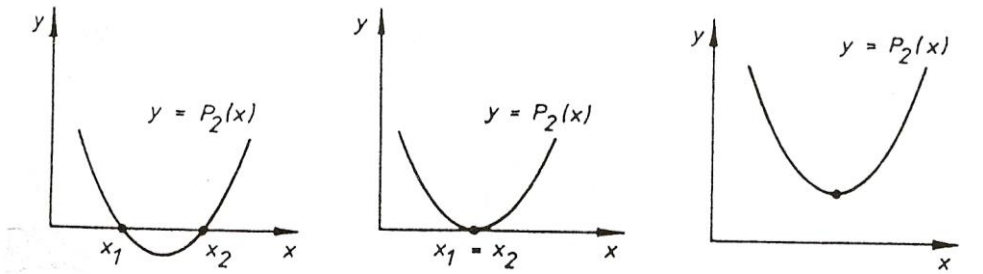


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په دري ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، ۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بيلګو روښانه شي.

بيلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a_1 = -1 , a_0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځايونه د جملی ۱۲ . ۱ ځخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی ياتعقيب ځخه باوري کيږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$
$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بيلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئيز ريبل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x+x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بيلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a0=13$ $a1=-4$او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونيوګيرت(کنجوګيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په
لاندې بڼه يا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x=2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x=(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخي داسی دی
$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$
د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲ . ۹) اوبی په بنکاره ډول ساده کيږي، که يو ځلی a0 اويا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$
$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ ځلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبنه مخ ته نه دي پراته

که يو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو بايد په دې بنه واړول شي.

بليګه ۱۲ . ۴ :
$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$

$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$
$-x^2-2x-4=x^2-8x$
$x^2-3x+2=0$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$
$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول يا ناپيژندلی يا اوړيدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو بايد په صفر ويش ناممکن يا ناشونوالی په پام کي ونيول شي.

بيلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$
ټيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \mid =0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائنل کيږي، چې ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$
$$-x^2 = -4$$
$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ،

چې په ځلوړی يا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو (۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چې د ځلوړی برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي٠ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- مې درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,28)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$
$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دې
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو ځلورې - يا مربع برابرون دی، چې د جملې ۱۲
. ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري x = 0 چې دا (n-2)- ځله رامنځ ته
کيږي x3 = x4 = ... = xn=0

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; .....(12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت
- وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټيك) ځله وونې يا کوايفيځينټونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; .....(12,34)$$

دلته داسې ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; .....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12,36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,38)$$

تولې اوبيونې وځيرلی شي، چې د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بيکوادرات برابرون) (د څلورې څلورې يا د مربع مربع) يا د رييلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په توليزه توګه ستونځی لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کيدی د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورې برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چې د بيرته بدلون(-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$x^2 = 4 , x^2 = -9$

لاندې اوبی يا حل لري

$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چې بيرته په څلورې برابرونونو بد ليد لی شي

يوه د نالاينيزو مساواتسيستمونو لړې کيدی شي چې په څلورې برابرون يا مربع مساواتو بيرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلګې راوړو.

بيلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12 , 39)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12 , 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، $y = 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کې اينسوول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$
$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$
$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخې په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاينيز برابرون لاندې اوښيونې لري

$$x1 = 3 , y1 = -2 \quad \text{او} \quad x2 = -2 , y2 = 3$$

بيلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سيستم کې

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې يواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y+ x= xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \qquad (12 , 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی اينسول کيږی يا ځای په ځای کيږي

$$1-ax+x=x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2- ax+ 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري يا په څټوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) څخه لاس ته راځی $x^2 - x +1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \qquad (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه بايد په پام کی ونيول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a > 4 \quad \text{او} \quad a < 0 \qquad (12 , 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \qquad (12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه dy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \qquad (12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چې د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل x1 > 1 /2 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی
$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:
$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم*لرو* $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف ریيل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
x1 , y1 او x2, y2 .
د
1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)
لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) دبل ریيل حل لري
x1 = x2 = 1 /2 (12,50)
په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت دبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.
y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، دبل ګنلی حل موجود دی
x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)
د
1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)
لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کټمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کټمټ دی (له دې امله په څټوالی یا تضاد) .
نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د
0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کې (۱۲ ، ۴۴) کونجوګيري کمپلکس اوبيونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخې په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; \ldots\ldots\ldots\ldots(12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي يا راټوله توګه لرو: برابرونسيستم (۱۲ ، ۴۱) د a = 0لپاره اوبه نه لري، د a < 0 , په همدې ډول a > 4لپاره دواړه ريل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د a = 4 لپاره رييل ډبل ګڼلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د 4> a >0لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات يا - برابرونونه

ددې لپاره چې په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملی د دريمی درجی مساوات لپاره ځيړو.
د دريمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنسټيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چې x^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بيړه جګيږي او بيا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کميز يا منفي هم وي نو y به د لويو x- ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچې x^3 د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت يا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کې په پراخه توګه څيړل کيږي .د يو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کيدی شي (شته چې د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود يو x - ازښت) چې خورا لوي هم کيدی شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ بايد د مساوات (۱۲ . ۵۶) يو ريښل اوبی پروت وي.

په ډيرو لاندې بيلګو کی سړی کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائيلي حلونه پيدا کړي، په عمومي توګه بيا هم بايد وشميرل شي.

ددې لپاره يو څو بيلګی:

بيلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:
د پولينوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \qquad (12 , 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0 , 1 , -1 , 2$$
$$Y = 12 , 6 , 12 , 0$$

په دې توګه يو ريښل صفرځاي پيدا شو

$$x 1 = 2 \qquad (12 , 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شيما په بنسټ يو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بيا د مټ(توان= لوړولو ته اړتيا نه پيدا کيږي او پولينومونو د فنکشن ارزښت ساده پيدا کيدی شي يا شميرل کيدی شي

بيلګه ۱۲ . ۱۱ الف:
دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم يا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پيداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتيب شي وشميرل شي (، ځکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0 , 1 ,1 / 2$$
$$Y = -9 , 16 , 0$$

نو

$$x1=1/2 \qquad (12 , 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) يو رييل صفرځای دی

بيلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12,63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لاري لاندې رييل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12,64)$$

بيلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12,65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12,66)$$

په تولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل يو رييل اوبی ياحل x1 شته دی. دا يو واقعيت دی چې بي له ښوونی يی ليکو، چې دا پولينوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاينيز فاکتور (x - x1) ويشل کيدی شي او يو دومه درج پولينوم تري لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه يو رييل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0); \ldots\ldots\ldots\ldots (12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورې برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چې لاندې جمله فرمولبندي کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون درې اوبيونې يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

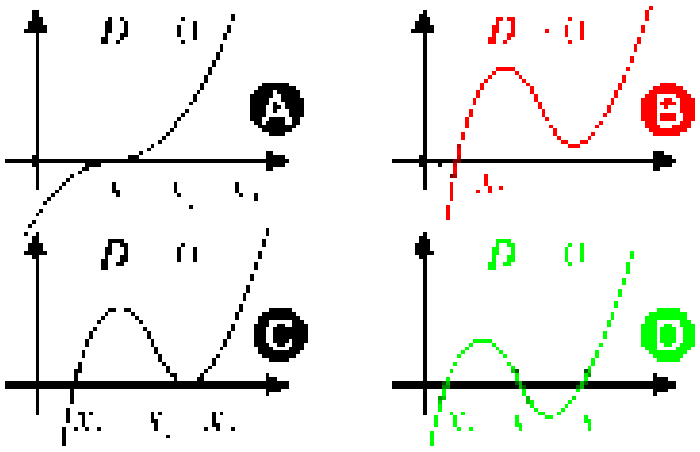
۲ - يو رييل حل x1 او ددي سره مختلف يو ډبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه کونجوګيرت کملکس اوبيونې يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی يا اندول له لارې کيدی شي د دريمی درجي پولينومو لپاره د وييتا جمله تصديق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دريمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبيوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دي اوس د بيلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبيوني ولټول شي.

بيلګه ۱۲ . ۱۰ ب :
(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial- (توټه-(ويش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$\underline{..x^3+2x^2}$$

$$.....-x^2-4x+12$$

$$\underline{.....-x^2+2x.....}$$

$$.....-6x+12$$

$$.....-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریښو ځوابونو سره
$x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$ ،
او داسی دی:
$x^3-3x^2-4x +12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دی:
$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي
$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریښې حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریښې حل سره، یعنی لرو , $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی
$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري
$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$
له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي
$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$
نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت دري برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی
$x_1 = x_2 = x_3 = 3$
او داسی دی
$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخې ځواب $x1 = 1$ لري، او داسې دې

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ څلورم حالت د يوه رييل حل او يوه جوړه کونيوګيرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ريښې (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کې د ريښې رابرون وځيړل شو. او دا هم څرګند شو چې ځنګه د ريښې برابرون په ريشنل برابرونو اوله دې سره n- مې درجې برابرونو بدليدلي شي٠ دا دې دلته د بيلګو په خير پاتې وي. يوائې رييل اوبيونې به و ځيړل يا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ريښې برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} = 16; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,72)$$

ډير ساده کيدې شي چې په لاينيزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \ldots\ldots (12,73)$$

د ازمايلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کې خوندي شي، نو څرګندېږي چې دا د x-ارزښتونه په ريښتيا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3 = 16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۲ . ۱۵:

د ريښی برابرون يا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;.....(12,74)$$

کيدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5;2x+19=5;x=3;.....(12,75)$$

د ازمايني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پيل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره يا په دې تعقيب د پيل برابرون ځواب نه لري.) داسي کيدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی٠

دا ساده بيلګی مور ته را ښايي چی بايد د ريښی مساواتو حل تل وازمايل شي چی ايا په ريښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شميرل شوي ارزښتونه په پيل مساوات کی کيږدي چی ايا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل يواځي د ازمايلو لپاره نه دی چي ګوندې ټيک يا صحيح شميرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب يو اړيين سما ندیز پل يا ضروری منطقي پل دی .

په ټوليزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په يو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته يا يو څه ور زيات شي ، يا تری کم شي، يادواړه خواوې په يوه ګڼ ځل (ضرب) شي او يا وويشل شي (په دې حال کی بايد پرويشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ويشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ريښی لاندې راشي او ياپه توان پورته شي نود پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کيدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زيات ځوابونه ولري نسبت و پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بيلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۲ . ۱۶:

د ريښي يا جذر برابرون يا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلوري يا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بيا څلوري يا مربع کولو سره سړی يو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی يا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبيونې دي، مګر بايد و ازمايل شي چې ايا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبيونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ريښی نه دې تعريف يا ددوه ريښو پيژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبيونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پيل بيلګی (۱۲ . ۷۸) يوګونی ځواب يا اوبی دی .

بيلګه ۱۲ . ۱۷:

د ريښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,.....(12,81)$$

کيدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3}\Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}\Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.....(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون يا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,83)$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|= 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چې په لاندې فاکتور وویشل شي:

$2x^2- 7x + 3 = x^2 -4x + 3$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x3 = 0, x4 = x1 = 3$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x2 = 1,$ او $x3 = 0$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱) اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\ x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}\,x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لارښودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چې په مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a په پام کې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه خان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د دري يو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيو ګڼونو د مربعو زياتونه. دا ګڼونه څه نومیږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرڅله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشی.

۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کې مقاومت په ديرش اوم Ω 30 لويږي، په کوم کې چې د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپير (1,65A) کوچنی شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چې مقاومت يې Ω 60 يو له بل توپير لري، يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 لري. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلڅغلونې لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درېنيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلڅغلوونکي ته د موادو موټر او بايسکل څغلوونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت څغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو, نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې څغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي څغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبيو څغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کې، دوم څلور متره په ثانيه دی دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچينه کې د څلور لاري څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ مترہ ورته نزدې وو؟

ت) د ګادي يو لاين د موټرځغاست سرک لمړی برخې سره غبرګ غزيدلی. د يوه موټر ځغاستي پيل کې د يو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ مترہ لرې دی. کله دوه ماشينونه په همغه جګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجيل او يو تعجيل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لايپځير ځخه د ديساو په لور بايسکل ځغليدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له ديساو ځخه د لايپځير په لور راتلونکی بايسکل ځغاستی سره مخامخ کيږي. ورستنی ۱۰۰ دقيق د مخه ديساو ته راځي لکه دوم ولايپځير ته. د ديساو او لايپځير ترمنځ لرېوالی يا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجيز دريڅګوډي کې ، کاتيټي ځانونه داسې يوبل سره نيسي لکه 3:4 ، هيپوتينوزې ۵۰ سانتي مترہ ده ، کاتيټي څومره اوږدې دي؟

ب) د يوه ولاړکونجيز دريڅګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتيټو زياتون يې ۱۷ سانتيمترہ اود يوې کاتيټي او هيپوتينوزې زياتون ۱۸ سانتي مترہ وي ؟

پ) د يوه سمکونجيز (ولاړکونجيز) دريڅګوډي کاتيټي څومره لوبي دي، که د هغوي زياتون ۴۲ سانتيمترہ وي ، د دريڅګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي مترہ وي ؟

ت) د يوه ولاړګوډي نيمی (قطر) ۳۵ سانتي مترہ اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي مترہ وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي مترہ وغزول شي، د نيمي اوږدوالی ۱۰ سانتيمترہ لوبږي. د سمکونجيز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هواري دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

پ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرډۍ کې دننه ځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څوندې مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمې باید څومره لوي، که په دننه منځشوي مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمې (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچیني نیمې څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغوندي نیمې څومره دی، که د هغه د دوو ال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشډکی یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمي او څلورمي درجي مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مسااتو حلونه یا اوبیوني دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازمایښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ – ریښه مساوات د نامعلومو ضریبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x}=a$ b) $\sqrt[3]{x}=b$

c) $a-\sqrt[3]{x}=b$ d) $a\sqrt{x}-b=c\sqrt{x}-d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a}=b$ b) $\sqrt[3]{a-x}=b$

c) $\sqrt[4]{a^4+x}=a$ d) $\sqrt[6]{a^6-x}=b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b})=(a+1)(a-1)b$

b) $(a-\sqrt{x})\ (b-\sqrt{x})=(c+\sqrt{x})\ (d+\sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b}=\dfrac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$ d) $\dfrac{2a+3\sqrt{bx}}{3a+2\sqrt{bx}}=\dfrac{3b+2\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$ d) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$

3.2.5. a) $x+\sqrt{x^2-a^2}=a$ b) $x-\sqrt{ax(1+x)+1-x}=1$

c) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ d) $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x}=b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a-2b+2x}-2\sqrt{3a-2b-2x}=\dfrac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}}=\dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$
$\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$
$x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$
$x+y=3$

3.3.2 a) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{a}{b}$
$xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\frac{a}{b}$
$x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$
$y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$
$y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یا - مساوات

لکه څنګه چې په ۱۲ . برخه کې دې ته ګوته نیول شوې وه، چې دلته یواځې هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چې بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښنه مساواتوکې، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چې اړولی فرمول زیاتې اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیوني په پیل برابرون کې ځای په ځای یا کیښوول شي او وکتل شي چې کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښنه یې برابرونونو یا مساواتو کې ، دلته هم یواځې ریښل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چې د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

د بنسټ b = 10لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\,\mathrm{og}_b\, x = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\ f(x) = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,5)$$

دلته f(x) یوه الجبري وییِنه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x+6=2^3= 8$ (همداسی)$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.....(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کارونې یا استعمال ځخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.....(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 (x-1) = 2$ ځخه لاندې لاس ته راځي

$$\log\left[(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

اوله دې ځخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له ځلورې یا مربع کولو ځخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ ځخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وییئه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $(b+3)/b-2)>1$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ ځخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $-2->-3$دا د ټولو b لپاره پوره دی.

د $b \leq 2$ لپاره د $b+3 < b-2$ $b+3 \leq b-2$ ځخه $3 \leq 2$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چې F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کارواییي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \qquad (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y1,y2,..$ په (۱۳،۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳،۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,..... \qquad (13.12)$$

له دې ځخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳،۹) کی کیښوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلورۍ برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$$x_2=10^{-1}=\frac{1}{10} \text{ او } x1 = 10^2=100$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x-1)(\lg x+1)$ سره ځل شي، لاس ته تړې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 x-1)$$
$$, \ 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلورۍ بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \ , \ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چې د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وییني یا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

af(x)=b,a>0 ,a|=1,b>0 (13 . 16)

په دي ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې ځلورې برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربښودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي.

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ کې د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په ځټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ ځخه د دوه واړه لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{يا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ :

$$7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې لرو

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کين اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپونتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}.....}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}.....} = c;.....(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - ..... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چې د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وېینه یا افاده F د الجبري اکسپونت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 ;.....(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

F(y) (13 . 22)

د ټولواوبیونو ..... $y_1 , y_2 , y_3;$ لپاره باید

$a^{f(x)}=y_i;i=1,2,3.....$ (13 . 23)

په همدې ډول

$f (x) = \log_a y_i \ ; i = 1 , 2 , 3 .....$ (13 . 24)

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کیدی شي چې د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په ځلورې

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$x_1.\lg3 = \lg1 = 0, x_1=0$

دا برابرون $x_2.\lg3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1}-1} = \sqrt{2e^{x^2-1}-1} \quad \text{.....(13, 25)}$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \quad \text{.....(13, 26)}$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};.....(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0=>y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 .....(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو ځخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبرارون پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8=3$

که کیږدو $y=\ln x$ ، نو دا ځلورې برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څیره لري

$$\sin x=a \ , \ \cos x=a \qquad (13 . 29)$$

$$\tan x=a \ , \ \cot x=a, \qquad (13 . 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه $\sin x$ او $\cos x$ نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جښمیرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹) لپاره

$$\cos \quad a \quad F \qquad\qquad \sin \quad a \quad F$$

د (۱۳،۳۰) لپاره

$$\tan \quad a \quad 1/x \qquad\qquad \tan \quad a \quad F$$

دا چې $\tan x$ او $\cot x$ پریودې همداسی 180^oلري او په یوه اینټروال کی چې اوږدوالی همداسی 180^oلري د(۱۳ ۳۰) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که $x0$ د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جښمیرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ...-3,-2,-1,01,2,3,...; .....(13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^o + k.180^o$$

د کونجونو فنکشنونه $\sin x$ او $\cos x$ پریودي(تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینټروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د $\sin x = a$ په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د $\cos x = a$ په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د $\sin x = a$ ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; .....(13,32)$$
$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; .....(13,33)$$

او د $\cos x = a$ ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; .....(13,34)$$
$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; .....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات $\sin x = 0,23910$ لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له املې په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13, 833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$
$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون $\cos x = -0,682000$ اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$
$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = -4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسې

$x_0 = 11,666677^o = 11,67^o = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67^o + k.180^o = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابور دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a \,, \quad \cos f(x) = a \qquad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a \,, \quad \cot f(x) = a \qquad (13.37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده وي‌که بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y = f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a \,, \cos y = a \qquad (13.39)$$

$$\text{Tan } y = a \,, \cot y = a \qquad (13.40)$$

دا کیدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې وي $y3, y2, ,y1 , \ldots$.

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi \,, \; i = 1,2,3,\ldots$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیونې (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° \ , \ k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $y_k = (x - 120°)3$, $y_k = (x - 120°)/3$ اوبونې (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90° + 3k.360° + 120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x_k} = 3y_k + 120° = 450° + 3k \cdot 360° + 120° = 570° + 3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګې په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخې تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad (\text{usw.})$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i = 1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چې په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چې ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده $g(x)$ هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په ریښه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چې د $y2=1$ لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څټ یا خلاف $y1$ فقط د (۱۳ . ۵۰) حل دی ، که د ریښی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یواځي هلته مخ ته پروت دی، چې $\cos x > 0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او

حل یا اوبښونه یې په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \quad k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; \quad k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کیښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۵۳ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کیښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دي وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۴۹ . ۱۳) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\,,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = \ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښتی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره :

$$y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4},$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې اینسوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \left\{\begin{matrix} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{matrix}\right\} + k \cdot 360^\circ = \left\{\begin{matrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{matrix}\right\} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل يا ازماښت اړيندی.

۱ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$

c) $x^{\log_5 (5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$

c) $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3-x)}$ d) $x (\lg 5 - 1) = \lg (2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2 [2 + \log_3 (x + 3)] = 0$ b) $\log_5 [\log_2 (\log_4 x)] = 0$

c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\frac{\lg x}{\lg (x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a (a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5} (a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12^{\sqrt[2x]{3}} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – گونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}=\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 7x=0$ l) $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x-3\sin x\cos x=0$ b) $4\sin^3 x-8\sin^2 x-\sin x+2=0$

c) $\tan^3 x+\tan^2 x\ 3\tan x-3=0$ d) $\tan^3 x-\tan^2 x+\tan x=1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0$ b) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$ d) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$

e) $1-\sin x=\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2})$

g) $1-\cos 2x+\cos 6x-\cos 8x=0$ h) $\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0$

i) $\cos 4x+2\cos^2 x=0$ j) $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$

k) $\cos 3x+\sin 3x=\cos x+\sin x$ l) $\sin x\cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$

m) $\sin x+\cos x=\frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x}=1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمې او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښې$<, \leq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کې به نابرابرونونه تر څیړنې لاندې ونیول شي، چې یوه یا دوه رییلي واریابلې یا اوښتونې ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښایي، د هغو سره چې واریابلې هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چې ترمونه T1 او T2 څرګندي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چې واریابل یا اووښتونې یې غوره کولی شي او په ترم کې د هغې ځای په ځای کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونې وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کې سره راټولیګي.
په لاندې برخه کې به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چې په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چې په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کې دې لاندې قاعدې په پام کې ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \quad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \quad (14,2)$$
$$a:b<b:c \quad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \quad (14,3)$$
$$a:c>b:c \quad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \quad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره اندول کی دي دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړي تر پام لاندي وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکړځي یا را په څټ کیږي یا که غواړی برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د $1 - 3 > -4$ سره ځل شي نو لاس ته راځي
تول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو $<$ سره باور لري دا په دې مانا چې $a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندي اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \quad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0 \ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \quad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \quad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \quad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \neq 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دي توییریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \quad (14,7)$$
$$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0) \quad (14,8)$$

۱۴ . ۱ ۱الف اینټروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید تول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :
یو اینټروال یو د یوبل سره اړوند د ریبلګنونو R برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشې ، د ګڼکرښې یوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کې دننه وي یا خوندې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لري، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیرې په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف ټیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیږ
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ بنې واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ بنې لورته ناپاې او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ بنې لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ بنې لور ته واز او کیڼ ورته ناپاې اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$ بنې لور ته بند او کیڼ لورت ناپاې اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول ریبلګونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیرې
11. $\varnothing$ تشډیرې

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیرې هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیرې ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notationپورته ته الترناتيو يا بديلي ليکنبڼه

په نړيواله توګه يو بل ډول ليکنبڼۀ په لاندې ډول ورکو لکيږي

$$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$$

$$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$$

$$[a,b[= \{ x \mid a \leq x < b \}$$

$$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$$

يادونه : داپورته د اينتروال ډولونه د نړيوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انيتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نيم و از اينتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نيم واز اينتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اينتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اينتروال : $(-oe,b]=\{x|x\leq b\}$

کښ بند ناپای اينتروال : $[a,oe)=\{x|x\geq a\}$

ښی واز ناپای اينتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کښ واز ناپای اينتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اينتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دی|x}=(-oe، oe)

بيلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنسټيزه ډيری Rکی د لاندې برابرون پيژندډيری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$$x - 2 = 1 + 7 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژندډیرۍ ده:

$D1 = [\ 2\ ,\ oe)$

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژندډیرۍ ی ده: $D2 =(-oe,7\ )$

د برابرون دپیژندډیرۍ لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty,7] = [2,7]$$

لاندې څیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څیره نه شم کښلی)

$D2=(-\infty;7]$



$D1=[2;\infty]$

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یې په ټولیزه توګه د اینټروالونو له لارې انځورېږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$ دواړه خواوې په -4 ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$
د اوبیونې ډیر یا اوبیډیرۍ : $L=(-5/2,oe)$
که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخبنې په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چې وي، باید په پام کې ولرل شي، چې یواځې هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیوني دي، چې ټول ې سملاسي (په همدې وخت کې) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرې یا برخلډیرې کیدی شي چې د غوڅډیرې په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونې) او د نابرابرون ډیرې شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅډیرې جوړښت، کیدی شي چې د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرې د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرې ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په $(x-2)$ باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کې لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x <2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کې یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځې هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چې په لومړي حالت کې راوړل شوي اوبیوني دي ، یواځې هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو رښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د $x - 2 < 0$ له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوښدیریو ټولنې څخه ټول اوښدیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوښونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: $2 < x < 3$

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

$(3x-1)/(2x+4)<2$

د شرایطو $2x+4|=0$ له مخې، دا په دې مانا چې $x |=2$ د مات لاندې سره ځله وني له امله

د $x>-2$ لپاره $(2x+4)>0$

د $x<-2$ لپاره $(2x+4)<2$

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څيره ۱۴ ۱ الف: دا څيره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بيا دا اوبيډيرې روښانه شو.

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون يا نامساوات حل يا اوبی دی.

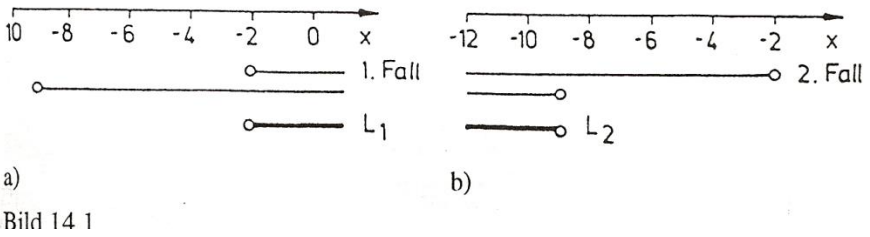


Bild 14.1

څيره ۱۴ ۱ ب : دلته هم ګډونوکړښې شته، چې په هغې کې دا اوبيډيرې روښانه کارل شوي دي. ، که څيره مې ونه کارله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي.

د مخنځښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن يوه ځانګړي بڼه يا فورم، چې په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړيکو کی استعمال شوي، اوبيونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بيلګې راوړل کيږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله يې ليکښې د مخکنۍ ليکښې سره توپير لري۰ دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$
;

$$x^2 - 5 < 0$$
;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$
;

دلته اوبيونې اينتروالونه دي۰ ښول کيږي، چې اوبيډيرۍ څنګه پيداکيږي او د دې لپاره

اړيين شرايط کوم دي۰

- په دواړو لورو همغه ګڼ زياتيدلی يا کميدلی شي
- که دواړه خواي د کميز ګڼ سره ځل شي يا په کميز ګڼ وويشل شي، نو مخنښه تغير خوري۰ که زياتيز وي، نو دواړه خوا په توان کيدی شي او ريښج يې وستل کيدی شي، پام دې وي، چې برابرون بيا زياتيزه او که کميزه مخ نښه غوره کوي او يا دواړه
- مورِ 1.9:1(اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست يا اوبيډيرى

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوښېړی سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2(اوښی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرني پل کي دي ته پام وي ($\sqrt{x^2} = |x|$.) د روانښه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کي $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کي $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوښېړی

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورِ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$\iff \quad x \leq 15, \quad 2x - 5 \leq x + 10$$

$$\iff \quad 2x \geq 5 \quad \iff \quad x \geq \frac{5}{2} \qquad 2x - 5 \geq 0$$

(i) که وي $2x - 5 \geq 0;$ نو دی $|2x - 5| = 2x - 5,$ او مورِ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii)نو دی $2x - 5 < 0.$ $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$\iff \quad -3x \leq 5 \quad \iff x \quad \geq -\frac{5}{3}, -2x + 5 \leq x + 10$$

$$\iff \quad 2x < 5 \quad \iff \quad x < \frac{5}{2}. \; 2x - 5 < 0$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیوندیږ له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړي تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړی

$$\frac{3}{x+5} < 2$$, (i)

$$\sqrt{x^2+x+2} > x$$, (ii)

$$|x+5| > |x-2|$$. (iii)

بیلګه ۱۴ . ۴:

1/(3-x)>2/(x+6) , x|=-6 ; x |= 3

د اصلي ماتلاندې (3-x)(x+6) سره د حَل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کومولە مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

(3-x)(x+6)>0⇔(3-x)>0/\x+6>\/ (3-x)<0 /\ x+6<0

⇔ (x<3/\x>-6)\/ (x>3 /\x<-6)⇔ -6<x<3

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم ښهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

(3-x)(x+6)<0 ⇔ (3-x) >0 ∧ x+6><0 ∨ (3-x)<0 ∧ x+6>0

⇔ (x<3 ∧ x<-6) ∨ (x>3 ∧ x>-6) ⇔ $x < -6 \vee x > 3$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

-6 < x < 3 ⇔ x ∈ (-6 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله وونې یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$
$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3) ....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$
$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6) ....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$:

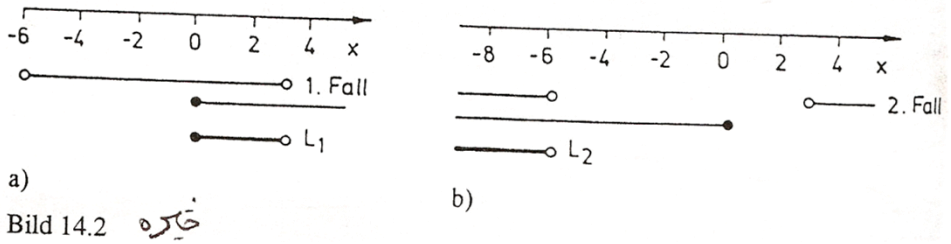


Bild 14.2 خاکره

د څلورې برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلورې ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کې نیولو سره د x^2 د مخ (کینې لور) کمیز- یا منفي ځلوونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنخښې په ځاي د مساواتنخښې ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرې : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې دادول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کږې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنیې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\neq\frac{2}{3}$ ۰

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرې یا حل ست: $L=[-5,\frac{2}{3}).$

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیرې L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیرې ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کې په نمره کړی شي ، ددې لپاره چې دا یوګوني (دا په دې مانا چې یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیرې: Lدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I.-2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II.\frac{4x-10}{x-1}<3$$

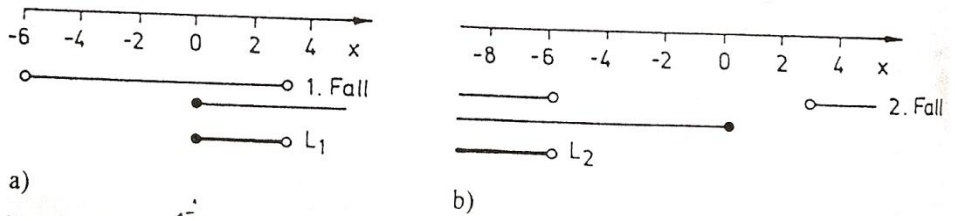
د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بنی سره وځیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړی حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$	$-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7\Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$	$-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7\Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}$ $=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$ $=(1,7)$

د LI او LII غوڅېږې جوړول بیرته کیدی شي چې د یوګونو اوبیدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرې د یوه اوبیډیرې $R^2 = R \times R$ برخډیرې ده، چې د هوارې په ځیر د لیدنې کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیرې په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کې مساعد دې. په دې برخه کې به مونږ یواځې د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0 \ , <0, \leq 0) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$$a,b,c \in R$$

سره د شرایطو $a|=0 \ v \ b|=0$ سره سم تر څیړنې لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښې برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چې د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چې ټیك په یوه له دې دوه هوارو کې باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کې ښوول کیږي. د اوبیډیرې په هواره کې د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کې برابرون نه وي پرینښوول شوي یعني برابرون په کې نه وي ځای شوي، نو راتولونکی کرښه د اوبیډیرې پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځې ټوټه ټوټه کرښې (پرې لاین یا غوځکرښو) په ځیر په نخښه شي، لکه څنګه چې د ډیرې ګرافیکي ښوونه ورځنې یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرې پورې اړه لرونکی برخې په ځیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چې په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دې نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چې د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنۍ نیمې هوارې ټول ټکي اوبیډیرې L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کې تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کې د مخه نیسي چې $b|=0$ دې. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دې، چې د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیرۍ پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه ځیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیرۍ ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیرۍ ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخره ې د یوګونو اوبیډیریو غوڅیږی نیول کیږي یا جوړیږي.

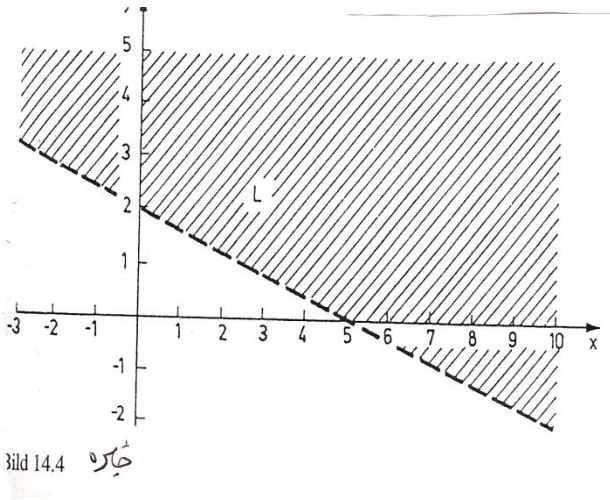


Bild 14.4 څېړه

بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . 2x+y<6

II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (0 , 1) کیښول شي، کوم چی د په څټوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبیډیرۍ LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښایي چې له دوه نیمکرښو بندیږي یا له دوه نیم کرښومحدودیږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرینونو په خپلواك کار کولو کی د غوښتونکو اوبیډیریو L د یوګونو نیمهوارو غوڅډیری حتي تر غاړې پورې رنګینه یا کرښی کرښی راوکښل شي، چې په دې ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

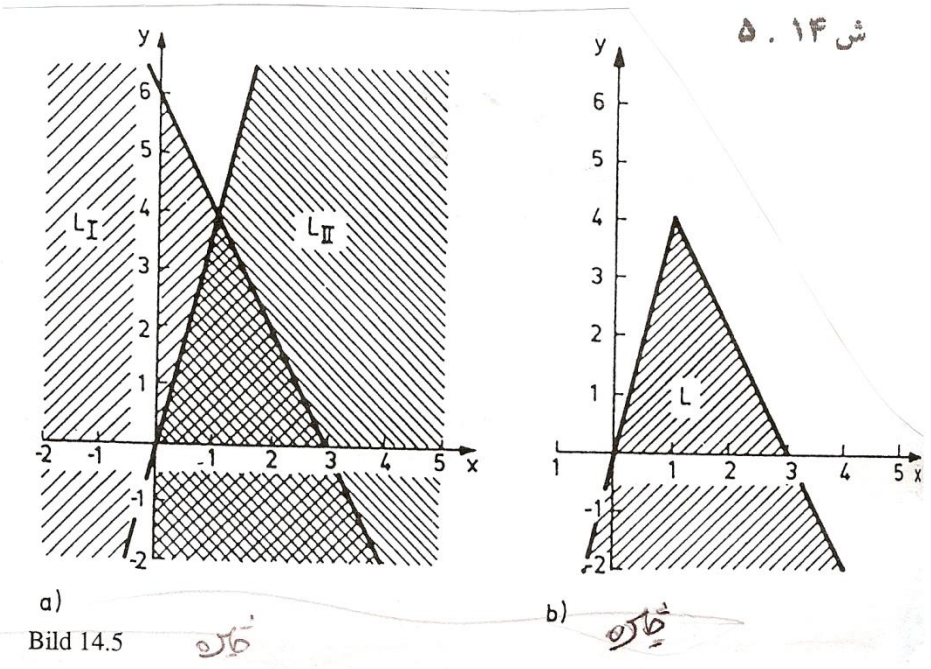


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$ II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبیډیرۍ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسیستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کیږي، په یوه کواوردینات سیستم کې او بیا د هواړې هغه برخه، چې دریواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه یې اوبی دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

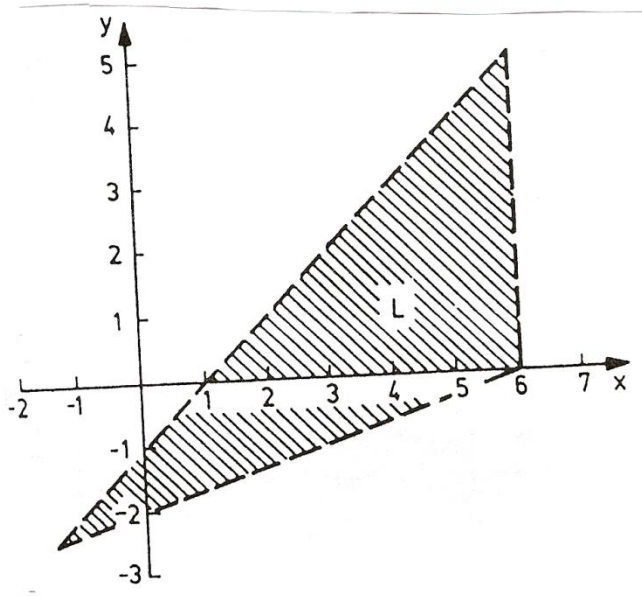


Bild 14.6 خاکره

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه برارون یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه ځرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي.
داسی دی:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ټرلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چې په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینټروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیرې د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیږي، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنټرول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$$|a . b| = |a| . |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b| \quad \text{د } b| = 0 \text{ لپاره}$$

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوښونې په نیول شوي یا فرض شوي اینټروال کي پراته دی او که یواځي د اوبي په ځیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوښونې اوښډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا اندول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوښونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوڅټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوښونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

$|x+1| = x+1$ لپاره $x \geq -1$ د (14,11)

$|x+1| = -x-1$ لپاره $x < -1$ د (14,11)

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

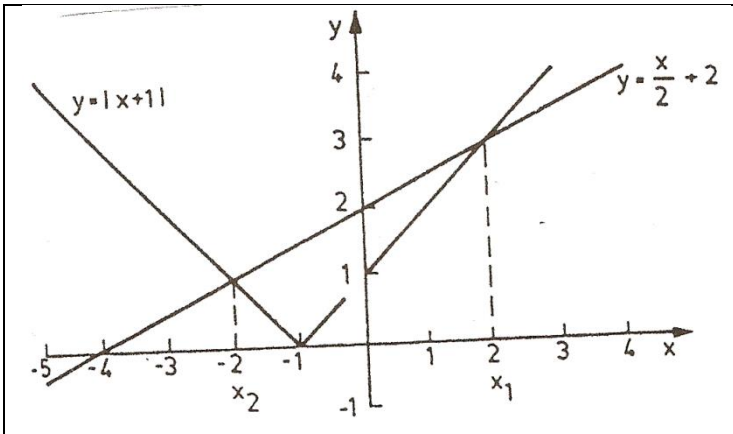
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د بنی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$ ، ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کین اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.

اوبی : کیدی شي په څ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځای کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخبنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځای راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبي کی دري حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندي ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حلاري له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کين اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواك يا ازاد ښودل کيدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تيرشوي شميرنو په ډوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيږي:

د $x > -3/2$ لپاره $x+4=$

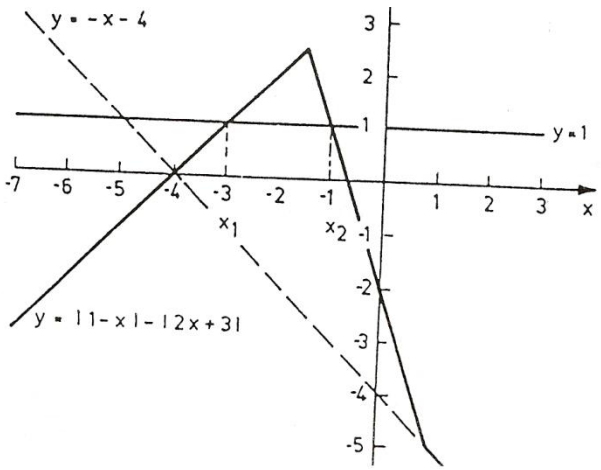
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $-x-4=$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلې له پرتلې مقايسي ځيره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کړي ريښتيا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$-لپاره ريښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره يو بل نه پريکوي. په دريم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتېکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی ځيره (شايد داځيره هم ځيره نه شي، کۀ کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځيره بايد ريشی او يا راغلی وي، يا راغلې وی.



که د مطلقه ازښت نخښی په يوه ځلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي ځيرنی چي په برخه .۱۴. ۱ . .۲ کی تر ځيرني نيول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه تري واخستل شي.) بيلګه ۱۴ . ۵ دې مقايسه شي)

بيلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

$x^2-6x+5>0 <=> (x-1)(x-5)>0 <=> x<1 vx>5$ د

$x^2-6x+5<0 <=> (x-1)(x-5)<0 <=> 1<x<5$ او

سره لاس ته راځي

$|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$ لپاره $x<1 vx>5$ د (14,12)

$|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$ لپاره $1<x<5$ د (14,12)

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 <=> x^2-6x+2=0,$

$L => x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5,\infty)$, $x_2=3-\sqrt{7}=0,35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 <=> x^2-6x+8=0,$

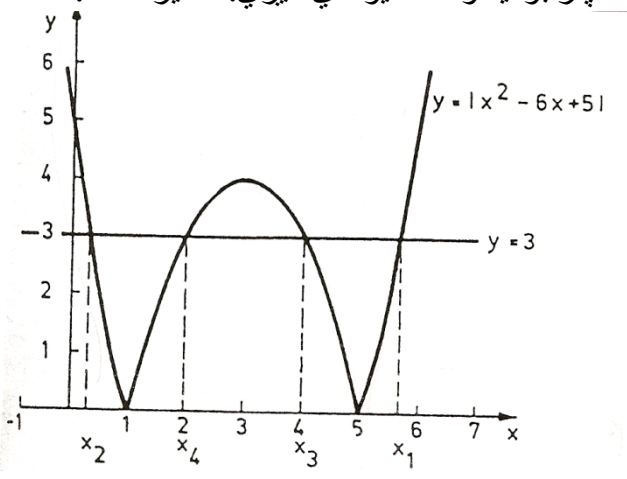
$L => x_3=4 \in (1,5)$, $x_4=2 \in (1,5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی اوL مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چې لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3-\sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

څیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لارې اوبی ښایي. کینې لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. څیره ۱۴ . ۹



څیره ۱۴ . ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)| , i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دی ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$د تیپ یا بنی وي چی یا

$T_i(x)>0$ او یا $T_i(x)<0$راکوي، یعنی د دوه توکو د واریيشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰) قاعدې سره سم 2^nبرابرونونه منځ ته راځي، چې په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې $x_1,x_2,x_3,.....$ ولرودی شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی مورږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

$T1(x)=1-x, T2=(2x+1)$

سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0:\quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0:\quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0:\quad -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0:\quad -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د$x1=1, x2 = -3$لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرون ونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چې بیرته د حالت توپیر اړیین دی

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : $|7-3x|>2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \square \ (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بې له ارزښتنخښنې:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راتولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5	
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لارښودوي، چې په دې حالت کې کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چې: $L1 = O/$

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| <=> -x+5<-x-1 <=> x>2 <=>$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| <=> x-5 < x+1 <=> 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: $L3 = [5 , oe)$

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 <=> x<-3 \text{ v } x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 <=> -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \text{ v } x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21|=x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 <=> x^2-4x-21<24 <=> x^2-4x-45<0$

$<=> -5 < x < 9 <=>$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 <=> -x^2+4x+21<24 <=> x^2-4x+3>0$

$<=> x < 1 \text{ v } x > 3 <=>$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا ټوټه کیږي، داسی چې په راتلونکو ګنلو کی یا ځانیزه توګه دري حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$x < -1/2$	$-1 \leq x < 1$	$x > 1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x$	$1+2x$	$1+2x$
	> 0	> 0	< 0
	$= 1-x$		

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff$

$x \in [-2 , oe)$

$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$

دویم حالت $x \in [-1/2, 1)$:

$1+2x < 1- x \iff x < o \iff x \in (-oe, 0]$

$L_2 = [-1/2 , 1) \cap (-oe, 0] = [-1/2, 0)$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو ست(اوبیډیری):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینې ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c)$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښې لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون

هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کربنی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1|>x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1<0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x - y + 1 > 0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff -x-y+1>x-2y-4 \iff -2x+y+5>0$

$L1=\{(x,y)|-x-y+1 \geq 0, -2x+y+5>0\}$

دوم حالت: $x-y+1<0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff x+y-1>x-2y-4 \iff 3y+3>0 \iff y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0\ ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیریو ټولندیرۍ ده۰ (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وینې د (۱۴ . ۱۳) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

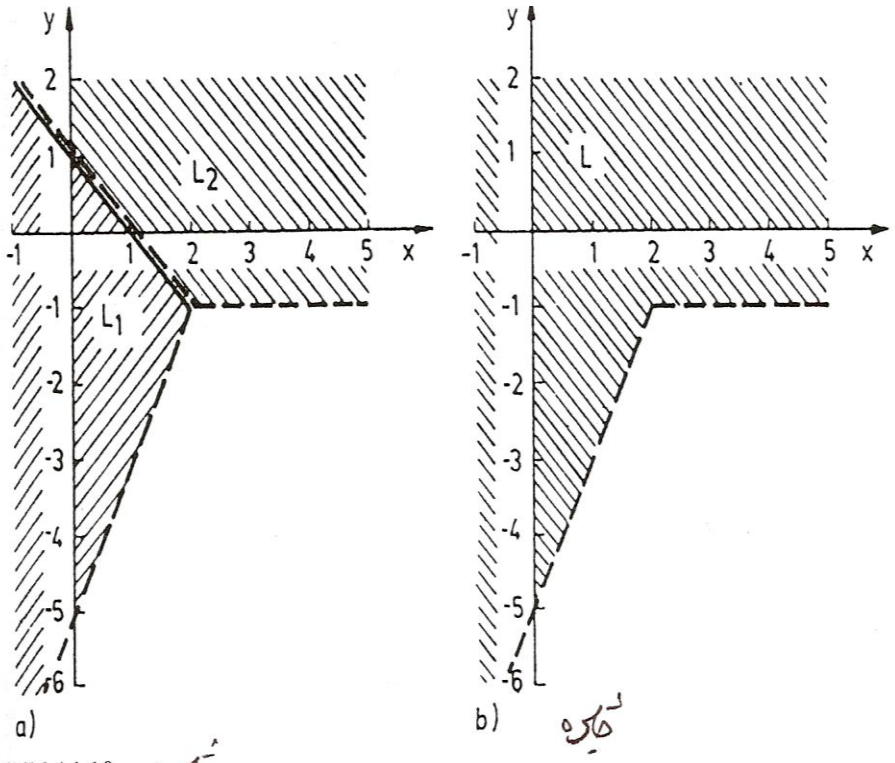


Bild 14.10 څیره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډپرې پیدا کړې

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

   c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

   e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

   g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

   b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

   c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

   d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

   e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

   g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

   c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

   e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

   g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

   c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

   e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

   g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

   c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

   e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \ge \frac{20}{x + 1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرې وټاکې

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x - 3) \ge 2(x - 3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x + 2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x - 1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x + 1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x - 1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حلونه په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکي انځور کړئ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حلونه د شمیرلو او همداسې ګرافیکي لارې پیداکړئ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرې پیدا کړې

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د لاندې نامساواتو حلډېرې په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړې او ا نځور یې وکاږې

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخې په پیل کې دې کلیمې ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنۍ ځیرونې، چې په هندسه کې خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځمونږ په دې کار کې بلل شوې چې مونږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا مونږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کې به وګورو چې خپلواکې او بلواکې ناپیوندونکې ځمونږ د ځیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:
د یوې ریښتنې واریابلې ریښتنې ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریښتنو ګڼونو ډیرې باندې ، د یوې ډیرې $D \subseteq R$ یوه یواځنۍ ځیرونه ده. D د پیژند ډیرې نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیرې چې y یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیرې یا تعریف ډیرې په دننه کې وځغلي، د ارزښت ډیرې W بلل کیږي .
د ې وې قانونمندې f له مخې هر $x \in M$ یواځنۍ یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونې یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونې بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چې په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x اوy د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1,\ D=R\ ,\ W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : $y=|x|$ لپاره $x<0$ د

دلته $D=R, W=[0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$

پام دې وي چې په داسی حالت کي له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چې په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y=f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځورونې شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره ترلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شننیزه ښه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په $D=R, W=R$

اکسپلیځیت شننیزه یا سپرنیزه ښه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزي انځورونی ځانګړي بنه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړي x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او $x = t$, $y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X .....-2 -1 0 1 2 ....

Y . .....2 0,5 1 1,5 2 .....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کړۍ له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

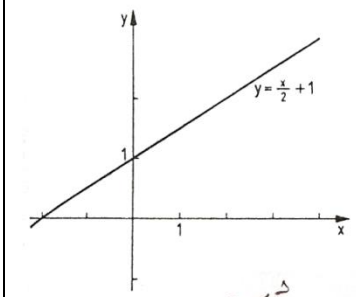


Bild 15.1 څېره

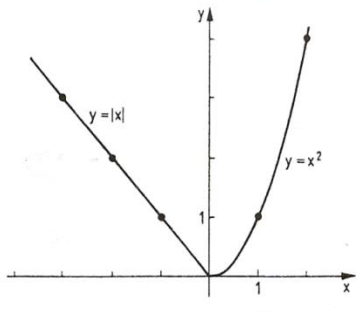


Bild 15.2 څېره

یا اووښتونوجوړي د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او دواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۲ د فنکشونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال $[a,b]$ کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د $x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابرونخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال $[oe,0)$ کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال $[oe,0)$ کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال $[-a,a]$ کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

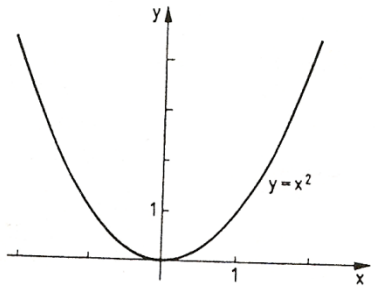
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

$(-x^3) = -x^3$

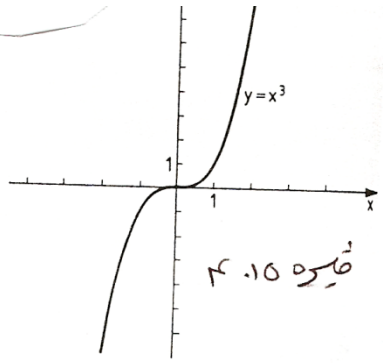
بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$(-x)^2 = x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۱۵ . ۳



څېره ۱۵ . ۴

د بيلګې ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشونه نه جوړه يا جفت او نه ناجوړه يا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

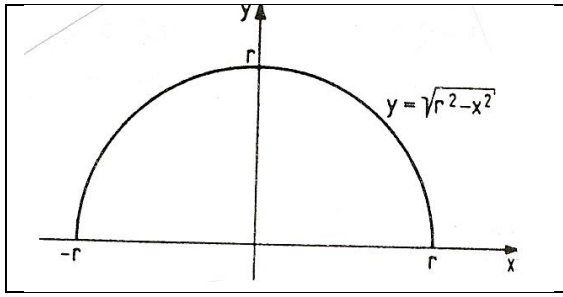
$y = f(x)$ تيك هلته په D (پيژندډيرې ده) بند يا رابند(محدود)بلل کيږي که يو $k > 0$ داسې شته وي چې دا باور ولري :

$$\forall x \in D \mid f(x) \mid < k$$

بيلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند يا راګير(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دې، ځکه چې لرو:نيم يوونګردی څيره ده

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



ش . ۱۵ . ۵

پيژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پريوديکي(دوراني يا بيرته- يا تل بيرته راګرځيدونکی periodical بلل کيږي د دوران يا راګرځيدونې p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی يا تل راکځيدونکو (پريوديکي) فنکشنونو تيوپيکي بيلګې تريګونومتريکي فنکشونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

تول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

بیلګه. ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2,\ x2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم څیر ۱۵ . ۶)

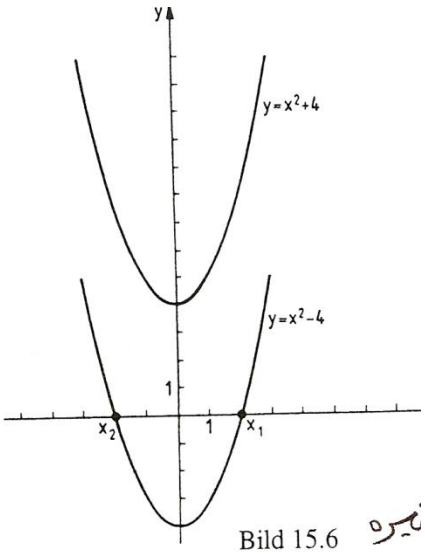


Bild 15.6 څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په څټکیدونکی دی ، دا په دي مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافیکی څیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

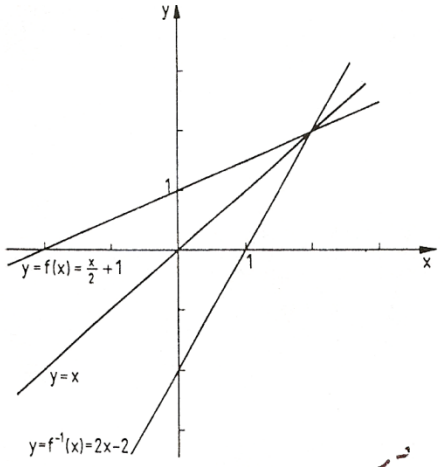


Bild 15.7a

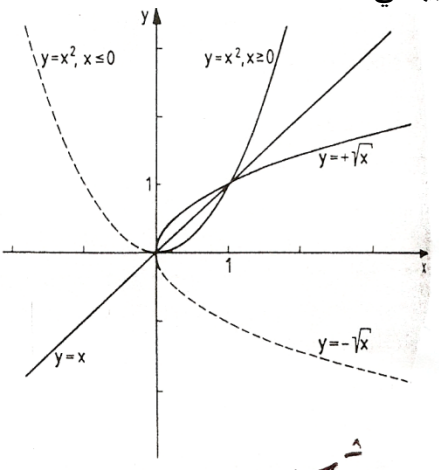


Bild 15.7b

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$,

څیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ [0,oe]= پورې دوه $x \in D$ = [-oe,oe] اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونګی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x \geq 0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن x =+y دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په څټ فنکشن y = x -دی. (څیره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او څیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خویونو له مخی وڅیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا ترلي فنکشنونه) وڅیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړډوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n +a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n \in N;\ a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

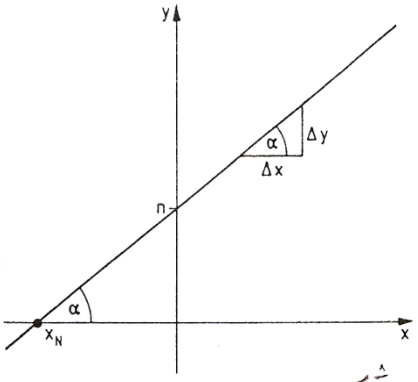


Bild 15.8

لري (ځیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږځتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n \ , \ y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی مونږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c \ , \ a \neq 0 \qquad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چې د هغې سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله وونې یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککړې ځای او بڼه)فورم(ټاکی.

مونږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو.

$$1. \quad y=x^2(a=1 \ ,b=0,c=0) \qquad (15.4)$$

نورمال پارابول، د ککړې کواوردینات: $x_s = 0 \ , \ y_s = 0$

(څ . ۱۵ . ۹)

$$2. \ y=x^2+px+q \ \ (a=1 \ , \ b=p \ , \ c=q) \qquad (15.5)$$

او $x^2 + px$ ته د ځلورې - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونې څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px \ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \qquad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2/4$ راکښل (رابنکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ې ، دا په دې مانا چې په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککړه لرې:

$$x_s = -p/2 \ , \ y_s = q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, \ xs=-6/2=-3, ys=10-6^2/2=1$$

(څ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

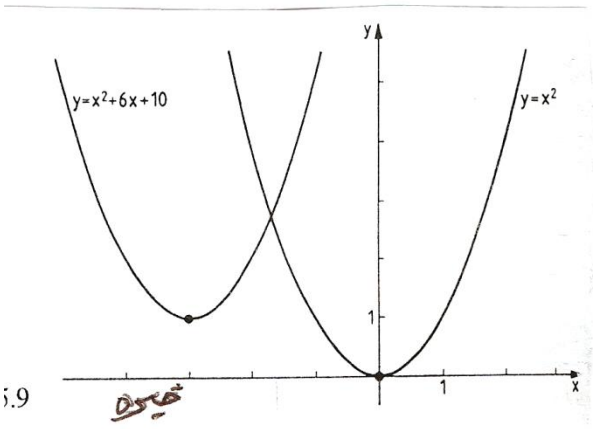
3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)
د ککړې (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0 , y_s = 0$

پارابول د |a| > 1 لپاره خور، د |a|<1 لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a < 0 لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2 , y = (1/2)x^2, y = -2x^2$
(څ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککړې (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$



5.9 څیړه

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4 ,(a=-1/2, b=1, c=4)$
دککړې کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چې a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

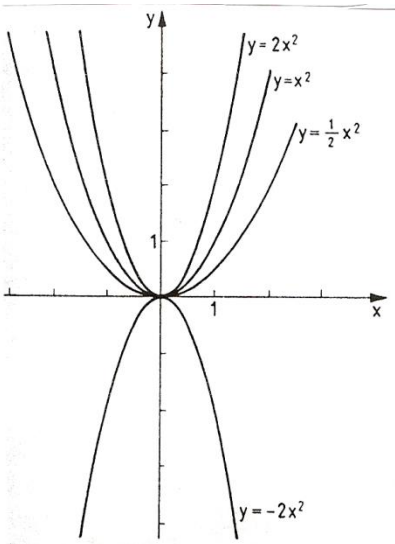


Bild 15.10

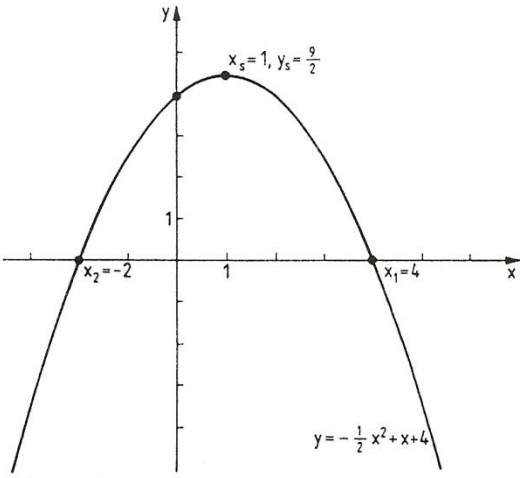


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګې ۱۵ . ۹ ته (څ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګې ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یانې $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چې برابرون ریبل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یانې $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګې په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګې له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a3 لهx1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدو ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

	a_2	a_1	a_0
ځلونه یا ضریبونه			
منځنی ځلونه	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$
منځنی زیاتون	a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دې او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو x1 = -2او x2 = 5 څخه شمیرل کیږي.

یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).

اوبیونه) :

	1	-2	-14	- 5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0=f(5)$

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f(x1)=0$ چی د $(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلورې – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په ځیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه ځوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ دري صفرځایونه $x_1=x_2=2, x_3=-2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1=2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2=2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3=-2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ 2) د $x^2+2x+5 = 0$ له امله

$x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$ د

لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-$

$2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د دریمې او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه ځیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکټریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چې د دفیرنځیالشمیر له مرستې کار واخلو ، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وې وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګې په توګه دا مانا لري چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره f(x)تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه د oe په لور ځي) .

که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};.....(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که n ≥ m ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د x = x0 لپاره یو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:
$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$
د $x=x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب) که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټیك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کږه داسیمپټوتي کربنې $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې املە د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+...+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+...+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچې د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چې آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چې اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ځیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: ($y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځای کی صفرځای لري. تشځای او پول یا قطب نه لري ریبل اوبیونه نه لري) او د $x \to \pm oe$ لپاره د x- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

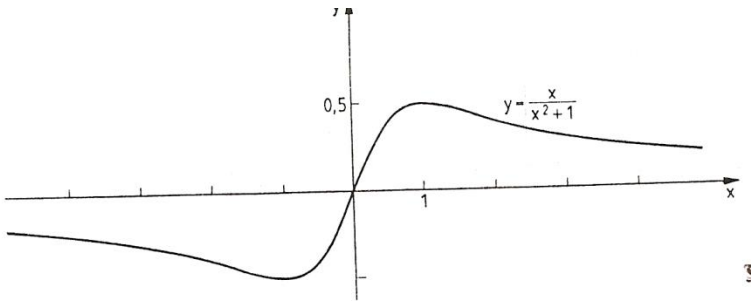
ب: ($y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x-3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3=0$) په $x1=-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3=-2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x=-2$-اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

مورِ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند ۱ ۰ 6)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګنِ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګنِ nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګنِ n لپاره ټولی کړې د تعریف ډیری(D = (- oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe)او ګډ ټګی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱۴ الف ۱۵) د ناجوړه ګنِ د n لپاره(D = (-oe,oe او(W = (-oe,oe) دي او (1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰



څیره

Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

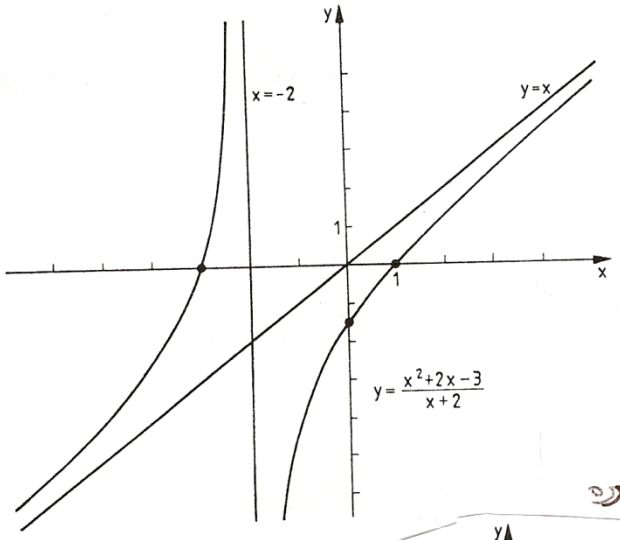


Bild 15.13

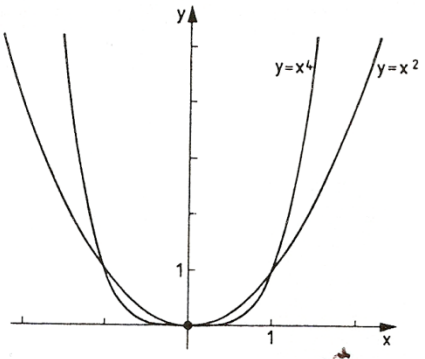


Bild 15.14a

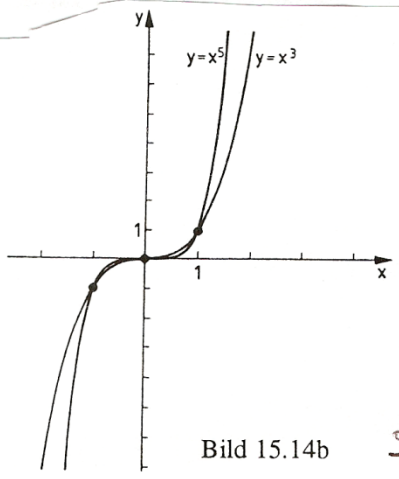


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په x = 0 کی د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) n لپاره ټولی کږې د پیژند ډیري

D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1) ؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0} او(W=(-oe,oe او(-1،-1) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

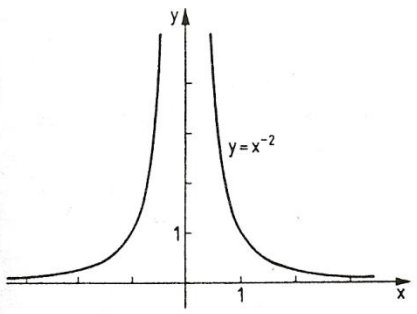


Bild 15.15a

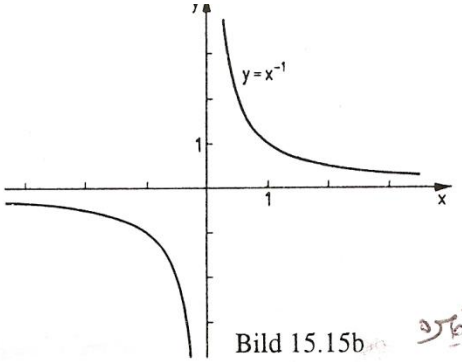


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دي د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيږ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر څټ فنکشن په لاندي ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) \quad \text{.....(15,8}_b\text{)}$$

او ريښه فنکشن نومیري (پيژند ۶ . ۲ دي وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دي د پوتنځ فنکشن په څير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځټ بيرته پوتنځ فنکشن دی.
تولیز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګونو کليمه دي وکتل شي برخه ۳ ۱۰ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha}\ ,\ \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}\ ,\ x \geq 0$$

لاندې چپه - یا پر څټ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\ ,\ x \geq 0$

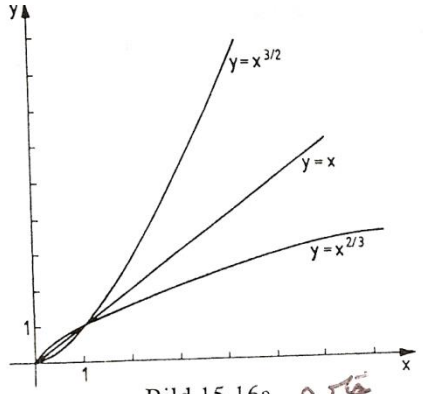


Bild 15.16a خیره ب)

(څیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x},\ x > 0$

څیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2\ ,\ x > 0$$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یواځی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرځټ فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفډیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې املې ټول په څټ کیدونکی وی، $y=\sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندډیری $D = [0,oe$ کی پر څټ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرځټ فنکشن د $D= (-oe,0]$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a > 0, a \neq 1 \ldots\ldots\ldots\

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

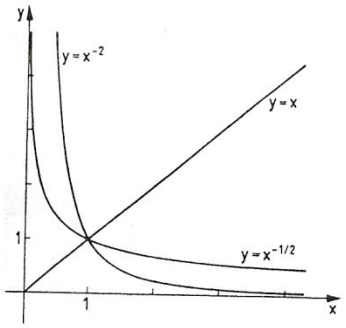


Bild 15.16b

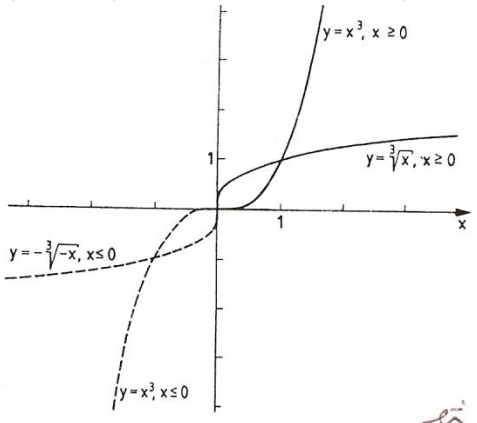


Bild 15.17

پورته دوه ځیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له املې ټکی(0,1 () د تولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe <- x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشونو یو څو بیلګې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10) په ځیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

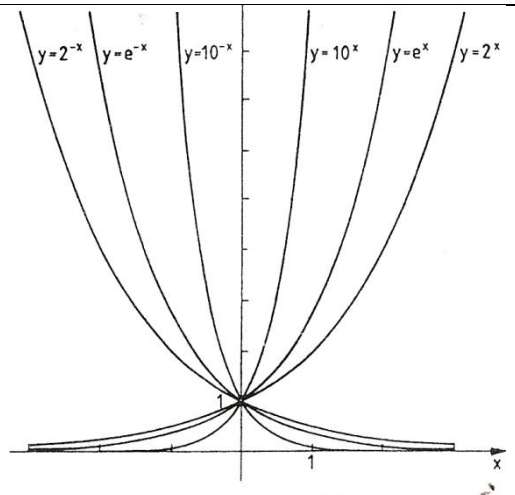


Bild 15.18

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څټ فنکشن دی

$$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندپیری
(D = (0.oe او د ارزښتډیری(W=(-oe,oe لري.

د $y = \log_a x$ کږي د ګږو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی(1,0) د ټولوکږو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

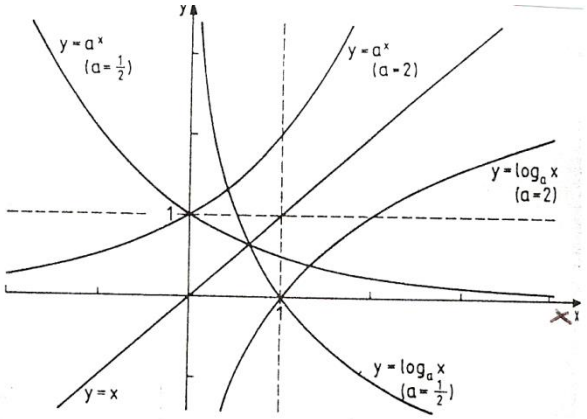


Bild 15.19 څېره

د a>1لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود x->0لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د 0<a<1 لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د x> 0لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څټ یی یعني $y = \log_a x$

د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشونو یا د کونجفنکشونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

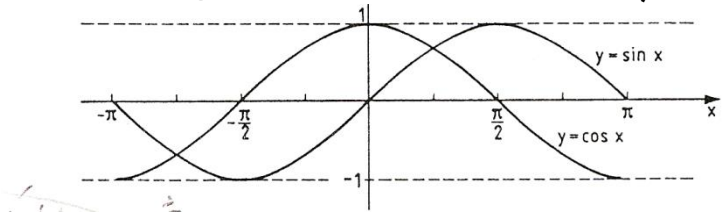
$y=\sin x ; D=R, W=[1,1]$.....$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$.....$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$.....$(15,11_d)$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشونه $y=\sin x, y=\tan x, y=\cot x$ ناجوړه فنکشونه، او $y=\cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشونه پریودیکي فنکشونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشونه $y=\sin x, y=\cos x$ پریودي 2π لري، دا په دې مانا چې لرو:

$\sin(x+2k\pi)=\sin x ; \cos(x+2k\pi)=\cos x, k\in Z$

لاندې فنکشونه پریود π لري

$y=\tan x, y=\cot x$. دا په دې مانا چې

$\tan(x+k\pi)=\tan x, \cot(x+k\pi)=\cot x, k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$,$y=\cot x$ لپاره او د $y=\sin x$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$,$y=\cos x$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y=\tan x$ په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ او $y=\cot x$ په $x_k=k\pi$, $k\in Z$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګې په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

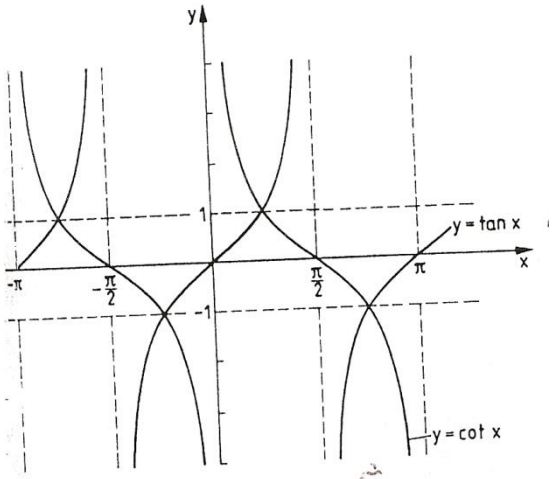


Bild 15.20b

فنکشن $y = \sin x$ په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په انتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودي کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ لپاره $y = \sin x$ جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi + 2k\pi \le x \le 0 + 2k\pi$ لپاره $y = \cos x$ پورته کیدونکی دی.

د $0 + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره $y = \tan x$ جګیدونګی دی

د $0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in Z$ لپاره $y = \cot x$ جګیدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دي امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی ترلی يا ځنځيري فنکشن دی. مور ترڅيرني لاندي نيسو چي د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږښيره باندي څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن $y = a \cdot \sin t$ د $y = \sin t$ فنکشن ارزښت باندي غزول يا راکشول دی که ($|a| > 1$)او يا پرسول دي که $|a| < 1$)وي $y = a.\sin x$ فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت $y = \sin t$ دی، چيرته چی برسيره پردي د $a < 0$ لپاره په t - محور يوه اينه ځيرونه هم منځ ته راولي (څيره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) $(a = 2 , a = 1/2)$ په فنکشن کی a امپليتودي Amplitude(جګوالی(نوميږي او د شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا بنه : سور باندي تاثير اچوي.

څيره شته

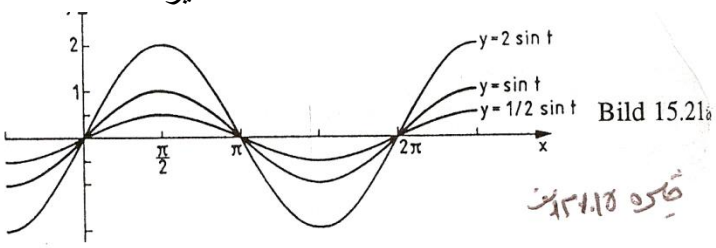


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin \omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندي يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پرسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردي يو په y- محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin \omega t$ يوه فنکشن ارزښت، $y = \sin t$ د خپلواك ω -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

گردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودي تاثير اچوي او $y = \omega t$ پريودي $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

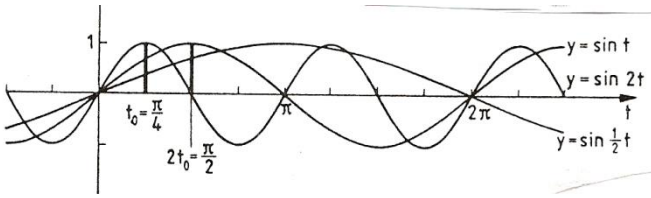


Bild 15.21t

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینې لور $\varphi > 0$ او یا له ښي لور $\varphi < 0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره،

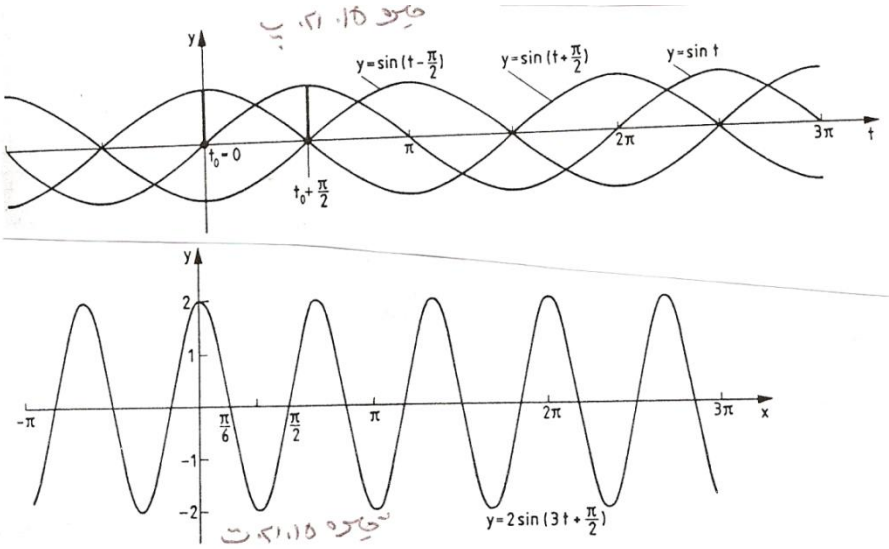
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t+\varphi) = a \cdot \sin\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چې فازي نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ . ۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودي یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په کي $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ د sint و کین لورته راکښل شوی دی.

څېړه ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یوائني) په معکوسوالي یا په څټوالي کی مور په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند ۱۵ . ۱۴ :

(پام: څیري له تشریح د مخه راغلي، بله لار نه وه)

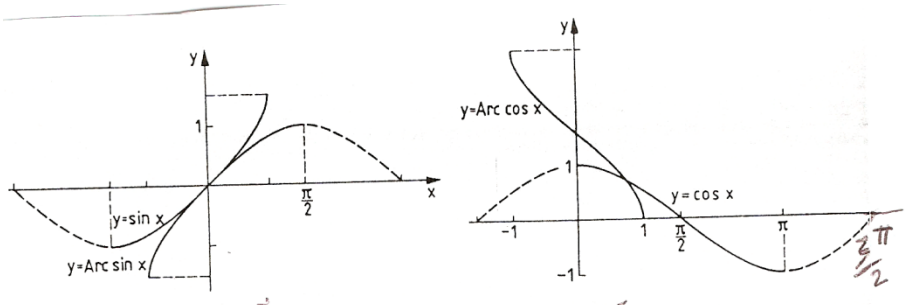


Bild 15.22 Bild 15.23

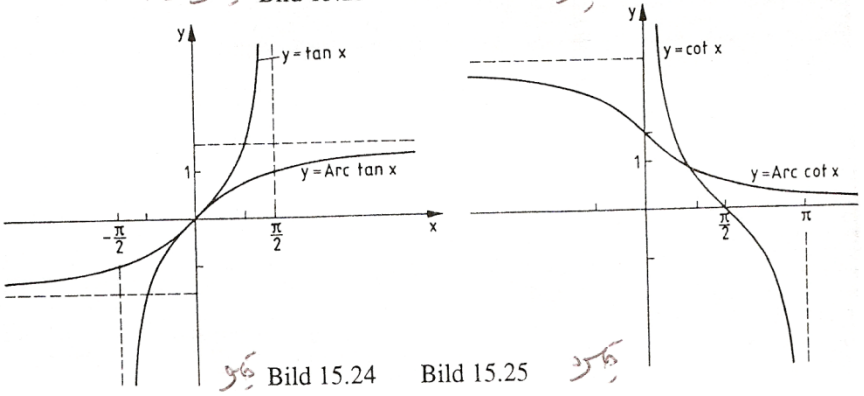


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y = \sin x$, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $W = [-1, 1]$ (15.12a)
2. $y = \cos x$, $D = [0, \pi]$, $W = [-1, 1]$ (15.12b)
3. $y = \tan x$, $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12c)
4. $y = \cot x$, $D = (0, \pi)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرځټ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \text{Arc}\sin x$, $D = [-1, 1]$, $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)
2. $y = \text{Arc}\cos x$, $D = [-1, 1]$, $W = [0, \pi]$ (15.13b)
3. $y = \text{Arc}\tan x$, $D = \mathbf{R}$, $W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)
4. $y = \text{Arc}\cot x$, $D = \mathbf{R}$, $W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :
د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$د ارزښتډیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y = f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي.

یادونه : یو ترلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$
د $z \in x$ او $w = h(z)$ لپاره $W \in D, z \in W$لپاره $W^* \in W, w \in W^*$
او $y = f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y = f[h(g(x))]$ هم د x یو ترلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :
الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ټرلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ټرلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$z = 2x + 4,\quad w = \sqrt{z},\quad y = \cos w,$
سره ټرلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په ټرلي فنکشن $y=Arctan1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$منځنی او $y=Arctan\ w$دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25;y=sinx^2=sinz=sin0,25=0,24740$
او
$z=sinx=sin0,5=0,47942;y=sin^2x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$
$y=Arctanw=Arctan1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که$f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ټرلی یا ناټرلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چې ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنخ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تيك د [-1,1]∈ x لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:
$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)
نو لرو $D =(-oe , -3] \cup [3 , oe)$

ب)($y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x+2 > 0 <=> x > -2$ ،
پس($D1=(-2,oe)$
په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه
له $x-x^2 = 0$ 3-2 څخه لاس ته راځي او دي .$x1=2,x2=-1$
نو $D2=R\setminus(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفډيری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفډيري وي يعنی د D1 او D2
غوڅډيری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 , oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5)$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-
$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)})$
راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی
$x<-2$ يا $x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$
نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیځیت توابعو ایکسپلیځیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونې ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسئ او په دې سره ورکړئ $y=f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وځیږئ، او که ممکن وي نو مونوتونې اینتروالونه په تعریف‌پیرو بیل(تجزیه) کړئ، یا لټه ته کړئ.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، تاجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندې فنکشنونو ته په څو فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0 , \infty)$, $W = [o,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3/2$, $D = [o,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دي وکښل شي، جګوالي کوټج α دي پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګڼئ!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواک یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x +4$ h) $y = x^2/4 +x +2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککړې کواردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګڼل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګڼل شي. فنکشنونه دګ د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 -x^2 -(13/2)x -5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وکړئ شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرخایونه دي وګنل شي، پول. تشخایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره خان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړئ

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,∞) b) $y = 2^x$ -1, D = R , W =(-1,∞)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,∞), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,∞), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړئ او برخه په څټ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y = x^2$ -1 c) $y=(x+1)^2 + 1$

d) $y= x^2$ -4x +5 e) $y = 4x^2$ f) y = (1 /4)x^2 +x /2 + 1

۱۴ – ترلې فنکشنونه y = f[h(g(x))] په دنته او دباندې فنکشنونو

y = f(w) , w = h(z) , z = g(x)

بیل (تجزیه) کړئ(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=\left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی (د تعریف– او ارزښتډیري باندي تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc\,cot}\left(e^{x}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^{2}$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^{2}-1\right)+1\right]$ f) $y = \log_{3}\left[\sqrt{2^{x}+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننیزویا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفډیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^{2}}$ c) $y = \sqrt{x^{2}-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^{2}-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^{2}+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x}+\frac{1}{x}$ i) $y = \ln x+\frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه تړې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې المانې ـ پښتو- او پښتو المانې ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا دري ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګټونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډپرۍ پوهنه یا ستټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انټیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میږي شینواری د اروابنادي پستو او اروابنباد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کي د شینوارو هسکه مینه کي دې نړۍ ته سترګي راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو ځخه) ځخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي ځخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر ځخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ ځخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ ځخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي ځانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میږي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

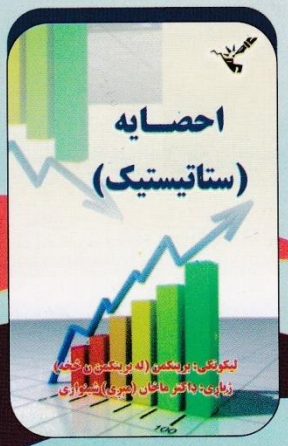
دوي ته لوي ځښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وښښل، چې ځانګه او اباسین نومیږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

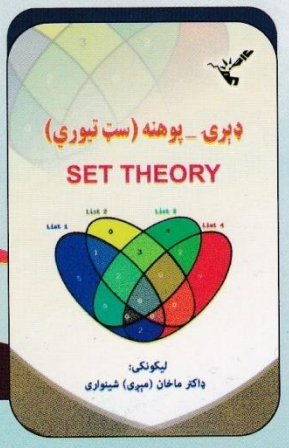
ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ ځخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

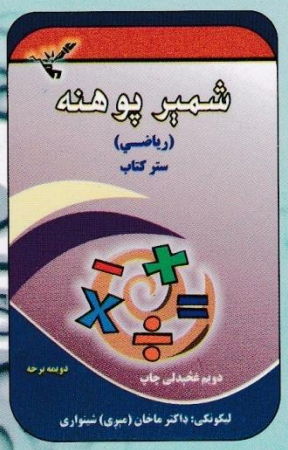


ډاکتر ماخان (مېړی) شینواری









د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه ـ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library