د پوهنې وزارت

د ښوونکو د روزنې لوی ریاست

عمومي رياضيII

مؤلف: دکتور محمد انور غوري

ژباړونکی: پوهاند دکتور سید قیوم شاه باور

کال: ۱۳۹۱ هـ. لمریز

د کتاب ځانګړني

د کتاب نوم: عمومي رياضي II

مؤلف: داکتر محمد انور غوری

ژباړونکی: پوهاند داکتر سيد قيوم شاه باور

کمپوز: حکمت الله کوچی

ډيزاين: روح الله شفيق، عصمت الله عمرزوی اوحکمت الله کوچی

شمېر: 20,000 ټوکه

د چاپ کال: 1391 هـ. ل

چاپ خونه: د هند د ريپرو مطبعه (Repro India Ltd.)

د درسي نصاب او انکشاف کمېټه:

سوسن وردک، پوهاند دکتور سيد قيوم شاه باور، ښوونودی عبدالخليل فضلي، ښوونودی صدر الدين اشرفي، ښوونيار عبدالحق رحمتي، ښوونمل عبدالودود شريف، ښوونودی محمد حسين محسني او ښوونودی شاه غاسي زرمتي

د يونسف (UNICEF) او نړيوال بانک (WORLD BANK)

په مالي او تخنيکي مرسته

بسم الله الرحمن الرحیم

د کتاب مطالعه ، د انسان شخصیت بشپړوي. ساتنه يې د
مطالعه کوونکي د لوړ فرهنګ ښکارندويي کوي.

د پوهنې د وزیر پیغام

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمدلله و کفی و سلام علی عباده الذین اصطفی و بعد:

له شک پرته چې پوهنه د ایمان لار او د پرمختګ، تمدن او انساني کمال مدارجو ته د رسیدو یوازینۍ وسیله ده.

په تېر او اوسني عصر کې ټول بشري تمدنونه او پرمختیاوې د ژوند په پراخه ډګر کې د هغه نهضت او پوهنیزو نوښتونو پایله ده چې ښوونکو او پوهانو د خپل ارزښتمن ژوند په بیه ترلاسه کړي او د هغو په مرسته یې د اختراعاتو او علمي موندنو لاره د بشر پر مخ پرانیستې ده.

د تاریخي حقایقو له مخې بشري تجربې او علوم له یوه نسل څخه بل ته لیږدول کیږي او د هغو له برکته هره ورځ د نړۍ په کچه په بیلابیلو برخو کې حیرانوونکي اختراعات او نوښتونه رامنځته کیږي، چې د انتقال دغه ګړندی بهیر او ټول پوهنیز بدلونونه بیا د ښوونکي په وسیله ترسره کیږي؛ ښوونکی په حقیقت کې د بشري تمدن بنسټګر، مخکښ او په نړۍ کې د لوړ انساني تربیت، پرمختګ او مدنیت د کاروان لارښوود او بل څراغ بلل کیږي، ځکه خو د اسلام ستر پیغمبر حضرت محمد(ص) د ښوونکي همدغه لوړ موقف او درونډ ټولنیز دریځ ته په پام سره خپل ځان ښوونکی بللی او فرمایلي یې دي (**انما بعثت معلماً**) یعني له شک پرته زه د ښوونکي په توګه رالیږل شوی یم.

د ښوونکي دغه ارزښتناک مقام ته په درناوي سره، د هغه د معیشتي وضعیت ښه کول او د هغه علمي ظرفیت لوړول، د معارف د پراختیا په لاره کې له جدي اړتیاوو څخه شمیرل کیږي او د پوهنې وزارت له هغو بنسټیزو لومړیتوبونو څخه دي چې د خپل مسؤلیت له مخې یې په بشپړ قاطعیت او جدیت سره تعقیبوي.

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت د خپل اسلامي او ملي رسالت په درک کولو سره د هېواد د اساسي قانون د احکامو او د معارف د پراختیایي تګلارې په رڼا کې هڅه کوي څو د هېواد د پوهنې نظام د ودې او هراړخیزې پراختیا په موخه بنسټیزې او اغیزمنې چارې ترسره کړي.

د ښوونکي روزنې، ښوونیز نصاب او مصؤن تعلیمي چاپېریال د چمتو کولو په دریو مهمو برخو کې د پوهنې بیارغونه چې په خپل وار سره د ښوونځیو او نورو ښوونیزو بنسټونو ټولو مادي اړتیاوو ته ځواب وایي او همدارنګه په معنوي لحاظ د علمپالو، وطن دوستو او مسلمانو انسانانو په توګه د زده کوونکو د شخصیت د متوازنې ودې لپاره د معنوي او سالمې علمي فضا په رامنځته کولو کې کارنده ونډه اخلي، چې د پوهنې وزارت په لومړیتوبونو کې ځای لري.

د لوی خدای په مرسته، د دوستو هېوادونو په مالي همکارۍ، د افغانستان د پوهنپال ملت په هڅو او ملاتړ او د پوهنې وزارت د با احساسه کارکوونکو او درنو ښوونکو د بې دریغه سربښندنو په مټ د پوهنې په ټولو برخو کې داسې کوټلي ګامونه اخیستل شوي دي چې له برکته یې د هېواد په تاریخ کې د پوهنې بهیر بې سارې پرمختګ کړی دی.

د پوهنې وزارت هڅه کوي څو د ښوونکي روزنې مؤسساتو ته له کمي او کیفي اړخه بهبود وبښي چې الحمد لله د عمومي، اسلامي، تخنیکي او مسلکي زده کړو او لیک لوست زده کړې تر څنګ د دارالمعلمینونو لپاره د نوي نصاب چمتو کول او د هغو لپاره د نویو درسي کتابونو تألیف په دې برخه کې یوه څرګنده ارزښتمنه لاسته راوړنه ده.

د دارالمعلمینونو نوی تعلیمي نصاب چې زموږ د ټولنې اړتیاوو ته په پام او د معاصرې پیداګوژۍ له معیارونو، اصولو او نویو لارو چارو څخه په ګټې اخیستنې سره چمتو شوی دی، ان شاء الله چې زموږ د هېواد د ځوانو ښوونکو علمي اړتیاوې به پوره او پوهنیزو غوښتنو ته به یې ځواب ووایي.

له ټولو هغو درنو پوهانو او قدر وړ استادانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې د دارالمعلمینونو د نوي نصاب په چمتو کولو کې یې د مفرداتو او یا هم د تألیف، تصحیح او بیاکتنې په برخو کې کارنده ونډه اخیستې ده.

د دارالمعلمینونو د نوي نصاب د تطبیق په لاره کې ټولو درنو، با احساسه او زیارکښو استادانو ته د علیم او خبیر ذات له درباره د لازیاتو بریاوو هیله کوم څو د دغسې نویو پوهنیزو کړنلارو په پلي کولو سره د افغانستان د پوهنې نظام لاهم ځواکمن او د علمي او ټکنالوژیکي پرمختګونو د سیالۍ په دغه پراخ ډګر کې د نورو هېوادونو د سیالۍ جوګه شي.

والله ولی التوفیق

فاروق وردګ

د پوهنې وزیر

مخکنۍ خبرې

بسم الله الرحمن الرحیم

ښوونه او روزنه د یوې ټولنې د پرمختګ اساسي برخه ده. چې د وخت د غوښتنې او د هر هېواد ملي او نړیوالو شرایطو سره سم باید په هغه هېواد کې وده او پرمختیا ورکړل شي. دې واقعیت ته په پام کې نیولو سره اړتیا لیدل کېږي چې د هېواد د ښوونې او روزنې په سیستم کې هم بنسټیز او بنیادي بدلون رامنځ ته شي. لدې کبله په نصاب کې د بدلون او انکشاف نه پرته د تغییر او ودې امکان نه لیدل کېږي. ځکه نو ښوونیز نصاب د اسلامي لوړو ارزښتونو په اساس او د معاصرو علومو او فنونو پرمختګ ته په پاملرنې د ځانګړې لومړیتوبونو څخه باید برخمن وي. د یادولو وړ ده چې د ښوونکو د روزنې ښوونیز نصاب له ډېرې مودې راپدې خوا په یو ډول و. او د خپلو مخکینیو ارزښتونو په چوکاټ کې هغه خوځښت چې د معاصرو علومو د ودې سره یو ځائ وي د پام وړ تجربې یې لږ ازمویلې. له بلې خوا په هېواد کې د ټولنیزو او اقتصادی ناخوالو لکه: بې وزلې، ناپوهې، بېسوادې له امله زموږ، هېواد د معاصرې نړۍ له پر مختللې کاروانه وروسته پاتې شوی، نو د معاصرې نړۍ د علم او تخنیک د پرمختګ د اوسنیو شرایطو په پایله کې چې کوم بدلونونه د بشرې ټولنې په بېلابېلو اړخونو کې رامنځته شوې، زموږ د هېواد لپاره هم د وروسته پاتې والې څخه د خلاصون او پرمختګ په لور یون یو ښکاره او مبرم ضرورت ښکاري. د غسې لوړ انساني آرمان او هدف ته رسېدل بې د ښوونې او روزنې له بدلون او د نوي معارف او پوهنې له جوړولو پرته چې بنسټیز اړخ یې د ماهرو تخصصي او مسلکي ښوونکو روزل دي، ناشونی کاردی.

د همدې موخې پر بنسټ څوکاله مخکې د پوهنې وزارت د پرېکړې په اساس د وزارت د ښوونکو د روزنې په برخه کې لوی مشاوریت و پتیله چې د ښوونکو د

روزنې لپاره د نوی نصاب جوړول پیل کړي دا کار يې د کابل پوهنتون، د ښوونې او روزنې پوهنتون او دعلومو اکاډمي د يو شمېر ښاغلو استادانو په مرسته د ورکشاپونو په دايرولو او د ځينو پرمختلليو هېوادونو د ښوونې او روزنې له سیستم نه په ګټه اخيستلو سره وکړای شول چې د خپل هېواد د ځانګړو شرايطو سره سم د ښوونکو د روزنو د موسساتو لپاره نوی تعليمي نصاب جوړ او په بېلا بېلو رشتو کې د نويو درسي کتابونو ليکلو بهير پيل کړي.

د دغو نويو کتابونو له ليکلو څخه چې د دارالمعلمينونو د نوي تعليمي نصاب پر بنسټ ليکل شوي اصلي موخه او هدف دادی چې د محصلينو علمي او تخصصي سويه لوړه او په ملي او اسلامي روحيه وروزل شي، چې په راتلونکې کې د پوهو او اګاهو ښوونکو په څېر خپل ملي او وطني رسالت د راتلونکي نسل د ښوونې او روزنې په برخه کې په پوره ايمانداری او بريالیتوب سره سرته ورسوي.

د يادولو وړ ده چې د ښوونکو د روزنې لوی رياست موخه يوازې د دارالمعلمينونو د نوي نصاب په چمتو کولو او د دغو نويو درسي کتابونو په ليکلو پای ته نه رسيږي، بلکې د ښوونکو د روزنې د لوی رياست هدف دادی چې د دارالمعلمينونو د ښوونکو تخصصي سويه لوړه او تجربه يې دومره زياته شي چې له يوې خوا د لوړو زده کړو زمينه ورته برابره شي او له بلې خوا د علمي سيمينارونو، ورکشاپونو او لکچرونو له لارې لازياته عملي تجربه ترلاسه کړي.

هيله لرم زموږ د دارالمعلمينونو ګران محصلين به وکولای شي د ښکارنده زده کړې له طريقې نه، له دغو درسي کتابونو څخه چې په ليکلوکې يې له معتبرو اخځليکونو څخه استفاده شوې زياته ثمربښوونکې ګټه ترلاسه کړي، څو د خپل هېواد راتلونکي نسل لپاره د يوه ښه عالي او مسلکي ښوونکي په توګه خپله علمي سويه لوړه کړي چې د راتلونکو سمبالونکو په خاطر د زيات او د ښه خدمت جوګه شي.

په پای کې په ځای ده چې د کابل پوهنتون، ښوونې او روزنې پوهنتون، علومو اکاډمی له هغه شمېر ښاغلو استادانو، دښوونکو دروزنې دلوی ریاست ښاغلو علمي او مسلکي غړو، طباعتی کارکوونکو، په هېواد کې د ښوونکو د روزنې هغه شمېر ښاغلو استادانو، او د کتابونو د چاپولو د نصاب د بیا کتونکو دکمیسیون ښاغلو غړو، بهرنیو موسساتو او اشخاصو څخه چې ددې کتابونو په چاپولو کې یې مالي مرسته کړې د زړه له کومي مننه وکړم او له لوی خدای ﷻ څخه هغوی ته لا زیات بریالیتوبونه غواړم.

سوسن وردگ

د ښوونکو د روزنې عمومی رئیسه

اود پوهنې وزارت د مقام ستره سلا کاره

موضوع ګاني

سرليک **مخګڼه**

لومړی څپرکی

دوهم څپرکی

دریم څپرکی

څلورم څپرکی

پنځم څپرکی

شپږم څپرکی

سریزه

د عمومی رياضي II كتاب د دارالمعلمينونو د رياضي څانګې دلومړي ټولګي د دوهم سمستر لپاره دتدريس په منظور ليکل شوی او دنصاب سره سم دځلوروکريدونو په حجم تيار شويدی. ددې کتاب په تدريس کې دوه اصلي هدفونه نغښتي دي. لومړی داچې دښوونځيو دعمومي رياضي لومړني او اسانه مفهومونه په نسبتاً نوي روحيې سره يادشوي اوعموميت ورکړل شويدی دوهم داچې دمطلوبونو د توضيح ترڅنګ د راتلوونکو ښوونکو لپاره د محتوا د درس ورکولو مهارتونه دا ډول معرفي شوي او زده کړه ورکړل شوي ده چې د دوی دارتيا سره هم غږي دي. دا کتاب په شپږو فصلونو کې راټول شوی دی. چې هغه دتابع اساسات، مثلثاتي تابع ګانې، دتابع ګانو ليميټ، مشتق، د مشتق کارول او انتګرال دي. دځانګړې پروګرام او هدف پر بنا ديو درسي کتاب ليکنه په موضوع کې د درس دورکولولازمه تجربه او کافي فرصت غواړي د دې کتابونو دليکنې په لړکې دمسؤولينو په جدي پاملرنې سره هڅه شويده چې ترممکنه حده پورې په ګوته شوي هدفونه تر سره شي. په هر ځای کې هڅه شوي ده چې د دې کتاب محتوا، عموميات په ځان کې ولري او مفهومونه په ساده عبارتونو، عام فهمه، لنډ شوي او له تکليف څخه پرته بيان شي. د تفنيني تفصيلاتو اوبې لزومه نظري مسالو له طرحې څخه ډډه شوي ده د شهودي مسالو په توضيحاتو او تحليلي مسالو په تطبيق باندې اکتفاشويده

د هر بحث لپاره تمرينونو په پام کې نيول شويدي چې دهغې حل د زده کوونکو دزده کړې قدرت اومهارت زياتوي.

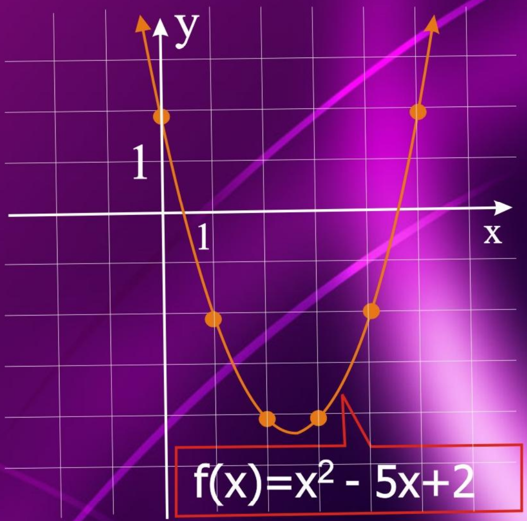
په دې کې شک نشته چې د دې کتاب څخه به د دارالمعلمينونو دلومړيوټولګيو سربيره نور علاقمندان هم ګټه واخيستلای شي.

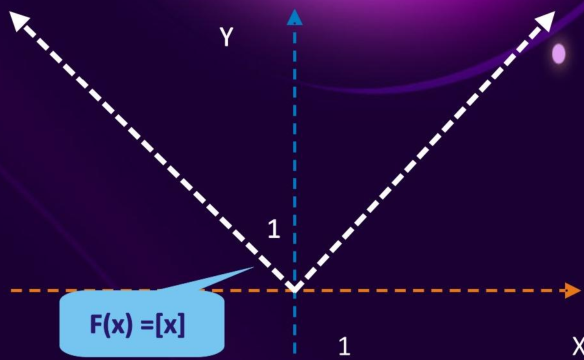
دطبيعي علومو دټولو لوړو تحصيلی موسسو دشاګردانو لپاره ګټور او درسي ممد کيدلی شي.

د دې کتاب دلیکنې په جریان کې دښوونکو د روزنې ریاست له همکارۍ او پاملرنې څخه مننه کوم.

ادعا نه شي کیدلی چې دا کتاب به دکمال تر حده لیکل شوی وي. موږ په دې لړ کې دمحترمو علاقمندانو نظریو اوپیشنهادونو ته اړیو.

په دي لړ کې د عمومې تعلیماتو د نصاب غړی محترم عبیدالله صافي له فرهنګي همکاري څخه مننه کوم.





لومړی څپرکی

تابع گاني Functions

تابع ګانې

د تابع مفهوم د لومړي ځل لپاره په 1696م کال کې دلایپ نیتز له خوا د ریاضي مفهومونو د تعمیم ترڅنګ عنوان شو. یوهانو بر نولي په 1718م کال دمتحولینو په تحلیل سره د تابع اصطلاح وکاروله، اویلر $(1707 - 1783)$م کال دمنحني ګانو د خاصیتونو په مطالعه کې د $f(x)$سمبول ارائه کړ. کلیرو په 1734 م کال کې دتابع له مفهوم څخه کار واخیست، دیریکله (1805−1859) م دیوې تابع اړونده مستقل متحول، مربوط (تړلی) متحول، دتابع دتعریف او قیمتونو ناحیې، طرحه کړې دي. نن ورځ درياضي عمده بحثونه، لکه لیمیټ، مشتق، انتګرال، تفاضلي معادلې، محاسبوي میتودونه اونور دتابع دتحولاتو او خاصیتونو په اړخ کې څرخیږي. دفزیک قاعدې اوطبیعي حادثې اکثراً دتابع په مرسته توضیح او تشریح کیږي. په دې فصل کې تابع او دهغې عمومي خاصیتونه په لنډ ډول معرفي کیږي.

د عددونو انټرولو نه

که چیرې a او b دوه حقیقي عدونه وي، داسې چې $a < b$. په دې صورت کې د عددونو انټرول په لاندې ډول تعریف کیږي.

1. **خلاص (باز) انټرول**. دټولو حقیقي عددونو x ست چې د a او b ترمنځ دی له a څخه تر b پورې دخلاص انټرول په نامه یادیږي او هغه په(a, b) سره ښیي یعنې

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

2. **تړلی (بسته) انټرول**. دټولو حقیقي عددونو x ست چې د a او b تر منځ دي د a او b په شمول له a څخه تر b پورې دتړلي انټرول په نامه یادیږي اوهغه په $[a, b]$ سره ښودل کیږي یعنې

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

په همدې ډول نیمه خلاص او نیمه تړلي انټرولونه په لاندې ډول تعریف کیږي.

3. د ښي خوا نیمه تړلي (دچپ خوا نیمه خلاص) انټرول

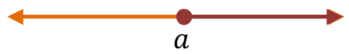
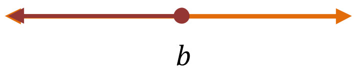
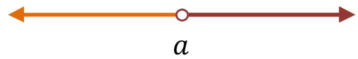
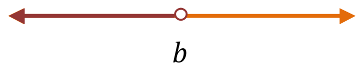
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

4. د چپ خوا نیمه تړلي (دښي خوا نیمه خلاص) انټرول

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

په دې ټولو حالتونو کې د a او b عددونه دانټرولونو انجامونه بلل کیږي. که چیرې د یو انټرول په انجامونو کې ∞ یا $-\infty$ واقع وي، نو اړونده انجام خلاص وي، په بل عبارت

$$(-\infty\,, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad , \quad (-\infty\,, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$$
$$(a\ ,\ \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad , \quad [a\ ,\ \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$$
$$(-\infty\ ,\ \infty) = \{\ x \in \mathbb{R}\ : -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$$

$a \le x \le b$	$[a,b]$	
$a \le x$	$[a,\infty)$	
$x \le b$	$(-\infty,b]$	
$a < x < b$	(a,b)	
$a < x$	(a,∞)	
$x < b$	$(-\infty,b)$	
$a < x \le b$	$(a,b]$	
$a \le x < b$	$[a,b)$	
د ټولو حقیقي عددونو	$(-\infty,\infty)$	

د تابع تعریف

د f تابع د X له سېټ څخه، Y سېټ ته يوه رابطه ده چې د X هر عنصر x يوازې او يوازې د Y ديو عنصر $y=f(x)$ سره تړي. بناپر دې د f د (x,y) د مرتبو جوړو له سېټ څخه عبارت دی چې په هغه کې د x هره مرکبه تکرار نه شي.

د f تابع د X له سېټ څخه د Y په سېټ کې چې د $y=f(x)$ معادلې په وسيله سره تړل کيږي او د

$$f:X\to Y$$
$$x\to y=f(x)$$

په شکل ليکل کيږی. دلته x مستقل متحول او y مربوط متحول بلل کيږي.

ديا دوني وړده چې په دې کتاب کې دX او Y سېټونه د حقيقي عددونو فرعي سېټونه په پام کې نيول شوي دي.

د تعريف ناحيه او د تابع قيمتونه

که چېرې f د X له سېټ څخه د Y په سېټ کې يوه تابع وي. يعنې

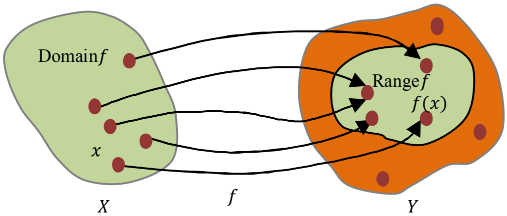
$$y=f(x)\ ,\quad x\in X\ ,\quad y\in Y$$

د ټولو عناصرو x سېټ چې د $y=f(x)$ په رابطه کې قبلولو وړ دي د f دتعريف ناحيه $[domain(f)]$ او د y دعناصرو سېټ چې له نوموړي رابطې څخه په لاس راځي د f د تصويرونو سېټ $[range(f)]$ په نوم يادېږي. داسېټونه عبارت دي له

$$D_f=\{x\in X:y=f(x),y\in Y\}$$
$$R_f=\{y\in Y:y=f(x),x\in X\}$$

دلته د Y سېټ د f دقيمتونو ناحيه $[codomain(f)]$ بلل کيږي. څرګنده ده چې

$$range(f)\subseteq codomain(f)$$



که چېرې دیوې تابع دمعرفي په وخت کې د هغې دتعریف ناحیه نه وي معرفي شوې. نو دهغې د تعریف ناحیه دهغو عددونو وسیع سېټ دی، کوم چې په تابع کې دقبلېدو وړ وي. دغې ناحیې ته د تعریف طبیعي ناحیه هم وایي.

په مسالوکې د اړتیا له مخې ممکنه ده، دیوې تابع د تعریف ناحیه، د تعریف له طبیعي ناحیې څخه محدوده مطرح شي.

کېدلې شي تابع په ډول ډول شکلونو، لکه: د یوې رابطې په توګه، د عددونو دمرتبو جوړو دسېټ، جدول، فورمول، دوه مجهوله معادلې او یا ګراف په شکل وړاندې شي.

1 مثال

الف. د f تابع په جدولي حالت کې په لاندې ډول ورکړل شوې ده.

د تعریف ناحیه	دقیمتونو سېټ
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

لیدل کېږي چې د تابع د تعریف ناحیه او قیمتونو ناحیه په ترتیب سره عبارت دي له

$$D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad , \quad R_f = \{-8, -1, 0, 1, 8\}$$

ب. دا تابع د مرتبو جوړو د رابطې په حیث لاندې شکل لري.

$$f=\{(-2,-8),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,8)\}$$

ج. پورتنی تابع دفورمول په توګه عبارت ده له

$$f: D_f \to R_f$$
$$x \to y=f(x)=x^3$$

په داسې حالت کې چې D_f او R_f پخوا مشخص شوي دي.

2 مثال

د R_1 او R_2 رابطې په لاندې ډول تعریف شویدي.

$$R_1=\{(1,2),(-1,3),(0,0),(6,3)\}$$

$$R_2=\{(4,6),(-3,0),(4,-5),(2,-1)\}$$

لیدل کیږی چې د R_1 رابطه یوه تابع ده، ولې R_2 ته تابع نشو ویلی، ځکه د 4 عدد پکې تکرار شوی دی.

3 مثال

دلاندې تابع ګانو د تعریف ناحیې او دقیمتونو ناحیې معلومې کړئ.

$$f=\{(1,2),(3,4),(5,8),(6,4)\} \quad , \quad g=\{(2,0),(3,0),(4,0),(5,0)\}$$

حل

$$D_f=\{1,3,5,6\} \;,\; R_f=\{2,4,8\} \;,\; D_g=\{2,3,4,5\} \;,\; R_g=\{0\}$$

4 مثال

د f , g او h، تابع ګانې دمرتبوجوړو دسېټونو په توګه په لاندې ډول درکړل شوي دي.

$$f=\{(-2,-8),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,8)\}$$
$$g=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$$
$$h=\{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3),(16,4),(25,5)\}$$

دا تابع ګانې دجدول او فورمول په شکلونو ارايه کړئ، دتعريف ناحيې او دقيمتونو ناحيې يې معلومې کړئ.

حل: ددې تابع ګانو جدولي شکلونه عبارت دي له

x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

x	$g(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$h(x)$
0	0
1	1
4	2
16	4
25	5
9	3

ددوی د تعريف ناحيې او دقيمتونو سيټونه عبارت دي له

$$D(f)=\{-2,-1,0,1,2\}\ ,\ R(f)=\{-8,-1,0,1,8\}$$
$$D(g)=\{-2,-1,0,1,2\}\ ,\ R(g)=\{0,1,4\}$$
$$D(h)=\{0,1,4,9,16,\ 25\}\ ,\ R(h)=\{0,1,2,3,4,5\}$$

د تعريف د ناحيو په پام کې نيولو سره نوموړې تابع ګانې دفورمول په ذريعه په لاندې شکل ارايه کيږي.

$$f(x)=x^3\quad,\quad g(x)=x^2\quad,\quad h(x)=\sqrt{x}$$

د يوې تابع د تعريف د ناحيې او د قيمتونو د سيټ ټاکل

که چيرې يوه تابع ديو فورمول په شکل راکړل شوې وي، هغه عددونه دتعريف په ناحيه کې شامل نه دي چې معمولي عمليې پر هغې باندې دتعريف او تطبيق وړ نه وي

لکه څرنګه چې دیوکسر مخرج صفر کیدلی نشي او منفي حقیقي عددونه دجفتو مرتبو حقیقي جذرونه، نه لري اویا منفي عددونه لوګارتم نه لري

5 مثال

$f(x)=\dfrac{x+4}{2x-6}$ تابع د تعریف ناحیه معلومه کړئ

حل: لیدل کیږي چې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کیږي، نو ځکه 3 د f د تعریف په ناحیه کې شامل نه دي، یعني

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

6 مثال

د $g(x)=\sqrt{x-5}$ تابع د تعریف ناحیه معلومه کړئ

حل: څرنګه چې دټولو عددونو لپاره کوم چې له 5 څخه کوچنی وي، د $x-5$ افاده منفي قیمت لري او جذر نه لري. نو ځکه $D(g)=[5,\infty)$ د تابع د تعریف ناحیه ده.

7 مثال

$f(x)=\dfrac{1+x}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ تابع د تعریف ناحیه وټاکئ.

حل: څرګنده ده چې منفي عددونه د 0، 2 او 3 په شمول په دې تابع کې د قبلیدو وړ نه دي. نو

$$D_f=(0,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$$

د تابع ګراف

د دمستوي په قایمو مختصاتو کې د(x,y) نقطو سېټ چې د $y=f(x)$ رابطه صدق کوي، د f تابع له ګراف څخه عبارت دی. په بل عبارت دf تابع ګراف هغه

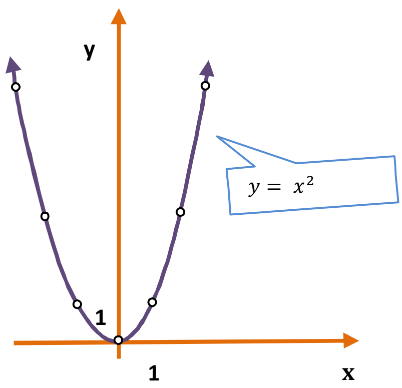
منحني دی چې د $y = f(x)$ معادلې په وسیله په لاس راځي، یعني

$$G(f)=\{(x,y): y=f(x), x\in D(f)\}$$

8 مثال

$y = x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	x^2	y
-3	$(-3)^2$	9
-2	$(-2)^2$	4
-1	$(-1)^2$	1
0	$(0)^2$	0
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4
3	$(3)^2$	9



د ګراف له مخې د یوې تابع تشخیص

که چیرې د y له محور سره هر موازي مستقیم خط دتابع منحني یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نوموړې معادله یوه تابع ده.

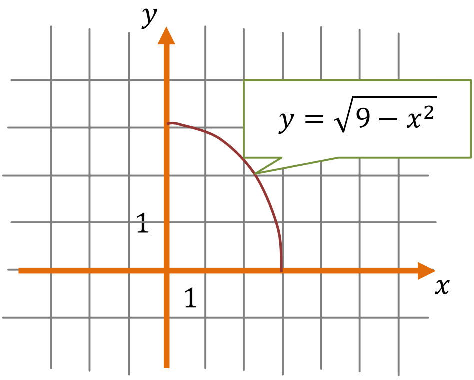
9 مثال

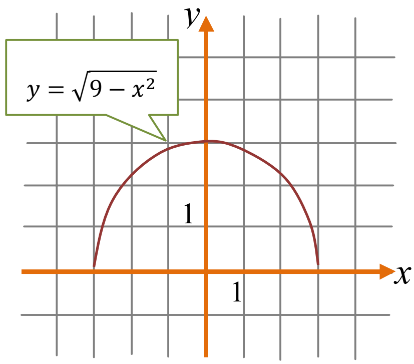
ایا $x^2 + y^2 = 9$ یوه تابع ده؟

حل: ددې معادلې اړونده منحني یوه دایره ده چې مرکز یې دمختصاتو په مبدا کې او شعاع یې $r = 3$ ده. هر هغه مستقیم چې د x محور په $(-3,3)$ انټرول کې قطع اود y د محور سره موازي وي، دا منحني په دوو نقطو کې قطع کوي، داپه دې

مفهوم دی چې په دې انټرول کې دهر x لپاره د y دوه قیمتونه رابطه پیداکوي، نو دا معادله یوه تابع نه ده.

مګر د $\sqrt{9-x^2}$ منحني یوه نیمه دایره ده. لکه څرنګه چې لیدل کیږي هر مستقیم خط چې د y د محور سره موازي وي، دامنحني د یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کولی نشي. بنا پردې په معادله کې y د x په متحول یوه تابع ده.





د دوو تابع ګانو تساوي

دوې تابع ګانې f او g سره مساوي بلل کیږي که چېرې او یوازې که چېرې د هغوی د تعریف ناحیې سره مساوی وي $D(f) = D(g)$، د هغوی دقیمتونو ناحیې سره مساوي وي او د تعریف ناحیې د x د هر قیمت لپاره $f(x) = g(x)$ وي.

10 مثال

ایا د $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$ تابع ګانې سره مساوي دي؟

حل: په څرګنده لیدل کیږي چې $D(f) = \mathbb{R} = D(g)$ له بلې خوا

$$g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}=x^2-1=f(x),\ \forall x\in D(g)$$

بناپردې f او g یو له بله سره مساوي دي $f = g$

11 مثال

ایا د $f(x) = x + 1$ او $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ تابع ګاني سره مساوي دي؟

حل: لیدل کیږي چي $D(f) = \mathbb{R}$ او $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ یعني ددې دواړو تابع ګانو د تعریف ناحیې سره مساوي نه دي، نو دا تابع ګاني نه دي سره مساوي. په داسې حال کي

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = f(x), \forall x \in D(g)$$

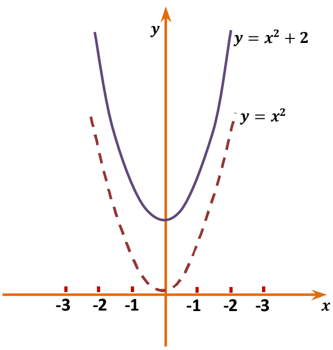
د تابع د ګراف انتقال

که چېرې $f(x)$ یوه تابع او c یو حقیقي عدد وي. په دې صورت کي

1. د $y = f(x) + c$ تابع ګراف د $y = f(x)$ تابع د ګراف عمودي انتقال دی (که $c > 0$ وي پورته خواته او که $c < 0$ وي ښکته خواته)
2. د $y = f(x + c)$ تابع ګراف له $y = f(x)$ افقي انتقال څخه عبارت دی ($c > 0$ چپ خواته او $c < 0$ ښې خواته)

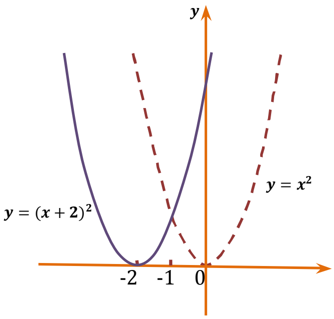
12 مثال

د $y = x^2 + 2$ ګراف د $y = x^2$ عمودي انتقال دی



13 مثال

د $y=(x+2)^2$ د $y=x^2$ افقي انتقال دی



په تابع ګانو کې الجبري عملیې

که چیرې f او g دوې تابع ګانې وي، د هغوی مجموعه، تفاضل، د ضرب او تقسیم حاصل په ترتیب سره عبارت دي له

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad D(f+g)=D(f)\cap D(g)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad , \quad D(f-g)=D(f)\cap D(g)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x) \quad , \quad D(fg)=D(f)\cap D(g)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D\left(\frac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)\setminus\{x\in D(g):g(x)=0\}$$

14 مثال

د $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ او $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ تابع ګانې په پام کې ونیسئ، نو $f+g$ ، $f-g$ ، fg او $\dfrac{f}{g}$ پیدا او هم د هغوي د تعریف ناحیې په ګوته کړئ.

حل:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$
$$\sqrt{x-1}>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D(g)=(1,\infty)$$
$$D(f)\cap D(g)=(1,2)\cup(2,\infty)$$

په دې ترتیب $f+g$ ، $f-g$ ، fg او $\left(\frac{f}{g}\right)$ تابع ګانو دتعریف ناحیې عبارت دي له $(1,2)\cup(2,\infty)$ او

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

په تابع ګانو کې د الجبري عملیو خاصیتونه

د f,g او h تابع ګانو او a,b,c او d عددونو لپاره پورتني الجبري عملیې دا لاندې خاصیتونه صدق کوي.

(1) $f+g=g+f$

(2) $fg=gf$

(3) $f+(g+h)=(f+g)+h$

(4) $f(gh)=(fg)h$

د صفر تابع $\theta(x)=0$ او عینیت تابع $I(x)=1$ په پام کې نیولوسره لرو چې

(5) $f+\theta=f$

(6) $f\cdot I=f$

(7) $f(g+h)=fg+fh$

همدارنګه د a,b,c او d حقیقي عددونو او f او g تابع ګانو لپاره په اساني ښودلی شو، چې

(8) $a(f+g)=af+ag$

(9) $(a+b)f=af+bf$

10) $a(fg)=(af)g$

$(cd)f=c(df)$

15 مثال

که چیرې $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+1$ وی، نو

$$(a)\quad 4(f+g)(x)=4f(x)+4g(x)$$
$$=4(2x-1)+4(x^2+1)=4x^2+8x$$

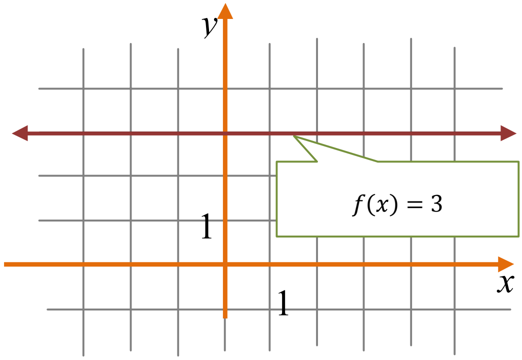
$$(b)\quad 5(fg)(x)=[5f(x)]g(x)=[5(2x-1)](x^2+1)$$
$$=10x^3-5x^2+10x-5$$

د ځېنو تابع گانو مثالونه

دلته له $\mathbb{R}$ څخه $\mathbb{R}$ ته ځېنې تابع گانې معرفي کیږي.

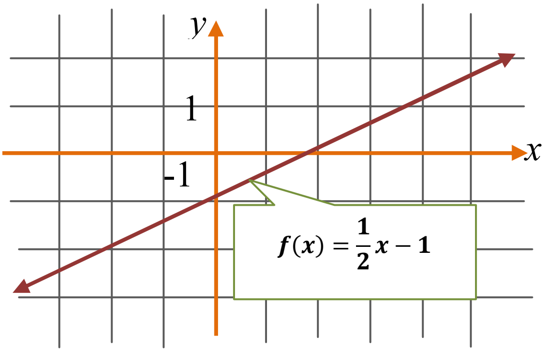
1. ثابته تابع $f(x)=a$

ددې تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او د تصویرونو سېټ یې $R_f=\{a\}$ دی.
د ثابتې تابع گراف د x له محور سره موازي یو مستقیم خط دی.



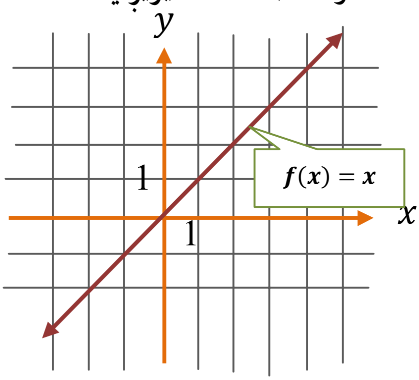
2. خطي تابع $f(x)=mx+b$

د دې تابع دتعریف ناحیه او د تصویرونو سېټ یې د حقیقي عددونو سېټ په پام کې نیول شوي دي. د مثال په توگه د $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ تابع گراف دا لاندې شکل لري.



3. د عینیت تابع $f(x) = x$

دا تابع خطي ده او ګراف يې هغه مستقیم خط دی چې دx له محور سره 45^o زاویه جوړوي او د مختصاتو له مبدا څخه تیریږي.



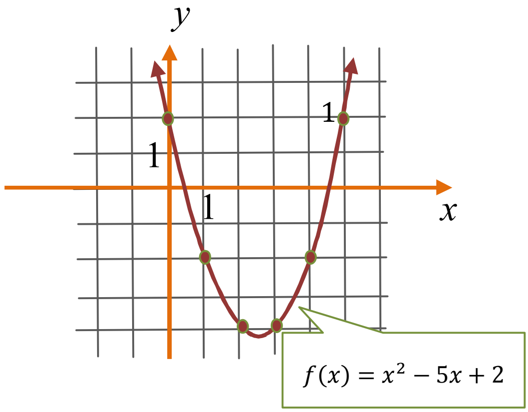
4. دوهمه درجه تابع $f(x) = ax^2 + b(x) + c$

ددې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سېټ او د a ضریب په پام کې نیولو سره يې د تصویرونو سېټ په مشروطه توګه په لاندې ډول ټاکل کیږي.

$$a > 0 \Rightarrow R(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right\}$$

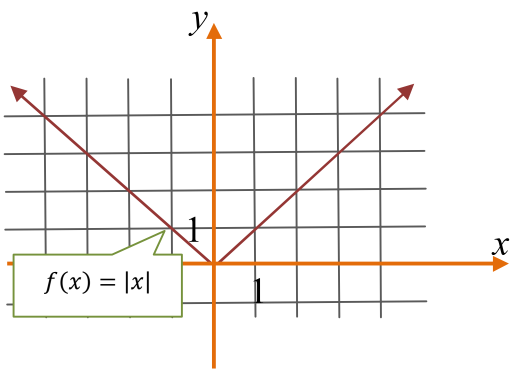
$$a < 0 \Rightarrow R(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right\}$$

د نمونې په توګه د $f(x) = x^2 - 5x + 2$ تابع ګراف شکل په لاندې ډول دی.



5. د $f(x) = |x|$ تابع

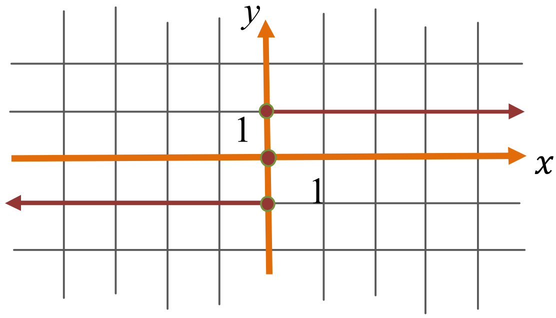
ددې تابع دقیمتونو سېټ منفي قیمتونه نه شي لرلی.



6. د اشارې تابع

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \quad x > 0 \\ 0 & \Leftarrow \quad x = 0 \\ -1 & \Leftarrow \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \Leftarrow \quad x \neq 0 \\ 0 & \Leftarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

د اشارې تابع د تصویرونو سېټ $\{-1,0,1\}$ دی



7. زینه يي تابع (ترټولو لوی تام عدد تابع)

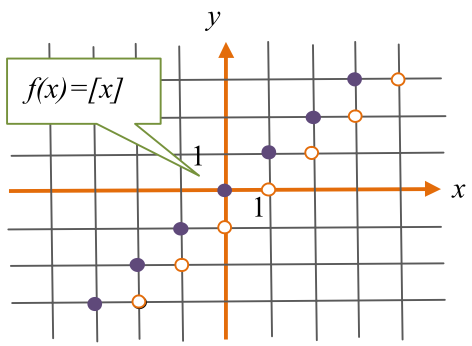
د هغې تابع څخه عبارت دی چې هر عدد x له خپل ړومبنی تام عدد سره مر بوط کوي کوم چې له x څخه کوچنی یا له هغې سره مساوی دی، اوهغه د $[x]$ په سمبول سره ښیي. څرنګه چې د هر حقیقي عدد x لپاره یوتام عدد n موجود دی، داسي چې $n \leq x < n+1$ وي. بناپردې نوموړي تابع عبارت ده له

$$f(x) = [x] = n \quad , \quad n \leq x < n+1$$

د نمونې په توګه

$$f(-2,98) = [-2,98] = -3 \quad , \quad f(-0,6) = [-0,6] = -1$$

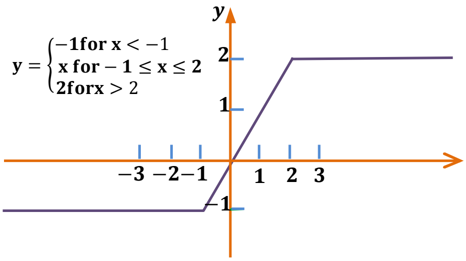
$$f(0,79) = [0,79] = 0 \quad , \quad f(3,8897) = [3,8897] = 3$$



8. څوفورموله تابع

داډول تابع عبارت له هغې تابع څخه ده چې په مختلفو انټرولونو کې دڅوتابع ګانوله پیوند څخه په لاس راځي. او نمونه يې په لاندې ډول ده.

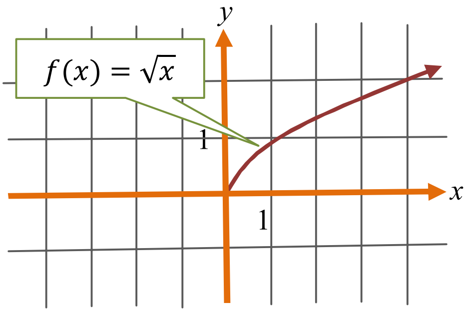
$$f(x)=\begin{cases} -1 & \Leftarrow \quad x<-1 \\ x & \Leftarrow \quad -1\le x\le 2 \\ 2 & \Leftarrow \quad x>2 \end{cases}$$



9. د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع

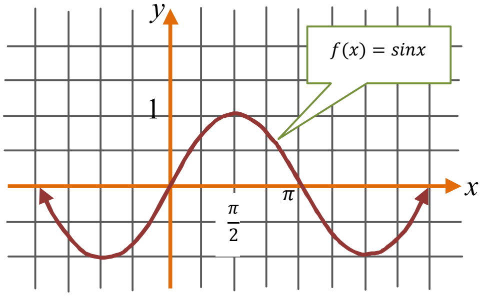
منفي عددونه ددې تابع د تعريف په ناحيه کې نه دي شامل داسې، چې

$D(f)=[0,\infty)$



10. د $f(x)=sinx$ تابع

ددې تابع د تعريف ناحيه حقيقي عددونه دي او دقيمتونو سېټ يې $[-1,1]$ دي. دا تابع دمثلثاتي تابع ګانو له جملې څخه يوه تابع ده.

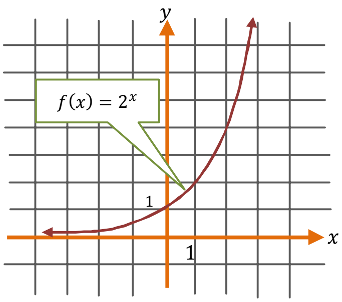


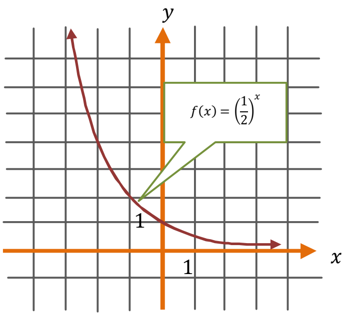
11. طاقتنما تابع $f(x) = a^x$

دا تابع د $a > 0$ او $a \neq 1$ سره له $\mathbb{R}$ څخه و $\mathbb{R}$ ته یو انجکتیف تابع ده. خو سورجکتیف نه ده. په داسې حال کې

$$D(f) = \mathbb{R} \quad , \quad R(f) = (0, \infty)$$

د $f(x) = 2^x$ او $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ تابع ګانو ګرافونه دنمونې په توګه ښودل شوي دي.





جفتې او طاقې تابعګانې

(1) یوه تابع f دجفتې تابع په نامه یادیږي که چیرې له $D(f)$ څخه دهر x لپاره د $x-$ عدد هم په $D(f)$ پورې تړلې وي او د $f(-x) = f(x)$ شرط صدق کوي.

(2) د f تابع د طاقې تابع په نوم یادیږي که چیرې له $D(f)$ څخه هرعدد x لپاره د $x-$ عدد هم په $D(f)$ پورې تړلې وي او د $f(-x) = -f(x)$ شرط صدق کړي.

باید یادونه وشي چې د جفتې تابع منحني نظر y محورته متناظر وي.

16مثال

الف. $f(x) = 3x^2$ یوه جفته تابع ده، ځکه که $D(f) = (-\infty,\infty)$ وي

$$f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$$

ب. $g(x) = x^3 + 9x$ تابع طاقه ده، ځکه $D(g) = (-\infty,\infty)$

$$g(-x) = (-x)^3 + 9(-x) = -(x^3 + 9x) = -g(x)$$

17مثال

د $f(x) = |x|$ تابع جفته او د $v(x) = \frac{1}{x}$ تابع طاقه ده، ځکه چې

$$u(-x) = |-x| = |x| = u(x)$$

$$v(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -v(x)$$

18مثال

که چېرې د f او g تابع گانې طاقې وي، نو د fg تابع جفته ده یا طاقه

حل:

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

نو د fg تابع جفته ده.

19مثال

وښئ چې دجفتې تابع گراف نظر عمودي محور او د طاقې تابع گراف نظر مبداته متناظر دی.

حل: که چېرې د f تابع جفته اود g تابع طاقه وي $G(f)$ او $G(g)$ په ترتیب سره دهغوی گرافونه وي. په دې صورت کې

$$(x, f(x)) \in G(f) \Rightarrow (-x, f(x)) = (-x, f(-x)) \in G(f)$$

یعنې د f تابع جفته ده په همدې ډول

$$(x, g(x)) \in G(g) \Rightarrow (-x, -g(x)) = (-x, g(-x)) \in G(f)$$

نو د g تابع، طاقه تابع ده.

یادښت

هغه پولینومی تابع ګانې چې دټولو حدونو درجه یې جفته وي، جفتی تابع ګانې دي، په همدې ډول هغه پولینومي تابع ګانې چې دټولو حدونو درجې یې طاقې وي، طاقې تابع ګانې دي. ممکنه ده یو تابع نه طاقه وي او نه جفته. د مثال په توګه $f(x) = 5x^4 - x^3$

د تابعګانو تزاید او تناقص

1. په یوه انټرول کې د f تابع دقیقا متزایده بلل کیږي که چیرې په دې انټرول کې د x_1 او x_2 لپاره له $x_1 < x_2$ څخه د $f(x_1) < f(x_2)$ شرط په لاس راشي.

2. یوه تابع f په یوه انټرول کې دقیقآ متناقصه بلل کیږي که چیرې دټولو x_1 او x_2 لپاره له $x_1 < x_2$ څخه د $f(x_1) > f(x_2)$ شرط په لاس راشي.

20مثال

الف. د $f(x) = 2x + 3$ تابع متزایده ده څکه

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ب. د $g(x) = -2x + 1$ تابع متناقصه ده څکه

$$x_1 > x_2 \Rightarrow -2x_1 < -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 1 < -2x_2 + 1 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

انجکتیف تابع (one – one function)

یوه تابع f دانجکتیف تابع په نامه یادیږي، که چیرې د ټولو x او y لپاره له $f(x) = f(y)$ څخه د $x = y$ تساوي په لاس راشي یعنې

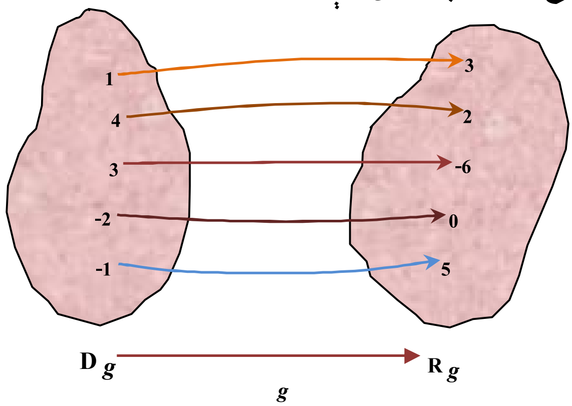
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

اویا

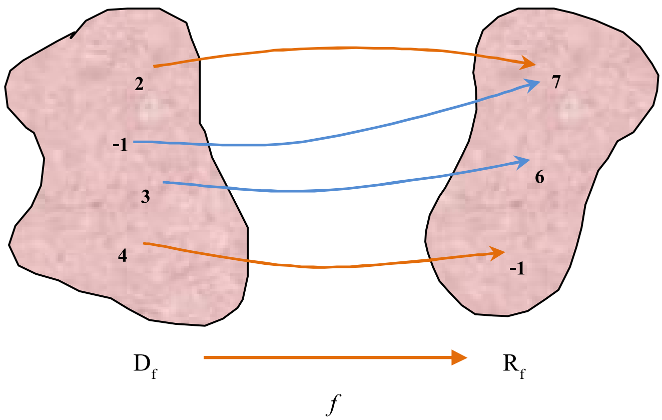
$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

21 مثال

د g ، یوــ یو، تابع په لاندې شکل کې ښودل شوي ده.



او دهغې تابع مثال چې یوــ یو، نه ده، په ورپسې شکل کې ښودل شوی دي.



22مثال

د $f(x) = 2x^3 + 1$ تابع، یوــ یو تابع ده، خو $g(x) = x^2 + 8$ ، یو په یو، تابع نه ده.

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^3 + 1 = 2y^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$$g(x) = g(y) \Rightarrow x^2 + 8 = y^2 + 8 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

د مثال په توګه

$$g(2)=12=g(-2)$$

1. که چېرې یوه تابع،یوــ یو، وي، نو هر مستقیم خط چې له x محور سره موازي وي، ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کوي.

2. هغه تابع ګانې چې دقیقاً متزایدې او یا دقیقاً متناقصې وي، یوــ یو، هم وي.

سورجکتیف (Onto function)

هغه تابع چې دقیمتونو ناحیه یې دقیمتونو له سېټ سره مساوي وي، سورجکتیف بلل کیږي، په بل عبارت د f تابع سورجکتیف ده که چېرې

$$range(f)=Codomain(f)$$

د تابع ګانو ترکیب

د f او g تابع ګانو ترکیب، که چېرې تعریف شوي وي، عبارت دي له

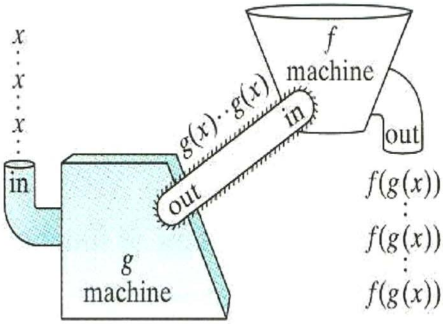
$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x) = g(f(x))$$

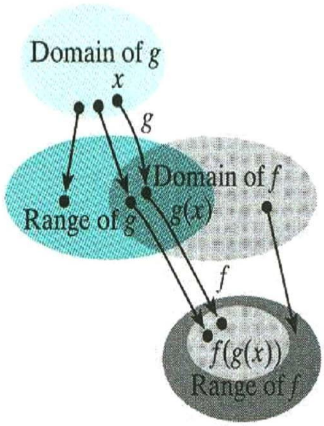
په داسې حال کې چې دتعریف ناحیې یې عبارت دي له

$$D(f\circ g)=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}$$
$$D(g\circ f)=\{x\in D(f): f(x)\in D(g)\}$$

د fog او gof تابع ګانې، دمرکبو تابع ګانو (تابع تابع) په نامه یادیږي.

$(g\circ f)(x)$تابع د تعریف وړ ده که چېرې $R(f)\cap D(g)\neq\phi$ وي. په همدې ترتیب $(f\circ g)(x)$ تابع تعریف کېدلی شي، که چېرې $R(g)\cap D(f)\neq\phi$ وي.





23مثال

د $f(x)=x^2$ او $g(x)=\sqrt{1+x}$ تابع ګاني درکړل شوی دي، د $(f\circ g)(x)$ او $(g\circ f)(x)$ تابع ګاني ولیکئ.

حل: څرنګه چې

$$D(f)=\mathbb{R} \text{ او } D(g)=[-1,\infty) \text{ ، } R(f)=[0,\infty) \text{ او } R(g)=[0,\infty)$$

بنا پردې $D(f)\cap R(g)=[-1,\infty)\neq\phi$ او $D(g)\cap R(f)=[0,\infty)\neq\phi$ دي او $(f\circ g)(x)$ او $(g\circ f)(x)$ تابع ګاني دتعریف وړ دي، او

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{1+f(x)}=\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=\sqrt{1+x^2}$$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=[g(x)]^2=[\sqrt{1+x}]^2=1+x \Rightarrow (f\circ g)(x)=1+x$$

24مثال

د $f(x)=x^2+1$ او $g(x)=2x$ تابع ګانو لپاره fof, gof, fog او gog، بې له دې چې د تعریف ناحیو ته پاملرنه وکړئ ولیکئ.

حل:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2+1=(2x)^2+1=4x^2+1$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2f(x)=2(x^2+1)=2x^2+2$$
$$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=2g(x)=2(2x)=4x$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=(f(x))^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$
$$(f\circ g)(3)=4\cdot 3^2+1=37$$

$$(g\circ f)(2)=2\cdot 2^2+2=10$$
$$(f\circ f)(0)=0^4+2\cdot 0^2+2=2$$
$$(g\circ g)(8)=4\cdot 8=32$$

د ترکیب دعملیې خاصیتونه

دتابع ګانو د ترکیب په عملیه کې تبادلوی قانون همیشه نه صدق کیږي، مګر اتحادي قانون همیشه صدق کوي. یعني د دریو تابع ګانو g, f او h لپاره د $(fog)oh = fo(goh)$ تساوي که چیرې تعریف شوي وي، درسته ده، په داسې حال کې چې دfog او gof تساوي حتمي نه ده.

25 مثال

$f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=4x-1$ تابع ګانې نظر کې نیسو او fog او $D(fog)$ معلوم کړئ.

حل: لیدل کیږي چې $D(f)=[0,\infty)$ او $D(g)=\mathbb{R}$ بناپردې

$$D(f\circ g)=\{x\in D(g):g(x)\in D(f)\}=\{x\in\mathbb{R}:4x-1\in[0,\infty)\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}:4x-1\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\geq\frac{1}{4}\right\}=\left[\frac{1}{4},\infty\right)$$
$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{4x-1}$$

26مثال

که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ او $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ وی نو د fog او gof تابع ګانې دهغوی د تعریف له ناحیو سره په لاس راوړئ

حل:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\} \quad , \quad D(g)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\Rightarrow D(f\circ g)=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:,\frac{1}{x-1}\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq 1,x\neq\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+2}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}+2}=\frac{1}{2x-1}$$

$$D(g\circ f)=\{x\in D(f):f(x)\in D(g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq -2,\frac{x}{x+2}\neq 1\right\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{\frac{x}{x+2}-1}=-\frac{x+2}{2}$$

27 مثال

$f(x)=3x-1$ او $g(x)=\frac{x+1}{3}$ دوو تابع ګانو لپاره لرو، چې

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3g(x)-1=3.\frac{x+1}{3}-1=x+1-1=x$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=x=I(x)$$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\frac{f(x)+1}{3}=\frac{3x-1+1}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

لهذا

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=x=I(x)$$

قضیه

1. ددوو جفتو تابع ګانو مجموعه او يا تفاضل، یوه جفته تابع ده.
2. دیوې طاقې او یوې جفتې تابع دضرب حاصل، یوه طاقه تابع ده.
3. د دوو طاقو تابع ګانو ترکیب یوه طاقه تابع ده.
4. دیوې جفتې اویوې طاقې تابع ترکیب یوه جفته تابع ده.

ثبوت

1. که f او g جفتې وي

$$(f\pm g)(-x)=f(-x)\pm g(-x)=f(x)\pm g(x)=(f\pm g)(x)$$

نو $f\pm g$ جفته تابع د ه.

2. که f جفته او g طاقه تابع وي، نو

$$(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)=-(fg)(x)$$

نو $f\cdot g$ طاقه ده.

3. که f او g دواړه طاقې وې نو

$$(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=-(f\circ g)(x)$$

په دې ترتیب fog طاقه تابع ده.

4. که چېرې f جفته او g طاقه وي، نو

$$(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=(f\circ g)(x)$$

$$(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=(g\circ f)(x)$$

fog او gof جفتې تابع ګانې دي.

معکوسه تابع

د f او g تابع ګانې یوه د بلې معکوسې بلل کیږي که چېرې دالاندې دوه شرطونه صدق کړي

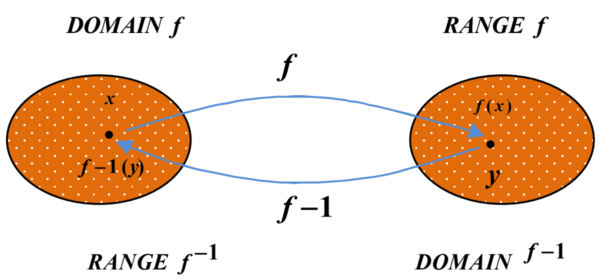
$$a. \quad \forall x \in D_g \quad : \quad (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = x$$
$$b. \quad \forall x \in D_f \quad : \quad (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = x$$

او په معموله توګه لیکي چې $g^{-1} := f$ او $f^{-1} := g$
څرګنده ده چې

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

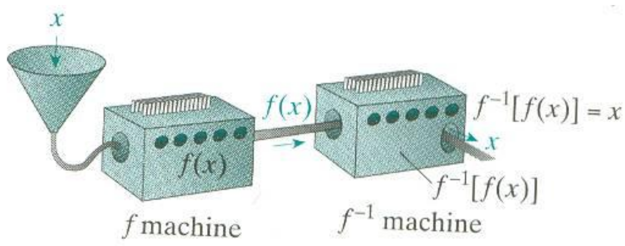
بناپردي

$$D(f) = R\left(f^{-1}\right) \quad , \quad D\left(f^{-1}\right) = R(f)$$



28 مثال

د $f(x) = 2x + 3$ او $g(x) = \frac{x-3}{2}$ تابع ګاني یو دبلې سره معکوسې دي.



د معکوسې تابع پیداکول

هرډول تابع معکوسه تابع نه لري او که چېرې یوه تابع معکوسه تابع ولري، نو لازمه او کافي ده چې هغه تابع یو ـــ یو(بایجکتیف) وي. دیوې یو ـــ یو تابع f معکوسه تابع په لاندې رابطو کې دیوې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y \quad , \quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

$$y=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x=f^{-1}(y)$$

29مثال

د $f(x)=x^3-1$ معکوسه تابع پیداکړئ.

حل: که f^{-1} د f تابع معکوسه وي، نو

$$\left(f o f^{-1}\right)(x)=x \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3-1=x$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3=x+1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

30مثال

د $g(x)=x^2$ تابع د $D_g=\{x\epsilon\mathbb{R}/x>0\}$ معکوسه تابع لري. g^{-1} په لاس راوړو.

$$g\left(g^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \left(g^{-1}(x)\right)^2=x \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

31مثال

د $h(x)=\frac{1}{x}$ تابع معکوسه تابع پیداکړئ.

$$\left(hoh^{-1}\right)(x)=x \Rightarrow h\left[h^{-1}(x)\right]=x \Rightarrow \frac{1}{h^{-1}(x)}=x \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

لیدل کیږي چې دلته h او h^{-1} یوه له بلې سره مساوي دي.

یادښت

د $y=f(x)$ تابع معکوسه یعني د $f^{-1}(x)$ تابع که چیرې موجود وی په څرګنده ډول له $f(y)=x$ رابطې څخه پیداکولی شو.

32 مثال

د $f(x) = 2x^3 + 4$ تابع معکوسه تابع په لاندې ډول په لاس راځي

$$f(y)=x \Rightarrow 2y^3+4=x \Rightarrow 2y^3=x-4 \Rightarrow y^3=\frac{x-4}{2}$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}.$$

33مثال

د $g(x) = \frac{9}{5}x + 32$ تابع معکوسه تابع په لاس راوړو.

$$y=\frac{5}{9}(x-32) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32).$$

34مثال

د $f(x) = x^2 - 8x + 12$ تابع معکوسه تابع د تعریف دناحیې په مناسب محدودیت سره په لاندې ډول پیداکیږي.

$$f(y)=x \Rightarrow y^2-8y+12=x \Rightarrow y^2-8y+12-x=0$$

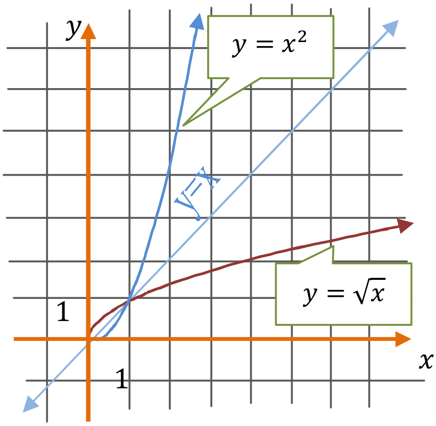
$$\Rightarrow y=\frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-a(c-x)}}{a}=4 \pm \sqrt{16-(12-x)}=4 \pm \sqrt{4+x}$$

لهذا $f^{-1}(x)=4+\sqrt{4+x} \quad , \quad x \geq -4$

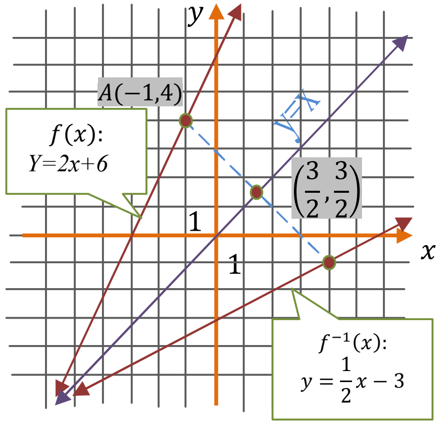
اویا $f^{-1}(x)=4-\sqrt{4+x} \quad , \quad x \geq -4$

د معکوسې تابع ګراف

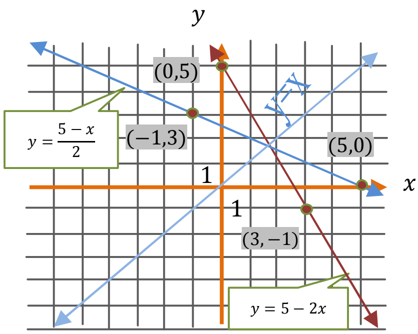
هغه تابع ګانې چې یوه د بلې معکوسې وي، ګرافونه یې نظر $y = x$ مستقیم خط ته متناظر وي. دلته مخکنې نمونې په پام کې نیسو او ګرافونه یې رسم کوو.



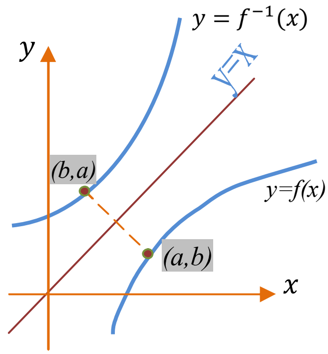
y
$y = x^2$
y=x
1
$y = \sqrt{x}$
1
x



y
$A(-1,4)$
$f(x)$:
Y=2x+6
y=x
$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
1
1
x
$f^{-1}(x)$:
$y = \frac{1}{2}x - 3$



y
(0,5)
y=x
$y = \frac{5-x}{2}$
(−1,3)
(5,0)
1
x
1
(3,−1)
$y = 5 - 2x$



$y = f^{-1}(x)$
y
y=x
(b,a)
y=f(x)
(a,b)
x

پوښتنې

په لاندې سيټونو(ګرافونو) کې کوم يو، يوه تابع راپه ګوته کوي.

$$1.\quad A=\{(1,3),(2,5),(1,7)\} \quad , \quad 2.\quad B=\{(1,2),(2,5),(3,6),(4,2)\}$$

$$3.\quad \mathbb{C}=\{(x,y): y=2x+1, x\in\mathbb{R}\}$$

4. د $f(x)=4x-3$ تابع چې دتعريف ناحيه يې $D_f=\{-3,-2,0,1,3\}$ ده، د مرتبو جوړو په حالت کې ديوې رابطې دګراف په توګه وليکي.

5. د $f(x)=3x^2+4$ تابع د تعريف ناحيه او دقيمتونو سيټ دحقيقي عددونوپه سيټ کې معلوم کړئ.

6. د $g(x)=5x^3-1$ تابع په پام کې نيولو سره يو حقيقي عدد x_0 دا ډول پيداکړي چې $g(x_0)=3$ وي.

7. د $f(x)=\sqrt{x+3}$ او $g(x)=\sqrt[8]{4-x^2}$ تابع ګانو دتعريفونو ناحيې او دقيمتونو سيټونه معلوم کړئ.

د f او g تابع ګانو تساوي په لاندې مثالونو کې په ګوته کړئ.

$$8.\quad f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-x+1} \quad , \quad g(x)=x+1$$

$$9.\quad f(x)=|x| \quad , \quad g(x)=\sqrt{x^2}$$

$$10\quad f(x)=\frac{|x|}{x} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{|x|}$$

دا لاندې f او h تابع ګانې په پام کې ونيسئ، نو د $f\pm h$ ، fh ، $\frac{f}{h}$ ، $f\circ h$ ، $h\circ f$ ، $f\circ f$ او $h\circ h$ تابع ګانې پيداکړئ.

11. $f(x)=2x-5 \quad , \quad h(x)=-4x$

12. $f(x)=\sqrt{2-x} \quad , \quad h(x)=\sqrt{2-x}$

13. $f(x)=5x^3-6 \quad , \quad h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+6}{5}}$

په لاندی تابعګانو کې کومې جفتی، کومې طاقې او کومې تابعګانې نه جفتی او نه طاقی دي.

14. $f(x)=7x^6+4x^2-3$, 15. $f(x)=-x^3+x$

16. $f(x)=x^5-x^4$, 17. $f(x)=|x-4|$

18. وښيئ چې $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ، $f(x)=2x+5$ تابع يوه سورجکتيف تابع نه ده.

19. وښيئ چې د $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=x^3+\dfrac{1}{5}$ تابع يوه سورجکتيف تابع ده.

20. وښيئ چې د $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ، تابع کومه چې د $f(x)=x^2+2$ په وسيله تعريف شوي ده يوه سورجکتيف تابع نه ده (دګراف رسم وکاروئ)

وښيئ چې لاندې تابع ګانې انجکتيف دي.

21. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad , \quad f(x)=6x-8$

22. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad , \quad f(x)=x^3-4$

23. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad , \quad h(x)=|x+3|$

24. وښيئ چې د $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$ تابع انجيکتيف ده، اما سور جکتيف نه ده.

وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړل شويو انټرولونو کې مونوتون (يونواخت) دي.

25. $f(x)=4x+7 \quad , \quad (-\infty,\infty)$

26. $f(x)=-3x+9 \quad , \quad (-\infty,\infty)$

27. $f(x)=|x|+2 \quad , \quad (0,\infty)$

وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړل شويو انټرولونو کې مونوتون (يونواخت) نه دي.

28. $f(x)=3x^2+5 \quad , \quad (-\infty,\infty)$

29. $f(x)=|x+3| \quad , \quad (-\infty,\infty)$

30. $f(x)=-x^2+4 \quad , \quad (-\infty,\infty)$

دلاندې تابع ګانو معکوسې تابع ګانې پیداکړئ.

31. $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$, 32. $g(x)=\dfrac{2x+4}{x-2}$

33. $h(x)=(x-1)^2-2$, 34. $u(x)=x^3-4$

پولینومي تابع ګانې (پولینومونه)

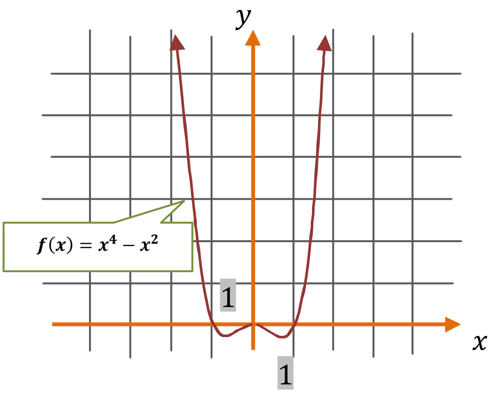
دا تابع د $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ شکل لري. د $a_0, a_1, \ldots, a_n$ او عددونه ددې پولینوم ضریبونه او n دهغې درجه ده، $a_n \neq 0$ ته هادي (لاربنود) ضریب وايي.

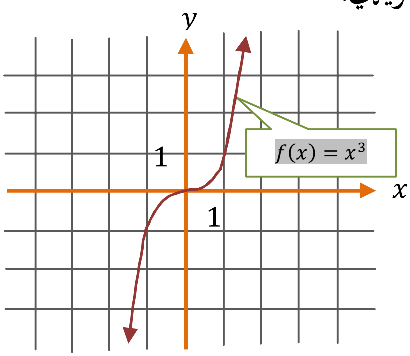
که چېرې n طاق وي، نودپولینومي تابع د قیمتونو ناحیه د حقیقي عددونو سیټ دی. په دې حالت کې تابع سورجکتیف ده، ممکن انجکتیف نه وي.

که چېرې n جفت وي، نو دپولینومي تابع دقیمتونو سیټ دحقیقي عددونو دسیټ یوفرعي سیټ دی، مګر تابع نه سورجکتیف او نه هم انجکتیف ده.

(دپولینومونو په هکله په عمومي ریاضي I کې بحث شویدی، دلته دهغې تکرار لازم نه دي)

په دې لړکې د $f(x)=x^3$ او $f(x)=x^4-x^2$ تابعګانو ګرافونه دنمونې په توګه رسم شویدي.





ناطقي تابع ګاني (نسبتي تابع ګاني)

دپولینومي تابع ګانو دجمع حاصل، تفاضل او دضرب حاصل، بیا هم پولینومي تابع ګاني دي. مګر هغه تابع ګاني چې د دوو پولینومونو له تقسیم څخه په لاس راځي، په عمومي توګه د پولینومونو په ډول نه وي، دا تابع ګاني له ناطقو یا نسبتي تابع ګانو څخه عبارت وي. البته پولینومي تابع ګاني دناطقوتابع ګانو خاص حالت دی چې د مخه مو هغي ته اشاره کړې ده. دلته مونږ ددې تابع هغه حالتونه تر مطالعي لاندې نیسو چې پولینومي شکل نه لري.

که چېرې $P(x)$او $Q(x)$ دوې پولینومي تابع ګاني وي. نو د

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x)\neq 0$$

تابع د ناطقي یانسبتي تابع په نوم یادیږي.

په طبعي توګه د دا ډول تابع ګانو د تعریف ناحیې حقیقي عددونه دي، کوم چې مخرج نه صفر کوي.

1 مثال

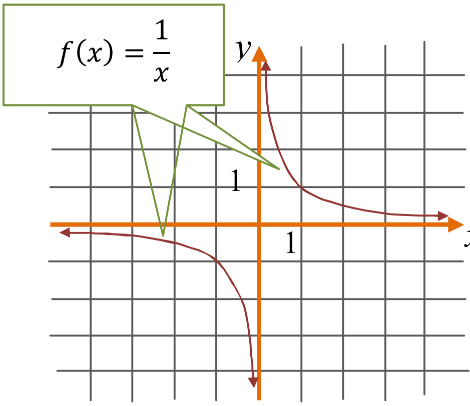
د $y=\frac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: څرګنده ده چې

$$x<0 \Rightarrow f(x)<0$$
$$x>0 \Rightarrow f(x)>0$$

نو دګراف یوه برخه په لومړئ ربع او دوهمه برخه یې په دریمه ربع کې واقع ده او لاندې جدول داګراف نور هم ښه په ګوته کوي

$x:$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y:$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



عمودي مجانب

که چیرې د ناطقې تابع $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ په صورت او مخرج کې په عین وخت کې مشترک فکتور موجود نه وي، $g(a)\neq 0$ او $h(a)=0$ وي، په دې صورت کې د $x=a$ مستقیم خط د$f(x)$ عمودي مجانب بلل کیږي. لیدل کیږي چې عمودي مجانب د مخرج دپولینوم له جذرونو څخه په لاس راځي او دعمودي محانبونو شمیر دمخرج دجذرونو له شمیر سره مساوي وي. بناپردې عمودي مجانب هغه چې د y له محور سره موازي مستقیم خط دی او په بې نهایت کې له منحني سره مماس وي.

2 مثال

د $f(x)=\frac{3x-6}{x^2-x-2}$ تابع عمودي مجانبونه معلوم کړئ.

حل: په لومړي سرکې دتابع کسر اختصار کوو.

$$f(x)=\frac{3x-6}{x^2-x-6}=\frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{3}{x+1}$$

اوس لیدل کیږي چې د $x=-1$ لپاره مخرج صفر کیږي، په داسې حال کې چې صورت دصفر خلاف دی. بناپردې $x=-1$ عمودي مجانب دی.

3 مثال

د $f(x)=\frac{4x+5}{2x^2-5x-3}$ عمودي مجانبونه پیداکړئ.

حل: دمخرج جذرونه معلوموو.

$$2x^2-5x-3=0\Rightarrow(2x+1)(x-3)=0\Rightarrow 2x+1=0, x-3=0$$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2} \quad , \quad x_2=3$$

د کسر مخرج په $-\frac{1}{2}$ او 3 کې صفر کیږي مګر صورت دصفر خلاف دي، نو $x=-\frac{1}{2}$ او $x=3$ عمودي مجانبونه دي.

4 مثال

$f(x)=\frac{4x}{x^2+7}$ په پام کې نیسو. ددې تابع مخرج دx متحول په هیڅ قیمت باندې نه صفر کیږي. نو $f(x)$ عمودي مجانب نه لري.

مایل مجانب. که چیرې په یوه ناطقه تابع کې دصورت درجه له مخرج څخه یو واحد زیاته وي، صورت پرمخرج تقسیموو او نوموړې تابع دیوې خطي تابع او یوې ناطقې تابع، کومه چې دصورت درجه یې دمخرج له درجې څخه کمه وي، له حاصل جمع څخه په لاس راځي کله چې د x قیمتونه زیاتیږي دتابع کسري برخه کوچنی کیږي او په نهایي حالت کې دتابع قیمتونه دخطي برخې د قیمتونو سره هم اهنګ کیږي او دغه خطي تابع ته دتابع مایل مجانب وایي. مایل مجانب یو مایل مستقیم خط دی چې په نهایي حالت کې د ګراف سره مماس کیږي.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=(ax+b)+\frac{r(x)}{h(x)}$$

دلته $y=ax+b$ د $y=f(x)$ اړونده مایل مجانب دي.

5 مثال

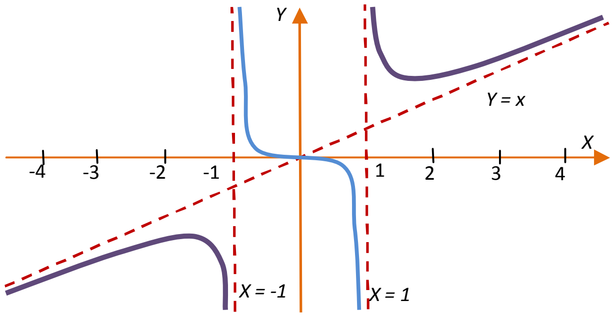
د $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: څرګنده ده چې $x = 1$ او $x = -1$ عمودي مجانبونه دي. مګر کولی شو دا تابع د $y = x + \frac{x}{x^2-1}$ په شکل هم ولیکو، نو $y = x$ دمنحني مایل مجانب دي د $x > 1$ لپاره دګراف یوه څانګه دمایل مجانب دپاسه او د $x < -1$ لپاره یې بله څانګه دمجانب لاندې پرته ده.

په $[-1,1]$ انټرول کې منحني نظر مبدا ته متناظر دي. په لاندې جدول کې دمنحني مو قعیت په انټرول کې تثبیتوي.

$x:$	$\pm0,5$	0	±1	$\pm1,5$	±2	$\pm2,5$	±3	±4
$y:$	$\pm0,17$	0	∞	$\pm2,7$	$\pm2,67$	$\pm3,0$	$\pm3,4$	$\pm4,3$

دامنحني په دوهمه طریقه کېدلی شي د دوومنحني ګانو $y = \frac{x}{x^2-1}$ او $y = x$ د ترتیبونو له حاصل جمع څخه رسم شي.



6 مثال

د $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ مجانبونه معلوم او دتابع ګراف رسم کوو.

لیدل کیږي چې د تابع مخرج په $x = 0$ کې صفر کیږي، نو د y محور دهغې عمودي مجانب دي. دصورت له تقسیم څخه پرمخرج باندې په لاس راځي چې

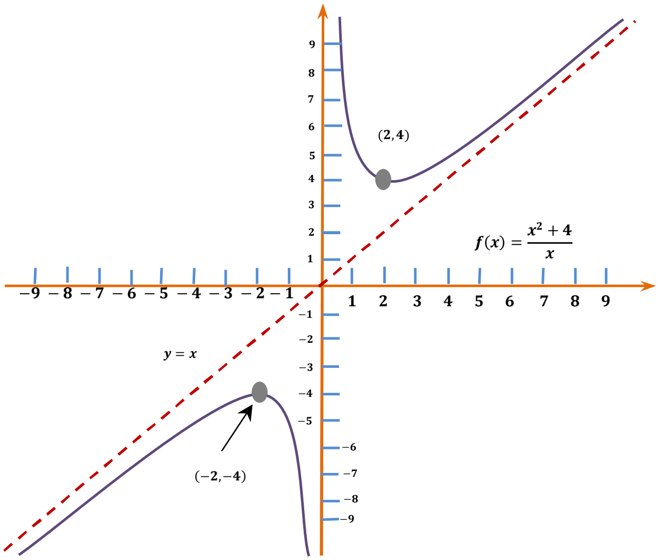
$$f(x) = \frac{x^2+4}{x} = x + \frac{4}{x}$$

د $|x|$ دلویو قیمتونو لپاره د $\frac{1}{x}$ قیمت کوچنی کیږي او $y = f(x)$ او $y = x$ یوله بله سره معادل کیږي، نو $y = x$ دتابع مایل مجانب دی.

څرګنده ده، چې

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$
$$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

بناپردې مطلوب ګراف په متقابلو ناحیو کې په لاندې شکل کې رسمیږي



افقي مجانب

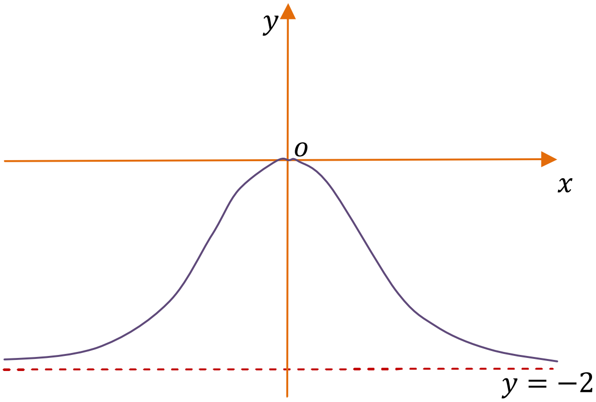
که چیرې په یوه ناطقه تابع کې صورت او مخرج، هم درجه وي، دویش حاصل به یوثابت عدد b وي، نو مایل مجانب د $y = b$ په شکل بدلیږي چې د x له محور سره موازي دی. دې مستقیم خط ته افقي مجانب وایي. افقي مجانب په معموله توګه داسې معلومیږي چې b دصورت او مخرج دلوړو توانونو دضریبونو نسبت وي.

بناپردې که یوه ناطقه تابع افقي مجانب ولري، نو هغه مایل مجانب نه لري او برعکس.

7 مثال

د $g(x) = -\frac{2x^2}{x^2+1}$ ګراف رسموو.

100	10	1	0	-1	-10	-100	x
-1.99	-1.98	-1	0	-1	-1.98	-1.99	f(x)



د $|x|$ په زیاتوالي د تابع قیمتونه په تدریج سره د-2 عدد ته نږدې کیږي (له جدول څخه ئې وګورئ)

او د تابع لوي قیمت صفر دی. د $y = 2$ مستقیم دتابع افقي مجانب دی.

د ناطقوتابع ګانو د مجانبونو معلومول

فرضوو $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطقه تابع کې د m او n عددونه په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي. نو

1. که $m < n$ وي، د x محور افقي مجانب دی.
2. که $m = n$ وي، نو $y = b$ افقي مجانب دی. b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی.

3. د $m > n$ لپاره افقي مجانب موجود نه دی. دمایل مجانب دشته والي احتمال شته.

4. په هغه صورت کې چې $m=n+1$ یعني د صورت درجه یو واحد دمخرج له درجې څخه زیاته وي، تابع حتما مایل مجانب لري. په دې ډول یو حالت کې افقي مجانب موجود نه وي.

په عمومي توګه یوه ناطقه تابع به څو عمودي مجانبونه ولري (د مخرج دجذرونو په تعداد).

خو یوازې یو مایل یا افقي مجانب لرلی شي.

8 مثال

د $f(x)=\frac{8}{x^2-4}$ تابع ګراف رسم کړئ.

څرنګه چې دصورت درجه له مخرج څخه کمه ده، نود تابع ګراف افقي مجانب، $y = 0$ لري چې د افقي محور څخه عبارت دی.

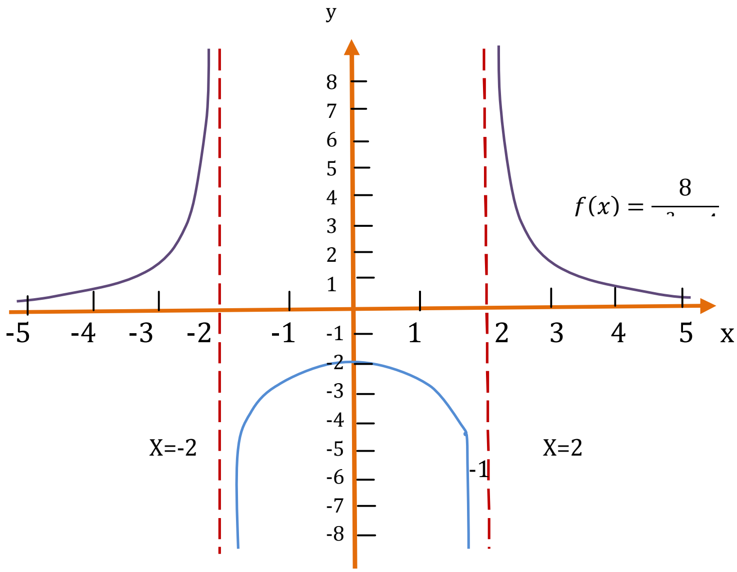
مګر عمودي مجانبونه د مخرج دجذرونو په پیداکولو سره په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$x^2-4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

نو عمودي مجانبونه عبارت دي له $x=2$ او $x=-2$. دامستقیم خطونه یعني عمودي مجانبونه مستوي په دریو برخو ویشي چې د x لپاره په دا هره یوه برخه کې دګراف موقعیت تثبیت کیږي.

$$x\in(-\infty\,,-2)\quad,\quad x\in(-2\,,2)\quad,\quad x\in(2\,,+\infty)$$

x	$x<-2$	$-2<x<2$	$2<x$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	$-$	$+$
$\frac{8}{(x-2)(x+2}$	$+$	$-$	$+$



هوموګرافیکه تابع

یوه ناطقه تابع چې په هغې کې صورت او مخرج لومړی درجه پولینومونه وي، د هوموګرافیکې تابع په نامه یادیږي. ددې تابع ګراف دهایپربولا شکل لري چې د معمول افقي وضعیت څخه یې په یوه معینه زاویه دوران کړی وي او دا ګراف یوه جوړه مشابه منحنی ګان جوړوي چې نظر عمودي او افقي مجانبونو ته په دوو متقابلو (مخامخ) ناحیو کې موقعیت اخلي. په دې ترتیب هوموګرافیکه تابع د $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ شکل لري، افقي مجانب یې $y = \frac{a}{c}$ دی او عمودي مجانب یې $x = -\frac{d}{c}$ دی.

د دی تابع یو خاص حالت $f(x) = \frac{1}{x}$ دی چې دمخه ورته اشاره شوې ده.

غیرناطقه تابع (Irrational faction)

که چیرې په $y=f(x)$ تابع کې دجمع، تفریق، ضرب او تقسیم پر عملیو سربیره په ځینو مواردو کې دهغې افادې یا متحول له تامو عددونو څخه پرته نور توانونه ولري، هغې ته غیر ناطقه تابع وایي.

$$y=\sqrt{x} \text{ او } y=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ ، } y=\frac{5x^2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4x+1}}$$

د غیروناطقو تابع ګانو نمونې دي.

لوګارتمي او اکسپوننشیل تابع ګانې

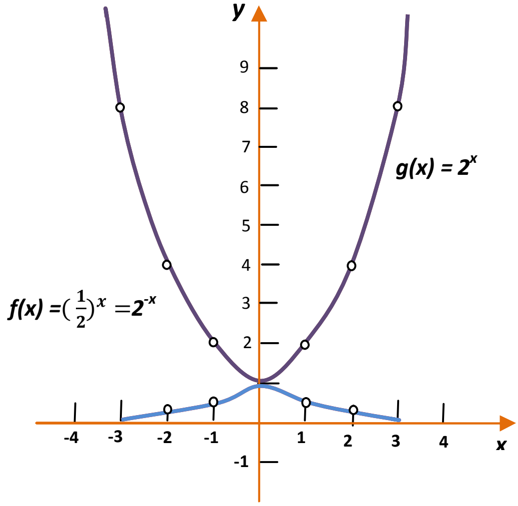
د $f(x)=a^x$ تابع کله چې a صفر، یو او منفي نه وي، د اکسپو نینشیل تابع په نوم یادیږي. په همدې ډول $g(x)=\log_a x$ لوګارتمي تابع بلل کیږي. څرګنده ده چې دا دواړه یو دبل معکوسې تابع ګانې دي. د $a>1$ لپاره د f او g تابع ګانې متزایدې او د $0<a<1$ لپاره دا تابع ګانې متناقصې دي. د اکسپو نینشیل او لوګارتمي تابع ګانو ګرافونه په مشخصو حالاتو کې په لاندې ډول رسمیږي.

د $g(x)=2^x$ او $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابع ګانو ګرافونه دمثالونو په توګه لاندې بنودل شوي دي.

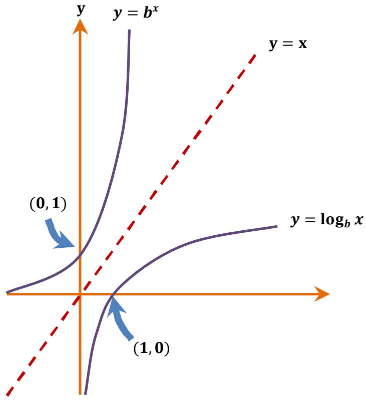
9 مثال

د $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ او $g(x)=2^x$ تابع ګانې په پام کې نیسو او ګرافونه یې رسموو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



د $y=b^x$ او $y=\log_b x$ تابع ګانو ګرافونه د $b>0$ لپاره، کومې چې يودبل معکوسې دي لاندې شکلونه لري.



د اويلر د عدد $e=2.7182818284\cdots$ په پام کې نيولوسره $y=e^x$ ته طبيعي اکسپوننشيل تابع او $y=\log_e x:=\ln x$ ته دطبيعي لوګارتم تابع وايي.

د اکسپوننشیل او لوګارتمي تابع ګانو خاصیتونه له طاقت لرونکو عددونو او لوګارتم څخه منشا اخلي چې هغه د I عمومي ریاضي په کتاب کې په تفصیل سره تربحث لاندې نیول شوي دي او دلته یې تفصیل ته اړتیا نه شته.

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

1. $y=3^x$, 2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, 3. $y=\left(\frac{5}{2}\right)^x$

دا لاندې کومه یوه تابع متزایده او کومه یوه یې متناقصه ده.

4. $y=e^x$, 5. $y=e^{-x}$, 6. $y=5^x$, 7. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

د لاندې عددونولوګارتمونه پیدا کړئ.

8. $\log_2 64$, 9. $\log_2 \frac{1}{64}$, 10. $\log_2 64$, 11. $\log_3 81$

لاندې معادلې حل کړئ.

12, $5^{2x}-3(5)^x+2=0$, 13. $\log x^3+2\log x-5=0$

14. $\frac{\log 2}{1-\log x}=\frac{1}{3}$, 15. $\log(x+1)+\log(x-2)=1$

16. $\log_9(x-6)-\log_9(x+3)=1$, 17. $\ln x+2\ln x=\ln 8$

18. که a او b دوه مثبت عددونه $\log_b a=\frac{2}{3}$ او $b\neq 1$ وي، نو د a او b ترمنځ اړیکه په ګوته کړئ.

د لاندې تابع ګانو دتعریف ناحیې وټاکئ.

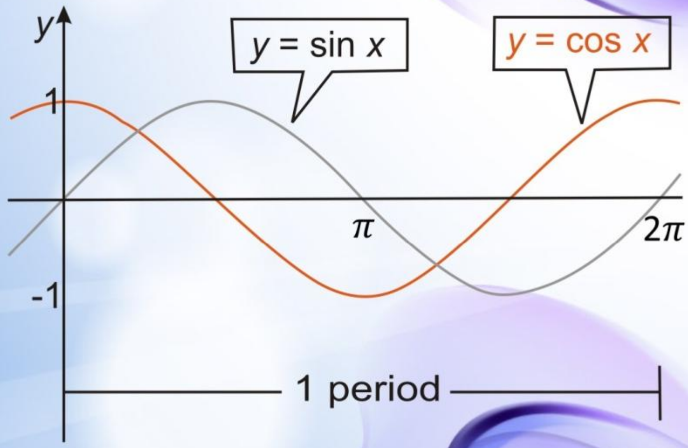
19. $f(x)=\sqrt{\log_3 x}$, 20. $g(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$, 21. $h(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$

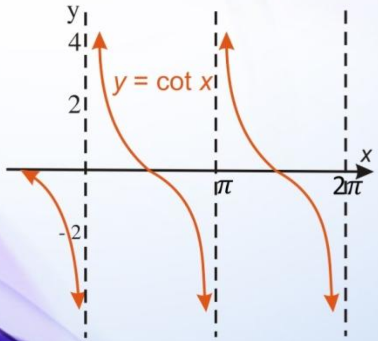
22. وښیئ چې د $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ تابع جفته ده.

23. وښیئ چې $g(x)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ تابع طاقه ده.

د لاندې تابع ګانو افقي او عمودي مجانبونه او ګرافونه وټاکئ.

24. $f(x)=\frac{1}{x}$, 25. $g(x)=\frac{x}{x^2-9}$, 26. $h(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$





دوهم څپرکی

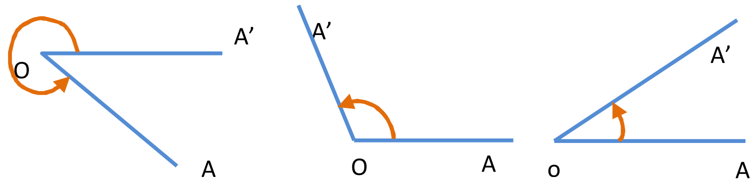
مثلثاتي تابع گاني

مثلثاتي تابع ګانې

مثلثاتي تابع ګانې په ریاضیاتو کې مشهورې تابع ګانې دي چې د حقیقي او کمپلکسو (مختلطو) عددونو په ساحو کې د دایروي تابع ګانو یا مثلثاتي تابع ګانو تر عنوانونو لاندې مطالعه کیږي. دا تابع ګانې درياضي او فزیک دمسالو په حل کې کارول کیږي. په دې بحث کې په لنډ ډول مثلثاتي تابع ګانې تر مطالعې لاندې نیول شوي دي.

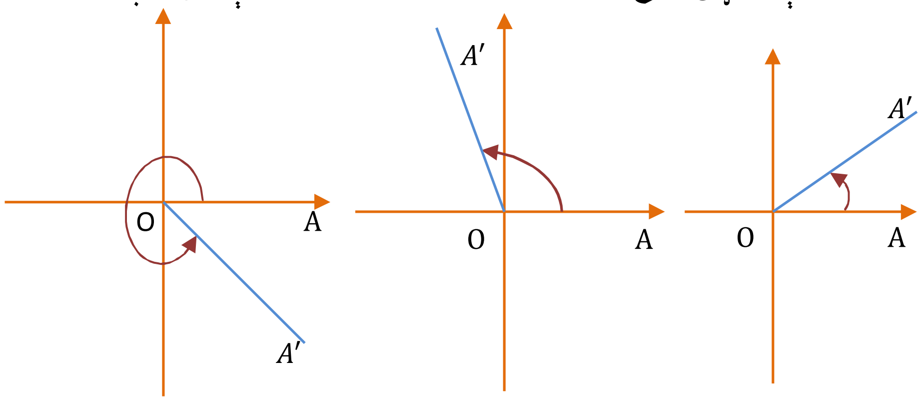
زاویه

زاویه دیوې ثابتې نقطې O په چاپیره دیونیم خط OA له دوران څخه عبارت دی. چې مثبت جهت یې دساعت دعقربې په خلاف ده.



د زاویې معیاري حالت

که چېرې په قایمو مختصاتو کې د یوې زاویې لومړنۍ ضلع دx پرمحور منطبق او راس یې دقایمو مختصاتو پرمبدا په پام کې ونیول شي، داسې چې دx محور مثبت جهت د زاویې لومړنۍ ضلع وي، نو زاویه دستندرډ په حالت کې بلل کیږي.



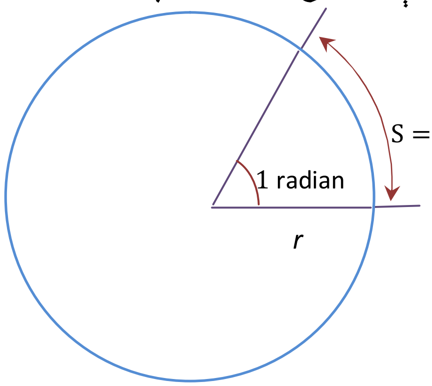
قایمه زاویه. د هغې زاویې څخه عبارت ده چې اضلاع یې یو پر بل عمود وي. په یوه مستوي کې دیوې نقطې چاپیره څلور قایمې زاویې ګنجایش لري. دلته قایمه زاویه د زاویو د اندازه کولو دمعیار په توګه په پام کې نیول شوي ده. په بل عبارت اولنی معیار، دکوم له مخې چې د زاویې واحدونه تعریف کیږي، قایمه زاویه ده.

د زاویې واحدونه

درجه: د هغې زاویې اندازه ده چې پراخوالی یې د قایمې زاوایې نوییمه $\left(\frac{1}{90}\right)$ برخه وي. نو یوه قایمه زاویه 90^o درجې ده او په یوه مستوي کې دیوې نقطې چاپیره څلور قایمې زاویې چې د 360 درجو سره مساوي کیږي، ګنجایش لري.

رادیان

په یوه دایره کې دیوې مرکزي هغې زاویې له اندازې څخه عبارت دی چې دهغې مقابل قوس یې د شعاع په اندازه اوږدوالی ولري.

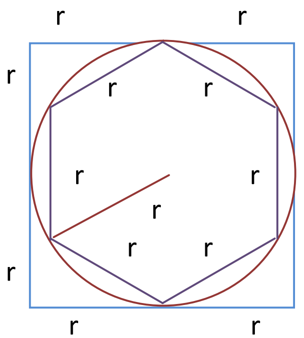


د یوې دایرې د محیط او قطر ترمنځ نسبت

د یوې دایرې د محیط او قطر تر منځ نسبت په π سره لیکي. یعنې که د یوې دایرې محیط c او شعاع یې r وي، نو

$$\pi = \frac{c}{2r} \Rightarrow c = 2\pi r$$

په دې ترتیب دیوې دایرې د محیط اوږدوالی چې شعاع یې r وي، له $2\pi r$ څخه عبارت دي.



د π د عدد تخمین

یوه دایره چې شعاع یې r وي له یوې محاطي شپږ ضلعي او محیطي مربع سره په پام کې نیسو. څرګنده ده چې دشپږ ضلعي محیط $6r$ دی. دمربع محیط $8r$ او د دایرې محیط $2\pi r$ دی.

د مربع محیط> د دایرې محیط> د شپږ ضلعي محیط

د نامساوي ګانو دواړه خواوې پر $2r$ تقسیمووو لرو، چې $6r < 2\pi\ r < 8r$

$$3 < \pi < 4$$

په دې ترتیب π هغه عدد دی چې د 3 او 4 عددونو ترمنځ واقع دی. د حسابونې په طریقو د π قیمت په لاندې ډول په لاس راغلی دی.

$$\pi = 3.1415926545.....$$

د π عدد ناطق عدد نه دی. دا دارشمیدس دعدد په نامه یادوي. داعدد په کتابونو کې له اعشاری څخه وروسته تر زرو رقمونو پورې حساب شوي دي.

څرنګه چې د دایرې محیط د r په شعاع سره $2\pi r$ دی، نو په یوه مستوي کې دیوې

نقطې چاپیره 2π راډیان چې تقریبا 6.28 راډیان ګنجایش لري، کوم چې د 360^o سره برابری کوي.

په راډیان باندې د درجې اړونه

لکه څرنګه چې دمخه وویل شول 360^o درجې له 2π راډیان سره برابری کوي، نو که چېرې دیوې زاویې پراخوالی په درجه سره په D او دهمغې زاویې اندازه په راډیان سره په R وښیو لرو، چې

$$\frac{D}{360}=\frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$$

له وروستي تناسب څخه د درجې او راډیان د یوبل په بدلونه کې کار اخیستل کیږي.

1 مثال

د $30^o, 45^o, 60^o, 90^o$ او 270^o په راډیان بدلې کړئ.

$$D=30^\circ \Rightarrow \frac{R}{\pi}=\frac{30}{180} \Rightarrow R=\frac{30\pi}{180}=\frac{\pi}{6}rad$$

$$D=45^\circ \Rightarrow \frac{R}{\pi}=\frac{45}{180} \Rightarrow R=\frac{45\pi}{180}=\frac{\pi}{4}rad$$

په همدې ترتیب

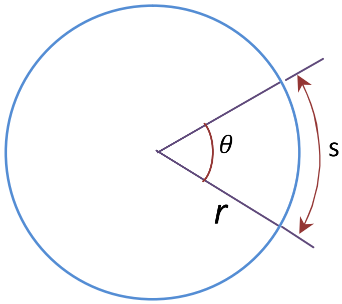
$$60^\circ=\frac{\pi}{3}rad \quad , \quad 90^\circ=\frac{\pi}{2}rad \quad , \quad 270^\circ=\frac{3\pi}{2}rad$$

د یوې دایرې د مرکزي زاویې او د هغې د مقابل قوس ترمنځ رابطه (اړیکه)

که چېرې S په راډیان سره دیوې مرکزي زاویې θ دمخامخ قوس اندازه او د r همغې دایرې شعاع وي، نو د دې په پام کې نیولوسره چې دیوې دایرې محیط، کوم چې د ټولې مرکزي زاویې 2π راډیان په مقابل کې پروت دی، $2\pi r$ واحده دی، نودا لاندې تناسب په پام کې نیولی شو.

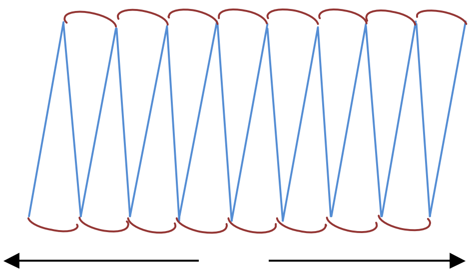
د قوس اوږدوالی په راډیان	زاویه د راډیان له مخې
$2\pi\ r$	2π
s	θ

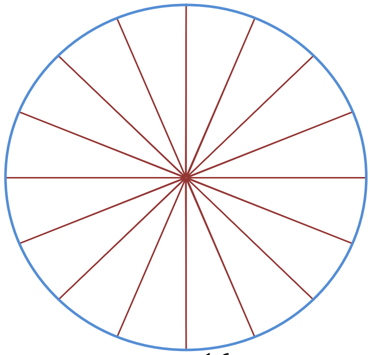
$$\Rightarrow\quad \frac{2\pi}{\theta}=\frac{2\pi r}{s}\quad\Rightarrow\quad S=\frac{2\pi r\theta}{2\pi}\quad\Rightarrow\quad S=r\theta$$



د دایرې مساحت

یوه دایره چې شعاع یې r وي په پام کې ونیسي، دهغې مساحت له شکل سره سم په n مساوي مثلثونو ویشو، داسې چې راسونه یې د دایرې مرکز او دریمې ضلعې یې د دایرې د محیط یوه برخه وي. که چیرې دا مثلثونه په متقابله توګه یو دبل تر څنګ کېښودل شي، نو لاس ته راغلي شکل به د مستطیل سره شباهت ولري.





په هره اندازه چې ددې مثلثونو شمیر زیات شي، مستطیل واقعیت ته نږدې کیږي داسې چې سور (عرض) یې r، اوږدوالی (طول) یې د دایرې د محیط نیمایي π سره برابری کوي. په دې توګه د دایرې او ددې مستطیل مساحتونه یو له بل سره مساوي دي، نو

$$s = (\pi r)(r) = \pi r^2$$

بناپردې د دایرې مساحت عبارت دی له

$$s = \pi r^2$$

د دایرې د قطاع مساحت

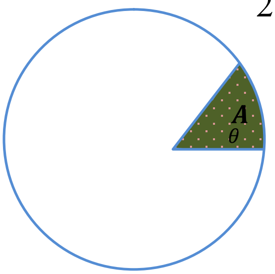
د r په شعاع د دایرې یوه قطاع، چې د دوو شعاع ګانو او θ زاویې په محدوده کې پرته وي، په پام کې نیسو.

پوهیږو چې ددایرې مساحت چې مرکزی زاویه یې 2π راډیان وي، πr^2 او د قطاع مساحت چې مرکزي زاویه یې θ دی، A وي، نو د لاندې تناسب څخه استفاده کولی شو.

مساحت	زاویه په راډیان سره
πr^2	2π
A	θ

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\theta} = \frac{r^2\pi}{A} \Rightarrow A = \frac{\pi r^2\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}r^2\theta$$



2 مثال

د یوې دایرې شعاع $10cm$، دهغې محیط او مساحت حساب کړئ.

د 105 درجې مرکزي زاویې مخامخ قوس او د اړونده قطاع مساحت په دې دایره کې په لاس راوړئ.

حل

د دایرې محیط $C = 2\pi r = 2(3.14)10 = 62.8cm$

د دایرې مساحت $S = \pi r^2 = (3.14)10^2 = 314cm^2$

$$105^0 = \frac{7\pi}{12} rad$$

د قوس اوږد والی $\ell = r\theta = 10\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 18.32cm$

د قطاع مساحت $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}10^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 183.17cm^2$

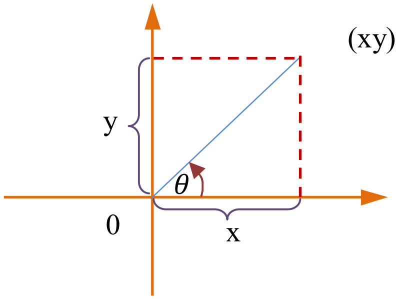
د مثلثاتي نسبتونو تعریف

که چېرې د θ یوزاویه د سټنډرډ (معیاري) په حالت کې وي، د دې زاویې پر دویمه ضلعه له مبداځخه پرته د(x,y) یوه نقطه او سربېره پردې $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ له مبدا څخه د دې نقطې مسا فه وي. په دې صورت د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له

$$\sin\ \theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\ \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\ \theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \cot\ \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad , \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



په طبیعي توګه په څلورو وروستیو حالتونو کې مخرجونه باید صفر نه وي.

اساسي رابطې

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad,\quad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{1}{\cos\theta}\quad,\quad \csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

$$\Rightarrow\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\tan^2\theta+1=\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{x^2+y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}=\sec^2\theta$$

په همدې توګه $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$ لاس ته راځي.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad,\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \ .$$

مثلثاتي تابع ګانې

که چېرې x دمتحول دکیمیت په توګه د راډیان واحد له جنسه په پام کې ونیول شي، نو $y = \sec x, y = \cot x, y = \tan x, y = \cos x, y = \sin x$ او $y = c\sec x$ ته مثلثاتي تابع ګاني وايي.

د مثلثاتي تابع ګانو د قیمتونو ترمنځ رابطې

که چېرې x ، $-x$ ، $\frac{\pi}{2} \pm x$ ، $\pi \pm x$ او $2\pi \pm x$ زاویې په واحده دایره کې د ستنډرډ په حالت کې په پام کې ونیول شي او دقایم الزاویه مثلثونو دتساوي خاصیتونه وکارول شي، دمثلثاتي تابع ګانو دقیمتونو تر منځ لاندني اړیکې په اسانۍ سره په لاس راځي.

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x \end{cases} , \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi-x)=\sin x \\ \cos(\pi-x)=-\cos x \\ \tan(\pi-x)=-\tan x \\ \cot(\pi-x)=-\cot x \end{cases} , \quad \begin{cases} \sin(\pi+x)=-\sin x \\ \cos(\pi+x)=-\cos x \\ \tan(\pi+x)=\tan x \\ \cot(\pi+x)=\cot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi-x)=-\sin x \\ \cos(2\pi-x)=\cos x \\ \tan(2\pi-x)=-\tan x \\ \cot(2\pi-x)=-\cot x \end{cases} , \quad \begin{cases} \sin(2\pi+x)=\sin x \\ \cos(2\pi+x)=\cos x \\ \tan(2\pi+x)=\tan x \\ \cot(2\pi+x)=\cot x \end{cases}$$

د مثلثاتي تابع گانو د قیمتونو تر منځ دځینو اړیکو لنډ جدول

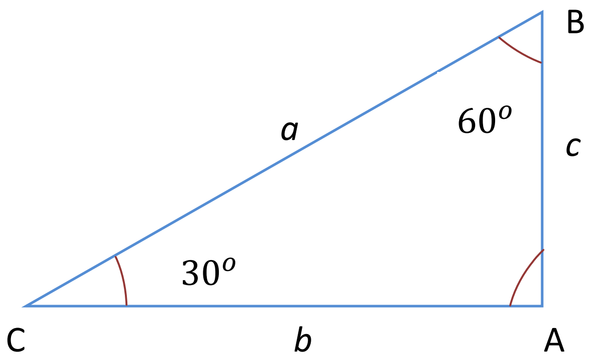
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\pi-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$\cot x$
$2\pi-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$2\pi+x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$

د پورتنیو اړیکو ثبوت د شاګردانو په غاړه دی.

3 مثال

د 30^0 او 60^0 زاویو مثلثاتي نسبتونه حسابوو، په دې منظور یو قایم الزاویه مثلث په پام کې نیسو چې درې زاویې یې په ترتیب سره 90^0، 30^0 او 60^0 وي. داسې چې مقابلې ضلعې یې په ترتیب سره b,a اوc دي. پوهیږو چې په داډول مثلث کې د 30^0 زاویې مقابله ضلعه دوترنیمایې ده یعنې

$$c=\frac{a}{2}, b^2+c^2=a^2 \Rightarrow b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow b^2=a^2-\frac{a^2}{4} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



دا مثلث په قایمو مختصاتو کې دا ډول په پام کې نیسو چې 30^0 او 60^0 زاویې په ترتیب سره د سټنډرډ په حالت کې واقع شي. د تعریف سره سم

$$\sin 30^o=\frac{c}{a}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{b}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

په همدې ډول

$$\cos 60^o=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^o=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 30^o = \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^o = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

4 مثال

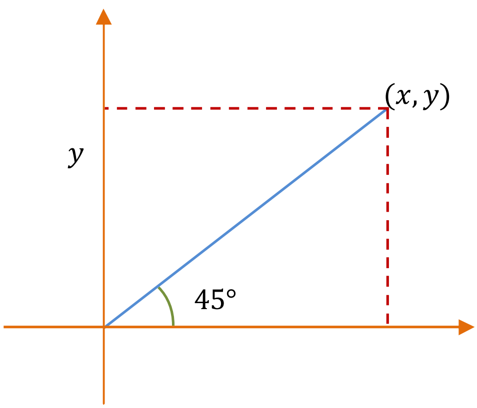
د 45^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکوو او د هغې لپاره يو قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث د قايمو مختصاتو په سيستم کې دا ډول ځای پر ځای کوو چې په هغې کې د 45^o زاويه د سټنډرډ په حالت کې واقع شي (لاندې شکل ته وګورئ) څرګنده ده چې $x = y$ ده او لرو چې

$$\sin 45^o = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + y^2}} = \frac{y}{y\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

په همدې ډول:

$$\cos 45^o = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بناپردې



$\frac{\pi}{6}$	X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د جمع فورمولونه

د α، β او $\alpha \pm \beta$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکي چې د جمع د قوانینو په نامه یادیږي، عبارت دي له

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

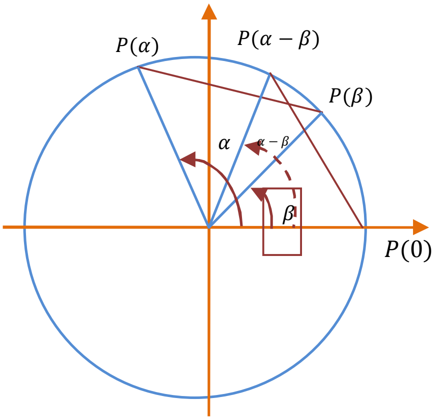
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ثبوت

لومړی خلورمه رابطه ثبوتوو کوو او وروسته بیا د همدغه له مخې نورې رابطې ثبوت کیږي.

د $p(\alpha)$، $p(\beta)$، $p(\alpha-\beta)$ او $p(0)$ نقطې د واحدې دایرې پر محیط باندې په پام کې نیسو. دا نقطې نظر مختصاتو ته عبارت دي له



$$p(\alpha)=(\cos\alpha,\sin\alpha) \quad , \quad p(\beta)=(\cos\beta,\sin\beta)$$

$$p(\alpha-\beta)=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))\ ,\ p(0)=(1,0).$$

که چېرې $\alpha>\beta$ وي، نو د $p(\beta)$ او $p(\alpha)$ نقطو تر منځ د قوس اوږدوالی عبارت له $\alpha-\beta$ څخه دی اود $p(\alpha-\beta)$ او $p(0)$ د نقطو ترمنځ د قوس د اوږد والي سره مساوي دی، نو ددې قوسونو مخامخ وترونه یوله بله سره مساوي دي.

$$d(P(\alpha-\beta),p(0))=d(p(\alpha),p(\beta))$$

اویا

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)]^2}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$
$$[\cos(\alpha-\beta)-1)]^2+[(\sin(\alpha-\beta)]^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$\Rightarrow\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$$

د $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ په پام کې نیولوسره له وروستۍ رابطې څخه په لاس راځي چې

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

له وروستنی رابطې څخه دجمع دنورو فورمولونو دثبوت لپاره داساس په توګه کاراخیستل کیدلی شي. په دې لړکې دمتقابلو، مکملو اومتممو زاویو له مثلثاتي نسبتونو څخه کاراخیستل کیږي.

که چېرې په وروستۍ رابطه کې د β پرځای $-\beta$ ځای پرځای کړو لرو، چې

$$\cos\left[\alpha-(-\beta)\right]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\boxed{\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta}$$

همدارنګه:

$$\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left(\alpha+(\beta+\frac{\pi}{2})\right)$$

$$=-\left[\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=-\cos\alpha(-\sin\beta)+\sin\alpha\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

اوپه اخرکې

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

5 مثال

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

که په وروستی رابطه کې که له β پرځای $\beta-$ ځای پرځای شي، په لاس راځي چې

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

د دوه چنده زاویې فومولونه

که د جمع په فورمولونو کې β په α عوض شي

$$\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

په همدې ډول:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

د نیمه زاویو فورمولونه

دزاویې د دوه چنده، قوانینو په استفاده لرو، چې

$$\cos\alpha=\cos\left(2\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

له دې ځایه:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

د ضرب فورمولونه

کولی شو دمثلثاتي نسبتونو دضرب حاصل دهغوی دجمع په حاصل سره بدل کړو.

پوهیږو، چې

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

له دې ځایه لرو چې

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

په همدې ډول د مختلفو مثلثاتي نسبتونو دضرب حاصل په لاس راتلی شي.

لهذا

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

که چېرې په دې رابطوکې $x=\alpha+\beta$ او $y=\alpha-\beta$ په پام کې ونیسو. $\alpha=\dfrac{x+y}{2}$ او $\beta=\dfrac{x-y}{2}$ لاس ته راځي. بناپردې دضرب فورمولونه لاندې شکل اخلي.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

د مثلثاتي تابع ګانو تناوب

د f یوه تابع د p دورې په تناوب سره، متناوبه (پریودیک) تابع بولي، که چېرې $P\neq 0$ ترټولوکوچنی مثبت عدد وي، چې له D_f څخه د هر x لپاره د $x+p$

عدد هم د D_f عنصر او $f(x+P)=f(x)$ وي. د مثال په توګه $f(x)=\sin x$ یوه متناوبه تابع ده. او د تناوب دوره یې 2π ده ځکه، چې

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x$$

په همدې ډول $g(x)=\cos x$ متناوبه تابع ده.

6 مثال

$f(x)=\sin 4x$ تابع تناوب معلوم کړی.

حل: فرض کوو چې p د دې تابع $f(x)$ تناوب وي. په دې صورت کې

$$f(x+p)=f(x)\Rightarrow \sin\left[4(x+p)\right]=\sin 4x\Rightarrow \sin(4x+4p)=\sin 4x$$

$$\Rightarrow 4p=2\pi\Rightarrow p=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

بناپردې د $f(x)$ پریوډ $p=\dfrac{\pi}{2}$ دی.

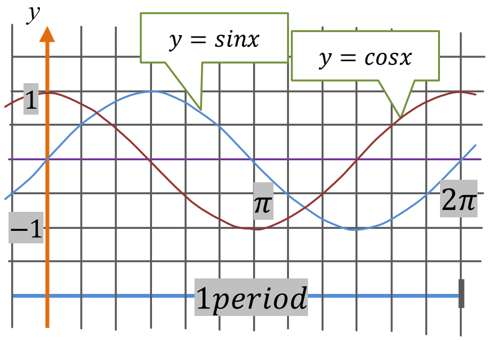
د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ مثلثاتي تابع ګانو ګرافونه

پوهیږو چې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ تابع ګانو تناوب 2π دی. نوځکه ددې تابع ګانو ګرافونه د 2π په اوږدوالی په معین انټرول کې تکراریږي. په دې ترتیب ددې تابع ګانو ګرافونه د $[0 ، 2\pi]$ په انټرول کې رسم کیږي.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

د یادونې وړده چې د زاویې واحد (د x قیمت) په راډیان حسابیږي.

$\pi\approx 3.14$ او $2\pi\approx 6.28$ په پام کې نیول کیږي.



لیدل کیږی چې د دوو تابع ګانو $\sin x$ او $\cos x$ د تعریف ناحیې دحقیقي عددونو سېټ او د قیمتونو سېټ یې د $[-1,1]$ انټرول دی.

$$D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R} \quad , \quad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1\,,1]$$

همدارنګه د $\sin x$ تابع طاقه او د $\cos x$ تابع جفته ده، ځکه چې

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ او } \cos(-x) = \cos x.$$

د $y = tanx$ او $y = cotanx$ تابع ګانو ګرافونه

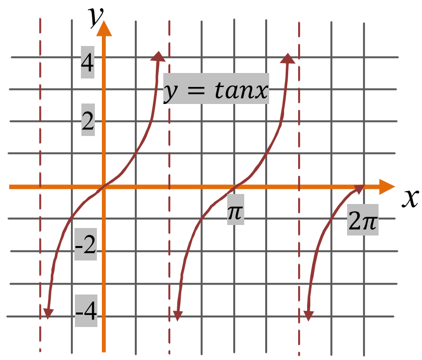
څرنګه چې $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ و $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ دی

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} \quad , \quad D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\}$$

د$y = tanx$ او $y = cotanx$ تابع ګانې متناوبې دي او تناوب یې π دی.

د $y = tanx$ ګراف کولای شو، د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټرول کې تر مطالعې لاندې ونیسو.

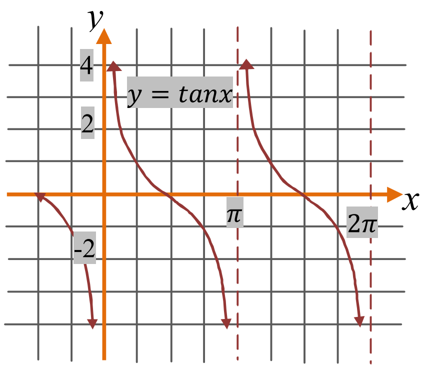
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	-1	0	1	∞



د $x = \pm\frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د $y = tanx$ منحني عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $y = cotanx$ تابع لپاره د $(0,\pi)$ په انټروول کې لرو، چې

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
(	∞	1	0	1	$-\infty$



د $x = 0$ او $x = \pi$ مستقیم خطونه د $y = cotx$ عمودي مجانبونه دی.

معکوسي مثلثاتي تابع ګانې

د مثلثاتي تابع ګانو دهرې یوې دتعریف ناحیه، کولی شو داډول محدوده کړوچې تابع په هغه محدوده کې معکوسه تابع ولري.

د $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ ، $y=\tan x$ او $y=\cot x$ تابع ګانو، معکوسې تابع ګاني په ترتیب سره په $y=\arcsin x$ ، $y=\arccos x$ ، $y=\arctan x$ ، $y=arc\cot x$ یا $y=\sin^{-1}x$ ، $y=\cos^{-1}x$ ، $y=\tan^{-1}x$ ، $y=\cot^{-1}x$ لیکي.

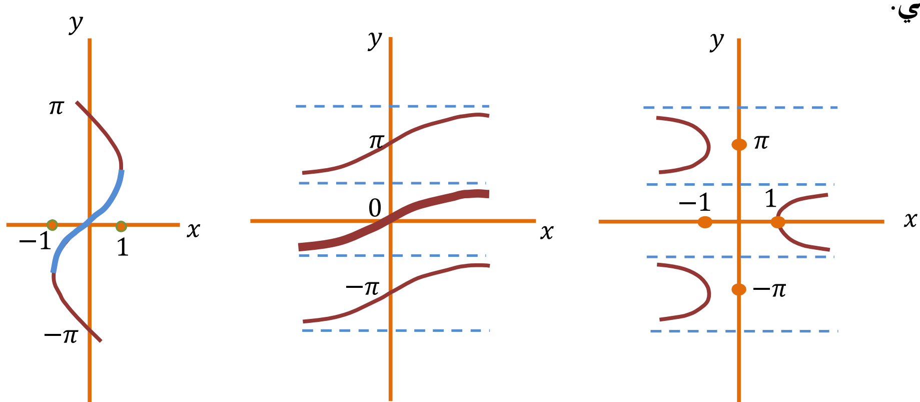
$$x=\sin y \Leftrightarrow y=\arcsin x$$
$$x=\cos y \Leftrightarrow y=\arccos x$$
$$x=\tan y \Leftrightarrow y=\arctan x$$
$$x=\cot y \Leftrightarrow y=arc\cot x$$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو دتعریف ناحیې او دقیمتونو سیټونه عبارت دي له

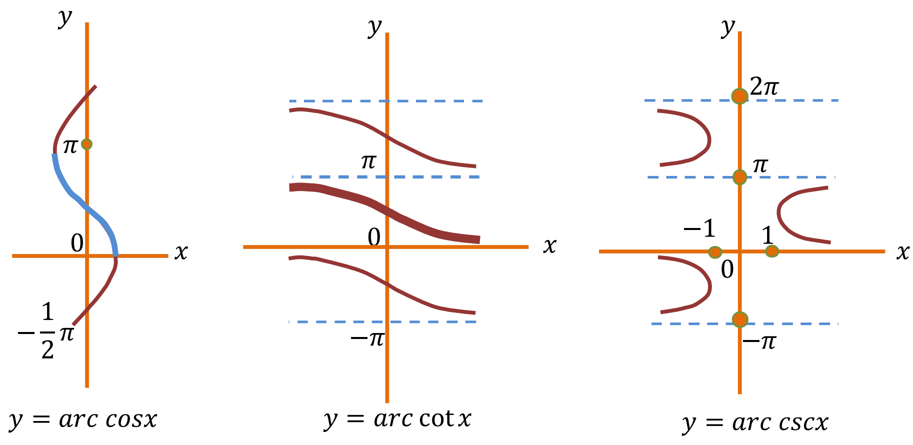
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$arc\cot x$
D_f	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
R_f	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$

په مشابه ډول د $y=\sec x$ او $y=\csc x$ تابع ګانو معکوسې تابع ګاني په ترتیب سره عبارت دي له $y=arc\sec x$ او $y=arc\csc x$ دي.

څرنګه چې اصلي او معکوسې تابع ګاني یوه له بلې سره نظر $y=x$ مستقیم خط ته متناظرې دي، نو ځکه دهغوي ګرافونه داصلي تابع ګانو د ګرافونو په مرسته رسم کیدلی شي.



$y=arc\ sinx$		$y=arc\ tanx$		$y=arc\ secx$



يادښت

که چېرې f او f^{-1} تابع ګانې يوه دبلې سره معکوسې وي. پوهيږو، چې

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ، \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

بناپر دې:

$$\arccos(\cos x) = x \quad , \quad \cos(\arccos x) = x$$
$$\arcsin(\sin x) = x \quad , \quad \sin(\arcsin x) = x$$
$$\arctan(\tan x) = x \quad , \quad \tan(\arctan x) = x$$
$$arc\cot(\cot x) = x \quad , \quad \cot(arc\cot x) = x$$

7 مثال

د $\arcsin\frac{1}{2}$ او $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ مفاهيم محاسبه کړئ.

$$\theta = \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

8 مثال

د $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ عدد حساب کړئ.

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f^{-1}(x)=\arcsin x$$

$$\Rightarrow (f^{-1}of)(x)=x \Rightarrow \arcsin(\sin x)=x.$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

9 مثال

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $\cos^{-1}(0)$ او $\cos^{-1}(1)$ پیداکړئ.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos^{-1}(0)=\beta \Rightarrow \cos\beta=0 \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}(1)=\gamma \Rightarrow \cos\gamma=1 \Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow \cos^{-1}(1)=0$$

10مثال

ثبوت کړئ چې

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ثبوت

فرض کوو چې $\arcsin x=\theta$ وي په دې صورت کې

$$Sin\theta=x \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \theta=\arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \arcsin x=\theta=\arccos\sqrt{1-x^2}$$

له بلې خوا،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\theta = arc\sqrt{1-x^2}.$$

11مثال

وښيئ چې $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ده.

حل: وضع کوو، چې

$$\arcsin x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x$$

$$\arccos x = \beta \Rightarrow \cos\beta = x$$

بناپردې:

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

12مثال

وښيئ، چې

$$\arctan x = arc\cot\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

حل: بیاهم وضع کوو، چې

$$\arctan x = \theta \Rightarrow \tan\theta = x \Rightarrow cat\theta = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = arc\cot\frac{1}{x}, \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

له بلې خوا

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

په نتیجه کې

$$\theta=\arctan x=arc\cot\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

پوښتنې

د لاندې زاویو مثلثاتي نسبتونه معلوم کړئ

1. 120° , 2. 225° , 3. -30° , 4. -45°

د لاندې افادو قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه په لاس راوړئ.

5. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, 6. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

7. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$, 8. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

د لاندې افادو قیمتونه د $\tan\alpha$ او $\cot\alpha$ له جنسه پیداکړئ.

9. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, 10. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

11. $\cot\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$, 12. $\cot\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

13. د 105 او 195 زاویو مثلثاتي نسبتونه حساب کړئ.

14. که $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ ، او $\alpha\le\frac{\pi}{2}$ وي، نو لاندې نسبتونه حساب کړئ.

i. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, *ii.* $\cos(4\pi-\alpha)$, *iii.* $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

15. که چېرې $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ او $\cos\beta=\frac{3}{4}$، $\alpha\le\frac{\pi}{2}$ او $\beta\le\frac{\pi}{2}$ وي، لاندې نسبتونه په لاس راوړئ.

$i.\ \sin(\alpha+\beta)$, $ii.\ \cos(\alpha+\beta)$, $iii.\ \tan(\alpha+\beta)$

$iv.\ \cot(\alpha+\beta)$, $v.\ \sin(\alpha-\beta)$, $vi.\ \cos(\alpha-\beta)$

$vii.\ \tan(\alpha-\beta)$, $viii.\ \cot(\alpha-\beta)$, $ix.\ \sin 2\alpha$

د لاندې مثلثاتي تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

16. $y=-\sin x$, 17. $y=-\cos x$, 18. $y=-2\cos x$

19. $y=\sin(x-1)$, 20. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, 21. $y=\cos x+1$

لاندې زاويې (قوسونه) په ګوته کړئ.

22. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, 23. $\arcsin(-1)$, 24. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

25. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$, 26. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, 27. $\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

28. $\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$, 29. $\tan\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$, 30. $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

31. $\cot(arc\cot(-1))$, 32. $\cot(arc\cot 9)$, 33. $arc\cot(-1)$

مثلثاتي معادلې

هغه معادلې چې په هغې کې یو یا څو مثلثاتي نسبتونه کارول شوي وي، د مثلثاتي معادلې څخه عبارت دی، لکه:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

مثلثاتي مطابقت هغه تساوي ده چې د زاويې دټولو قيمتونو لپاره صدق کوي. په داسې حال کې چې مثلثاتي معادله دمجهول دځينو قيمتونو لپاره صدق کوي، دالاندې

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1$$

يو مثلثاتي مطابقت دی. په دې مبحث کې د مثلثاتي معادلو د ځومثالونو حل تر بحث لاندې نيول کيږي.

د مثلثاتي معادلو حل (د مثلثاتي معادلو جذرونه)

اصلي حل: هغه عدد چې دمجهولې زاويې پرځای معادله صدق کړي، دمعادلې د حل (جذر) په نامه ياديږي. لکه څرنګه چې د $\sin x = 1$ اصلي حل عبارت دی له $x = \frac{\pi}{2}$.

عمومي حل. څرنګه چې مثلثاتي تابع ګانې دوره يې (متناوبې) دي. بناپردې دهغې حل ديوې متناوبې تابع په مرسته تعميم کيږي. هغه حل چې ديوې مثلثاتي معادلې ټول ممکنه حلونه وښيې، دهغې معادلې د عمومي حل په نامه ياديږي.

يوه مثلثاتي معادله يوعمومي حل او يو اصلي حل لري. په لاندې جدول کې ځو مثلثاتي معادلې دهغوي د عمومي حل سره ورکړل شوی دي.

معادله	عمومي حل
$\sin x = 0$	$x = n\pi \, , n \in \mathbb{N}$
$\cos x = 0$	$x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \, , n \in \mathbb{N}$
$\tan x = 0$	$x = n\pi \, , n \in \mathbb{N}$
$\sin x = \sin\alpha$	$x = n\pi + (-1)^n \alpha \, , -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \, , n \in \mathbb{N}$
$\cos x = \cos\alpha$	$x = 2n\pi \pm \alpha \, , 0 \le \alpha \le \pi \, , n \in \mathbb{N}$

$\tan x = \tan\alpha$	$x = n\pi + \alpha\,, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\,, n \in \mathbb{N}$
$\sin^2 x = \sin^2\alpha$	$x = n\pi \pm \alpha\,, n \in \mathbb{N}$
$\cos^2 x = \cos^2\alpha$	$x = n\pi \pm \alpha\,, n \in \mathbb{N}$
$\tan^2 x = \tan^2\alpha$	$x = n\pi \pm \alpha\,, n \in \mathbb{N}$
$\sin x = 1$	$x = (4n+1)\frac{\pi}{2}\,, n \in \mathbb{N}$
$\cos x = 1$	$x = 2n\pi\,, n \in \mathbb{N}$
$\cos x = -1$	$x = (2n+1)\pi\,, n \in \mathbb{N}$

1 مثال

د $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}\,, (\sin x \neq 2)$$

$$\Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

2 مثال

د $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$ معادله حل کړئ.

حل: پوهیږو، چې له

$$\tan 3x = \tan(x+2x) = \frac{\tan x + \tan 2x}{1-\tan x \tan 2x}$$

$$\Rightarrow tax3x - \tan x \tan 2x \tan 3x = \tan x + \tan 2x$$

$$\Rightarrow \tan x \tan 2x \tan 3x = \tan 3x - \tan x - \tan 2x$$

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$$

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

$$\Rightarrow 2\tan x = -2\tan 2x \Rightarrow tax2x = \tan(-x) \Rightarrow 2x = n\pi + (-x)$$

$$\Rightarrow 3x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

3 مثال

د $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$ معادله حل کړئ.

حل

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x = \left(n\pi + \frac{\pi}{6}\right) + (-1)^n \frac{\pi}{2} \ , \ n \in \mathbb{N}$$

4 مثال

د $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1+\tan 3x \tan 2x} = 1$ معادله حل کړئ.

حل

$$\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1+\tan 3x \tan 2x} = 1 \Rightarrow \tan(3x-2x) = \tan\frac{\pi}{4}$$

خود $x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ لپاره د $\tan 2x$ قيمت د تعريف وړ نه دئ، نو د معادلې دحلونو سيټ خالي دی.

5 مثال

د $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$ معادله حل کړئ.

حل

$$\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan x + \tan 2x = 1 - \tan x \tan 2x$$

$$\frac{\tan x + \tan 2x}{1 + \tan x \tan 2x} = 1 \ \Rightarrow \ \tan 3x \ = \ \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 3x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, \ n \in IN$$

6 مثال

د $(\cos x)^{\sin^2 - 3\sin x + 2} = 1$ معادلې عمومي حل پيداکړئ.

په داسې حال کې چې $x \neq \dfrac{n\pi}{2}$ فرض شي.

حل

$$(\cos x)^{\sin x^2 - 3\sin x + 2} = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 2)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$

له بلې خوا د $x \neq \dfrac{n\pi}{2}$ شرط ابجابوي چې $\cos x$ نه شي کولی د 0، 1 او -1 قيمتونه واخلي، نو معادله عمومي حل نه لري.

7 مثال

د $|4\sin x - 1| < \sqrt{5}$ نامساوات د حلونو سيټ د $x \in (-\pi\ ,\ \pi)$ لپاره پيداکړئ.

حل

$$|4\sin x - 1| < \sqrt{5} \Rightarrow \ -\sqrt{5} < 4\sin x - 1 < \sqrt{5}$$

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}<\sin x<\frac{\sqrt{5}+1}{4}\Rightarrow -\sin\frac{\pi}{10}<\sin x<\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin x<\sin\frac{3\pi}{5}\Rightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{10},\frac{3\pi}{10}\right)$$

پوښتنې

د لاندې مثلتاتي معادلو عمومي حل پیدا کړئ.

1. $2\sin x-\sqrt{3}=0$, 2. $2\cos 2x=\sqrt{3}$, 3. $\cos^2 2x=3$

4. $2\sin x\cos c-\sin x=0$, 5. $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

6. $2\sin^2 2x-3\cos 2x-3=0$, 7. $4\sin^2 x\cos x-\sin 2x=0$

8. $\sin 3x-\sin 3x=0$, 9. $\sqrt{3}\tan x-\sec x-1=0$

10. $\sin x+\cos x=1$, 11. $\tan 2x+\tan x=1$

12. $\sin^2 x+\sin x=2$, 13. $\sin^{10} 2x=1+\cos^{10} x$

14. $\sqrt{2}\sec x+\tan x=1$, 15. $\cos^2 x=\cos 2x$

د لاندې معادلو خصوصي حلونه دورکړل شویو شرطونو په پام کې نیولوسره معلوم کړئ.

16. $\sin x=\sqrt{3}\cos x$, $-\pi<x<0$

17. $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$, $0<x<2\pi$

18. $(2\cos x-1)(3-2\cos x)=0$, $0<x<2\pi$

19. $|\cot x|=\cot x+\frac{1}{\sin x}$, $0<x<3\pi$

د یومثلث د عناصرو تر منځ رابطې او د مثلث حل

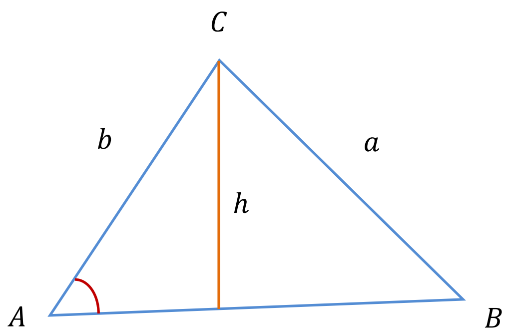
یو مثلث درې ضلعې او درې زاویې لري او هغوی دمثلث عناصر بولی. په بل عبارت یو مثلث شپږ عناصر لري. د ABC په یومثلث کې زاویې په B, A او C سره ښیي

او د دې زاويو مقابلې ضلعې په ترتيب سره په c, b, a سره ښيي، دمثلث محيط په $2S$ او مساحت يې په Δ سره نوموي، نو $s = \frac{a+b+c}{2}$ دی. په دې بحث کې په مثلثاتي نسبتونه پورې اړونده څينې خاصيتونه په لنډه توګه يادوو.

د ساين قضيه

يعنې د يوه مثلث د زاويو ساينونه دهغوی له مخامخ ضلعو سره مستقيم تناسب لري.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



ثبوت

له شکل څخه ليدل کيږي، چې

$$h = a\sin B \quad , \quad h = b\sin A$$

$$\Rightarrow a\sin B = b\sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

په همدې ډول د دوهمې ارتفاع په پام کې نيولو سره لاس ته راځي، چې

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

د دوو وروستنيو رابطو د پرتله کولو څخه په لاس راځي، چې

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

1 مثال

د ABC په مثلث کې که $a=10cm$ ، $b=15cm$ او $B=50^{\circ}$ وي، د $\hat{A}$ زاویه معلومه کړئ.

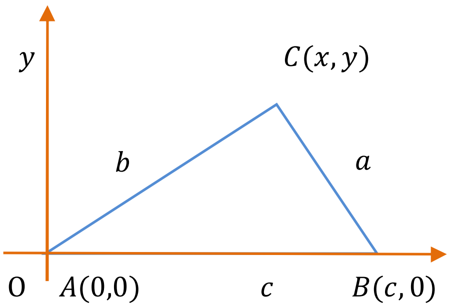
حل: د ساینونو دقانون څخه لرو، چې

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{10}{15}\sin 50^{0}=0.5107$$
$$\Rightarrow \sin A=0.5107\Rightarrow A=\arcsin(0.5107)=30^{\circ}\,42'\,37''$$

د کوساین قضیه

دABC په مثلث کې دهغې د اضلاعو او داخلي زاویو کوساینونو ترمنځ لاندې رابطې موجودې دي.

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$



ثبوت

له شکل سره سم د ABC مثلث د قایمو مختصاتو په سیستم کې داسې ځای پر ځای کوو چې د A راس د مختصاتو پر مبدا او د AB ضلع یې د OX پر محور

منطبق شي. اوس نود دوو نقطو $B(c,o)$ او $C(x,y)$ تر منځ مسافه چې له a

څخه عبارت دی، په لاندې ډول حسابوو.

$$a=\sqrt{(b\cos A-c)^2+(b\sin A)^2}$$

د $x=b\cos A$ او $y=b\sin A$ په پام کې نیولوسره لرو، چې

$$\Rightarrow a^2=b^2\cos^2 A-2bc\cos B+c^2+b^2\sin^2 C$$

$$\Rightarrow a^2=b^2\left(\cos^2 A+\sin^2 A\right)+c^2-2bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

دوې نورې رابطې په عین طریقه ثبوت کیږي.

2مثال

د ABC په یوه مثلث کې دوې ضلعې $b=5cm$، $c=8cm$ او $A=60^\circ$ وي، نود a

ضلع اوږدوالی پیداکړئ.

حل: د کوساین دقضیې په پام کې نیولو سره لرو، چې

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+64-2\times5\times8\cos60^\circ$$

$$\Rightarrow a^2=89-80\times\frac{1}{2}\Rightarrow a^2=49\Rightarrow a=\sqrt{49}\Rightarrow a=7$$

3 مثال

که $a=9cm$، $b=11cm$ او $c=14cm$ وي، د A زاویه وټاکئ.

حل: دکوساین د قضیې سره سم لرو، چې

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{121+196-81}{2\times11\times14}=\frac{236}{304}=0.7662$$

$$\Rightarrow \cos A=0.7662\Rightarrow A=\arccos(0.7662)=39^\circ\,58'\,59''$$

د تانجنت قضیه

د $\overset{\triangle}{ABC}$ په مثلث کې لاندې رابطې شته دي.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}} \quad , \quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}} \quad , \quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

ثبوت. وضع کوو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=D \Rightarrow \begin{cases} a=D\sin A \\ b=D\sin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=D(\sin A+\sin B) \\ a-b=D(\sin A-\sin B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

که د وروستی رابطې دښي خوا صورت او مخرج د $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ پر افاده تقسیم کړو، په لاس راځي، چې

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

دوې نورې رابطې په همدغه طریقه په لاس راځي.

4 مثال

د $\overset{\triangle}{ABC}$ په یوه مثلث کې دوې ضلعې $a=925cm$ ، $c=432cm$ او یوه زاویه $B=42^\circ\ 30'$ دي د A او C زاویې معلومې کړئ.

حل:

$$A+C=180^\circ-B=180^\circ-42^\circ\,30'=137^\circ\,30'\Rightarrow\frac{A+C}{2}=68^\circ\,45'$$

اوس لرو، چې

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}\Rightarrow\frac{925+432}{925-432}=\frac{\tan\left(68^\circ\,45'\right)}{\tan\frac{A-C}{2}}\Rightarrow\frac{1357}{483}=\frac{\tan\left(68^\circ\,45'\right)}{\tan\frac{A-C}{2}}$$

$$\Rightarrow\tan\frac{A-C}{2}=\frac{483}{1357}\tan\left(68^\circ\,45'\right)\Rightarrow\frac{A-C}{2}=42^\circ\,59'\Rightarrow A-C=85^\circ\,58'$$

بناپر دې:

$$\begin{matrix}A+C=137^\circ\,30'\\A-C=85^\circ\,58'\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{(A+C)+(A-C)}{2}=\dfrac{137^\circ\,30'+85^\circ\,58'}{2}=111^\circ\,44'\\[2ex]C=\dfrac{(A+C)-(A-C)}{2}=\dfrac{137^\circ\,30'-85^\circ\,58'}{2}=25^\circ\,46'\end{cases}$$

د یو مثلث د داخلي نیمو زاویو مثلثاتي نسبتونه

که چیرې د ABC مثلث د محیط نیمایي s وي، په هغه صورت کې لاندې رابطې شته دي.

$$1.\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\quad,\quad 2.\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$3.\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\quad,\quad 4.\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{ca}}$$

$$5.\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\quad,\quad 6.\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$7.\quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\quad,\quad 8.\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

9. $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

ثبوت

$$2\cos^2\frac{A}{2}-1=\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{2bc}}\ \bullet$$

په همدې ډول:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b^2-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}=\frac{2(s-c)2(s-b)}{2bc}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-c)(s-b)}{bc}\Rightarrow \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}\ \bullet$$

د $\sin\frac{A}{2}$ له تقسیم څخه پر $\cos\frac{A}{2}$ باندې لرو، چې

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{2bc}}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\ \bullet$$

د هیرون (Heron) فورمول

د ABC په مثلث کې د اضلاعو، محیط او مساحت ترمنځ رابطې په لاندې ډول موجودې دي.

$$\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

ثبوت

د مثلث مساحت د قاعدې او ارتفاع د ضرب د حاصل دنیمايي څخه عبارت دي.

بناپر دې

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \left(\frac{1}{2}bc\right)2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \bullet$$

5 مثال

دهغې مثلث مساحت معلوم کړئ دکوم چې $a = 11cm$، $b = 12cm$ او $c = 13cm$ وي.

حل: د دستور سره سم $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11+12+13}{2} = 18$ دی. بناپردې

$$\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{18(18-11)(18-12)(18-13)}$$

$$= \sqrt{18(7)(6)(5)} = \sqrt{3780} \approx 61.48$$

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{11\times12\times13}{4(61.48)} = \frac{1716}{245.92} \approx 6.98$$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{61.48}{18} \approx 3.42$$

په مثلث کې د ارتسام قاعدې

د ABC مثلث دضلعو او د داخلی زاویو دکوساینونو تر منځ لاندې رابطې شته دي.

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

د نیپر (Napier)رابطې

$$1.\quad \tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$
$$2.\quad \tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$
$$3.\quad \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

د یو مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې

که چېرې د ABC په یوه مثلث کې دمحیطي دایرې شعاع R او محاطي دایرې شعاع r، مساحت یې Δ او د محیط نیمایي یې s وي. په هغه صورت کې

$$1.\quad R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4\Delta}$$
$$2.\quad r = \frac{\Delta}{s} \quad , \quad 3.\quad r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

د مثلث حل

د یومثلث درې ضلعې او دریو زاویو ته د هغې عناصر وایې. که چېرې دیو مثلث درې عنصره (په دې شرط چې درې واړه زاویې معلومې نه وي) معلوم وي.نو د دې مثلث نور درې عنصره هم معلومیدلی شي. دمثلث د عناصرو معلومولو عملیه د مثلث دحل په نامه یادوي. دیوه مثلث په حل کې دمثلث له خاصیتونو څخه کار اخیستل کیږي.

6 مثال

هغه مثلث حل کړئ چې $b = 100$، $c = 100\sqrt{2}$ او $B = 30^\circ$ وي.

حل

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\Rightarrow \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\left(100\sqrt{2}\right)\sin 30^\circ}{100}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow C=45^\circ\Rightarrow A=180^\circ-\left(B+C\right)=180^\circ-\left(30^\circ+45^\circ\right)=105^\circ$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{100\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{100\times 0.2588}{0.5}=51.76$$

7 مثال

که چېرې د $\hat{ABC}$ په مثلث کې د $a=2b$ او $|A-B|=\frac{\pi}{3}$ رابطې موجودې وي،
د C زاویه وټاکئ.

حل

$$a=2b\Rightarrow A>B\Rightarrow A-B=\frac{\pi}{3}$$

د نیپر د رابطو په پام کې نیولوسره لرو، چې

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\Rightarrow \tan\frac{\pi}{6}=\frac{2b-b}{2b+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\cot\frac{C}{2}\Rightarrow\cot\frac{C}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$$

پوښتنې

د ABC قایم الزاویه مثلث چې په هغې کې $C=90^\circ$ وي، حل کړئ، داسې چې دوه عنصره یې په لاندې ډول درکړل شوي وي.

1. $c=232$, $A=52^\circ\ 46'$, 2. $a=450$, $b=240$

3. $c=540$, $a=380$, 4. $c=632$, $b=240$

5. د یوه بیرغ دلرګي لوړه څوکه له 200 متره فاصلې څخه د 30° زاویې لاندې لیدل کیږي، دبیرغ ارتفاع به څووي؟

6. دیوې ونې ارتفاع 400 متره ده. دهغې لوړه نقطه له 250 متره واټن (مسافې) څخه په څو درجو زاویه لیدل کیږي؟

7. دیو برج لوړه څوکه (کله) په افق کې له دوو نقطو څخه کومې چې، یوه له بلې 300 متره لرې دي، د 30° زاویې او 60° زاویې لاندې لیدل کیږي. ددې برج ارتفاع به څو وي.

د ABC مثلث د معلومو عناصرو له مخې نامعلوم عناصر معلوم کړئ

8. $b=24$, $c=16$, $\sin B=?$, $\sin C=?$

9. $b=20$, $c=70^\circ$, $A=?$, $C=?$

10. $a=3$, $b=7$, $B=85^\circ$, $\sin A=?$

11. که چیرې دیوې متوازی الاضلاع دوې مجاورې ضلعې a او b او دهغوی تر منځ زاویه α وي وښیئ چې د متوازالاضلاع قطر عبارت دی له

$$R=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$$

12. هغه مثلث حل کړی چې $a=45$ ، $b=34$ او $\hat{C}=52^\circ$ وي.

د ABC مثلث دلاندې شرطونو په لرلوسره حل کړئ.

13. $c = 4 \quad , \quad A = 70^\circ \quad , \quad C = 42^\circ$

14. $a = 48 \quad , \quad b = 32 \quad , \quad C = 42^\circ$

15. $a = 224 \quad , \quad b = 380 \quad , \quad c = 340$

د ABC مثلث مساحت، کوم چې شرطونه يې په لاندې ډول درکړل شوي دي حساب کړئ.

16. $b = 414 \quad , \quad c = 485 \quad , \quad A = 49^\circ\, 47'$

17. $a = 212 \quad , \quad b = 415 \quad , \quad c = 321$

18. $a = 35 \quad , \quad B = 60^\circ \quad , \quad C = 45^\circ$

19. د هغې مثلث د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګانې پيداکړئ چې ضلعې يې 53 متره 65 متره او 60 متره وي.

20. د هغې مثلث دمحاطي او محيطي دايرو شعاع ګانې پيداکړې چې ضلعې يې 55متره، 25 متره او70 متره وي.

د يو اختاري مثلث ABC لپاره ثبوت کړئ، چې

21. $Rr(\sin A + \sin B + \sin C) = \Delta$

22. $\dfrac{abc}{4s}(\sin A + \sin B + \sin C) = \Delta$

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704812829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

دریم څپرکی

دتابع گانو لیمیټ

د تابع ګانو لیمېټ

د تابع ګانو لیمېټ د تابع ګانو دنهایي قیمتونو دتحولاتو دسیر او یا مبهمو قیمتونو معلومول دي.

د تطبیقي ریاضیاتو او انجینري عمده مسالی لکه مشتق، انتګرال، سلسلې او نورې د لیمېټ په وسیله تعریف او توضیح کیږي. درياضیاتو هغه برخې چې دلیمېټ دمفهوم په پام کې نیولوسره تحلیل او بررسي کیږي، د ریاضي انالیز، کلکولس Calculus او یا دتفاضلي او انتګرال دحساب په نومونو یې یادوي. په دې څپرکي کې د تابع ګانو لیمېټ په لنډه توګه ترمطالعې لاندې نیول کیږي.

د متحول تقرب (نږدې والی)

ویل کیږي چې د x متحول یو معین عدد a ته تقرب کوي، کله چې x په اختیاري توګه a ته نږدې شي یعنې د x او a ترمنځ فرق له هر کوچنی مثبت عدد $\delta > 0$ څخه کوچنی شي. پورتنی مفهوم په سمبولیکه توګه په ورته عبارتونو په لاندې ډول افاده کیږي.

$$x \to a \text{ یا } |x-a| \to 0 \text{ یا }$$

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$$

له ښي خوا څخه د متحول تقرب $(x \to a^{+})$

که چیرې په یو ردیف کې دx قیمتونه له ښي خوا څخه په تدریج سره په اختیاري اندازه a ته نږدې شي، لکه

$$x : a+0.1, \quad a+0.01, \quad a+0.001, \quad a+0.0001, \quad .... \quad \to a^{+}$$

دا ډول تقارب ته دښي خوا یا ښي لاس تقارب (نږدې والی) وایي.

له چپې خوا څخه د متحول تقارب $\left(x \to a^{-}\right)$

کله چې د x قیمتونه له چپې خوا څخه په تدریج سره په اختیاري اندازه a ته نږدې شي، لکه

$$x: a-0{,}1 \quad , \quad a-0{,}01 \quad , \quad a-0{,}001 \quad , \quad a-0{,}0001 \quad , \quad .... \quad \to a^{-}$$

نو دا ډول نږدې والي (تقرب) ته دچپ خوا تقرب يا چپ لاس تقرب وايي.

کله چې یو متحول x له دواړو (ښي اوچپ) خوا ووڅخه a ته تقرب وکړي، نو وايي چې x، a ته تقرب کوي

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \to a^{+} \wedge x \to a^{-}\right)$$

1مثال

د x متحول 4 عدد ته نږدې کړئ (تقرب ورکړئ). په بل عبارت $x \to 4$ واضح کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} x: 4{,}1 \quad , \quad 4{,}01 \quad , \quad 4{,}001 \quad , \quad 4{,}0001 \quad , \quad ... \quad \to 4^{+} \\ x: 3{,}9 \quad , \quad 3{,}99 \quad , \quad 3{,}99 \quad , \quad 3{,}999 \quad , \quad ... \quad \to 4^{-} \end{array}\right\} \Rightarrow x \to 4$$

په یوه تابع کې د لیمېټ مفهوم

که چېرې یوه تابع $f(x)$ په یو خلاص انټرول کې چې a پکې شامل دی، تعریف شوي وي (ولو چې په a کې دتعریف وړ هم نه وي) او a ته د x په تقرب سره $f(x)$، په اختیاري توګه l ته نږدې شي. نو وايي چې د $f(x)$ لیمېټ، کله چې x و a ته تقرب وکړي له a څخه عبارت دی. په دې حالت کې لیکي چې

$$f(x) \longrightarrow l \qquad x \longrightarrow a$$

یا

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

پورتني بیانونه په بېلو، بېلو عبارتونو سره تعریف کیږي.

په یوه تابع کې د لیمېټ تعریف

د $f(x)$ تابع لیمېټ کله چې a, x ته تقرب کوي د l عدد سره مساوي دی که چېرې

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

دا سمبولیک عبارت له لاندې دوو عبارتونو سره معادل دی.

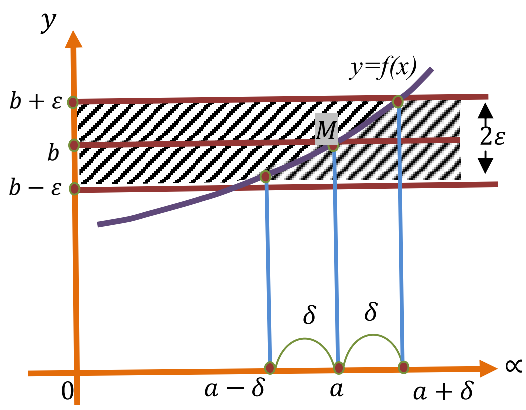
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$

اویا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

پورتنی تعریف داسې هم توجیهه کیدلی شي

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \left(|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-l| \to 0 \right)$$



د ښي او چپ خوا لیمېټونه

1. د $f(x)$ تابع په a عدد کې ښي خوا لیمېټ l_1 لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یوکوچنی عدد $\delta > 0$ وجود ولري.، داسې چې

$$x \in (a , a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon , l_1 + \varepsilon)$$

او په سمبولیکه توګه لیکو

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l_1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

2. د $f(x)$ تابع په a کې د l_2 چپ خوا لیمېټ لري که چېرې دهر $\varepsilon > 0$ لپاره یو عدد $\delta > 0$ وجود ولري، داسې چې

$$x \in (a-\delta , a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon , l_2 + \varepsilon)$$

په مشابه ډول لیکي، چې

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

3. د $f(x)$ تابع کله چې $x \to a$، د l لیمېټ لري یعني $\lim_{x \to a} f(x) = l$ په دې شرط، چې

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

په دې ترتیب که دیوې تابع ښي خوا او چپ خوا لیمېټونه سره مساوي نه وي، نو هغه تابع لیمېټ نه لري.

مثال 2

وښیٔ چې د $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ لپاره $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$ دی.

حل: د دې تابع ښي او چپ خوا لیمېټونه مطالعه کوو.

x	3.5	3.1	3.01	3.001	$\to 3^+$
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$

او

x	2.5	2.9	2.99	2.999	$\to 3^-$
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	$\to 6$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$$

ليدل كيږي چې د ښي خوا او چپ خوا لېمېټونه سره مساوي دي، يعني

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

بناپر دي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

3 مثال

ثبوت کړئ چې $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ موجوده نه ده.

x	2.5	2.1	2.01	2.001	$\to 2^+$
$g(x)$	1	1	1	1	$\to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$

په همدې ډول

x	1.5	1.9	1.99	1.999	$\to 2^-$
$g(x)$	-1	-1	-1	-1	$\to -1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} g(x) = -1$$

لیدل کیږي چې $\lim_{x\to 3^+} g(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^-} g(x) = -1$ دی نو $\lim_{x\to 2} g(x)$ موجود نه دي.

4 مثال

د لیمېټ تعریف وکاروئ وښیئ چې $\lim_{x\to 3}(4x+8) = 20$ دی.

حل: د اختیاري عدد $\varepsilon > 0$ لپاره قبلوو چې $|(4x+8)-20| < \varepsilon$ وي. اوس د $\vartriangle > 0$ عدد معلوموو.

$$|(4x+8)-20| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

په دې ترتیب $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ او لرو، چې

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |4x+8-8-12| < \varepsilon \Rightarrow |(4x+8)-20| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 3}(4x+8) = 20 \ .$$

بې نهایت، د تابع د لیمټ په توګه

ویل کیږي چې $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$، که چېرې وکړای شوچې $f(x)$ د هر اختیاري مثبت عدد څخه لوی په پام کې ونیسو. په داسې حال کې چېx په اختیاري توګه a عدد ته نږدې شي.

په همدې ډول وایو چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ که چېرې $f(x)$ له هر منفي اختیاري عدد څخه کوچنی په پام کې ونیول شي، په داسې حال کې چې x په اختیاري توګه a ته نږدې شي.

په پورتنیو حالاتو کې نشو ویلی چې f په $x=a$ کې لیمېټ لري، ځکه چې $+\infty$ او $-\infty$ عددونه، نه دي.

5 مثال

د $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ تابع په پام کې ونیسی، ځینې قیمتونه په لاندې جدول کې محاسبه شوي دي.

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	1	4	100	10000	100000

لیدل کیږي چې په هره پیمانه چې x د ښي خوا څخه 2 ته نږدې شي، $f(x)$ لوییږي. بناپر دې کولی شو $f(x)$ بې اندازې لوی کړو. په دې شرط چې x بې اندازې له ښي خوا څخه 2 ته نږدې شي، نو

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$$

په همدې ډول لاندې جدول په پام کې نیسو.

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	1	4	100	10000	100000

لیدل کیږي چې په هر ه پیمانه چې x له کیڼې خوا څخه 2 ته نږدې شي، د $f(x)$ قیمت لوییږي.

بناپردې کولی شو $f(x)$ بې اندازې بې لوی کړو، په دې شرط چې x له چپې خواڅخه 2 ته بې اندازې نږدې شي، نو

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$$

په پورته دواړو حالتونوکې په لاس راځي چې $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

6 مثال

له پورتني مثال څخه پیروي وکړئ، وښيئ چې $\lim_{x\to 2^+}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$

لیمېټ په بې نهايت کې

وايو چې که $x>N$ وي، نو $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ دی، که چېرې دهر مثبت عدد ε لپاره يو مثبت عدد N موجود وي، داسې چې له $|x|>N$ نامساوي څخه د $|f(x)-l|<\varepsilon$ نامساوي په لاس راشي. يعني

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0,\exists N>0:|x|>N\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

پورتنی تعریف د دوو حالتونو ضمانت کوي.

اول. که $x>N$ وی، نو $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ دی.

دوم. که $x<-N$ وي، نو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ وي.

د تابع محدوديت

یوه تابع $f(x)$ په یوه ناحیه (انټرول) کې محدوده بلل کيږي، که چېرې د $|f(x)|$ قيمتونه له يو معين مثبت عدد څخه لوی نشي، يعني

$$|f(x)|\le M$$

7 مثال

د $f(x)=\cos x$ تابع محدوديت ارزيابي کړئ.

حل: څرنګه چې دهر حقیقي عدد x لپاره د $Cosx$ قيمت د $[-1,1]$ په ترڅ کې

انټرول کې محدود دی، یعنې $-1 \le \cos x \le 1$ په بل عبارت $|\cos x| \le 1$، نو دا تابع د حقیقي عددونو په هر انټرول کې محدوده ده.

8 مثال

د $g(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع محدودیت د $(1\,,\infty)$ او $(-\infty\,,-1)$ په انټرولونو کې وڅېړئ.

حل: په $(1,\infty)$ کې دهر x لپاره دتابع قیمتونه له 1 څخه کوچني دي. نو $g(x)$ تابع په دې انټرول کې محدوده ده. مګر دهمدې تابع قیمتونه په $(-\infty\,,-1)$ کې په اختیاري توګه لوییدلی شي. نو دا تابع په دې انټرول کې غیر محدوده ده.

د لیمېټ اساسی قاعدې

که چېرې $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ او $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ معین وي، په هغه صورت کې لاندې قاعده صدق کوي.

1. د تابع ګانو د مجموعې لیمېټ د هغوی د لیمېټونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

2. د دوو تابع ګانو د ضرب دحاصل لیمېټ د هغوی دلیمېټونو دضرب له حاصل سره مساوي دی، یا:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)].[\lim_{x\to a} g(x)]$$

3. د تابع ګانو د نسبت لیمېټ د هغوی د لیمېټونو له نسبت سره مساوي دی. په دې شرط چې دویمه تابع (مخرج) صفر نه وي. په بل عبارت:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) \ne 0$$

نتیجه. د $f(x)$ تابع او ثابتو عددونو c او λ لپاره لرو، چې

$$1.\quad f(x)=c \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x)=c$$

$$2.\quad f(x)=x \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x)=a$$

$$3.\quad \lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\longrightarrow a} f(x)\right]^n$$

$$4.\quad \lim_{x\to a}[\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$$

$$5.\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

9 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to 2}\frac{5x+6}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(5x+6)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)}=\frac{5\lim\limits_{x\to 2}x+6}{3\lim\limits_{x\to 2}x+2}=\frac{5\cdot 2+6}{3\cdot 2+2}=\frac{16}{8}=2.$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6.$$

یادښت. په هغه حالتونو کې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ او $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ وي، نو ممکنه ده چې د لیمیټ خاصیتونه صدق نشي. لاندې مثالونو ته پاملرنه وکړئ

10 مثال

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\infty\,,\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2}=\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to 1}[x(1+x)]=2$$

11 مثال

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+5\right)=\infty\,,\ \lim_{x\to\infty}\left(2-x^2\right)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\left(x^2+5\right)+\left(2-x^2\right)\right]=7$$

د تابع ګانو د قيمتونو ترتيب او لیمېټونه يې

1. که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې وي، داسې چې $f(x)<g(x)$ ، نو دلیمېټونو د موجوديت په صورت کې لرو چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ يعنې

$$f(x)<g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$$

2. که چېرې د $f(x)$ ، $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې په يو خلاص انټرول کې کوم چې د a عدد په ځان کې لري، د هرx x (ولو $x\neq a$) لپاره د $f(x)\le g(x)\le h(x)$ نامساوي ګانې صدق کړي.

او که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ دی، يعنې

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\le g(x)\le h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=l=\lim\limits_{x\to a} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=l$$

12 مثال

د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ په پام کې نيسو. څرګنده ده چې د $f(x)<g(x)$ لپاره $x>1$ خو

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{15-\frac{4}{x}}{5+\frac{6}{x}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{15+\frac{4}{x}}{5-\frac{6}{x}}=\frac{15}{5}=3.$$

ليدل کيږي چې $f(x)<g(x)$ ، مګر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ ده.

13 مثال

که چېرې $u(x)$ يوه تابع وي کومه چې د $1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{4}$ خاصيت ولري، نو $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$ معلوم کړئ.

حل: په څرګنده لیدل کیږي، چې

$$\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})=1=\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{4})=1$$

د پورتنۍ قضیې له مخې $\lim_{x\to 0}u(x)=1$ دی.

14 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to a}x^n=\left(\lim_{x\to a}x\right)\left(\lim_{x\to a}x\right)\ldots\left(\lim_{x\to a}x\right)=aaa\ldots a=a^n$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to a}\left(cx^4+dx^5\right)=\lim_{x\to a}\left(cx^4\right)+\lim_{x\to a}\left(dx^5\right)=ca^4+da^5$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to a}\frac{8x^2-5x+3}{4x^3+7x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left(8x^2-5x+3\right)}{\lim\limits_{x\to a}\left(4x^3+7x+6\right)}=\frac{8a^2-5a+3}{4a^3+7a+6}$$

د پولینومي او ناطقو تابع ګانو لیمېټ

که چیرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولینومونه وي، داسې چې $Q(x)\neq 0$ نو

$$1.\quad \lim_{x\to a}P(x)=P(a)\quad ,\quad 2.\quad \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

15 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to 2}\left(x^3-5x^2+4x+9\right)=2^3-5\cdot 2^2+4\cdot 2+9=5$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^4-5x+8}{-x^3+4x^2+6}=\frac{2\cdot 3^4-5\cdot 2+8}{-3^3+4\cdot 3^2+6}=\frac{150}{15}=10$$

په بې نهایت کې د پولینوم لیمېټ

د پولینوم لیمېټ کله چې $x\to\pm\infty$ وي د هغه حد د لیمېټ سره مساوي دي، کوم چې لوړتوان لري.

16مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to\infty}\left(2x^4-8x^3-3x^2+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(2-\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}x^4\right)\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}x^4\right)\times 2=\infty\times 2=\infty$$

د لیمیټ مبهم حالتونه

د جمع د حاصل، دضرب د حاصل او دتابع ګانو دنسبت دلیمیټونو په حسابولو کې ځینې وخت دمبهمو شکلونو$\infty-\infty$ ، $0\bullet\infty$ ، $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ سره مخامخ کیږو چې دلته موږ د هغوی نمونې ترکتنې لاندې نیسو.

لومړی حالت $\frac{0}{0}$: که چېرې $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ د $\frac{0}{0}$ شکل ولري، په داسې حالت کې چې $f(x)$ او $g(x)$ پولینومي تابع ګانې دي، په صورت او مخرج کې داختصار وړ مشترک فکتور $x-a$ دی. چې ځینې وختونه امکان لري، دوه ځلیز او یا څوځلیز وي.

17مثال

د هغو لیمیټونو څو نمونې چې د $\frac{0}{0}$ حالت ولري، تحلیل کیږي

$$a.\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\infty$$

$$b.\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8.$$

$$c.\quad \lim_{h\to o}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to o}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to o}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to o}(2x+h)=2x.$$

18مثال

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}$ پیداکړئ.

حل: دلته $x=y^5$ او $a=b^5$ وضع کوو، په دې ترتیب:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{y^5-b^5}=\lim_{y\to b}\frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{1}{(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}=\frac{1}{5b^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}}$$

دوهم حالت $\dfrac{\infty}{\infty}$. که چېرې $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل غوره کړي، په دې حالت کې $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ د $\dfrac{0}{0}$ په شکل بدلیږي.

له دې سره سره چې د دې دستور په رعایت سره، کولی شو په نهایي تحلیل کې ابهام رفع کړو، ولې امکان لري چې دمسالې شکل کله په اسانۍ سره دحل وړ وي، دمثال په توګه که د دوو تابع ګانو، له هغې جملې څخه د دوو پولینومونو په نسبت کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ حالت څرګنده شي، نوپه دې حالت کې صورت او مخرج په عین وخت کې دمتحول پر لوړ طاقت ویشو، ابهام له منځه ځي.

19 مثال

دهغه حالت دلیمېټونو چې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ حالت لري، څو نمونې وړاندې کوو.

$$(i).\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{4x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{\infty+0}{4+0}=\frac{\infty}{4}=\infty$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

$$(iv).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-8x^2+5}{4x^5+x^4-6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^5}}{4+x-\frac{6}{x^4}}=\frac{2-0+0}{4\infty+\infty-0}=\frac{2}{\infty}=0$$

نتیجه.که چېرې د $p_m(x)$ پولینوم درجه m اود $p_n(x)$ پولینوم درجه nوي، په دې حالت کې د $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}$ د پیداکولو لپاره دکسر صورت او مخرج په x^{α} تقسیموو په داسې حال کې چې$\alpha=\max(m,n)$ دی. په لاس راځي، چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p_m(x)}{p_n(x)}=\begin{cases} c & , \quad m=n \\ \pm\infty & , \quad m>n \\ 0 & , \quad m<n \end{cases}$$

کله که $m=n$ وي، نو دc ثابت عدد چې دصورت او مخرج دهغو حدونو دضريبونو نسبت دی، کوم چې لوړطاقتونه لري، مطلوب لیمېټ په لاس راکوي

20 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to\infty}\frac{6\times2^{5x}-3\times2^x-8}{3\times2^{5x}-2^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{5x}\left(6-\frac{3}{2^{4x}}-\frac{8}{2^{5x}}\right)}{2^{5x}\left(3-\frac{3}{2^{4x}}+\frac{1}{2^{5x}}\right)}=\frac{6}{3}=2$$

دریم حالت $0\times\infty$. داسې امکان شته چې $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$ د $0\times\infty$ په شکل وي. نوېه داسې یو حالت کې $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ د $\dfrac{0}{0}$ شکل ځان ته غوره کولی شي او دا حالت په اصل کې د $\dfrac{0}{0}$ د حالت معادل دی.

21 مثال

$$\lim_{x\to5}\left[(x^2-25).\frac{1}{x-5}\right]=\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=10$$

څلورم حالت $\infty-\infty$. که چېرې $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ د $\infty-\infty$ شکل ولري، په هغه صورت کې $f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$ په یوله $\frac{\infty}{\infty}$ او یا $0\times\infty$ حالتونو بدلیږي. په هغه صورت کې چې داحالت د دووکسرونو په تفریق (تفاضل) یا دجذري افادو په تفاضل کې پیښ شي، نو دکسرونو دیو له بل څخه د تفریق کولو یا د جذر لرونکو افادو ضرب او تقسیم دهغوی پر مزدوجونو باندې، امکان لري، نوموړی ابهام د حذف وړ وي.

22 مثال

د $\infty-\infty$ ډوله لیمېټونه نمونه وار بررسی کوو:

$$(20).\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

$$(21).\quad \ell im_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\ell im_{x\to1}\frac{1+x-1}{1-x^2}=\ell im_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\infty$$

$$(22).\quad \lim_{x\to\infty}\left(x^5-8x^3\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^5\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\right]=\infty\times1=\infty$$

د مثلثاتي تابع ګانو لیمېټونه

که د مثلثاتی تابع ګانو د لیمېټونو په حسابولو کې مبهم حالتونه منځ ته راشي چې تر ټولو مهم شکل په دې ډول لیمېټونو کې د $\frac{0}{0}$ شکل دی او غالبا داشکل دیو عمده فکتور $\frac{\sin x}{x}$ په تشخیص کولوسره رفع کیږی.

مګر دهغې دمخه لاندې نمونې له نظره تیروو.

23مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0 \quad , \quad (ii).\quad \lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad , \quad (iv).\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

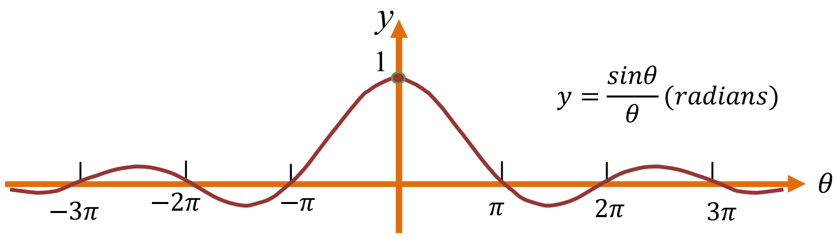
$$(v).\quad \lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

$$(vi).\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x} = \infty$$

اساسي قضیه

کله چې د x زاویه صفر ته تقرب کوي، د $sinx$ او x نسبت 1 ته تقرب کوي یعنې

$$\lim_{x\to o}\frac{\sin x}{x} = 1$$



24 مثال

$$(i).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1$$

$$(ii).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\alpha\cdot 1=\alpha$$

$$(iii).\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$(iv).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}{\beta\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

$$(v).\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\,.\,\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

د طاقتنما (اکسپوننشیل) او لوګارتمي تابع ګانو لیمېټ

په لوګارتمي اوطاقتنما تابع ګانو کې هم د لیمېټ نیوني په وخت کې مبهم حالتونه منځ ته راځي، په خاصه توګه د 1 ډوله مبهم حالت په دې تابع ګانو کې تر سترګو کیږي.

د طاقتنما تابع ګانو په لیمېټونو کې مبهم شکل درفع کولو لپاره دا لاندې قضیه محراقي ماهیت لري.

اساسي قضیه

که چیرې n بې نهایت ته تقرب وکړي، نو $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ افاده $e=2{,}7182818284\ldots$ عدد ته تقرب کوي یعنې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

يادښت.که چېرې دقيق ثبوت ته له مراجعې څخه پرته د $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ دترادف قيمتونه په يو جدول کې په تدريج سره فهرست شي،نو لرو چې

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

بناپر دې $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=2,718281828...$ دی. د $e=2,7182818284..$ عدد د اويلر د عدد په نامه يادېږي.

1. که x بې نهايت ته تقرب وکړي، د $\varepsilon(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ تابع $e=2,7182818284...$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

نتيجه

$$1.\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e \quad ،2.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

$$3.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad ،\ 4.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

ثبوت

$$1.\quad x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow \alpha=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$2.\quad u=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

2. د طبيعي لوګارتم د خاصيتونو څخه لرو، چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

3. په دې برخه کې لاندې تعويض په پام کې نيسو.

$$y=e^x-1\quad\Rightarrow\quad e^x=1+y\quad\Rightarrow\quad x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1\cdot$$

25 مثال

$$a.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e.1^2=e.1=e$$

$$b.\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y} = 1$$

$$c.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x-1+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+3} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{3} = e^{4}\cdot 1 = e^{4}.$$

عمومي حالت. په عمومي ډول کې د لوګارتم او لیمېټ د خاصیتونو په پام کې نیولوسره لرو چې

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \lim_{x\to a}\left[e^{\ln u(x)}\right]^{v(x)} = \lim_{x\to a}\left[e^{[\ln u(x)]v(x)}\right] = e^{\lim\limits_{x\to a}[[\ln u(x)]v(x)]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a}[\ln u(x)]\lim\limits_{x\to a}v(x)} = e^{\ln\left[\lim\limits_{x\to a}u(x)\right]\lim\limits_{x\to a}v(x)} = \left[\lim_{x\to a}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \left[\lim_{x\to a}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$$

که چېرې د یوې طاقتنما (اکسپوننشیل) تابع لیمېټ د $\lim\limits_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}$ په شکل وي او د 1^{∞} مبهم شکل ځان ته غوره کړي، نوپه دې حالت کې د $\alpha = u(x)-1$ په عوض کولو سره لرو، چې

$$\lim_{x\to a}u^{v} = \lim_{x\to a}\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+u(x)-1)^{\frac{v(x)}{u(x)-1}(u(x)-1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v(x)}{\alpha}\alpha}\right] = \left[\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v(x)\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha = u-1$ او $u\to 1$، نو $\alpha\to 0$ په نتیجه کې

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}$$

بناپر دي:

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = e^{p} \quad , \quad p:=\lim_{x\to a}\left[v(u-1)\right]$$

باید یادونه وکړو چې پورتنی فورمول یوازې د 1^{∞} په مبهم حالت کې د تطبیق وړدی.

26 مثال

$$I.\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^{1} = e$$

$$II.\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{p} \quad , \quad (v=\frac{1}{x}, u=\cos x)$$

$$p=\lim_{x\to 0}\left[v\left(u-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\cos x-1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{2}x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{2}x-(\cos^{2}x+\sin^{2}x)}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$$

یادښت. د مختلفو تابع ګانو په لیمېټ کې د $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $0\bullet\infty$ ، $\infty-\infty$ او 1^{∞} مبهم حالتونه په قسمي توګه بررسي شوي دي.

په پنځم څپرکي کې د هوپيتال دقاعدو تر عنوان لاندې پورتني پنځه حالتونه د دوو نورو مبهمو حالتونو 0^0 او ∞^0 په شمول په عمومي توګه د مشتق په مرسته تر مطالعې لاندې نیول شوی دي.

د تابع ګانو متمادیت (پیوستګي)

یوه تابع $f(x)$ د $x = a$ په نقطه کې متمادي بلل کیږي، که چېرې دالاندې دری شرطونه صدق کړي.

اول ــ د f تابع په a کې تعریف شوې وي.

دوهم ــ د f تابع په a کې لیمېټ ولري.

دريم ــ د f تابع لیمېټ په a کې له $f(a)$ سره مساوي وي یعنې

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

کله که د $f(x)$ تابع د انټرول په هره نقطه کې متمادي وي، نو $f(x)$ په هغه انټرول کې متمادي بلل کیږي.

قضیه

1. که چېرې $\lim_{x\to a} g(x)=b$ او د f تابع په $x = b$ کې متمادي وي، نو

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$$

2. که $g(x)$ تابع په $x = a$ او $f(x)$ تابع په $x = g(a)$ کې متمادي وي، نو د $f(g(x))$. تابع په $x = a$ کې متمادي ده. یعنې

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(g(a))$$

نتیجه:

$$1.\quad \lim_{x\to a}(f(x))^{\alpha} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$$

$$2.\quad \lim_{x \to a}\left[a^{f(x)}\right] = a^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$$

$$3.\quad \lim_{x\to a}\left(\log_b f(x)\right) = \log_b\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

$$4.\quad \lim_{x\to a}\left(\sin f(x)\right) = \sin\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

غیر متمادیت (انفصال)

که چیرې دfتابع په $x = a$ کې حد اقل یو له دریو شرطونو څخه صدق نه کړ ي نو وایو چې f په a کې غیر متمادی ده او a د هغې دانفصال نقطه ده.

انفصال په درې ډوله تشخیص کیږي.

لومړی ډول ــ د f تابع په $x = a$ کې د کیڼي اوښي خوا لیمېټونه لري، مګر دواړه سره مساوي نه وي.

دوهم ډول ــ که چیرې حد اقل یوله دوو لیمېټونو څخه موجود نه وي.

دریم ډول ــ که چیرې یوه تابع په یوه نقطه کې لیمېټ ولري ولې په هغې نقطه کې تعریف شوي نه وي (یوازې یوه نقطه خالي وي) په دې حالت کې کیدای شي انفصال له منځه ولاړشي.

27 مثال

(الف) د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع په $x=0$ کې غیر معینه ده او دا نقطه د تابع د تعریف په ناحیه کې شامله نه ده، نو دا دوهم او دریم ډول انفصال دی.

(ب) د $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ تابع په$x=2$ کې لیمېټ لري، خو 2 د$g(x)$ دتعریف په ناحیه کې شامل نه دی، نودا انفصال دریم ډوله انفصال دی.

په حقيقت کې د $g(x)$ او $h(x) = x + 2$ تابع ګانې له $x = 2$ نقطې څخه پرته يو پر بل سره منطبقې دي، خو د $g(x)$ تابع ګراف يوازې په $x = 2$کې يوه خالي نقطه لري او کولی شو دا انفصال په لاندې ډول حذف کړو

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

د متماديت خاصيتونه

که چېرې د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې متمادي وي، نود $f(x)g(x), f(x) \pm g(x)$ او $\frac{f(x)}{g(x)}$تابع ګانې هم متمادي دي (په يوه نقطه يا انټرول کې) د $\frac{f(x)}{g(x)}$ په حالت کې بايد مخرج په اړونده نقطه يا انټرول کې صفر نه وي.

څرنګه چې د $f(x) = x$ تابع متمادي دی، نو د هر طبيعي عدد n لپاره د $g(x) = x^n$ تابع هم متمادي ده، په نتيجه کې هره پولينومي تابع متمادي ده.

پوښتني

لاندي لیمېټونه محاسبه کړئ.

1. $\lim\limits_{x\to 4} 25$, 2. $\lim\limits_{x\to 4}(5x)$, 3. $\lim\limits_{x\to 4}(6x+8)$

4. $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-5x+9)$,5. $\lim\limits_{x\to 0}(3x^8-5x^4+9x+1)$

6 . د $f(x)=|x-2|$ تابع لپاره $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$ او $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$ حساب کړئ.

7 .د $f(x)=\dfrac{3x-2}{|x|-2}$ تابع لپاره $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ او $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ حساب کړئ.

8 د $f(x)=\begin{cases}3x-2, x\le 1\\ 2x+a, x>1\end{cases}$ په تابع کې a داسې وټاکې چې $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وجود ولري.

لاندي لیمېټونه حساب کړئ.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$, 10. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$, 11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, 13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$, 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{2x^2}$, 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$, 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^3}$, 19. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{x^2-1}$, 20. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-3}{2x^2+7x-1}$

21. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$, 22. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{16x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{4x+\sqrt{x}}}$

23. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}$, 24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$, 25. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{-\sqrt{2}x}$

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$, 27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$, 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1+x}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n}-1}{2^{n}+2}$, 30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^{2}}$, 31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[5]{x^{5}-x^{3}+1}}{2x^{2}-1}$, 33. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-1}$, 34. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}$

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+\sqrt{x}}}$, 36. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}}\right)$

د لاندې هرې يوې تابع لپاره هغه فاصله معلومه کړئ چې تابع پکې متمادي وي.

37. $f(x)=x^{2}-3x+4$, 38. $g(x)=\frac{4}{x^{2}-8+10}$

39. $f(x)=x^{4}+e^{x}-5$, 40. $g(x)=\log(2x-6)$

41. $f(x)=\frac{e^{x}+4x}{3e^{2x}-3}$, 42. $g(x)=\sqrt{25-x^{2}}$

43. وښيي چې د $f(x)=x^{3}$ تابع دټولو حقيقي عددونو په سېټ کې متمادي ده.

44. ثبوت کړی چې $g(x)=|x|$ د $x=0$ په نقطه کې متمادي ده.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

څلورم څپرکی

دتابع گانو مشتق

د تابع ګانو مشتق

د مشتق مقدماتي فکر د اولسمې میلادي پیړۍ په لومړیوکې د فرانسوي ریاضي پوه پیرفرما له خوا منځ ته راغلی دی، خو د هغې دقیق مفهوم دهمغې پیړۍ په منځ کې د دوو مشهورو ریاضي پوهانو اسحق نیوټن (انګلیسي) او لایب نېتز (الماني) له خوا په یووخت، مګر یو له بل څخه مستقل بنیان ګذاري شوی دی.

نن ورځ په ریاضیاتو کې مشتق د تفاضلي حساب او انتګرال یو اصلي او مهم مفهوم دی.

د ریاضیاتو ځینې عمده بحثونه، لکه انتګرالونه او تفاضلي معادلات د مشتق پرمفهوم بنا شوي دي. مشتق یو اوږد بحث دی، له دې سره سره به کوښښ وشي چې دا موضوع د امکان په صورت کې فشرده او لنډه تر مطالعې لاندې ونیول شي.

د مشتق تعریف

که چېرې د$y=f(x)$ په تابع کې دx متحول د h $\left(\Delta x\right.$یا$\left.\right)$ په اندازه زیات شي نو نوموړي تابع د $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ په اندازه زیاتوالی (تزاید) کوي.

د دی تابع اومتحول د زیاتولو نسبت عبارت دی له

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

کله چې

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

موجود وي، ویل کیږي چې نوموړي تابع د x په نقطه کې مشتق لري. د پورتني یاد شوي لیمیټ لاس ته راوړني ته دمشتق نیونې عملیه وایي. د $y=f(x)$ تابع مشتق د پورتنی نمونې سره سم په یو له لاندې سمبولونو سره ښودل کیږي.

$$y'=f'(x) \text{ ،} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx} \quad \text{اویا} \quad Dy=Df(x)$$

یعني

$$f'(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

اویا

$$y':=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}:=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}:=f'(x)$$

د وروستنیو رابطو سره معادل د $f(x)$ تابع مشتق په لاندې ډول تعریف کیږي.

$$f'(x):=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

او د $f(x)$ مشتق په $x=x_0$ کې عبارت دی له

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د مشتق په حسابونه او د قضیو په ثبوت کې دا پورتني هر یو تعریف په کاریږي.

خو د هغوی څخه ځینې په خاصوموادردو کې ګټور او مناسب وي.

1مثال

د $f(x)=x^2$ تابع مشتق لاس ته راوړئ.

$$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

بناپردي

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

مشتق پذيري او متماديت

هغه تابع چې په يوه نقطه کې مشتق پذيره وي، نو په هغه نقطه کې متمادی هم وي مګر برعکس ديوې تابع متماديت دهغې تابع د مشتق پذيری لپاره کافي نه ده يعنې دا امکان شته چې يوه تابع په يوه نقطه کې متمادي وي، ولې مشتق پذيره نه وي.

د مثال په توګه د $f(x)=|x|$ تابع په $x=0$ کې متمادي ده اما مشتق پذيره نه ده.

د طاقت تابع مشتق

د $f(x)=x^n$ ، $(n\in\mathbb{N})$ تابع مشتق عبارت دی له $f'(x)=nx^{n-1}$

ثبوت

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n$$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x)=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n$$

د وروستنی رابطې د تقسيم څخه پر h باندې په لاس راځي چې

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}xh+\ldots+h^{n-1}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}xh+\ldots+h^{n-1})$$

$$\boxed{\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}\Rightarrow (x^n)'=nx^{n-1}}$$

پورتنی قاعده د طبیعي عدد n لپاره ثبوت شوه، خودا فورمول کله چې n حقیقي عدد وي هم صدق کوي چې په وروسته کې به ثبوت شي. (دلوګارتم په مرسته دمشتق نیوني په مبحث کې).

2 مثال

دپورتني قاعدې له مخې د $y=\sqrt{x}$ مشتق پیداکوو.

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow\quad(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3 مثال

د $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ د تابع مشتق په لاس راوړئ.

$$y'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}$$

4 مثال

د ثابتي تابع $g(x)=c$ مشتق حساب کړئ.

$$g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}\Rightarrow g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

د مشتق نیونې الجبري قاعدې

که چېرې د u او v تابع ګانې د مشتق نیونې وړوي، نو

$$(u+v)'=u'+v'\quad,\quad(uv)'=u'v+uv'\quad,\quad\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

5 مثال

که v,u او w دمشتق نیوني وړ تابع ګانې وي.

$$(uvw)' = [u(vw)]' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw')$$
$$\Rightarrow (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

6 مثال

که v دمشتق نیونې وړ تابع او c یو ثابت عدد (ثابته تابع) وي، نو

$$(cv)' = c'v + cv' = 0 \cdot v + cv' = cv' \Rightarrow (cv)' = cv'.$$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

د ساین او کوساین مثلثاتي تابع ګانو مشتق عبارت دی له

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x}$$

7 مثال

د $y = tanx$ او $y = cotx$ تابع ګانو مشتق پیداکړی.

حل. دمشتق نیوني دقاعدو له مخې لرو چې

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\Rightarrow (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \quad , \quad (\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

8 مثال

د $y=\frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

$$y'=\frac{2x\cos x-(-\sin x)x^2}{\cos^2 x}=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

9 مثال

د $y=x^3\sin x$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$y'=(x^3)'\sin x+(x^3)\sin' x=3x^2\sin x+x^3\cos x.$$

د لوگارتمي تابع گانو مشتق

د لوگارتمي تابع $y=\log_a x$ مشتق عبارت دی له $y'=\frac{1}{x}\log_a e$ یعني

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e}$$

نتیجه. په خاصو حالتونو کې دطبیعي او معمولي لوگارتمونو لپاره لرو، چې

$$(\ln x)'=(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

$$(\log x)'=(\log_{10} x)'=\frac{1}{x}\log_{10} e=\frac{1}{x}\log e.$$

بناپردې

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}\log e$$

د مرکبو تابع ګانو (تابع تابع) مشتق

که چېرې $y = f(u)$ او $u = g(x)$ يعني $y = f(g(x))$ وي، په دې صورت کې

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$ يا $y'_x = y'_u\, u'_x$ اويا $f'_x(g(x)) = f'_g(g(x))g'_x(x)$

10مثال

د $y = \sin(ax^2 + bx + c)$ مشتق پيداکړئ.

$u = ax^2 + bx + c$ او $y = \sin u$ ، $u'_x = 2ax + b$ او $y'_u = \cos u$

$$\Rightarrow y'_x = y'_u u'_x = (\cos u)(2ax + b) = (2ax + b)\cos(ax^2 + bx + c).$$

11مثال

د $g(x) = (\ln x)^3$ تابع مشتق پيدکړئ.

$$g'(x) = 3(\ln x)^2(\ln x)' = \frac{3}{x}(\ln x)^2.$$

د ضمني تابع ګانو مشتق

که چېرې د x او y متحولونه د $y = f(x)$ رابطې په وسيله يو دبل سره مربوط شي. په دې حالت کې وايې چې y د x متحول صريحه تابع ده. ولې دا امکان شته چې د x او y ترمنځ اړيکې د $F(x, y)$ رابطې په مرسته تعين شوې وي په دې صورت کې ويل کيږي چې y د x ضمني ياغير صريحه تابع ده.

د مثال په توګه $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ دوه صريحې تابع ګانې $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ او $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ افاده کوي، په داسې حال کې چې پورتنې معادله دنوموړې تابع ګانو ضمني حالت دی.

د ضمني تابع y مشتق نیوني لپاره نظر x متحول ته، په معموله توګه د معینې معادلې د واړه خواوې نظرx ته دا ډول مشتق نیسو چې په هغې کې y د x نظر متحول ته مربوط فرض شي.

12مثال

د y مشتق نظر x ته په $x^2+y^2-r^2=0$، ضمني تابع کې پیداکړئ، دلته r یو ثابت عدد دی.

حل

$$(x^2+y^2-r^2)'=0 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{x}{y}.$$

13مثال

د yمشتق نظر x ته، په ضمني تابع $y^6-y-x^2=0$ کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y^6-y-x^2=0 \Rightarrow 6y^5y'-y'-2x=0 \Rightarrow y'=\frac{2x}{6y^5-1}$$

د لوګارتم په مرسته مشتق نیونه

په ځینو مواردو کې د تابع ګانو مشتق دلوګارتم په مرسته نیول کیږي، داسې چې په اوله کې د $y=f(x)$ رابطې دواړو خواو طبیعي لوګارتم نیسو.

$$\ln y=\ln f(x)$$

په $lnf(x)$ کې دلازمو عملیو سره، د پورتني رابطې دواړه خواوې دضمني تابع په توګه مشتق نیولی شو یعني

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x)=f(x)[\ln f(x)]'$$

د طاقت د تابع مشتق

که څه هم د $y=x^n$، $n\in\mathbb{N}$ مشتق مولاس ته راوړی دی، خو اوس د $y=x^a$، $\alpha\in\mathbb{R}$ تابع مشتق دلوګارتم په مرسته پیداکوو.

$$y=x^\alpha \Rightarrow \ln y=\ln x^\alpha \Rightarrow \ln y=\alpha\ln x \Rightarrow (\ln y)'_x=(\alpha\ln x)'_x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x} \Rightarrow y'=\frac{\alpha}{x}y=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\Rightarrow (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

د اکسپوننشیل تابع مشتق

د $y=a^x$ تابع مشتق په دریو طریقو نیول کیدلی شي. دمشتق له تعریف څخه د معکوسي تابع له مشتق څخه او دلوګارتم په مرسته مشتق نیونه. اوس وروستني طریقه کاروو.

$$y=a^x \Rightarrow \ln y=\ln a^x \Rightarrow \ln y=x\ln a \Rightarrow (\ln y)'_x=(x\ln a)'_x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln a \Rightarrow y'=y\ln a=a^x\ln a \Rightarrow y'=a^x\ln a$$

$$\Rightarrow (a^x)'=a^x\ln a$$

نتیجه

$$(e^x)'=e^x\ln e=e^x \Rightarrow (e^x)'=e^x$$

14مثال

د $y=x^{2x}$ تابع مشتق دلوګارتم په مرسته پیداکړئ.

$$\ln y=\ln x^{2x} \Rightarrow \ln y=2x\ln x$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = (2x\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = 2(\ln x + 1)y = 2(\ln x + 1)x^{2x}.$$

15مثال

د $y = u^{v}$ تابع، u او v د x تابع ګاني دي، مشتق په لاس راوړئ.

$$\ln y = \ln u^{v} \Rightarrow (\ln y)' = (v \ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'\ln u + v(\ln u)'$$

$$\Rightarrow y' = (v'\ln u + v\frac{u'}{u})y \Rightarrow y' = (v'\ln u + v\frac{u'}{u})u^{v}.$$

16مثال

د $y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

$$\Rightarrow y' = \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

د معکوسو تابع ګانو مشتق

که f او g مشتق پذیرې او یو د بل دوې معکوسې تابع ګاني وي یعني

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

په دې صورت کې

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{يا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ثبوت. د ضمني تابع ګانو او د تابع تابع مشتق د خاصيتونو په پام کې نيولو سره لرو، چې

$$\bullet\ \begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال17

د $y = a^x$ تابع مشتق دمعکوسي تابع له مشتق څخه په استفاده په لاس راوړو.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{(1/y)\log_a e} = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a.$$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق، کيدلی شي د مثلثاتي تابع ګانو د مشتق په کارولو سره پيدا کړو.

$$1.\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad 2.\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3.\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad 4.\quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ثبوت

$$1.\quad y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2.\quad y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3.\quad y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4.\quad y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$\Rightarrow (arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y$$

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

18مثال

د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیداکړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}.$$

هايپربوليکي تابع ګاني او دهغوئ مشتقات

د دوو طاقتنما $y = e^{x}$ او $y = e^{-x}$ تابع ګانو څخه کولی شو، خلور تابع ګاني په لاندې ډول تعریف کړو.

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

پورتني تابع ګانې د هايپربوليکو تابع ګانو په نامه يادېږي او دايروي (مثلثاتي) تابع ګانو ته ورته خاصيتونه لري.

$$\begin{cases} \cos^{2} hx - \sin^{2} hx = 1 \\ \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y . \end{cases}$$

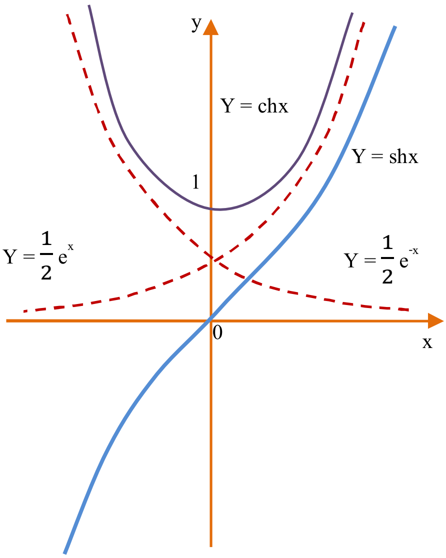
پورتني رابطې په اسانی سره ثبوت کيدلی شي. د مثال په ډول

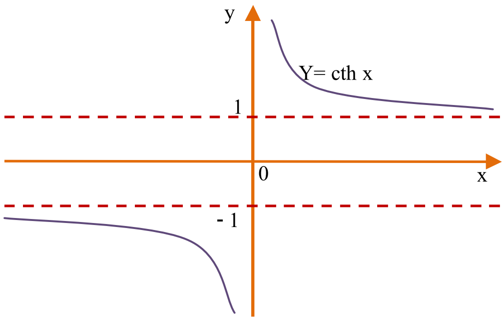
$$\cos^{2} hx - \sin^{2} hx = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^{2}$$

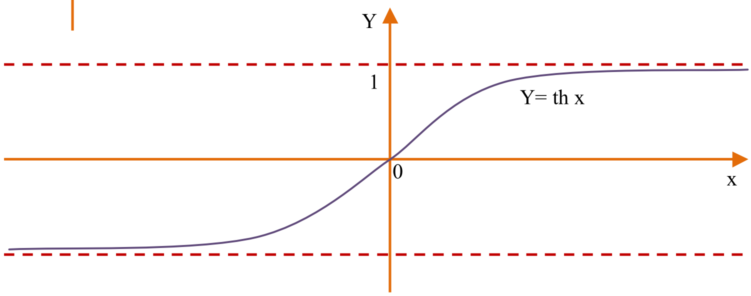
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

دوې نورې رابطې هم دتعريف له مخې له ښي نه چپ ته په لاس راوړلی شو.

دهايپربوليکو تابع ګانو ګرافونه پهلاندې شکلونو کې ترسيم شوي دي







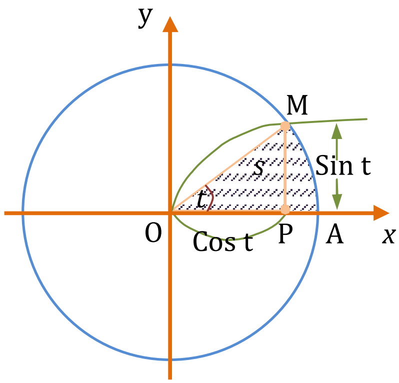
د هایپربولیکو تابع ګانو نومونه له دې ځایه راپورته شوي دی چې د دایروي تابع ګانو دهایپربول د موجودیت سره شباهت لري.

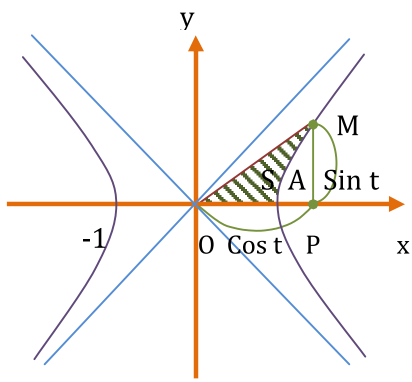
$$\text{(دایره)}\ x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{(هایپربول)}\ x^2 - y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$$

ښي خواته د هایپربولا معادلې او چپ خواته د دایرې معادلې هر یوه په اصلي او پارامتریکه توګه ښودل شوي دي.

که چېرې دپورتنیو معادلو اړونده د دايرې او هايپربولا لاندې شکلونه په پام کې ونيول شي





په دايره کې دt پارامتر په عددي توګه، لهAOM زاويې سره او يا د دايرې اړونده AOM قطاع دمساحت له دوه چنده سره برابره دی. يعني $t = 2s$ په مشابه ډول په هايپربولا کې هم دt پارامتر دهايپربولا دAOM قطاع دوه برابره دی. دهايپربوليکو تابع ګانو مشتق نيونه د دوی دتعريف او داکسپوننشيل تابع ګانو له مشتق څخه په لاس راتلي شي.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\Rightarrow (\sinh x)' = \cosh x \quad , \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

د $\tanh x$ او $\coth x$ مشتق نيونه بياد $\sinh x$ او $\cosh x$ دنسبتونو په توګه په اسانۍ سره پيداکيدای شي.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cos^2 hx - \sin^2 hx}{\cos^2 hx} = \frac{1}{\cos^2 hx}$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sin^2 hx - \cos^2 hx}{\sin^2 hx}$$

$$= \frac{-\left(\cos^2 hx - \sin^2 hx\right)}{\sin^2 hx} = \frac{-1}{\sin^2 hx}$$

19مثال

که چېرې $\sinh x = 2$ وي، نو نورې ټولې هايپربوليکي تابع ګانې حساب کړئ او د x عدد په لاس راوړئ.

حل

$$\cos^2 hx - \sin^2 hx = 1 \Rightarrow \cos^2 hx = 1 + \sin^2 hx$$

$$\Rightarrow \cos^2 hx = 1+4 \Rightarrow \cos^2 hx = 5$$

$$\Rightarrow \cosh x = \sqrt{5} \Rightarrow \tanh x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\coth x = \frac{\sqrt{5}}{2} \,,\ \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\Rightarrow x = \ln(\cosh x + \sinh x) = \ln(5+2).$$

20 مثال

د x دهايپربوليکو تابع ګانو قيمت داسې معلوم کړئ چې $x = ln4$ وي.

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{e^{\ln 4}+e^{-\ln 4}}{2}=\frac{4+\frac{1}{4}}{2}\Rightarrow \cosh x=\frac{17}{8}.$$

$$\sinh\ x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{e^{\ln 4}-e^{\ln 4}}{2}=\frac{4-\frac{1}{4}}{2}=\frac{15}{8}$$

$$\tanh\ x=\frac{15}{17}\quad,\quad \coth\ x=\frac{17}{15}.$$

معکوسې هایپربولیکې تابع ګانې او د هغوي مشتقات

څرنګه چې هایپربولیکې تابع ګانې اکسپوننشیل ډوله دي،نو باید چې دهغوی معکوسې تابع ګانې، لوګارتمي تابع ګانې وي. دا تابع ګانې په $\sin^{-1}hx$ ،$\cos^{-1}h\,x$ ،$\tan^{-1}hx$, $\cot^{-1}hx$ ،$\arcsin h\,x$ ،$\arccos h\,x$ $\arctan h\,x$ او $arc\coth x$ سره ښودل کیږي او هغوي په لاندې ډول په لاس راوړو.

د $y=\arcsin hx \Leftrightarrow x=\sinh y$ په پام کې نیولو سره لرو چې

$$\sinh y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\Rightarrow\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=x$$

$$\Rightarrow e^{y}-e^{-y}=2x\Rightarrow e^{y}-e^{-y}-2x=0$$

$$\Rightarrow (e^{y}-e^{-y}-2x)e^{y}=0\cdot e^{y}\Rightarrow e^{2y}-1-2xe^{y}=0$$

$$\Rightarrow (e^{y})^{2}-2xe^{y}-1=0\ :\ u=e^{y}$$

$$\Rightarrow u^{2}-2xu-1=0\Rightarrow u=x\pm\sqrt{x^{2}+1}$$

$$\Rightarrow e^{y}=x+\sqrt{x^{2}+1}\Rightarrow y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$$

دلته منفي علامه ځکه حذف شوه چې ښي خواته یو مثبت عدد ده او بناپر دې

$$\arcsin h\ x = In(x+\sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R}$$

په همدې ترتیب کولی شو په لاس راوړو چې

$$\arccos h\ x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1$$

$$\arccos h\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x|<1$$

$$\arccos h\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, |x|>1$$

دهایپربولیکو تابع ګانو مشتقات دهغوی دمعکوسو تابع ګانو په مرسته په لاندې ډول په لاس راځي.

1. $y = \arcsin h\, x \Leftrightarrow x = \sinh y$

$$\Rightarrow (arc\,sinh\,x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sinh y)'}$$

$$= \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(\arc\sin \mathrm{h}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. $y = \arccos hx \Leftrightarrow x = \cosh y$

$$\Rightarrow (\arccos h\, x)' = y'_x = \frac{1}{y'_x}$$

$$= \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arccos} hx)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$$

3. $y=\operatorname{arctan} h\,x \Leftrightarrow x=\tanh y$

$$(\operatorname{arctan} h\,x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{1/\cosh^2 y} = \cosh^2 y$$

$$\frac{\cosh^2 y}{1} = \frac{\cosh^2 y}{\cosh y^2 - \sin^2 hy} = \frac{1}{1-(\tanh y)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

4. $$(arc\coth x)' = y'_x = \frac{1}{x'_x} = \frac{1}{(\coth y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\sinh^2 y}} = \sinh^2 y$$

$$\frac{\sinh^2 y}{1} = \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{\coth^2 y - 1} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow (arc\coth x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|>1$$

د معکوسو هایپربولیکو تابع ګانو مشتقات په مستقیمه توګه له

$$\cosh x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right), \quad \sinh x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad \tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

څخه هم په لاس راتلای شي.

دیو تابع پرله پسې (متوالي) مشتقات

د یوې تابع مشتق پخپله دیوې نوې تابع په توګه کیدلی شي، دمشتق نیوني وړ وي.

د یوې تابع دمشتق، مشتق ته دوهمه مرتبه مشتق وایي. په همدې توګه شاید وکولی شو، یوه تابع څو ځلې او یا ځنې تابع ګانې حتی n ځلې $n \in \mathbb{N}$ مشتق ونیسو او دا مشتقات په پرله پسې ډول داسې ښیو

تابع $y=f(x)$

لومړی مشتق
$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

دوهم مشتق
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

دریم مشتق
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

$\vdots$

nام مشتق
$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

21 مثال

دلاندې تابع ګانو اول، دوم، دریم، او څلورم مشتق پیداکړئ.

$$(a)\quad \begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' = 6ax + 2b \Rightarrow y''' = 6a \Rightarrow y^{(4)} = 0. \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{array}{llll} y & \sin x & , & y \quad \cos x \\ y & \sin x & , & y \quad \cos x \\ y^{(4)} & \sin x & , & \end{array}$$

$$(c)\quad y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x \Rightarrow y''' = e^x.$$

د پرله پسې مشتقاتو قاعدې

که چېرې u او v تابع ګانې د $n-$ ام مرتبې (n ځلې) مشتقات ولري.

$$1.\quad (\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{(n)}(x) \quad , \quad 2.\quad (u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}.$$

$$3.\quad (uv)' = u'v + uv' \quad , \quad 4.\quad (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$5.\quad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$6.\quad (uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

که پاملرنه وکړو نود بنیوم نیوتن د انکشاف ورکړل شوی حالت او د دوو تابع ګانو د حاصل ضرب د پرله پسې مشتقاتو ترمنځ شباهت او تناظر موجود دی. داسې چې

$$\boxed{(u\,v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \binom{n}{3}u^{(n-3)}v''' + \cdots + uv^{(n)}}$$

وروستني فورمول دلایب نیتزا دفورمول په نامه یادیږي.

22 مثال

د $y = e^{\alpha x}\cdot x^2$ دریم مشتق لاس ته راوړئ.

حل

$$y' = \left(e^{\alpha x}\right)'.x^2 + e^{\alpha x}\left(x^2\right)' = \alpha\, e^{\alpha x}.x^2 + 2e^{\alpha x}x$$
$$y'' = (e^{\alpha x})''x^2 + 2(e^{\alpha x})'(x^2)' + e^{\alpha x}(x^2)''$$
$$\Rightarrow y'' = a^2e^{\alpha x}x^2 + 4ae^{\alpha x}x + 2e^{\alpha x}$$
$$y''' = (e^{\alpha x})'''x^2 + 3(e^{\alpha x})''(x^2)' + 3(e^{\alpha x})'(x^2)'' + e^{\alpha x}(x^2)'''$$
$$\Rightarrow y''' = a^3e^{\alpha x}x^2 + 6e^{\alpha x}\alpha^2x + 6\alpha\, e^{\alpha x}$$
$$\Rightarrow y''' = (\alpha^2x^2 + 4\alpha + 4)\alpha\, e^x.$$

پوښتني

1. وښئ چې د $f(x)=|x-5|$ د $x=5$ در تابع په $x = 5$ کې مشتق پذیره نه ده.
2. د $g(x)=-|x+9|$ تابع د x متحول په کومو قیمتونو دمشتق نیونې وړنه ده؟

د لاندې تابع ګانو مشتقات پیداکړئ.

3. $y=4x^3-6x^2+12x-10$, 4. $y=4x^{\frac{2}{3}}-x^{-2}+\frac{9}{x}$

5. $y=(x^2+1)(x^3-4)$, 6. $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)(ax^2+bx+c)$

7. $y=4x^5(3x-9)^2$, 8. $y=5x^4\sqrt{2x^2+9x+10}$

9. $y=(x-2)(x^2+1)(2x+3)$, 10. $y=\frac{2x}{2x^2+4x+8}$

11. $y=\frac{1-4x^5}{(4x+5)^2}$, 12. $y=\frac{7}{\sqrt{3x-6}}$, 13. $y=x^{-7}\sqrt{x}$

14. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x^3}\right)$, 15. $y=\sqrt[3]{(4x^2+3)^2}$

16. $y=(x^3+2)\sqrt[5]{x^2+1}$, 17. $y=\frac{(5x^2-1)^2}{\sqrt{2x^3-3x^2+6}}$

18. $y=|x-5|$, 19. $y=|7x-3|$, 20. $y=|4x|$

21. $y=5\sin 4x$, 22. $y=\cos 2x-\tan 4x+\sin\sqrt{x}$

23. $y=x\sin^3 2x+4\cos^2 x$, 24. $y=\cos^5(x^2-1)$

25. $y=\tan(\cot x)$, 26. $y=\frac{1}{\cos x}$, 27. $y=\frac{1}{\sin x}$

28. $y=\sec 5x+-\cos 4x$, 29. $y=\sqrt{\tan 7x}$

د لاندې تابع ګانو دوهمه او دریمه مرتبه مشتقات پیداکړئ.

30. $y=5x^4+3x^2$, 31. $y=\sin x-\cos x-x^2+4x$

32. $y=(5x^2+3)^4$, 33. $y=(ax^2+bx+c)^2$

د لاندې تابع ګانو پنځمه مرتبه مشتقات پیداکړئ.

$$34.\quad y=-\sin x \quad , \quad 35.\quad y=x^4+3x^2-1 \quad , \quad 36.\quad y=\frac{1}{x}$$

.37 د y تابع مشتق نظر x ته له $xy=cosy$ رابطې څخه پیداکړئ.

.38 د $y=\sin(x+y)$ تابع مشتق پیداکړئ.

.39 د $x^3+y^3+xy=8$ تابع مشتق په $x=0$ کې حساب کړئ.

.40 له $y^3-5x^2+4xy=0$ تابع څخه $\frac{dy}{dx}$ د $x=y=1$ په نقطه کې پیداکړئ.

د لاندې هرې یوې تابع مشتق پیداکړئ.

$$41.\quad y=\log\frac{x}{x+1} \quad , \quad 42.\quad y=\sqrt{\log x} \quad , \quad 43.\quad y=\frac{\ln x}{x}$$

$$44.\quad y=2\ln\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \quad , \quad 45.\quad 2\ln\left(x^3+4x^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

.46 د $f(x)=\ln\frac{x}{x^2+1}$ تابع مشتق په $x=1$ کې حساب کړئ.

.47 د $x=-2y=0$ تابع مشتق په $(0,0)$ نقطه کې په لاس راوړئ.

.48 د $y=(\sin x)$ تابع مشتق په $x=\frac{\pi}{2}$ کې په لاس راوړئ.

د لاندې تابع ګانو مشتقات پیداکړئ.

$$49.\quad y=e^x\ln x \quad , \quad 50.\quad y=e^{-\frac{1}{x}} \quad , \quad 51.\quad y=3^x$$

$52.\quad y=\arcsin\left(5x^{3}-2\right)$, $53.\quad y=e^{\arcsin\ x^{2}}$

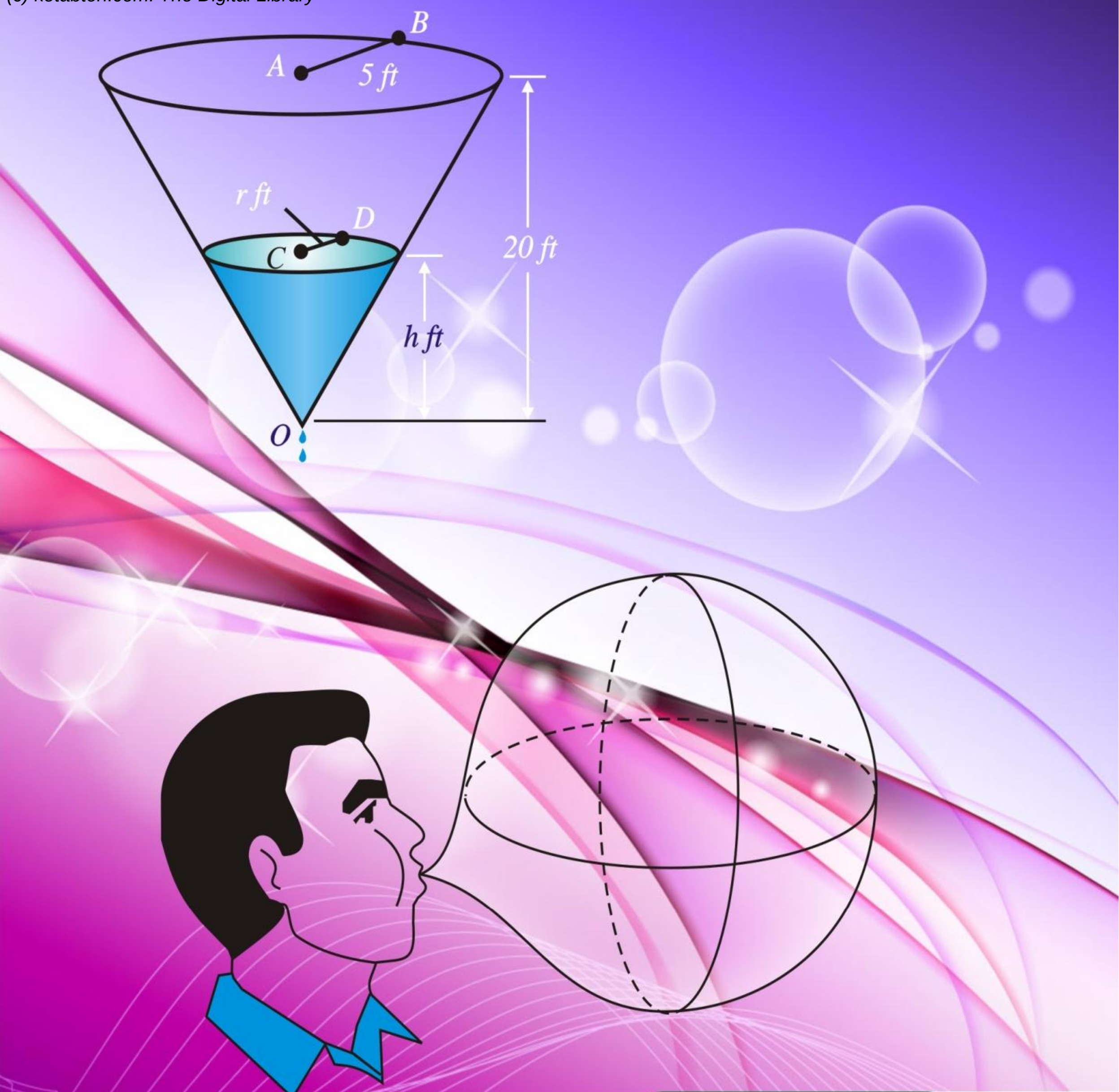
$54.\quad y=\arccos\sqrt{x}$, $55.\quad y=e^{\arccos\ 4x}$

$56.\quad y=\ln\left(\arctan 7x\right)$, $57.\quad y=ar\cot\left(\sin x\right)+\arctan\left(\cos x\right)$

$58.\quad y=arc\sec\left(e^{3x}\right)$, $59.\quad y=arc\sec\sqrt{x}+arc\sec x^{2}$

$60.\quad y=x\sinh x$, $61.\quad y=(\arcsin\ x)(\arccos\ hx)$

$62.\quad y=\dfrac{\arctan\ x}{x}$, $63.\quad y=\arctan\ x-arc\coth\ x$



پنځم څپرکی

له مشتق څخه ګټه اخیستنه

له مشتق څخه ګټه اخیستنه

له مشتق څخه د تابع ګانو د تحولات په مطالعه لکه د تابع زیاتوالی او کم والی (تزاید او تناقص) په یوه تابع کې د اعظمي ګانو او اصغري ګانو پیداکول او د کږوالي (انحنا) په ډول کې ګټه اخیستل کیږي.

همدا رنګه کولی شو دتابع ګانو په لېمېټونو کې دمبهمو شکلونه په پیداکولو کې له مشتق څخه استفاده وکړو. له مشتق څخه په استفاده یوې تابع ته دتایلور په سلسله کې انکشاف ورکول کیږي.

لکه څرنګه چې په عددي محاسبو کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي، په صنعت، اقتصاد، تجارت او نورو کې حسابي مسالې دمشتق په مرسته تحلیل او تجزیه کیدلی شي. دمشتق مسالې په فزیک کې، لکه حرکت، سرعت او تعجیل په زیاته پیمانه کارول کیږي.

د مشتق هندسي تعبیر

که چېرې د یوې تابع $y = f(x)$ په ګراف باندې یوه نقطه $p(x_0, y_0)$ په پام کې ونیسو (لاندې شکل). که چېرې د x متحول د Δx په اندازه تحول وکړي، نو د $p(x_0, y_0)$ نقطه $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ نقطې ته انتقال کوي او د تابع تحول عبارت دی له

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \overline{RQ}$$

په PRQ قایم الزاویه مثلث کې لرو چې

$$\tan \angle QPR = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

څرګنده ده چې $m = \tan \angle OPR$ د PQ قاطع دمیل څخه عبارت دی. اوس که

Δx صفر ته تقرب کوي، نود Q نقطه P ته نږدې کیږي او د PQ وتر دP په نقطه کې دT مماس ته نږدې کیږي. په نتیجه کې $tan\theta, m$ (دمماس میل) ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې θ دx محور او دT ترمنځ زاویه ده بناپر دې

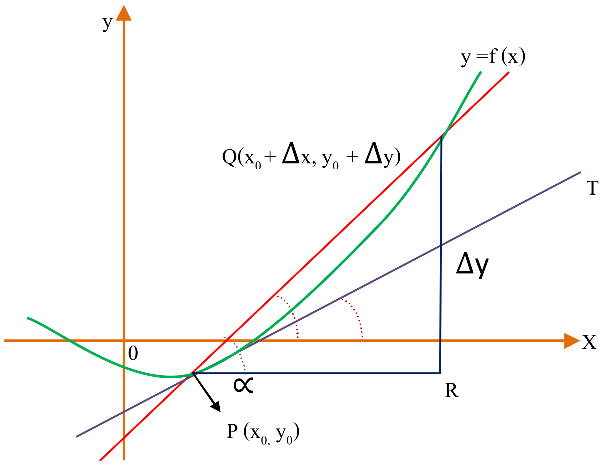
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = tan\theta$$

په دې ترتیب د$y = f(x)$ مشتق د (x_0 , y_0) په اختیاري نقطه کې دګراف له مخې دهغه مستقیم خط میلان دی چې په نوموړې نقطه کې پرمنحنې باندې مماس رسم کیږي یعنې

$$f'(x_0) = \tan\theta = m$$

په بل عبارت په یوه مشتق پذیره تابع کې دګراف پر مخ په یوه نقطه کې د مماس میلان په همغه نقطه کې دهغې تابع دمشتق سره مساوي دی.

د یوې منحنې په یوه نقطه کې دمماس میلان په هغه نقطه کې دهغې منحنې میلان بلل کیږي



1 مثال

د $f(x)=x^3$ تابع د ګراف په $(x_1 , y_1)=(1 , 1)$ نقطه کې د مماس معادله ولیکې.

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(1) = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2.$$

د زیاتوالي او کموالي (تزاید او تناقص) شرطونه

که د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټرول کې متمادي او په (a,b) کې مشتق پذیره وي. نو

1− که چېرې $f'(x)$ په (a,b) کې مثبت وي، د f تابع په هغې کې متزایده ده.

2− که $f'(x)$ په (a,b) کې منفي وي، د f تابع په هغه کې متنا قصه ده. کله که $f'(x)$ په (a,b) کې صفر وي، نو هغلته f یو ثابته تابع ده.

2مثال

هغه انټرولونه په لاس راوړئ چې په هغې کې $y = x^2 - 6x + 5$ تابع یوازې متزایده یا متناقصه وي.

حل

$$y' = 2x - 6 \,,\; y' = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$y' = 2x - 6$	$-$	0	$+$
$y = x^2 - 6x + 5$	متناقص		متزاید

په دې ترتیب سره د تابع د زیاتوالي انټرول $(3,\infty)$ او د کموالی انټرول $(-\infty,3)$ دی.

3 مثال

د $y = -x^2 - 6x + 5$ تابع د زیاتوالي او کموالي انټرولونه معلوم کړئ.

حل: $y' = -2x+6 \,,\, y'=0 \Rightarrow -2x+6=0 \Rightarrow x=3$

x	$x<3$	$x=3$	$x>3$
$y'=-2x+6$	$+$	0	-
$y=-x^2-6x+5$	متزايد		متناقص

بناپردې دکموالي انټرول يې $(3,\infty)$ اود زياتوالي انټرول يې $(-\infty,3)$ دی.

نهايي نقطې (اعظمي او اصغري نقطې)

1. که چېرې د تعريف د ناحيې په يو خلاص انټرول (a,b)کې دټولو قيمتونو x لپاره $f(x_0)\geq f(x)$ و $x_0\in(a,b)$ صدق شي، $(x_0,f(x_0))$ ته موضعي اعظمي $(Local\ \max imum)$ نقطه او $f(x_0)$ ته په (a,b) کې د$f(x)$ تابع اعظمي وايي. يعني

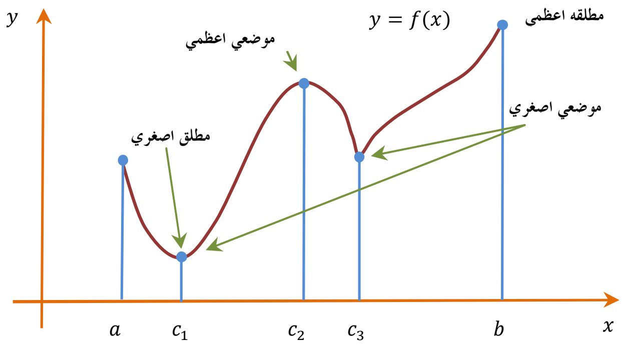
$$f(x_0)=\max_{(a,b)} f(x)$$

2. که چېرې د تعريف د ناحيې په يو خلاص انټرول (a,b) کې دټولو قيمتونو x لپاره $f(x_0)\leq f(x)$ و $x\in(a,b)$، شرط صدق شي نو $(x_0,f(x_0))$ته موضعي اصغري نقطه او $f(x_0)$ ته په (a,b) کې د$f(x)$،تابع اصغري وايي. يعني

$$f(x_0)=\min_{(a,b)} f(x)$$

هغه نقطه چې په هغې کې تابع په مطلوبه انټرول کې ترټولو لوی قيمت واخلي، مطلقه **اعظمي** $(Absolut\ \max imum)$ او که په هغې کې ترټولو کوچنی قيمت ولري، **مطلقه اصغري** $(Absolut\ \min imum)$ بلل کيږي.

ديوې تابع اعظمي او اصغري نقطو ته نهايي نقطې يا (اکستريم نقطې) هم وايي.

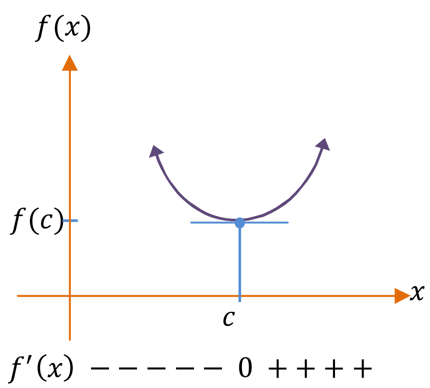


د نهايي (اکستريم) نقطو لازمي شرط

که چيرې د $f(x)$ تابع د x_0 په نقطه کې نهايی نقطې (اعظمی اضغری) ولري نو په x_0 د تابع مشتق صفر دی او f په x_0 کې مشتق پذيره نه ده.

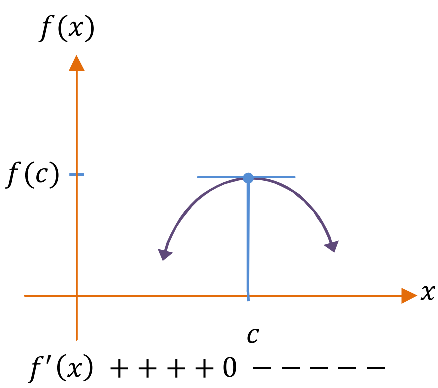
د مشتق په کارولو سره د نهايي (اکستريم) نقطو ټاکل

1. که چيرې د $x < x_0$ لپاره $f'(x)$ مثبت او د $x > x_0$ لپاره $f'(x)$ منفي وي د $(x_0, f(x_0))$ نقطه اعظمي ده.
2. کله که د $x < x_0$ لپاره د $f'(x)$ قيمت منفي او $x > x_0$ لپاره مثبت وي د $(x_0, f(x_0))$ نقطه اصغري ده. لاندې شکلونه دې دقيق وکتل شي



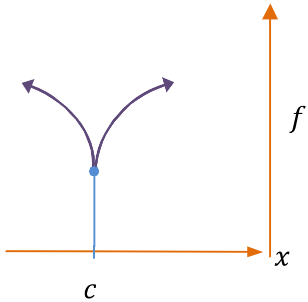
(A) $f(c)$ is a local minimum

f(c) موضعي اصغري ده



(B) $f(c)$ is a local maximum

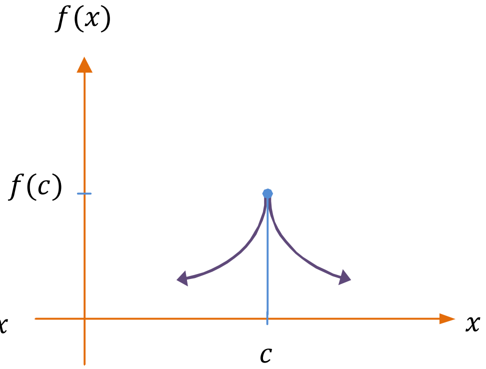
f(c) موضعي اعظمي ده



$f'(x)\ ---\ ND\ +++$

$f(x)$ is a local minimum

f(c) موضعي اصغري ده



$f'(x)\ +++\ ND\ ---$

$f(x)$ is a local maximum

f(c) موضعي اعظمي ده

د دوهم مشتق په کارولو سره دنهايي نقطو معلومول

که چیرې د f تابع اول مشتق په x_0 کې صفر او دوهم مشتق یې په دې عدد کې صفر نه وي، نو

1. که $f''(x_0)<0$ وي د $f''(x)$ قیمت هم د x_0 په یو مجاورت کې منفي دي. بناپر دې $f'(x)$ په دې انټرول کې متناقص دی خو څرنګه چې $f'(x_0)=0$ دی نو f'' د x_0 چپ خواته مثبت قیمت او د هغې ښي خواته منفي قیمت لري، په دې ترتیب $f'(x)$ د x_0 چپ خواته متزایده او ښي خواته متناقص ده او x_0 اعظمي نقطه ده.

x	$x<x_0$	x_0	$x>x$
$f''(x)$	-	-	-
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

2. د $f''(x)>0$ لپاره ټول شرطونه سرچپه دي.

x	$x < x_0$	x_0	$x > x$
$f''(x)$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

4 مثال

د دوهم مشتق په مرسته د $y = x^2 - 4x + 3$ نهايي نقطې په ګوته کړئ.

$$y' = 2x - 4 \quad , \quad y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad y'' = 2 > 0$$

x	2
y''	+
y'	0
y	min

5 مثال

د $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$ تابع اعظمي او اصغري معلوم کړئ.

حل: لومړی او دوهم مشتقات په پام کې نیسو.

$$f'(x) = 2x^3 - 2x \quad , \quad f'(x) = 0 \implies 2x^3 - 2x = 0$$

$$\implies 2x(x-1)(x+1) = 0 \implies x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$$

$$f''(x) = 6x^2 - 2$$

x	-1	0	1
$f'(x)$	0	0	0
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	min	max	min

بناپر دې تابع په $x=-1$ او $x=1$ کې موضعي اصغري ګاڼي او په $x=0$ کې موضعي اعظمي لري. اعظمي او اصغری قیمتونه عبارت دي له

$$\max\ f(x)=f(0)=\frac{1}{2}\times 0^4-0^2+1=1$$

$$\min\ f(x)=f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^4+(-1)^2+1=\frac{1}{2}$$

$$\min\ f(x)=f(1)=\frac{1}{2}\times 1^4-1^2+1=\frac{1}{2}$$

په دې ترتیب $\left(-1\ ,\frac{1}{2}\right)$ او $\left(1\ ,\frac{1}{2}\right)$ اصغري نقطې او $(0,1)$ اعظمي نقطه ده.

6 مثال

د $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع د ګراف نهایي نقطې وټاکي.

حل: د مشتق څخه په استفاده لرو چې

$$f'(x)=2ax+b\Rightarrow f'(x_0)=0\Rightarrow 2ax_0+b=0\Rightarrow x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$y_0=f(x_0)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

بناپردې دتابع نهایي نقطه عبارت ده له $(x_0,y_0)=\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ، خود هغې

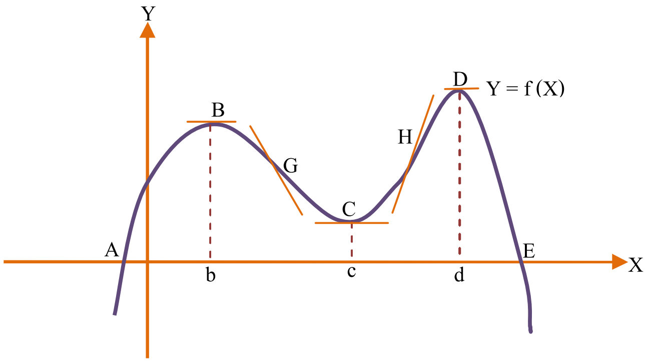
ډول د a په اشارې پورې اړه پیداکوي.

x	$-\frac{b}{2a}$
$f'=(x)=2ax+b$	0
$f''=(x)2a$	$2a$
$f(x)ax^2+bx+c$	$-\frac{4ac-b^2}{4a}$

څرنګه چې دوهم مشتق $f''(x)=2a$ نو د $a>0$ لپاره يې اشاره مثبت او د $a<0$ لپاره يې اشاره منفي ده. نو د $a>0$ لپاره ګراف اصغري او د $a<0$ لپاره اعظمي دی.

د يو ګراف د کوږوالي (انحنا) ډول

د $y=f(x)$ منحني په يو انټروول کې محدب بلل کيږي که چېرې په دې انټروول کې دمنحني پر هره نقطه مماس د ګراف دپاسه وي او دا منحني مقعر بلل کيږي، کله که په نقطو باندې مماسونه يې دمنحني لاندې راشي.



د انعطاف نقطه (Inflection Point)

هغه نقطه چې په ګراف کې ديو منحني تحدب (محدب والی) او تقعر (مقعر والی) سره جلا کوي د انعطاف د نقطې په نامه ياديږي.

د محدب والي او مقعر والي شرطونه

1. که چېرې ديوې تابع $f(x)$ دوهم مشتق ديو انټروول په ټولو نقطو کې منفي وي، نود $f(x)$ تابع منحني په دې انټروول کې محدب دی.

2. که چېرې د $f(x)$ تابع دوهم مشتق په يو انټروول کې مثبت وي، نو هغه منحني مقعردی.

7 مثال

د $y = x^2 - 5x + 4$ تابع ګراف محدب يا مقعر دی؟

حل: دوهم مشتق يې ارزيابی کوو

$$y' = 2x - 5 \Rightarrow y'' = 2 > 0$$ (دمقعروالي شرط)

8 مثال

هغه انټرولونه وټاکئ چې د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع ګراف په هغې کې محدب او يا مقعر وي.

حل

$$y' = 3x^2 + 18x - 6 \Rightarrow y'' = 6x + 18$$
$$y'' < 0 \Rightarrow 6x + 18 < 0 \Rightarrow x < -3$$
$$y'' > 0 \Rightarrow 6x + 18 > 0 \Rightarrow x > -3$$

ليدل کيږي چې د دې تابع دوهم مشتق په $(-\infty, -3)$ کې منفي اوپه $(-3, +\infty)$ کې مثبت دی نو ګراف يې په لومړي انټرول کې محدب اوپه دوهم انټرول کې مقعر دي.

x	$x < -3$	-3	$x > -3$
y''	-	0	+
ګراف	محدب	انعطاف	مقعر

د انعطاف شرطونه

که چېرې د$f(x)$ په یوه متمادي منحني کې د$f(x)$ دوهم مشتق په $x = x_0$ کې صفر او یا موجود نه وي او سربېره پر دې$f''(x)$ دx_0 څخه دتیریدوپه حالت کې اشاره بدله کړي، نو د$(x_0, f(x_0))$ نقطه د$f(x)$ لپاره د عطف (انعطاف) نقطه ده.

9 مثال

د $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ تابع دګراف اعظمي او اصغري نقطې او د انقطاف نقطه پیداکړئ.

حل: په لومړي قدم کې ددې تابع اول او دوهم مشتق نیسو.

$$g'(x) = x^2 - 1 \ , \ g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$g''(x) = 2x \Rightarrow g''(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

X	-1	0	1
$g'(x)$	0	$-$	0
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	اعظمي	انعطاف	اصغري

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\ g(x) = g(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 2 \approx 2.68 \\ \inf lection : \quad g(0) = g = \frac{1}{3}0^3 - 0 + 2 = 2 \\ \min\ g(x) = g(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - 1 + 2 \approx 1.33 \end{cases}$$

10 مثال

د $y = e^{-x^2}$ تابع دګراف بحراني او د انعطاف نقطې معلومې او ګراف يې رسم کړئ.

حل

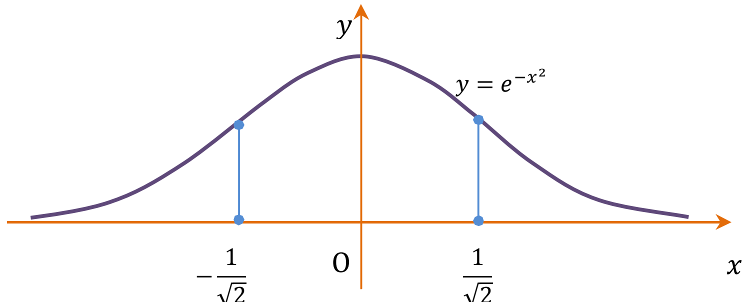
$$y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

لهذا

$$y' = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y''	+	0	−	−	−	0	+
y'	+	+	+	0	−	−	−
انحنا	مقعر	انعطاف	محدب	محدب	محدب	انعطاف	مقعر
د ګراف ډول	متزايد	متزايد	متزايد	اعظمی	متناقص	متناقص	متناقص



11 مثال

د xمتحول دکوموقیمتونولپاره د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع نهايي او انعطاف نقطې لري.

حل: د تابع اول او دوهم مشتق ارزیابي کوو.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ , \ f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \ \ , \ \ f''(x) = 0 \Rightarrow 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ لپاره نهايي نقطې (اعظمي او اصغري) لري او د $x = -\dfrac{b}{3a}$ لپاره د انعطاف نقطه لري.

1. که چېرې $b^2 - 3ac > 0$ وي، تابع اعظمي او اصغري لري چې ډول يې د a په عدد پورې تړلی دی.
2. که چېرې $b^2 - 3ac = 0$ وي، د تابع مشتق د $x = -\dfrac{b}{3a}$ لپاره صفر کيږي، خو څرنګه چې دمخه وويل شول د x په دې قيمت کې دتابع ګراف انعطاف لري
3. که $b^2 - 3ac < 0$ وي، نو تابع اعظمي او اصغري نه لري خو انعطاف لري.

12 مثال

د $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ تابع اعظمي او اصغري او دانعطاف نقطې معلومې کړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل

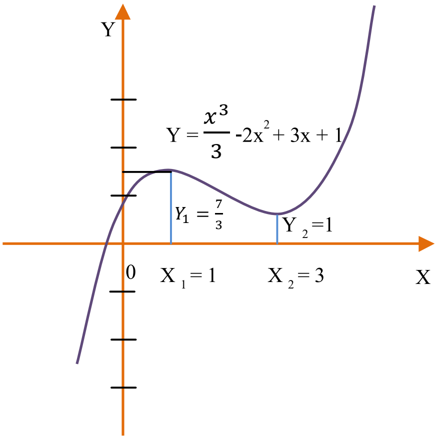
$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \ , \ f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 3$$

x	$x<1$	1	$1<x<3$	3	$x>3$
$x-1$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$x-3$	$---$		$---$	0	$+++$
$f'(x)=(x-1)(x-3)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$
$f(x)$	متزایده	اعظمي	متناقصه	اصغري	متزایده

$$f''(x)=2x-4\ ,\ f''(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

x	$x<2$	2	$x>2$
$f''(x)$	$---$	0	$+++$
$f(x)$	محدبه	انعطاف	مقعره



13 مثال

د $g(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ اعظمي، اصغري او انعطاف نقطي معلومي او ګراف يې رسم کړئ.

حل

$$g(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

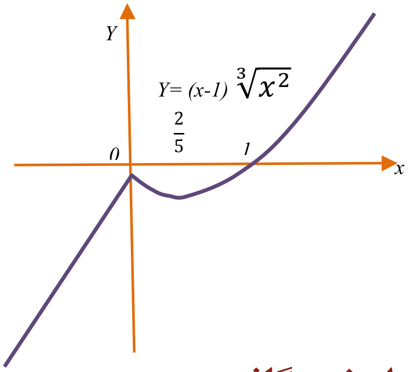
$$\Rightarrow \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

او دوهم مشتق يې عبارت دی له

$$g''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \neq 0$$

اګر چې دوهم مشتق په هيڅ حالت کې نه صفر کيږي او ګراف انعطاف لري (لاندې جدول)

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	---	نه ده تعريف شوی	+++
$f(x)$	محدب	انعطاف	مقعر



مطلقې اعظمي ګانې او اصغري ګانې

امکان لري يوه تابع په يو انټرول کې څو موضعي اعظمي ګانې او څو موضعي اصغري ګانې ولري. خو په معين انټرول کې تابع يوازې يو اعظمي قيمت (مطلقه اعظمي) او

یو اصغري قیمت (مطلقه اصغري) لري.

که چېرې دیوې تابع $f(x)$ قیمتونه په یوانترول کې تر مطالعې لاندې ونیسو. د $f(x)$ اعظمي او اصغري قیمتونه په لاندې یو حالت کې واقع کیږي.

1- په هغه نقطو کې چې د تابع مشتق صفر کیږي.

2- د انټرول په اخرنیو نقطو کې.

3- په هغو نقطوکې چې تابع په کې مشتق پذیره نه وي. (پورتنی شکل)

14 مثال

د $g(x) = x^3 - 3x + 2$ تابع مطلقې اعظمي او اصغري نقطې د $[0,2]$ په انټرول کې پیداکړئ.

حل. د تابع قیمتونه په بحراني نقطو او د $[0,2]$ انټرول په اخرنیو نقطو کې معلوم کړئ

$$g'(x) = 3x^2 - 3 \, , \, g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

لیدل کیږي چې

$$g(1) = 0 \quad , \quad g(0) = 0 \quad , \quad g(2) = 4$$

نو د $g(x)$ تابع مطلقه اعظمي او مطلقه اصغري په ترتیب سره عبارت دي له

$$\max_{[0,2]} g(x) = g(2) = 4 \quad , \quad \min_{[0,2]} g(x) = g(0) = 0 \; \bullet$$

د اعظمي ګانو او اصغري ګانو تطبیقي مسئالې

په طبیعي علومو او ریاضي کې په یوه ناحیه کې دیوې تابع داعظمي قیمتونو او اصغري قیمتونو پیداکول، د تطبیق وړ او له مهمو مسألو څخه شمیرل کیږي.

دجیودیزي دخطونو معلومول دواریاسیون حسابونه، د بنی جوړوني $Optimisition$

مسالې صنعت او داسې نورومسالو کې داعظمي او اصغري مفهومونو په چاپيره طرحه کيږي. نو ځکه دا لاندې څو مسالې څيړو.

15 مثال

دوه مثبت عددونه پيداکړئ چې مجموعه يې 20 او دضرب حاصل يې ممکنه اعظمي قيمت ولري.

حل. فرض کوو چې يو مطلوب عدد x وي، نو دوهم عدد $20-x$ دی، نو ددوی دضرب حاصل ديوې تابع په تو ګه عبارت دی له $f(x)=x(20-x)$. دلته دx عدد د$[0,20]$ په انټرول کې تحول کوي، نو دتابع مطلقه اعظمي د $[0,20]$ په انټرول کې لټوو.

$$f(x)=20x-x^2 \quad , \quad f'(x)=20-2x$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 20-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=10$$

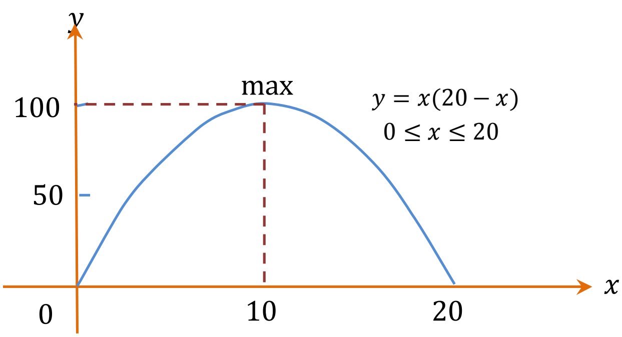
د تابع قيمتونه دانټرول په وروستيو نقطو کې

$$f(0)=0 \quad , \quad f(20)=20\cdot 20-20^2=0$$

او په بحراني نقطه کې دتابع قيمت

$$f(10)=20\cdot 10-10^2=100$$

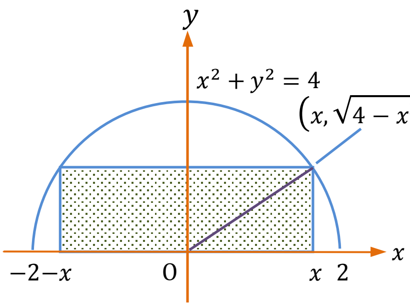
ليدل کيږي چې $(10,100)$ د تابع اعظمي نقطه ده او دوه مطلوب عددونه عبارت دي له $x_1=10,\ x_2=10$، چې دضرب حاصل يې 100دی.



16مثال

د $r = 2$ په شعاع په نیمه دایره کې محاط شوی، دیو مستطیل څلور خواوې داسې معلومې کړئ چې اعظمي مساحت ولري.

حل: یو مستطیل د $2x$ په اوږدبنت دیوې نیمې دایرې په داخل کې په پام کې نیسو. د دې مستطیل عرض عبارت دی، له $\sqrt{4-x^2}$ او مساحت یې $g(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$ دی، خو د x د تحول ساحه$[0,2]$ ده.



$$g'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0 \Rightarrow 8 - 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

د $-\sqrt{2}$ عدد د x دتحول په ساحه کې پروت نه دی، نو دتابع قیمتونه د $\sqrt{2}, 0$ او 2 په نقطو کې حسابوو

$$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4 \quad , \quad g(2) = 2.2.\sqrt{4-4} = 0$$

$$g(0) = 2.0.\sqrt{4-0} = 0$$

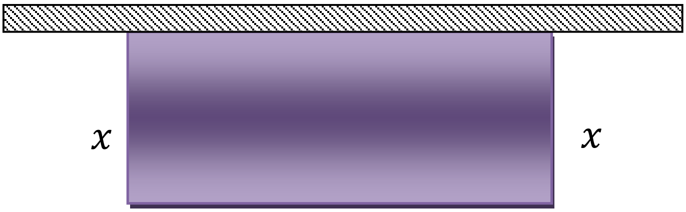
بناپر دې $g(x)$ تابع په $x_0 = \sqrt{2}$ کې اعظمي لیمیټ لري، نو د مستطیل اوږدبنت $2x_0 = 2\sqrt{2}$ او عرض یې $\sqrt{4-x_0^2} = \sqrt{2}$ دی.په داسې حال کې چې د مستطیل

مساحت $s = g\left(\sqrt{2}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 4$ اعظمي دی.

17مثال

دیوې اوسپنیزې کټارې تر ټولو کوچنی اوږدبشت l معلوم کړئ کومه چې یو دیوال ته نږدې مستطیل شکله ځمکه له دریو خواو څخه احاطه کوي. داسې چې د مستطیل مساحت $50m^2$ وي.

حل. فرض کوو چې دمستطیل عرض x او اوږدوالی یې $l-2x$ دی، نو د مستطیل مساحت عبارت دی له



$$x(l-2x) = 50 \Rightarrow xl - 2x^2 = 50 \Rightarrow xl = 2x^2 + 50 \Rightarrow l = 2x + \frac{50}{x}$$

دکټارې اوږدوالی دx متحول (د مستطیل عرض) یوه تابع ده چې په لاندې ډول ورکړل شوې ده

$$l(x) = 2x + \frac{50}{x} \Rightarrow l'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} \quad : \quad l'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{50}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

څرنګه چې x د مستطیل دعرض په توګه مثبت عدد دی، نو -5 په پام کې نه نیول کیږي او $x = 5$ دغوښتل شوي مستطیل عرض دی یعنې

$$l(x) = 2x + \frac{50}{x} \quad \Rightarrow \quad l(5) = 2 \cdot 5 + \frac{50}{5} = 10 + 10 = 20$$

نو د غوښتل شوي کټارې اوږدوالی $20m$، دمستطیل اوږدوالی $10m$ او عرض یې $5m$ باید وي.

د هوپيتال قاعده

د تابع ګانو دلیمیټ د مبهمو شکلونو محاسبه کول، دمشتق په کارولو سره، د هوپيتال په قاعده دمعمولي طريقو څخه ګټوره او اسانه ده او دلته دا قاعده تر بحث لاندې نیول کیږي.

د هوپيتال د قاعدې کارول د $\frac{0}{0}$ په حالت کې

که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ د $x=a$ په یو مجاورت کې دمشتق نیوني وړ او $f(a)=0=g(a)$ شي، نو که $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود ولري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

مثالونه

$$18.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

$$19.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

$$20.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

$$21.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$$

$$22.\quad \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\pi x\sin(\pi x)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\pi \sin(\pi x) + \pi^2 x \cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi^2}$$

نتیجه. که چېرې د f او g تابع ګانې د x په کافي اندازه لویو قیمتونو کې دمشتق نیونې وړ او $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$ وي، نو

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

د هوپیتال د قاعدې کارونه د $\frac{\infty}{\infty}$ په حالت کې

که چېرې د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = a$ عدد په مجاورت کې دمشتق نیونې وړ خو $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$ وي او $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود ولري نو

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثالـــونه

23. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

24. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

25. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x + 2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$

26. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^x \ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2^x (\ln 2)^2}$

$$= \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{2^x (\ln 2)^n} = 0$$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = 0$

نتیجه. د $p(x)$ د پولینوم لپاره لرو چې

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty$$

استثنايي حالتونه

داسې موارد شته چې په هغې کې دهوپیتال د قاعدې تطبیق یوازې په غیر مستقیم ډول ګټور وي او یا امکان لري د دې قاعدې تطبیق هیڅ ګټور نه وي. 28 او29 مثالونو ته دې توجه وشي.

28 مثال

د $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3 \cos x}$ په محاسبه کې چې د $\frac{0}{0}$ حالت لري، د هوپیتال د قاعدې مستقیم تطبیق ګټور نه دي. خو نوموړی لیمېټ د دریو لیمېټونو د ضرب په توګه په پام کې نیسو او د هوپیتال قاعده پرې تطبیق کوو.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3 \cos x} = \left[\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{1}\right]\left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)(4)(1) = 2$$

29 مثال

د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ محاسبه کوو.

حل: دا لیمېټ د $\frac{\infty}{\infty}$ غیر معین شکل لري، که چېرې دهوپیتال قاعده پرې تطبیق شي لرو چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

د وروستني رابطې دښي خوا افادې لیمېټ موجود نه دی، ځکه چې د$sinx$ او $cosx$ قیمتونه د -1 او $+1$ ترمنځ قیمتونه اخلي، نو د هوپیتال قاعده په دې مورد کې دتطبیق وړنه ده. په داسې حالت کې چې پورتني لیمېټ په اسانی سره په لاندې ډول محاسبه کېدلی شي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

30 مثال

په $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x}$ باندې دهوپیتال قاعده غیر موثره ده په داسې حال کې چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

31 مثال

دهوپیتال د قاعدې په مرسته $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ نه شو حسابولی، خو

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x}) = 1+0 = 1$$

نور مبهم شکلونه او د هوپیتال قاعده

اوه مبهم شکلونه $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ او 1^∞ : د لیمیټونو دحسابوني

په درشل کې دپورتنیو شکلونو سره مخامخ کیږو خو ممکنه ده پنځه وروستني حالتونه په لازمو اړونو سره په یو له لومړنیو دوو حالتونو واړول شي چې بیا د هوپیتال د قاعدې له مخې حل کیږي.

د $0\cdot\infty$ حالت

کله که $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ او $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ وي، نو د

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{یا} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

په پام کې نیولو سره د $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ لیمیټ په یو له $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ شکلونو بدلیدلی شي.

32 مثال

$$\lim_{x\to\infty}[x.arc\cot x] = \lim_{x\to\infty}\frac{arc\cot x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

د $\infty-\infty$ مبهم شکل

کله چې $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي، نو د

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}=\frac{u(x)}{v(x)}$$

دلته $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ د $\frac{0}{0}$ په شکل بدلیږي په داسې حال کې چې

$$\lim_{x\to a}u(x) = 0 = \lim_{x\to a}v(x)$$

33 مثال

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x+(x+x^2)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2\sin x-(x+x^2)\sin x+(2+4x)\cos x} = 1$$

د $0^0, \infty^0$ او 1^∞ مبهم شکلونه

ممکنه ده د $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ لیمیټ پورتني یوشکل ځان ته غوره کړي. داهر یوشکل دطبیعي لوګارتم په مرسته د $\infty . 0$ په شکل دبدلولو وړ دی، یعني د $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ لیمیټ دحسابولو لپاره له

$$\ln\left(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(g(x)\ln f(x)\right)$$

څخه کار اخیستل کیږي.

34 مثال

د (∞^0)حالت. د $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ پیداکول مطلب دي.

حل: د n عدد دمتحول په توګه په پام کې نیسو، لرو چې

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{n'}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

35 مثال

د (1^∞) شکل. د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ عدد حساب کړئ.

حل

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\frac{x+1}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1\;\Rightarrow\;\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=1\;\Rightarrow\;\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad\bullet$$

36 مثال

د (0^0) شکل. د $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ لیمېټ پیداکړئ.

حل: د 0^0 شکل لیمېټ دپیداکولو لپاره لرو چې

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(\ln 1-\ln 2x)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln 2x}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2x}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x}}{1}=0$$

$$\Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

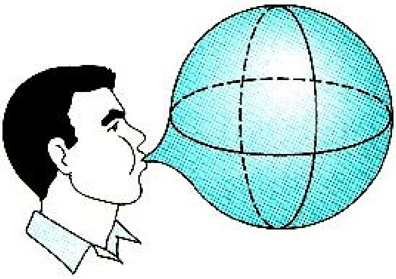
یادښت. لیدل کېږي چې دځینو طاقتنما تابع ګانو لیمېټ دلوګارتم او مشتق په مرسته په مناسب ډول حسابیدلی شي.

د کمیتونو د تغیر اړونده تطبیقي مسایل

زیات تطبیقي مسایل د $y=f(x)$ د تابع د تغیر دسرعت په اړوند طرحه کیږي چې په هغې کې د x او y متحولین په دریم متحول (t) وخت پورې تړلي وي. په دا ډول حالتونو کې ضمني مشتق نیونه د $\frac{dy}{dt}$ او $\frac{dx}{dt}$ د تغیراتو سرعت معلوموي او په نتیجه کې دمسالې عمومي او خصوصي حلونه په لاس راځي.

37 مثال

(دبالون دحجم تغير). ديو کروي بالون حجم دهوا په وردا خليدو سره زياتيږي، په هغه لحظه کې چې شعاع يې $2ft$ دی، دزياتوالي سرعت يې $\frac{1}{6}\ {ft}/{\min}$ دی، نو دبالون حجم په کوم سرعت سره زياتيږي؟



عمومي حل: که حجم په v، شعاع په r او وخت (په دقيقه) پهt سره ونبيو، نو

$$V=\frac{4}{3}\pi\ r^{3}$$

په داسې حال کې چې r او v دوخت تابع ګڼل کيږي، نظر وخت ته دضمني مشتق نيونې څخه وروسته لرو چې

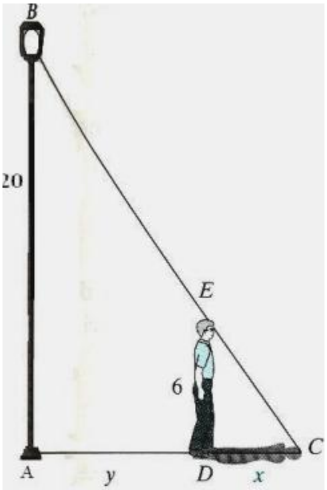
$$\frac{dV}{dr}=4\pi\ r^{2}\frac{dr}{dt}$$

خصوصي حل: په هغه لحظه کې چې دبالون شعاع $r=2ft$ وي، دهغې دحجم د تغير سرعت په لاندې ډول په لاس راځي

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=40\,cm}=4\pi(2)^{2}\,\frac{1}{6}=4(3.14)(4)(0.17)\approx 8.37\ {ft}/{\min}$$

38 مثال

(خوځنده سیوره). یوسړی چې $6ft$ قد لري، دشپې له خوا په کوڅه کې دبرق د چراغ له یوې متې څخه چې$20ft$ ارتفاع لري، د $7\ ^{ft}/_{sec}$ په سرعت (چټکتیا) سره لېرې کیږي، د دی سړي سیوره به په کوم سرعت تغیر کوي؟



عمومي حل: که x دسیورې اوږدوالی په (فټ واحد) سره وي، y دسړي او چراغ دمتې ترمنځ واټن او t د هغه وخت په ثانیه سره وي. نود شکل سره سم د ΔABC او$\Delta\ DEC$ مثلثونه سره مشابه دي نو

$$\frac{y+x}{20}=\frac{x}{6}\Rightarrow x+y=\frac{20}{6}x\Rightarrow y=\frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{7}{3}\frac{dx}{dt}$$

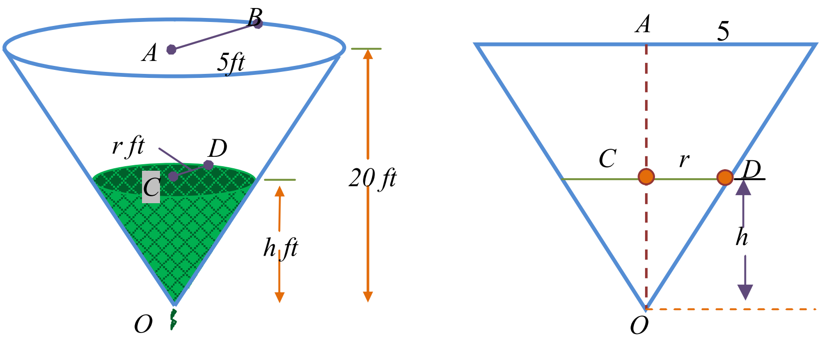
خصوصي حل: څرنګه چې $\frac{dy}{dt}=7\ ^{ft}/_{sec}$ دی نو

$$7=\frac{7}{3}\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=3$$

په دې ترتیب د سیورې دتغیر سرعت $3\,{}^{ft}\!/_{sec}$ دی.

39 مثال

د مخروطي ډوله ټانکر تشول. د اوبو يو مخروطي ټانکر چې دايروي قاعده لري، شعاع يې$5ft$ او ارتفاع يې$20ft$ دی. په معکوس (سرچپه) ډول له څنډې څخه د اوبو دخالي کولو په حالت کې په پام کې نيول شوي دی هغه لحظه چې د اوبو ارتفاع يې $8ft$ ته رسيږي، اوبه د ټانکر له راس څخه په $2\,{}^{ft^3}\!/_{\min}$ سرعت سره خالي کيږي. نو د اوبو د ارتفاع دتغير سرعت په دې لحظه کې څودی؟



عمومي حل: د دې مخروطي ډوله ټانکر حجم $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ دی له شکل څخه ليدل کيږي چې

$$\frac{5}{20}=\frac{r}{h}\Rightarrow r=\frac{h}{4}$$

بناپر دې

$$V=\frac{1}{3}\pi\, r^2 h=\frac{1}{3}(3.14)\left(\frac{h}{4}\right)^2=\frac{\pi}{48}h^2$$

$$\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{16}h^2\frac{dh}{dt}$$

خصوصي حل: هغه وخت چې د اوبو حجم په دقيقه کې دوه فټه تغير کوي لرو، چې

$$\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{16}h^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow-2=\frac{\pi}{16}(8)^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{2\pi}\approx-0.16\,{}^{ft}\!/\!_{\min}$$

نو د اوبو دارتفاع دکموالي سرعت (چټکتيا) په هره دقيقه کې 0.16 فټه دی.

پوښتني

1. د $y = -x^2 + 4x$ تابع پر منحني باندې په $x = 2$ کې دمماس معادله پیداکړئ.

2. د $y = \sqrt{x}$ تابع په ګراف باندې د $(1,1)$ په نقطه کې دعمود معادله ولیکئ.

3. د $y = \ln x$ پرمنحني باندې په $x = 2$ کې د مماس معادله پیداکړئ.

4. د $y = e^{2x} + 1$ تابع پرمنحني باندې په $x = 0$ کې دعمود معادله ولیکئ.

5. د $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ تابع پرمنحني باندې په $x = 1$ کې دمماس معادله پیداکړئ.

هغه انترولونه پیداکړئ چې درکړل شوي تابع ګاني په هغې کې متزایدې یا متناقصې وي.

$$6.\quad f(x) = 5x^2 + 10x \quad , \quad 7.\quad g(x) = -4x^2 + 16x$$

$$8.\quad f(x) = x^3 - x^2 - x \quad , \quad 9.\quad g(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

دلاندې تابع ګانو نسبي نهایي (اکسترموم) نقطې پیداکړئ.

$$10.\quad y = x^2 + 3 \quad , \quad 11.\quad y = -2x^2 + 4x - 2$$

$$12.\quad y = \frac{1}{3}x^3 - x \quad , \quad 13.\quad y = 2x^4 - 4x^2 + 5$$

14. د $f(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & , \quad x \le -4 \\ 12 - (x+1)^2 & , \quad x > -4 \end{cases}$ تابع نسبي اصغري نقطه پیداکړئ.

دلاندې تابع ګانو په درکړل شوي انترول کې مطلقه اعظمي او مطلقه اصغري معلوم کړئ.

15. $y = 4x^2 - 7x + 3 \quad , \quad [-2\,,2]$

16. $y = 4x^3 - 8x^2 + 1 \quad , \quad [-1\,,1]$

17. $y = \sin x + x + 3 \quad , \quad [0\,,2\pi]$

18. $y = \sin x - \cos x \quad , \quad [0\,,\pi]$

دلاندې تابع ګانو دانعطاف نقطې معلومې کړئ، هغه انټرولونه وټاکی چې داړونده تابع ګراف په هغې کې محدب یا مقعر وي.

19. $y = 4 + 3x - x^3$, 20. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x$

21. $y = x^3 - 3x^2 + 2$, 22. $y = x^2 - 4x + 3$

23. $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$, 24. $y = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

24. وښيئ چې د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع ګراف یوازې یوه د انعطاف نقطه لري. هغه دعطف نقطه پیداکړئ.

25. د c,b,a او d قیمتونه دا ډول پیداکړئ چې د $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په $(2,3)$ نقطه کې انعطاف او په $(1,5)$ نقطه کې نسبي اعظمي ولري.

دلاندې تابع ګانو ګر افونه رسم کړئ.

26. $y = x^2 - 3x - 4$, 27. $y = x^2 + x - 30$

28. $y = \begin{cases} 3x - 2 & , \ x < 1 \\ x^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$, 29. $y = \begin{cases} 4 - x^2 & , \ x \leq 1 \\ 2 + x^2 & , \ x > 1 \end{cases}$

30. $y = \dfrac{2}{x - 4}$, 31. $y = \dfrac{2x}{x - 1}$, 32. $y = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

دهوپیتال د قاعدې څخه په استفاده لاندې لیمیټونه معلوم کړئ.

33. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$, 34. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, 35. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x(3+x)}$

36. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$, 37. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\ln(x+1)-1}{x^2}$

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$, 39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 40. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(\ln x)^3}$

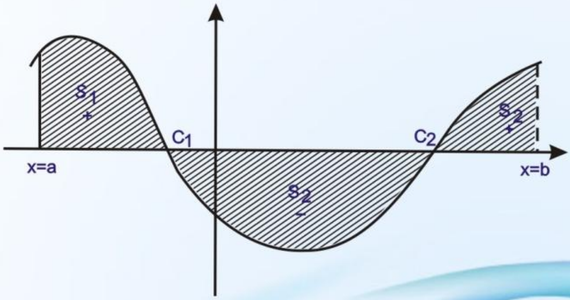
41. $\lim\limits_{x\to0+}(x^2\ln x)$, 42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$, 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$

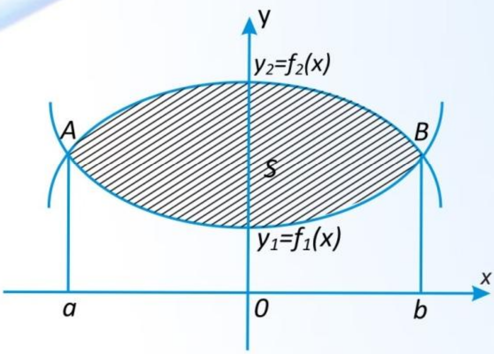
44. $\lim\limits_{x\to0+}(\ln\cot x)^{\tan x}$, 45. $\lim\limits_{x\to2+}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{\ln(x-1)}\right)$

46. $\lim\limits_{x\to1+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$, 47. $\lim\limits_{x\to0+}\left[1+\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]^{\frac{1}{x}}$

48. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, 49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right)$

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x-\cos x)^{\tan x}$, 51. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$





شپږم څپرکی

انتګرال

انتګرال

انتګرالونه په رياضي کې يوه مهمه موضوع ده چې په زياتو حسابونو (محاسبو)کې ځرګند رول لري.

دانتګرال مفهوم له دوو نقطه نظرو څخه طرح کيږي لومړی انتګرال دهغي اوليه تابع ګانو دسبټ په توګه چې مشتق يې معلوم وي (غير معين انتګرال). دوهم انتګرال دعددی مجموعي دليمېټ په توګه (معين انتګرال). د انتګرال دا دواړه مفهومونه ديوې سکې د دوومخونو په توګه يو له بله سره پيوستون لري. په دې فصل کې دمعينو اوغير معينو انتګرالونو مقدمات په لنډه توګه تر بحث لاندې نيول کيږي.

اوليه تابع

$F(x)$ د $f(x)$ تابع د اوليه تابع په نامه يادېږي کله که $\frac{dF}{dx}=f(x)$ وي. په بل عبارت د اوليه تابع $F(x)$ او اصلي تابع $f(x)$ ترمنځ لاندې رابطې موجودې دي.

$$dF(x)=f(x)\,dx$$

يا

$$F'(x)=f(x)$$

1 مثال

د $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ او $G(x)=\frac{1}{3}x^3+9$ د $f(x)=x^2$ دوې اوليه تابع ګانې دی.

$$F'(x)=x^2=f(x)$$
$$G'(x)=x^2=f(x)$$

د اوليه تابع ګانو شمېر

دا څرګنده ده چې يوه تابع کولی شي (بي نهايت زياتې) اوليه تابع ګانې ولري، چې

دهرې جوړې ترمنځ توپیر یې یوازې یو ثابت عدد وي.

2 مثال

د $f(x) = x^2$ انتګرال عبارت دی له

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

غیر معین انتګرال

که چیرې $F(x)$ د $f(x)$ یوه اولیه تابع وي، نود $F(x) + c$ تابع ګانو سېټ په داسې حال کې چې c اختیاري ثابت عدد دی، د$f(x)$ دغیرمعین انتګرال په نامه یادیږي او لیکو چې

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

د تابع ګانو انتګرال نیونه

د بسیطو تابع ګانو انتګرال، کیدلي شي د مشتقاتو له فهرست څخه پیش بیني او معلوم شي. خو په عمومي توګه د مختلفو تابع ګانو د انتګرال دپیداکولو لپاره متفاوت او اختصاصي روشونه وجود لري.

د غیرمعینو انتګرالونولومړني خاصیتونه

دc او k ثابتو عددونو لپاره لرو چې

1. $\int 0\, dx = C$

2. $\int k\, dx = kx + C$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$

4. $\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$

5. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

مثالـــونه

اوس کولی شو دځینو ساده ډول تابع ګانو انتګرالونه حساب کړو څو نمونې په لاندې ډول په پام کې نیسو.

$$3.\quad \int 5\,dx = 5x + c$$

$$4.\quad \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$$

$$5.\quad \int 5t^7 dt = 5\int t^7 dt = 5.\frac{t^8}{8} + c = \frac{5}{8}t^8 + c$$

$$6.\quad \int \left(4x^3 + 2x - 1\right) dx = \int 4x^3 dx + \int 2x dx - \int dx$$

$$= 4\int x^3 dx + 2\int x dx - \int dx = \frac{4x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} - x + c$$

$$\Rightarrow \int \left(4x^3 + 2x - 1\right) dx = x^4 + x^2 - x + c$$

$$7.\quad \int \frac{3dx}{x^2} = \int 3x^{-2} dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1} + c = -3x^{-1} + c = -\frac{3}{x} + c$$

$$8.\quad \int 5\sqrt[3]{u^2}\,du = 5\int u^{2/3} du = 5\frac{u^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = 5\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = 3u^{\frac{5}{3}} + c$$

$$9.\quad \int \frac{x^3-3}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int \left(x - 3x^{-2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x^{-1} + C$$

$$10.\quad \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt{x}\right) dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}}\right) dx = 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 6\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= 3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}} + c$$

معمولي انتګرالونه

د تابع ګانو د مشتقاتو له مخې، دځینو معمولو او کاري تابع ګانو دانتګرال نیونه د لومړني مرجع په توګه، تر ټولو په ساده شکلونو کې په لاندې ډول فهرست کوو.

$$1.\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\alpha\neq -1 \quad , \quad 2.\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c,x\neq 0$$

$$3.\quad \int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c \quad , \quad 4.\quad \int e^{x}dx=e^{x}+c$$

$$5.\quad \int\cos x dx=\sin x+c \quad , \quad 6.\quad \int\sin x dx=-\cos x+c$$

$$7.\quad \int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\tan x+c \quad , \quad 8.\quad \int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\cot x+c$$

$$9.\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+c \quad , \quad 10.\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\arctan x+c$$

$$11.\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm 1}\right|+c \quad , \quad 12.\int\frac{dx}{x^{2}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$

$$13.\quad \int\cosh x=\sinh x+c \quad , \quad 14.\quad \int\sinh x=\cosh x+c$$

$$15.\quad \int\frac{dx}{\cosh^{2}x}=\tanh x+c \quad , \quad 16.\quad \int\frac{dx}{\sinh^{2}x}=-\coth x+c$$

11 او 12 رابطې دمعکوسو هايپربوليکو تابع ګانو دمشتق نيوني څخه لاس ته راځي.

مثالونه

$$11.\quad \int\left(2\cos x-5\sin x+e^{x}\right)dx=2\int\cos x dx-5\int\sin x dx+\int e^{x}dx$$

$$=2\sin x+5\cos x+e^{x}+c$$

$$12.\ \int\left(4^{x}-\frac{1}{1+x^{2}}\right)dx=\int 4^{x}dx-\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\frac{4^{x}}{\ln 4}-\arctan x+c$$

$$13.\ \int\left(\sinh x+\frac{5}{x}\right)dx=\int\sinh x dx+5\int\frac{dx}{x}=\cosh x+5\ln|x|+c$$

په تعویضي طریقه انټګرال نیونه

که چېرې د $F\left[g\left(x\right)\right]$ مرکبه تابع په پام کې ونیسو. پوهېږو چې

$$\frac{d}{dx}F\left[g(x)\right] = F'_g\left[g(x)\right]g'(x)$$

نو

$$\int F'_g\left[g(x)\right]g'(x)\,dx = F\left[g(x)\right] + C$$

وروستنۍ رابطه په تعویضي طریقه د انټګرال نیونې اساس جوړوي او که چېرې په هغه کې $g\left(x\right)=u$ او $F'=f$ وضع شي، نو څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی

لرو چې

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F[u]+C=F\left[g(x)\right]+C$$

بناپر دې

$$\boxed{\int f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx = F\left[g\left(x\right)\right]+C \quad , \quad F'=f}$$

په دې ترتیب، په دې روش کې تر انټګرال لاندې تابع متحول دیوبل مناسب متحول له جنسه داډول عوض کېږي چې اړونده انټګرال، نظر نوي پېښبیني شوي متحول ته په لاس راشي.

د انټګرال دپیداکولو وروسته باید لومړنی متحول په اولیه تابع کې وضع شي.

14مثال

دا انټګرال $\int 3x^2 e^{x^3+1}dx$ پیداکړئ.

حل: که $u = x^2+1$ په نظر ونیول شي $du = 3xdx$ ده او

$$\int 3x^2 e^{x^3+1}dx=\int e^{x^3+1}\left(3x^2\right)dx=\int e^u du=e^u+C=e^{x^3+1}+C$$

15مثال

دا انتګرال $\int\sqrt{\cos x}\sin x\,dx$ په لاس را وړئ.

حل: د $u=\cos x$ او $du=-\sin x dx$ لپاره په لاس راځي چې

$$\int\sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx=\int\sqrt{u}(-du)=-\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{\cos x}\,\sin xdx=-\frac{2}{3}\cos^{3/2}x+C$$

16مثال

$\int\frac{e^x}{(1+2e^x)^3}dx$ پیداکړئ.

حل: د $u=1+2e^x$ او $du=2e^x dx$ په عوض کولوسره لرو، چې

$$\int\frac{e^x}{(1+2ex)^3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2e^x dx}{(1+2ex)^3}\quad\begin{bmatrix}u=1+2e^x\\ du=2e^x dx\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right)+C=1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}\right)+C=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+2e^x)^2}+C$$

17. $\int\frac{\ln^2 x dx}{x}=\int(\ln x)^2\frac{dx}{x}=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}\ln^3 x+C$

په داسې حال کې چې $u=\ln x$ او $du=\frac{dx}{x}$ عوض کیږي

18. $\int\frac{\arctan xdx}{1+x^2}=\int udu=\frac{1}{2}u^2+c=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$

دلته $u = \arctan x$ او $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ عوض شوي دي.

$$19.\quad \int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C \qquad \begin{bmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c$$

$$20.\quad \int \frac{dx}{x(\ln x+1)} = \int \frac{1}{\ln x+1}\,\frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\big|\ln|x|+1\big| + c$$

$$\left[u = \ln|x| + 1 \quad , \quad du = \frac{1}{x}\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{arc\sin 2x} + C \quad , \quad \left[u = arc\sin 2x \quad , \quad du = \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$$

$$22.\quad \int x^2\cot x^3 dx = \frac{1}{3}\int \cot x^3\left(3x^2dx\right) = \frac{1}{3}\int \cot u du = \frac{1}{3}\ln|\sin u| + C$$

د غیرمعین انتګرال د د ستورونو عمومیت

د تعويضي طريقې څخه په ګټې اخيستنې سره دا لاندې عمومي فورمولونه استخراج کيدلی شي.

$$1.\quad \int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c\ ,\ n \neq 1$$

$$2.\quad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$3.\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$4.\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$5.\quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$6.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$7.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c$$

یادښت

پنځم دستور په لاندې ډول هم ښودل کېدلی شي.

$$8.\quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

د ځینو مثلثاتي تابع ګانو انټګرال نیونه

که چېرې دغیرمنفي تاموعددونو توان لرونکو $sinx$ او $cosx$ تابع ګانو انټګرال نیونه مطلب وي یعنې

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \qquad (I)$$

دلته m او n غیرمنفي تام عددونه دي. په لومړني قدم کې دلاندې مثلثاتي مطابقتونو څخه کار اخیستل کیږي.

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

(1) انټګرال درې حالتونه لرلي شي.

اول: یوله دوو عددونو m یا n صفر وي.

دوهم: کم ترکمه یو له دوو عددونوڅخه m او n جفت وي.

دريم: دواړه عددونه m او n طاق وي.

د کار داسانتيا لپاره په لاندې څو نمونو اکتفا کوو.

23. $\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 6x dx\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\int \cos t dt\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin t\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c, \begin{bmatrix} t = 6x \\ \frac{dt}{6} = dx \end{bmatrix}$$

24. $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

25. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\sin x dx$

$$= \int (u^4 - u^2) du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c, \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x \end{bmatrix}$$

26. $\int \cos^5 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-u^2)^2 du$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

27. $\int \sin^2 x \cos^2 x\ dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c\ , \begin{bmatrix} u = 4x \\ \frac{du}{4} = dx \end{bmatrix}.$$

28. $\int \cos^4 3x\ dx = \int (\cos^2 3x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)\, dx == \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x\right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c\quad .$$

د انقسام په طریقه انتګرال نیونه

د دوو تابع ګانو $u(x)$ او $v(x)$ د حاصل ضرب مشتق په پام کې نیسو.

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - v(x)\,u'(x)$$

بناپر دې چېې خواته اولیه تابع عبارت ده له

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx}$$

او دا رابطه د انقسام په طریقې د انتګرال نیونې دستور دی چې په لاندې ډول هم ارایه کیږي.

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

ددې طریقې دکارونې لپاره تر انتګرال لاندې تابع د دوو تابع ګانو u او v د ضرب د حاصل په توګه داسې په پام کې نیول کیږي چې په هغې کې $v = \int dv$ وضاحت ولري او د $\int v\,du$ انتګرال نسبت $\int u\,dv$ ته اسانه وي

29مثال

د $\int \ln x\,dx$ انتګرال حساب کړئ.

حل: لاندې طبیعي تعویض په پام کې نیسو

$$u = \ln x \quad , \quad dv = dx \;\Rightarrow\; du = \tfrac{1}{x}dx \quad , \quad v = x$$

بناپردې

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

30 مثال

د $\int \arcsin x \, dx$ انتګرال پیداکړئ.

حل: بیاهم یوازنی ګټور تعویض عبارت دی له

$$u = \arcsin x \quad , \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad , \quad v = x$$

له دي ځایه څخه

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

31 مثال

د $\int xe^{-x}\, dx$ انتګرال پیداکړئ.

حل: دلته ګټور امکان عبارت دی له

$$u = x \ , dv = e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad du = dx \ , v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + c$$

32 مثال

د $\int x^2 e^{-x}\, dx$ انتګرال پیداکړئ.

حل: دا لاندي وضع کوو

$$u = x^2 \quad , \quad dv = e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx \quad , \quad v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$$

خو پوهیږو چي

$$\int xe^{-x} dx = -e^{-x}\left[x+1\right] + C_1$$

په نتیجه کې

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left[-e^{-x}(x+1)\right] = -e^{-x}\left[x^2+2x+2\right] + C.$$

33 مثال

د $\int x^2e^{-x}dx$ انتګرال په لاس راوړئ.

حل: د لته دانقسام طریقه دوه ځلې کارول کیږي.

$$u = \sin 3x \ , \ dv = e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad du = 3\cos 3x dx \ , \ v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx \quad \dots \quad (I)$$

اوس د (I)رابطې چپه خوابیاهم د انقسام په طریقه تحلیل کوو

$$u = \cos 3x \ , dv = e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad du = -3\sin 3x dx \ , v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos 3x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx \quad \dots \quad (II)$$

د (II) رابطې څخه دI په مساوات کې وضع کوو لرو چې

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx\right]$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \tfrac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x dx + \tfrac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + C_1$$

$$\Rightarrow \tfrac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + C_1$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{4}{13}[\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + C_1]$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x dx = \tfrac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

د هغو تابع ګانو انتګرال چې دوهمه درجه پولینومونه لري

د لته دهغو تابع ګانو انتګرالونه مطالعه کوو چې ax^2+bx+c ډوله افادې ولري.
په ځانګړې توګه

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{او} \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

ډوله انتګرالونه

په عمومي توګه د x^2+px+q افاده په لاندې ډول لیکلی شو.

$$x^2+px+q=\left(x^2+px+\tfrac{p^2}{4}\right)+\left(c-\tfrac{p^2}{4}\right)$$

دې ته په پاملرنې سره چې د $c-\frac{p^2}{4}$ عدد مثبت یا منفي دی او $u=x+\frac{p}{2}$ وضع کیږي. د x^2+px+q پولینوم دلاندینو دوو حالتونو څخه یو حالت لري.

$$x^2+px+q=u^2\pm k^2$$

خو د ax^2+bx+c په پولینوم کې د a ضریب فکتور نیسو نو لاندې افاده په لاس راځي

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}\right]=a\left[x^2+px+q\right]$$

د پورتنیو دوه ډوله لیکنو څخه د مطلوبه انتګرالونو په تحلیل کې ګټه اخلو.

په لاندې مثالونو اکتفاکوو

34. $$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C$$

35. $$\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$\Rightarrow \int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{2}\sqrt{ax^2+bx+c}+C$$

$$36.\quad \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C$$

$$37.\quad \int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{du}{u^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\ln\left|\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \ln\left|\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

$$38.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{9+16x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25-4(x-2)^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4}{25}(x-2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x-2)}{5} + C$$

په داسی حال کې چې $u = \frac{2(x-2)}{5}$ عوض کول طرحه شوي دي.

$$39.\quad \int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+27}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+6+21}{9x^2+6x+5}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+5}dx + \frac{21}{9}\int \frac{dx}{4+(3x+1)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{9}\int \frac{3dx}{4+(3x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{9}\int \frac{dz}{4+z^2} = \frac{1}{9}\ln|u| + \frac{7}{9}\times\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} + C$$

دلته $\begin{bmatrix} u = 9x^2+6x+5 \\ du = (18x+6)dx \end{bmatrix}$ او $\begin{bmatrix} z = 3x+1 \\ dz = 3dx \end{bmatrix}$ په پورتنیودوو انتګرالونوکې

په پام کې نیول کیږي او د بر عکس عوض کولو څخه په لاس راځي چې

$$\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{9}\ln\left(9x^2+6x+5\right) + \frac{7}{18}\arctan\frac{3x+1}{2} + C.$$

د ناطقو تابع ګانو انټګرال نیونه

که چېرې په $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ ډوله انټګرالونو کې د صورت درجه له مخرج څخه زیاته وي، نو د صورت له تقسیم څخه پر مخرج باندې تر انټګرال لاندې تابع د یو پولینوم او یو کسر د حاصل جمع په توګه، په کوم کې چې د صورت درجه ئې له مخرج څخه کم ترکمه یوه درجه کمه وي، بدلیږي. په دې ترتیب مساله د هغې تابع انټګرال نیونې ته اوړي (راجع کیږي) په کومه کې چې د مخرج درجه له صورت څخه زیاته وي،

د ناطقو کسرونو د انقسام موضوع د I عمومي ریاضي په پنځم څپرکي کې تر بحث لاندې نیول شوي ده، د هغې پر بنا د یوې ناطقې تابع دانټګرال نیونې څخه دمخه، هغه تابع په ممکنه قسمي کسرونو باندې تجزیه کوو او انټګرال نیونه یې اسانه کیږي.

بیا هم په لاندې مثالونو باندې بسنه (اکتفا) کوو.

40 مثال

د $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2}dx$ انټګرال نیونه مطلب دئ.

حل: د دې کسر دصورت له تقسیم څخه پر مخرج باندې په لاس راځي چې

$$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2} = x-1+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

بناپر دې

$$\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2+2x+2}dx = \int\left(x-1+\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$=\tfrac{1}{2}x^2-x+\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+C$$

41 مثال

د $\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$ انټګرال مطلوب دئ.

حل: ددې اړونده کسر دوه خطي فکتورونه لري اوپه لاندې ډول تجزیه کیږي.

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}$$

د وروستنی مساوي بنې خواته د دوو کسرونو دهم مخرج کولو او دواړو خواو له مقایسې څخه وروسته لرو چې

$$5=A(x-2)+B(2x+1)=(A+2B)x+(-2A+B)$$

$$\Rightarrow (A+2B)x+(-2A+B)=5\Rightarrow \begin{cases} A+2B = 0 \\ -2A+B = 5 \end{cases}$$

د دې سیستم دحل څخه $A=-2$ او $B=1$ په لاس راځي نو

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx = -\int \frac{2dx}{2x+1}+\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\ln|2x+1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right| + C\ .$$

42 مثال

د $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}dx$ انتگرال پیداکوو.

حل: تر هر څه د مخه د کسرمخرج باید تجزیه شي.

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}=\frac{4x^2-3x-4}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د بنی خوا کسرونو هم مخرج کولو او د صورتونو له مقایسه کولو څخه وروسته په لاس راځي چې

$$4x^2 - 3x - 4 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 4 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x + (-2A)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=4 \\ A+2B-C=-3 \\ -2A \qquad\quad =-4 \end{cases} \Rightarrow \quad A=2\,,\,B=-1\,,\,C=3$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2}\right)dx$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x^2(x+2)^3}{x-1}\right| + C.$$

43 مثال

د $\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$ انتګرال پیداکړئ.

حل

$$\frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2} = \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

دکسرونو د تجنیس کولو او صورتونو دمقایسې څخه لرو، چې

$$5x^3-3x^2+2x-1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$$

$$5x^3-3x^2+2x-1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=5 \\ B+D=-3 \\ A \qquad =2 \\ B \qquad =-1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=2\,,\,B=-2\,,\,C=3,D=-2$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3x - 2}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2 + 1} - 2\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) - 2\arctan x + C.$$

معین انتگرال

اګرچې معین انتګرال دحسابونې دیونوي فن په توګه دغیرمعین انتګرال سره ګټوره او مهمه رابطه لري. خو کولی شوچې هغه په مستقله تو ګه داړونده قیمتونو له جنسه د یوي عددي سلسلې په توګه طرحه کړو.

که چیرې $f(x)$ یوه تابع د$[a,b]$ په تړلي انترول کې تعریف شوي او متمادي وي او

1. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \quad \dots \quad < x_{n-1} < x_n = b$
2. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad k = 1,2,3, \quad \dots \quad ,n$
3. $\Delta x_k \quad \to \quad 0 \quad , \quad n \quad \to \quad \infty$
4. $x_{k-1} \le c_k \le x_k \quad , \quad k = 1,2,3, \quad \dots \quad ,n$

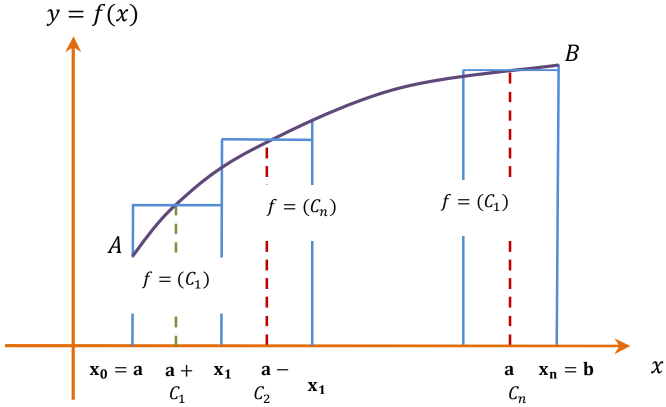
په دې صورت کې له a څخه تر b پورې د $f(x)$ معین انتګرال عبارت دی له

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[f\ (c_1)\Delta x_1 + f\ (c_2)\Delta x_2 + \quad \dots \quad + f\ (c_n)\Delta x_n \right]$$

د a او b عددونه په ترتیب سره د انتګرال لاندني او پورتني سرحدونه بلل کیږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ افاده د ریمن دمجموعې په نامه یادوي.



$$\Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} 4x\,dx = -6 \quad .$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټرول کې منفي قیمتونونه، ونه لري او متمادي وي. د هندسې له نظره د $\int_{-2}^{1} 4x\,dx$ انتګرال دهغې سطحې دمساحت سره مساوي دی چې د $y = f(x)$ تابع منحنې، دx او د$x = a$ او $x = b$ خطونو ترمنځ بندوي.

44 مثال

د $\int_a^b f(x)\,dx$ معین انتګرال حساب کړئ.

حل: تر انتګرال لاندې تابع $f(x) = 4x$ او اړونده انټرول $[-2,1]$دي. دلته

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad , \quad c_k = -2 + k\Delta x = -2 + k\left(\frac{3}{n}\right)$$

په پام کې نیسو او د مجموعې ځخه په استفاده لرو چې

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k)\Delta x] = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} 4c_k \Delta x\right] = \lim_{k\to\infty} \left[4\Delta x \sum_{k=1}^{n} c_k\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[4\Delta x\sum_{k=1}^{n}(-2+k\Delta x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[4\times\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-2+k\times\frac{3}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{12}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-2)+\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}k\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{12}{n}\left(-2n+\frac{3}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

د معین انتګرال خاصیتونه

$$1.\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad , \quad 2.\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$3.\quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad k = const.$$

$$4.\quad \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$5.\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$6.\quad m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

اساسي قضیه

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلي انټرول کې متمادي او $F(x)$ د $f(x)$ یوه اولیه تابع وي.نو

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)\,, F'(x)=f(x)}$$

دا قضیه معین او غیر معین انتګرالونه یوله بل سره تړي چې دمعین انتګرال حسابول ساده کوي.

45 مثال

د $\int_1^2\left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx$ معین انتګرال حسابوو.

حل: د اساسي قضيې څخه په استفاده لرو چې

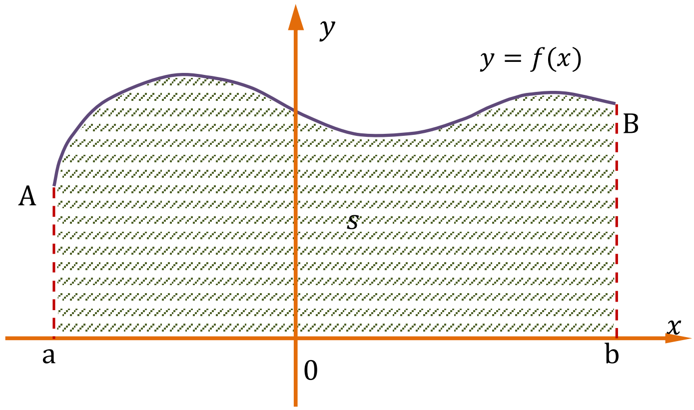
$$\int_1^2\left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx=2\int_1^2 x\,dx+3\int_1^2 e^x dx-4\int_1^2 \tfrac{1}{x}\,dx$$

$$=x^2\Big|_1^2+3e^x\Big|_1^2-4\ln|x|\,\Big|_1^2=\left(2^2-1^2\right)+\left(3e^2-3e^1\right)-\left(4\ln 2-4\ln 1\right)$$

$$=3+3e^2-3e-4\ln 2\approx 14{,}24$$

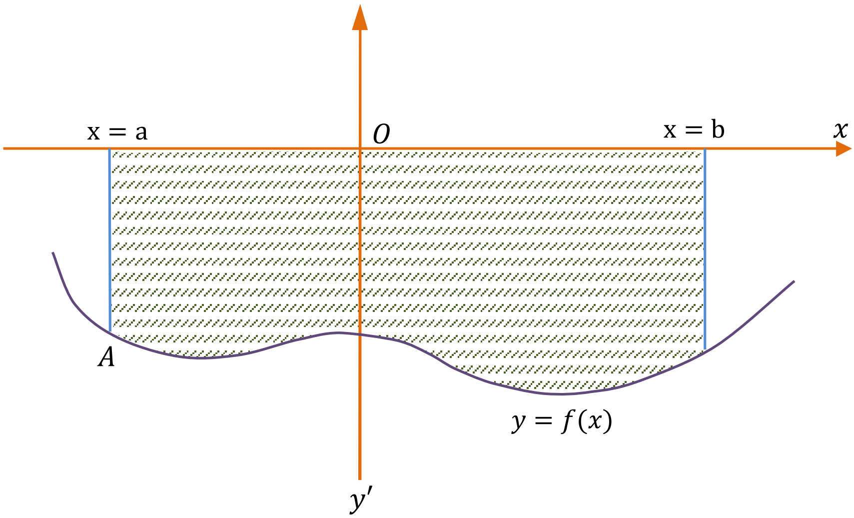
د مساحتونو په حسابولو کې د معین انتګرال کارول

لکه څرنګه چې دمعین انتګرال په پیژندنه کې څرګند شول چې که د$f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې منفي قیمتونه ونه لري (لاندې شکل)، نو د$y=f(x)$ منحني او افقي محور تر منځ سطح دپورتني انټروال په اړه عبارت دی له



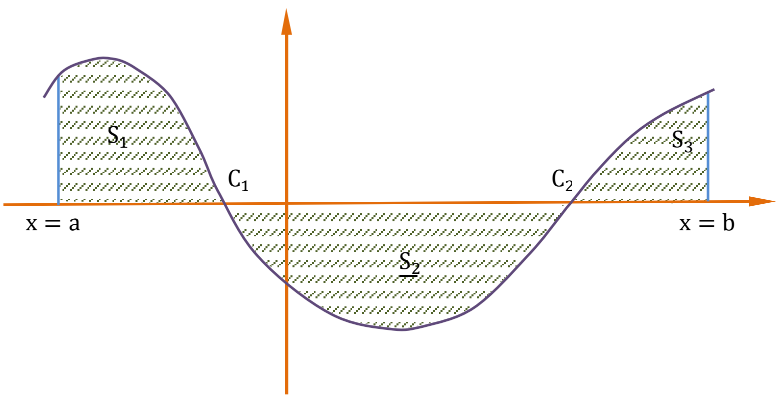
کله که $f(x)$ په اړونده انټروال کې مثبت قیمتونه ونه لري، نو دهغې مساحت لاندې شکل لري

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



که چېرې د $f(x)$ تابع د$[a,b]$ په انټروال کې په محدود تعداد سره تناوب ولري منفي برخې د منفي علامې سره په پام کې نيسو او مساحت يې پيداکوو. دمثال په توګه دلاندې شکل سره سم لرو، چې.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{e_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{e_2}^{d} f(x)dx$$

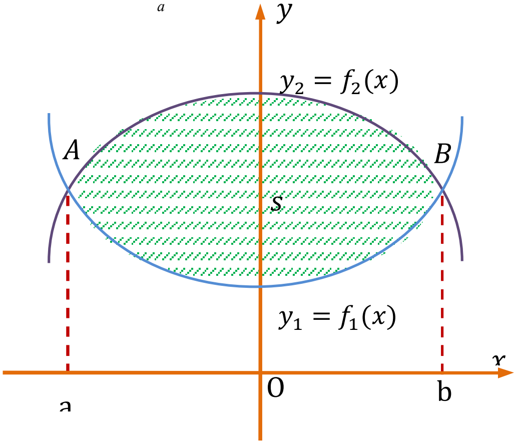


نوپه عمومي توګه

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

او که چیرې د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ تابع ګانو لپاره د $[a,b]$ په انټرول کې د $f_2(x) > f_1(x)$ شرط صدق شي (لاندې شکل)، نود $[a,b]$ په انټرول کې د $y = f_1(x)$ او $y = f_2(x)$ منحني ترمنځ دپرتې سطحې مساحت عبارت دی له

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx$$

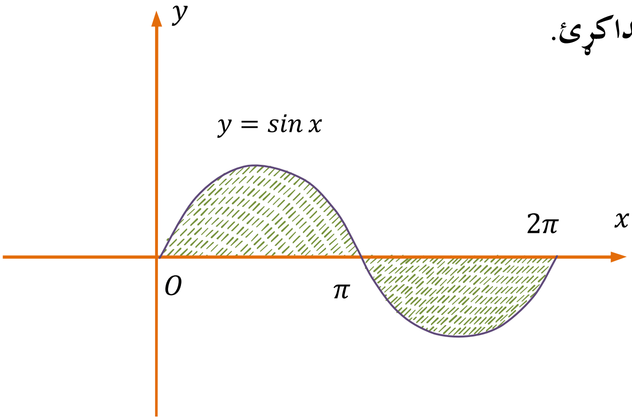


اما په عمومي حالت کې د هغې سطحې مساحت چې په $[a, b]$ انټرول کې د $y = f_1(x)$ او $y = f_2(x)$ منحني ګانو ترمنځ محاط وي عبارت دی له

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_1(x)|\, dx$$

46 مثال

د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ ، د x محور او $[0,2\pi]$ انټرول ترمنځ پرته ده، پیدا کړئ.

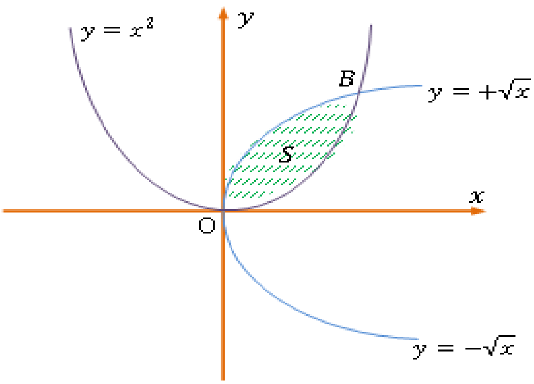


حل: ځرګنده ده چې اړونده منحني له $x=0$ ځخه تر $x=\pi$ په فاصله د افقي محور دپاسه او د $x=\pi$ او $x=2\pi$ په فاصله کې دنو موړي محور لاندې پرته ده. نو مطلوبه سطح عبارت دی له

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$=-(\cos\pi-\cos 0)+(\cos 2\pi-\cos\pi)=-(-1-1)+(1+1)=4$$

47 مثال

د $y=\sqrt{x}$ او $y=x^2$ منحني ګانو ترمنځ بندشوي سطح پيداکړئ.



حل: د منحني ګانو د تقاطع نقطو دمعلومولوځخه وروسته.

$$y=\sqrt{x}\ ,\ y=x^2\Rightarrow x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

مطلوب مساحت عبارت دی له

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتني

1. $\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx$, 2. $\int \left(\frac{3}{x^2} + 2x^{\frac{3}{2}} - 1\right) dx$

3. $\int \left(\frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}\right) dx$, 4. $\int \left(2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

5. $\int \frac{1}{(x-10)^7}\,dx$, 6. $\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{7x^2}\,dx$

7. $\int (5\cos 10x - 10\sin 5x)\,dx$, 8. $\int \frac{1}{(3z+10)^7}\,dx$

9. $\int \frac{3}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$, 10. $\int (x+5)^8\,dx$, 11. $\int (4-3x)^7\,dx$

12. $\int \sin(6x+3)\,dx$, 13. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$, 14. $\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

15. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+5)^4}$, 16. $\int \cos^3 x \sin x\,dx$, 17. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{2t^2+1}}$, 20. $\int y^2\sqrt[3]{2-4y^3}\,dy$, 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

21. $\int x\,e^{2x}\,dx$, 22. $\int x\cos 3x\,dx$, 23. $\int (\ln t)^2\,dt$

24. $\int x^2 \arctan x\,dx$, 25. $\int t^2 \sin t\,dt$, 26. $\int x\ln x\,dx$

27. $\int \sin^2\theta\,d\theta$, 28. $\int \ln(1+x^2)\,dx$, 29. $\int x^2 \sinh x\,dx$

30. $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$, 31. $\int \frac{dx}{x^3+4x}$, 32. $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$

33. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$, 34. $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$, 35. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$

36. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$, 37. $\int \frac{x^3\,dx}{x^2+x-6}$, 38. $\int \frac{2x-4}{x^2-x}\,dx$

39. $\int_0^1 (1-x^2)^3\,dx$, 40. $\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$, 41. $\int_0^2 x^2\sqrt{9-x^3}\,dx$

ماخذونه

1– آپوستل، ت. م1372انالیز ریاضی ترجمه عالم زاده، ع.ا. مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتجچی شریف، چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف. چاپ سوم، تهران، صفحات 486 – 569.

2– پورکاظمی، م.ح. 1370، ریاضیات عمومی، جلددوم، چاپ نشرنی، تهران، صفحات 11 – 108، 306 – 321، 433 – 519.

3– عدالتی، ت. و فرخی ح. اصول ومبانی جغرافیای ریاضی، چاپ موسسه آستان قدس رضوی ، مشهد 1380، ص ص 397 – 425.

4– قرآن نویس،م. وجوادی،ح. فزیک پیش دانشگاهی،انتشارات ققنوس، ایران،تهران 1383، ص ص 10 – 15.

5– فرزان م. و دیبایی م.ت. روش تدریس ریاضی دوره رهنمایی تحصیلی، چاپ گلشن تهران،1380 ص ص 107 – 140.

6– ملا فرجزاده، س. 1377فرهنگ ریاضیات، چاپ ونشرانتشارات احرار، تبریز . صفحات 255 – 290.

7– منصورفر، ک 1378 , ریاضیات پایه برای علوم اجتماعي، چاپ ونشر سازمان مطالعه وتدوین کتب علوم انسانی (سمت)، تهران، صفحات159 –207.

8– نیکوکار، م. و فرزام، گ. 1381، ریاضیات پیش دانشگاهی، نشر گسترش علوم پایه، تهران، صفحات 227 – 247.

9- Agarwal ,P.K.(2004) AIEEE Mathematics , Branch Office ,Delhi , pp.266-343.

10- Ayres ,F. J.R. (1964), Calculus, Schoum Publishing Co. New York,. pp. 129 -158 , 162 – 180. 283 -330.

11- Ayres ,F. J.R. (1962), First Year College Mathematics, Schoum Publishing Co., New York, pp. 417 – 427.

12- Barnett , R.A. , Ziegler M.R. and Byleen K.E. (1999) ,College Algebra , Sixth Edition , Adivision of The McGraw-Hill Companies , boston ,USA , pp. 488-540

13- Bermant, A. I. and Aramanovich I.G. (1979), Mathematical Analysis, Mir Publishing, Moscow,, pp. 258 – 343 , 365 – 568.

14- Cohen, D. (1990), Precalculus, California ,Los Angeles, ,pp. 411 -449.

15- Demidovich, B.; (1981), Problems Mathematical Analysis, Mir Pub. Moscow, , pp. 180 – 318.

16- Demidovich, B.P. and Maron I.A. , (1981), Computational Mathematics, Mir Publishers, Moscow, pp.127 -135 , 229 - 269.

17- Karl, J.S. (1998), Trigonometry For College Students , Brook/Col Publishing Co.Washington. p. 125.

18- Kindle , H.J. (1964), Analytic Geometry , Schoum Publishing Co., New York , pp. 258 – 272 , 278 , 279 , 283 – 330....

19- . Maqsood, A. Mathemahics7(2004),New Star Book Depot , Lahor,p p.21 – 65.

20- Maqsood, A. Mathemahics8(2004),New Star Book Depot , Lahor, , p p.1 – 87.

21- . Mira J.A. (1968), Arithmetic Clear and Simple , Booksellers ,New York , ,pp.1-158.

22- .Palmer C.I. and Bibb S.F. (1946)PracticalMathematics, MeGraw – Hill , Book Company ,New York,pp.1- 161

23- Piskunov, S.M. (1981), Differential and Integral Calculus , 1 vols. Mir Pub. Moscow.pp. 158 – 211 , 216 – 247 , 253 – 319.

24- Robert, B. (1997), Intermediate Algebra for College Student Second Edition , Prentice Hall , Upper Saddle River, New Jersey.p. 819 , 843 , 858 .

25- Spiegel, M.R. (1961), Statistics , ,Schaum,s Outline Series , New York ,.pp.45 -64.

26- Thomos ,G.B.and Finny ,R.L. (1996) , Calculus and Analytic Geometry , Addison – Wessley ,New York , USA , PP.1001 - 1134.

27- Stein E.I., (1961), Refresher Arithmetic , USA,Allyn and Bacon ,INC, pp. 109 -200 , 220,333.