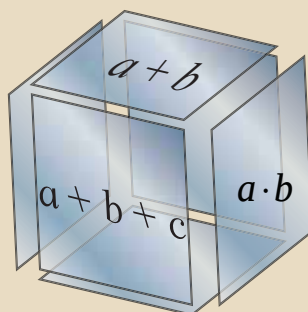
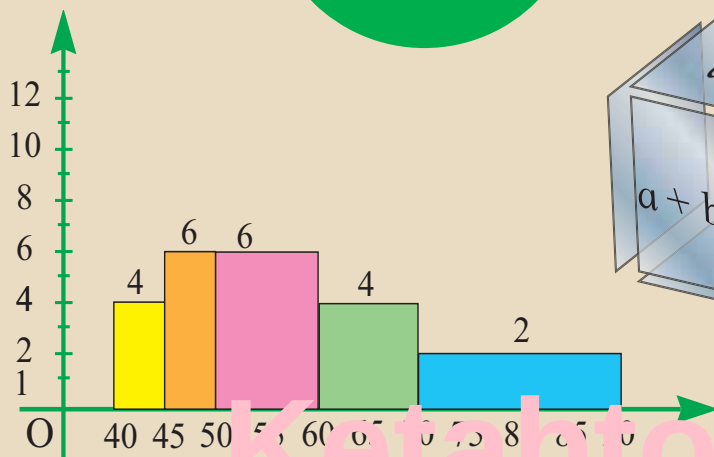




د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې
او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي
کتابونو د تالیف ریاست

ریاضي

نهم ټولگی



نهم ټولگی



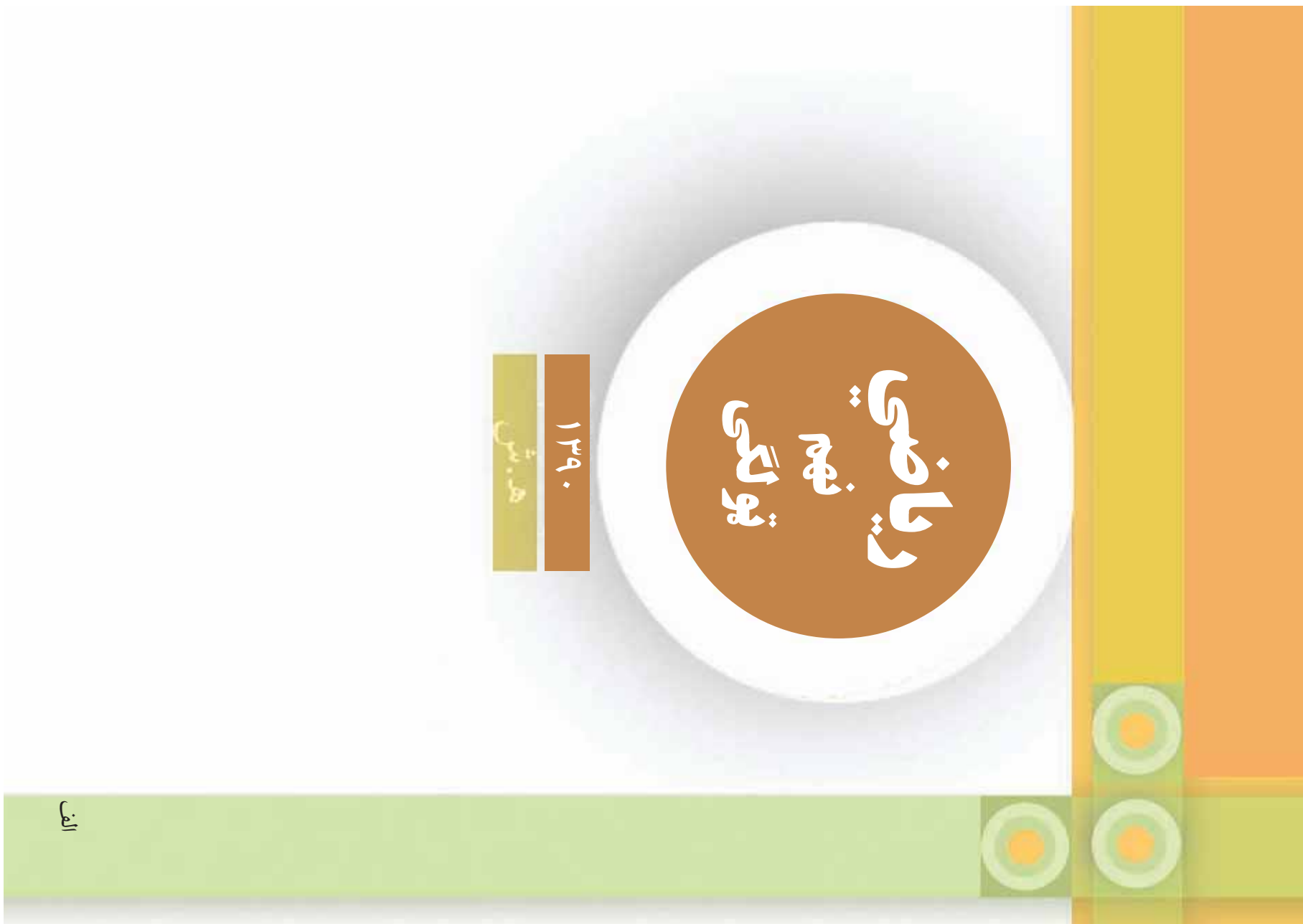
ISBN 978-9936-25-068-0



9 789936 250680 >

۱۳۹۰ ه. ش.

Ketabton.com



مولفين

- پوهيالی حمدالله شيرزی وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- پوهنمل طلاباز حبيب زى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- پوهندوى خالقداد فيروز کوهى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- دکټور ماخان شينواری د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- سرمولف مير تقىب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړی
- استاد مختار نوید د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړی

ژباړونکي

علمی اډيتور

- پوهنمل طلاباز حبيب زى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی

د ژبې اډيتور

- سرمحقق نعمت الله اندر د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی

دیني، سیاسي او فرهنگي کمیټه:

- مولوي عبدالصبور عربي
- دکټور محمد يوسف نیازی
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب په رياست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکټور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين.
- دکټور شېرعلي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول.
- د سرمولف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی

رئيس

کمیوز او ډیزاين

- وليد نوید نسيمي
- محمد اشرف امين





ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی	دا وطن افغانستان دی
هر بچی یې قهرمان دی	کور د سولې کور د توري
د بلوڅو د ازبکو	دا وطن د ټولو کور دی
د ترکمنو د تاجکو	د پښتون او هزاره وو
پامریان، نورستانیان	ورسره عرب، گوجر دي
هم ایماق، هم پشه یان	براهوي دي، قزلباش دي
لکه لمر پر شنه اسمان	دا هیواد به قل خلیري
لکه زړه وي جاویدان	په سینه کي د آسیا به
وایو الله اکبر وایو الله اکبر	نوم د حق مو دی رهبر

د پوهنې د وزیر پیغام گرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم ترکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاو له مخې رامنځته کېږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال سائل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو مبتلي او پلرونه هم د خپلو لویو او زامنو په ټاکښته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤلیت په رښتیني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، وطن دوستۍ، د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي. په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له مینو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مولفانو سره د درسي کتابونو په لاینه تالیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې ښې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو او نورو دوستو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدریس او د درسي کتابونو په چاپ او ویش کې ښې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

فهرست لومړۍ څپرکۍ: دایره

- د دایرې عناصرو، د یوې مستقیمې کرنيې حالتونه، دایرې موقعیت نظر یو بل ته
 - په دایره پورې اړوند زاوېې
 - د دایرې د وتر او شعاع ځانګړتیاوې
 - د دایرې محیطي او مماسي زاوېې
- دویم څپرکۍ: په یوه دایره کې د اوږدوالی اړیکې**

- د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته
 - دایرې مماس کرښه، د دایرې داخلي او خارجي زاویه
 - محیطي او محاطي دایره
 - په دایره کې د مرسوم څلور ضلعي ځانګړتیاوې (خواص)
 - د منظمې مضلع ترسیم، د دایرې مساحت او محیط
- درېم څپرکۍ: تحلیلي هندسه**

- د دور ټکو تر منځ فاصله یا واټن
- د یوې قطعه خط د منځنۍ ټکي مختصات
- د مستقیمې کرنيې میل، د موازي او عمود کرښو مېلونه
- د مستقیمې کرنيې معادله، د هغې مستقیمې کرنيې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي
- د مستقیمې کرنيې عمومي معادله
- د خطي معادلانو سیستم
- د خطي معادلانو د سیستم حل د تعریضي او افنا په لاره (طریقه)
- تغیر مکان، انتقال، انعکاس او دوران

څلورم څپرکۍ: مثلثات

د تالس قضیه

- د حاده زاوېې سین، کوساین او تانجنټ
- د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسیبونه، د میل او تانجنټ تر منځ اړیکې
- مثلثاتي جدول، د قایم الزامیو مثلثونو حل

مخ

۱۲۷

- مثالاتي معادلي

فهرست

پنځم څپرکي: څو جمله يي گاني

- په فکتورونو تجزيه
- د الجبري افادو ضرب، د مکعبونو مجموعه او تفاضل
- کوچني گډه مشترک مضرب
- د الجبري افادو وېش
- په الجبري افادو کې د عمليو د سرته رسولو ترتيب

شپږم څپرکي: نامساوات

- د خطي غير مساواتو حل
- فاصله يا انټروالونه
- د بېنوم د علامې ټاکل، د کسر افادي اشاره ټاکل
- کسري نامساواتونه، دوه متحوله خطي نامساوات
- د نامساواتو سيسټمونه

اووم څپرکي: يو مجهوله دويمه درجه معادلي

- د دويمې درجې معادلو حل
- غير خطي اړيکي
- په هندسي لاره د دويمې درجې معادلو حل د محمد بن موسیٰ فورمول، تکميل مربع
- اتم څپرکي: احصايه

۱۹۵

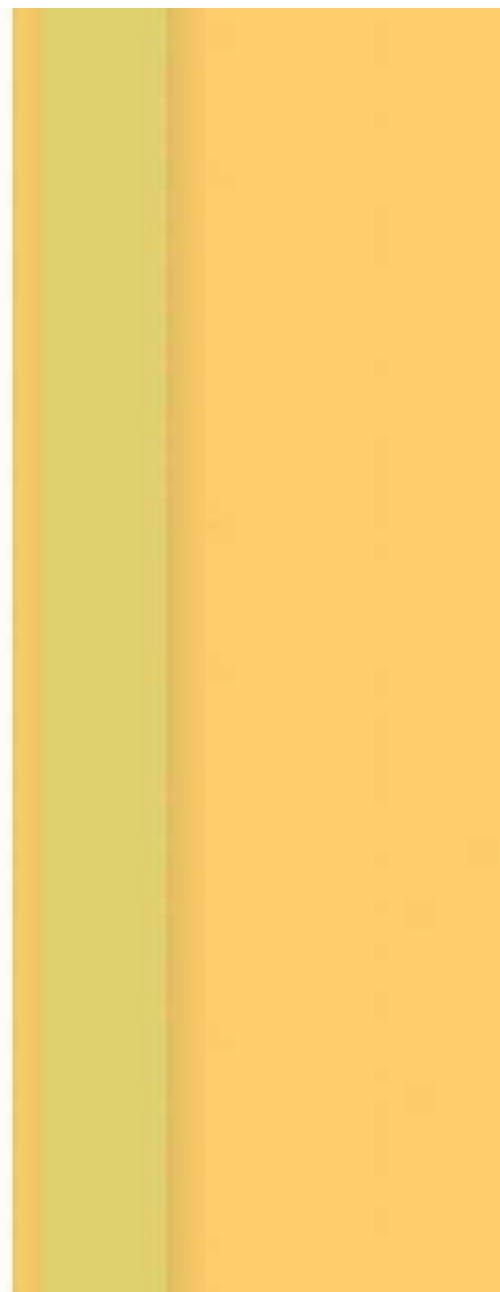
- د data د دسته بندي لاره، د نېټو يا پيوسته data گانو دسته بندي او وزني اوسط

- مستطلي او دایروي گرافونه
- ميلانه، د تحول ساحه او د انحراف اوسط
- نهه څپرکي: احتمالات

۲۲۱

- د ناڅاپه پېښو اتحاد او تقاطع
- کلي او مکمله ست
- په ستونزو ملل جوړول





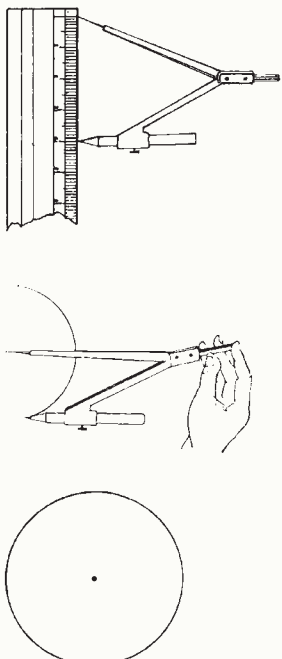


دایره CIRCLE

شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په تصویر کې ونښته نومونه یې واخلي.

فعالیت

یوه ټکي د کاغذ پر مخ وټاکئ، ددې ټکي شاوخوا ته د 1 cm په اوږدوالي د پیر کار خوله خلاصه او هغه ته یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکی څه نومېږي؟

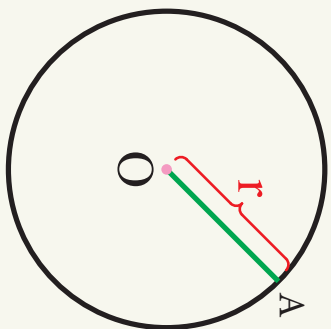


تعریف

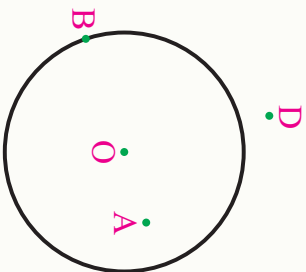
په یو مستوي کې د هغو ټولو ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن (فاصله) ولري دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره د یوې تړلي منحنۍ څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري.

تړلي منحنۍ ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وايي چې په $C(O, r)$ ښودل کېږي.

د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په تورو ښودل کېږي.



فعالیت



- په لاندې شکل کې د A ، B او D د ټکو ځایونه (موقعیت) نظر O دایرې ته وټاکي.
- د هغو ټکو ولټن د دایرې د مرکز څخه اندازه او د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړي.
- په خپله خوښه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایرې څخه بهر پرانه وي په پام کې ونیسئ. ایا لاسته راغلې اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

- 1- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه کوچنی وي، د دایرې داخلي ساحه (منځ) بلل کېږي، یا $I = \{A \mid |OA| < r\}$
- 2- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا منځ ونل کېږي، یا $C = \{B \mid |OB| = r\}$
- 3- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی وي، د دایرې د خارجي یا باندنۍ ساحې په نامه یادېږي، یا $E = \{D \mid |OD| > r\}$
- 4- د مستوي هغه برخه چې د دایرې د محیط او د هغې د اخلي سطحې په واسطه جلا شوي وي، د دایرې د سطحې په نوم یادېږي.

پوښتنې

- 1- یوه دایره د 2 cm په شعاع رسم کړئ. دلاندې ټکو څخه کوم یې د دایرې په داخل، خارج او په محیط کې پروت دی:
 - د A ټکي ولټن د دایرې له مرکز څخه 1.4 cm دی.
 - د B ټکي ولټن د دایرې له مرکز څخه 2.3 cm دی.
 - د C ټکي ولټن د دایرې له مرکز څخه صفر دی.
 - د D ټکي ولټن د دایرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}\text{ cm}$ دی.
- 2- په کوم حالت کې یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

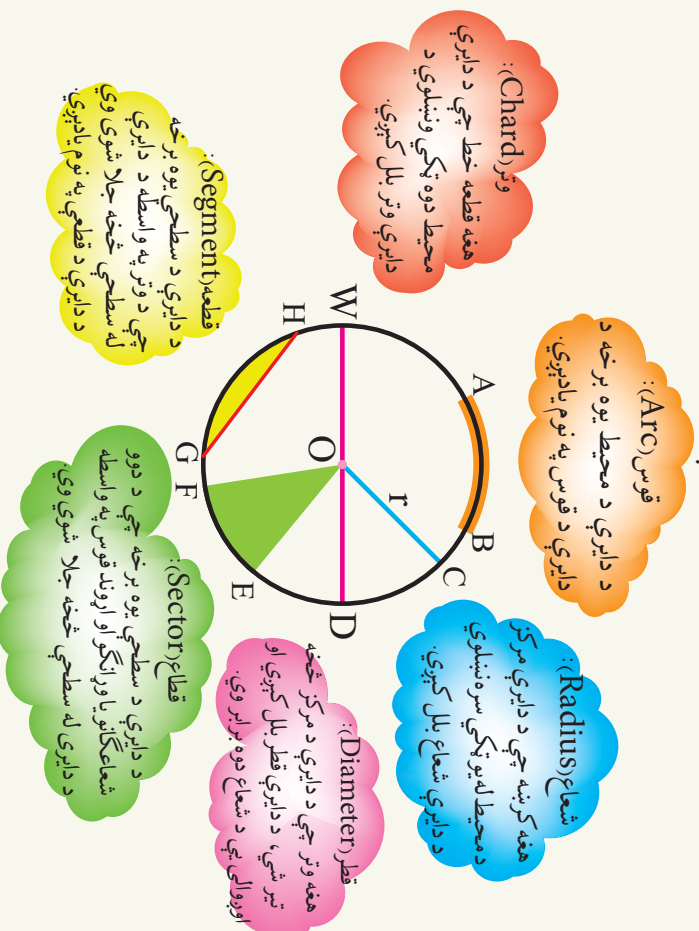


د دایرې عناصر Elements of a Circle

شکل ته پام وکړئ د کیک مخ کوم هندسي شکل را ښيي او پرې شوي برخه یې د دایرې کوم عنصر راښيي؟

د دایرې د عناصرو تعریف

لومړی شکل او د دایرې د عناصرو تعریفونه خپلو کتابچو ته نقل او ورسته لاندې تعریفونه د شکل له اړوند عناصرو سره په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.



فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پری کړئ.
- دغه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوي کرښه د څه په نامه یادېږي.
- داخل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ، چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. خو قطعه خطونه (نویټه کرښې) ونه. هر یو د څه په نامه یادېږي؟
- څلور لاسته راغلې زاوېې اندازه کړئ، او وړایاست چې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- دیوې دایرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې څه دي؟
- دایره داسې قات کړئ چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ جوړه شوې کرښه د څه په نامه یادېږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې د قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دایره کې که چیرې د دایرې د محیط دوه ټکي ونښلوو د دایرې وتر لاسته راځي.
- په هره دایره کې تر ټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- دیوې دایرې هر قطر، وتر اما هر وتر قطر نه دی.
- "هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه کوچنی وي د کوچني قوس (minor Arc) په نوم یادېږي.
- "هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه لوی وي د لوی قوس (major Arc) په نوم یادېږي.

پوښتنې

- 1- د $C(0, 4)$ دایره رسم کړئ.
 - a) د دایرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې وښیئ.
 - b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.
 - c) د دایرې محیط په څلور مساوي برخو وویشئ، ددې څخه څه پایله په لاس راځي؟
 - d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنگونو، په واسطه په نښه کړئ.

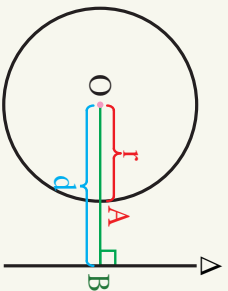
د دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه



مخامخ شکل ته پام وکړئ او وایاست چه
قلمونه او هندسي ښکس له دایرې سره څه
اړیکې لري هره یوه توضحه کړئ؟

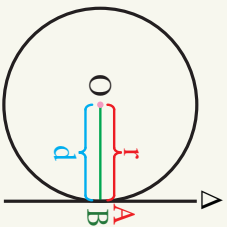
فعالیت

- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کړئ چې د دایرې سره یو ټکی، دوه ټکي او هېڅ ټکی (مستړک) ټکی ونلري.
- د دایرې له مرکز څخه په هره مستقیمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن اندازه کړئ او هر حالت د دایرې د شعاع له اوږوالی سره پرتله کړئ.



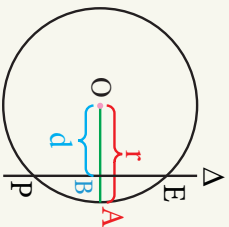
د پورتنۍ فعالیت د کړنې څخه لیدل کېږي چې یو مستقیمه کرښه او دایره نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:

1- که چېرې مستقیمه کرښه له دایرې سره ګڼه ټکي ونلري، مستقیمه کرښه له دایرې نه بهر پروت دی، په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی دی یعنې:

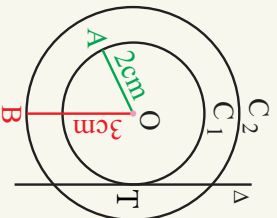
$$d > r$$


2- که چېرې مستقیمه کرښه د دایرې سره یو ګڼه ټکی ولري نو مستقیمې کرښې ته یو دایره محاس وايي. په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع سره برابر ده یعنې:

$$d = r$$



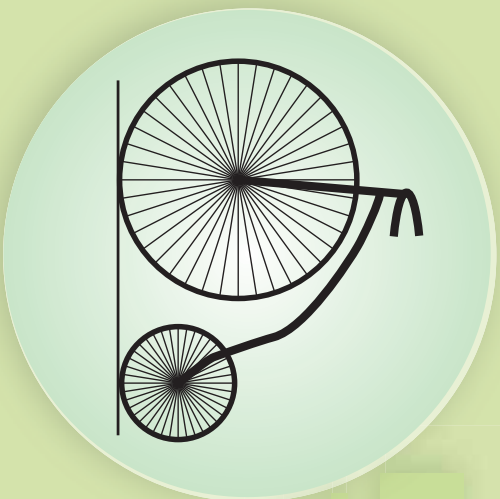
3- که چیرې یو مستقیم د دایرې سره دوه ګډه (مشتريک) ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې خوځې (قاطع) وایي، په دې حالت کې د مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی دی،
یعني $d < r$



مثال (بېلګه): د (O) ټکي په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي متره په شعاع دوي متحدالمرکز دایرې رسم کړئ د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2 ، دوو دایرو له وړانګو سره څه اړیکې لري؟
حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د وړانګې یا شعاع سره برابر دی یعنې: $d = r$
د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له وړانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعنې: $d < r$

پوښتنې

- د 3 cm شعاع په اوږدوالی یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کرښې په لاندینيو راکړل شويو واټنو رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:
- الف: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه 2.5 cm وي.
- ب: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه 4 cm وي.
- ج: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابر وي.



د دایرو موقعیت نسبت یو بل ته

مخامخ شکل ته په پام سره وړایۍ چې:

1- د بایسیکل ټایرونه کوم هندسي شکل

لري؟

2- ټایرونه یو بل سره څو حالتونه غوره

کولای شي؟ توضیح یې کړئ.

فعالیت

• دوي دایري داسي رسم کړئ چې:

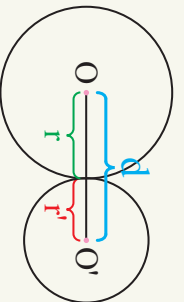
1: یو له بل سره یو ګډه ټکی ولري.

2: دوه ګډه ټکي ولري.

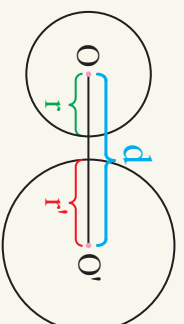
3: یو بل سره ګډه ټکی و نلري.

• د دایرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورته حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ.

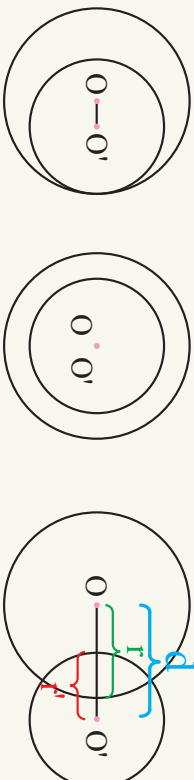
د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي چې:



که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ ولټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې دایرو ته خارجاً مماس وایي، یعنې $d = r + r'$



که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ ولټن، دهغو د شعاع د مجموعې له اوږدوالي څخه زیات وي په دې حالت کې دایرو ته ناپېرېکړي یا نا متقاطع دایري وایي، یعنې $d > r + r'$

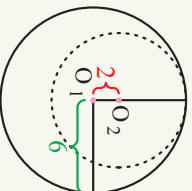


که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاعگانو مجموعې د اوږدوالي څخه کوچنی او د شعاعگانو د تفریق د حاصل د مطلقه قیمت څخه لوی وي، دایري یو له بل سره متقاطع دي، یعنې $d < r + r'$ او $d > |r - r'|$ دایري یو له بل سره مماس دي، یعنې $d = r + r'$ او $d = |r - r'|$ دایري د یو بل سره متحدالمرکز دي، یعنې $d = 0$ دایري د یو بل سره متحدالمرکز دي، یعنې $d = 0$ تر منځ واټن صفر وي، دایري د یو بل سره متحدالمرکز دي، یعنې $d = 0$ تر منځ واټن د هغو د شعاعگانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي، دایري یو له بل سره مماس دي، یعنې $d = |r - r'|$ که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاعگانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي، دایري یو له بل سره مماس دي، یعنې $d = |r - r'|$

مثال (بېلگه): دوي دایري داسې رسم کړئ، چې د لومړی دایري شعاع 6cm ، د دویمي دایري او لومړی دایري مرکزونو تر منځ واټن 2cm او د دویمي دایري شعاع د لومړی دایري د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې د دې دوو دایرو موقعیت نظریو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنی دایري شعاع r_1 او د دویمي دایري شعاع r_2 ونوموو نو لرو:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 6\text{cm} \\ r_2 &= \frac{2}{3}r_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{2}{3} \times 6 \\ r_2 &= 4\text{cm} \end{aligned} \right\}$$



$$d = |r_1 - r_2| = |6 - 4| = |2| = 2$$

څرنگه چه:

نو له دایري سره داخلا مماس دي.

پوښتنې

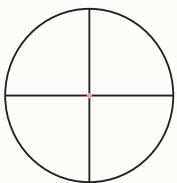
- ۱- دوي دایري د 6cm او 4cm په شعاع په پام کې ونیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.
 - الف: دایري خارجي (له باندې) سره مماس دي.
 - ب: دایري داخلي (له دننه) سره مماس وي.
 - ج: دایري سره غیر متقاطع (ناپریکړي) وي.
 - د: دایري سره غیر متقاطع (غوڅوڅه) وي.
 - ه: دایري متحدالمرکز (مرکز) وي.
 - و: پورتني حالتونه په خپله ژبه ووايئ.



د دایرې اړوند زاوې Angle of a Circle

تصویر ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې لیدل کېږي نوم یې واخلي؟

فعالیت



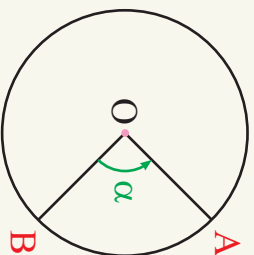
- په پورتني شکل کې څو زاوې لیدلای شئ.
- د دې زاویو ګڼه خاصیتونه کوم دي بیان یې کړئ؟
- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاوې لاسته راځي؟ د هرې زاوې د مقابل قوس اندازه څو درجې دی؟
- د دې دایرې محیط څو درجې دی؟

د پورتني فعالیت له نتیجه څخه لیکلای شو چې:

د یو قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاوې په پراخوالي پورې اړه لري، یعنې:

$$\frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\angle AOB}{360^\circ}$$

تعریف



هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز پروت، او ضلعي یې د دایرې شعاعګانې وي مرکزي زاویه بلل کېږي لکه: د $\angle AOB$ یا د α زاویه:

هره مرکزي زاويه له دايرې څخه يو قوس بېلوي، چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاويې مساوي اندازه لري، لکه: $\widehat{AB}$ قوس چې د α زاويې سره مساوي دي.

د قرارداد له مخې ويلاى شو چې په يوه دايره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې د

مرکزي زاويې سره مساوي ده يعنې: $\widehat{AOB} = \widehat{AB} = \alpha$

لومړی مثال: که د $C(O, r)$ په دايره کې لوی قوس (major) د کوچني قوس (minor) پينځه برابره وي نو د کوچني قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: که کوچنی قوس $\widehat{PQ}_{minor} = x^\circ$ وي، نو لوی قوس يې

$$\widehat{PQ} + \widehat{PQ} = 360^\circ$$

$$\widehat{PQ}_{major} = 360^\circ - x^\circ$$

$$\widehat{PQ}_{min} = 5\widehat{PQ}_{min}$$

$$x + 5x = 360^\circ$$

$$6x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ \Rightarrow \widehat{POQ} = x = 60^\circ$$

$$\widehat{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$

دویم مثال: په لاندي شکل کې که $\widehat{KOS} = 31^\circ$ ، $\widehat{EKO} = 82^\circ$ ، دايرې قطر وي. د $\widehat{SK}$ ، $\widehat{KJ}$ ، $\widehat{SJ}$ د $\widehat{EK}$ قوسونه په درجه پيدا کړئ.

د مرکزي زاويې مخامخ قوس $\widehat{SK} = 31^\circ \Rightarrow \widehat{SK} = 31^\circ$

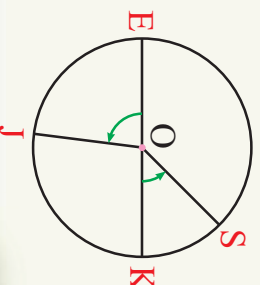
$$\widehat{KOJ} = 180^\circ - \widehat{EOJ} = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$\widehat{KOJ} = \widehat{KJ} = 98^\circ$$

$$\widehat{SJ} = \widehat{SK} + \widehat{KJ} = 31^\circ + 98^\circ = 129^\circ$$

$$\widehat{JE} = \widehat{EOJ} = 82^\circ$$

$$\widehat{EK} = \widehat{EOK} = 180^\circ$$

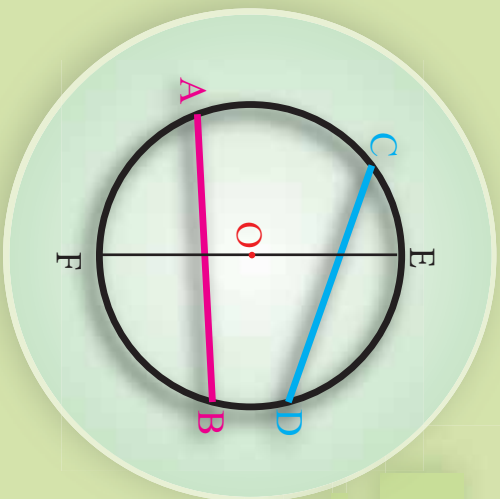


پوښتنې

1- د A, B, C او C درې ټکي د $C(O, r)$ پر دايره داسې پراته دي، چې $\widehat{AOB} = 75^\circ$ ، $\widehat{BOC} = 136^\circ$ زاويې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي $\widehat{AC}$ حساب کړئ.

2- يوه مرکزي زاويه د 180° په اندازه رسم کړئ.

د دایرې د وتر خواص



شکل ته پام وکړئ د $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ او $\overline{EF}$ مستقیمې کرښې په څه نامه یادېږي د $\overline{EF}$ کرښې ځانګړتیا څه ده؟ او له $\overline{AB}$ کرښې سره څه اړیکه لري؟

فعالیت

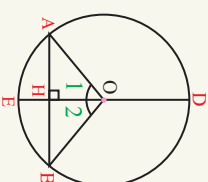
- د $C(O, r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر رسم کړئ.
 - د دایرې د $\overline{ED}$ قطر داسې رسم کړئ چې د $\overline{AB}$ په وتر د H په نقطه عمود وي.
 - د (O) ټکي د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلي مثلث څه ډول مثلث دی.
 - په لاندې تش ځایونو کې د $(=, <, >)$ وړ ښې ولیکئ.
- $$\overline{OA} \square \overline{OB}, \quad \widehat{AE} \square \widehat{EB}, \quad \overline{AH} \square \overline{HB}$$

د دې فعالیت د پایلې څخه کولای شو لاندې قضیه بیان او ثبوت کړو.

قضیه: په هره دایره کې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نیموي.

ثبوت: د $\triangle BOH$ او $\triangle AOH$ دوو مثلثونو څخه لیکلی شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \text{ د دایرې شعاع} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} \text{ قایمه} \\ \overline{OH} = \overline{OH} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOH \cong \triangle OHB$$



نو د دوو مثلثونو د تساوي څخه داسې پایله لاسته راځي، چې: $\overline{AH} = \overline{HB}$ او د $\triangle AOH$ او $\triangle BOH$ مرکزي زاويې سره مساوي دي په پایله کې $\widehat{AE} = \widehat{EB}$ دی.

مثال: د $C(O, 26)$ دایره راکړل شوې ده، که چیرې پر وتر د عمود اوږدوالی د دایرې له مرکز څخه (10) واحد وي د $\overline{AB}$ وتر اوږدوالی حساب کړئ.

حل: د $\hat{OAH}$ په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$

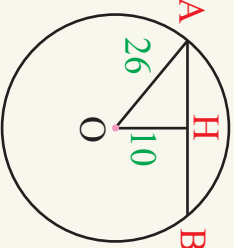
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$

$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$

$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$

$$\overline{AH} = 24$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48 \text{ unit}$$



فعالیت

- د $C(0, 3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ دوه مساوي وټرونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ په وټرونو عمود کړئې رسم او اوږدوالی یې معلوم کړئ.

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوت و.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وټرونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

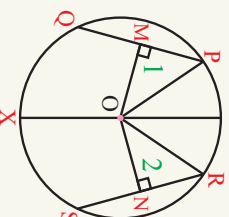
ثبوت: د $\hat{POM}$ او $\hat{RON}$ د دوو مثلثونو څخه لرو چې:

$$\overline{OP} = \overline{OR} \dots\dots\dots \text{د دایرې شعاع}$$

$$\hat{1} = \hat{2} \dots\dots\dots \text{قایمه}$$

$$\overline{PQ} = \overline{RS} \dots\dots\dots \text{مساوي وټرونه} \Rightarrow \overline{OM} = \overline{ON}$$

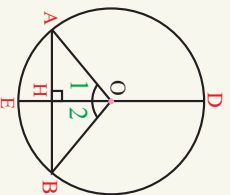
$$\frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow \overline{PM} = \overline{RN}$$



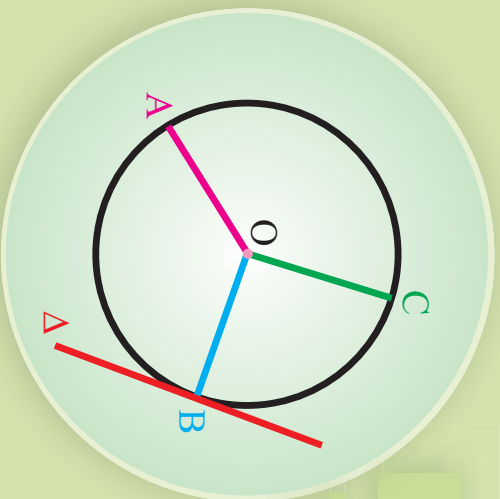
په پایله کې ویلای شو چې په هره دایره کې مساوي وټرونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

- 1- د $C(0, 13)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحدو واټن لري د $\overline{AB}$ اوږدالی پیدا کړئ.
- 2- که چېرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایي څخه تیر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.
- 3- په یوه دایره کې $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ وتر رسم کړئ. که چېرې د وتر عمودي فاصله له مرکز څخه $\overline{OH} = 3 \text{ cm}$ وي د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.

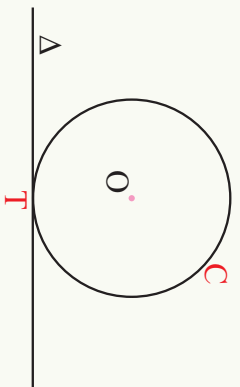


د دایري د شعاع خواص



شکل ته په پام د OA ، OB او OC کرښې څه نومېږي او د Δ کرښه د دایري او د OB وړانګې سره څه اړیکې لري؟

فعالیت



- په مخامخ شکل د $(0, 2)$ C دایري د T په ټکي کې مماس دی د A ، B ، C او D ټکي د مماس پر مخ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکئ او د دایري له مرکز سره یې ونښلوئ.
- توپه کرښې یا قطعه خطونه د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دایري د مرکز او مماس تر منځ لنډې واټن وښایئ.
- تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او یوې مستقیمې کرښې تر منځ کومه فاصله ده؟
- د پورتنۍ دوو حالتونو څخه څه پایله لاسته راوړئ.

د دې فعالیت د پایلي څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتو.

قضیه: د دایري شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.

پایله: په لاندې شکل کې لیدل کېږي، چې:

$$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$$

$$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$$

پوهېږو چې تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او مستقیم تر منځ عمودي فاصله ده. په پایله کې ویلای شو چې مستقیمې کرښې: $OT \perp \Delta$ دی.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د A په ټکي د $C(O, r)$ پر دایره

مماس دی. که چیرې د $\hat{AOB}$ مساوي 60° وي، د x زاویه پیدا کړئ.

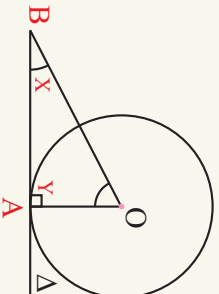
$$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$$

$$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$

$$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 150^\circ$$

$$x = 30^\circ$$



دویم مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د $C(O, r)$ پر دایره مماس دي، که

$\overline{OM} = 4unit$ او $\overline{ON} = 5unit$ اوږدوالی ولري د $\overline{MN}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

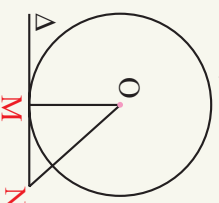
حل: پوهیږو چې د دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود دی په پایله کې د $\hat{OMN}$ په قیام الزامه مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$$

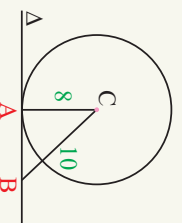
$$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\overline{MN} = 3$$

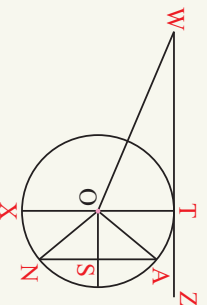


- د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود وي.
- هر مماس په هغه شعاع چې د تماس د ټکي څخه تېرېږي عمود دی.

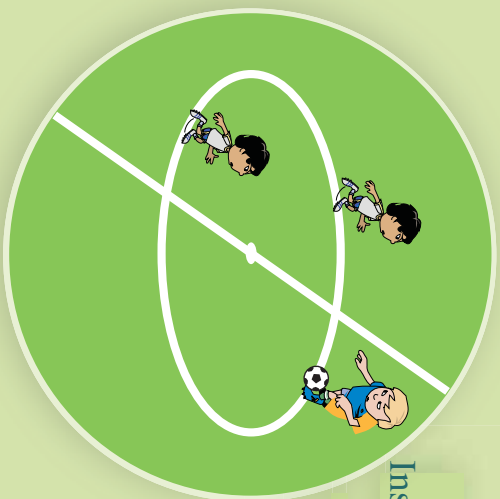
پوښتنې



1- په مخامخ شکل کې د Δ د $P(C, r)$ پر دایرې مماس دی، که $\overline{AC} = 8unit$ او $\overline{BC} = 10unit$ اوږدوالی ولري. د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



2- په مخامخ شکل کې که $\overline{WZ}$ د T په ټکي د $C(O, r)$ پر دایرې مماس وي، $\overline{OS} = 1unit$ ، $\overline{TW} = 3unit$ وي د $\overline{OA}$ ، $\overline{AS}$ ، $\overline{SN}$ ، $\overline{OW}$ او $\overline{TX}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

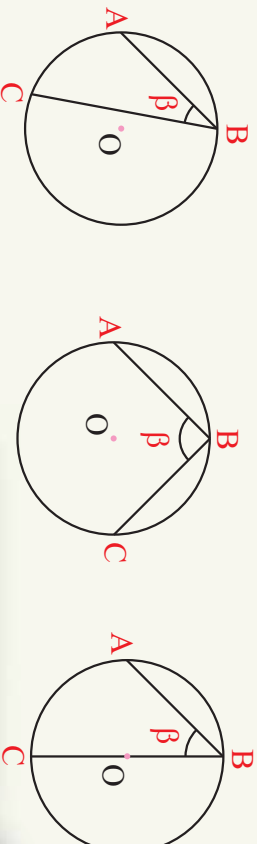


د دایرې محیطي زاویه Inscribed Angel of a Circle

د فوټبال د میدان په مرکزي دایره کې حسیب الله، بالال ته او بالال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوتې د مسیر څخه جوړېږي څه ډول دی؟

تعریف

هغه زاویه چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعي یې د دایرې دوه وټرونه وي محیطي زاویه بلل کېږي. لکه: د $\angle ABC$ یا د $\hat{B}$.



فعالیت

په یاد ولرئ چې:

- د مرکزي زاويې پراخوالی د خپل مخالف قوس سره مساوي دی.
- په هر مثلث کې د خارجي زاويې پراخوالی د دوو داخلي پرتو له مجاورې زاويې له مجموعې سره مساوي دی.

- د (O, r) په دایره کې د $\triangle ABC$ محیطي زاویه، چې د $\overline{BC}$ ضلع د دایرې له مرکز څخه تیره شي رسم کړئ.
- د A ټکي د دایرې له مرکز (O) سره ونښلوئ څرنګه مثلث لاسته راځي.
- د A او B زاويې د $\angle OAB$ په مثلث کې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د $\angle AOC$ زاویه د A او B زاویو سره څه اړیکې لري؟

د مخکنی مخ فعالیت د پایلې څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتو.

قضیه: د هرې محیطي زاوې پر انځوالی د خپل مخامخ قوس نیمایي دی.

دلته قضیه په هغه حالت کې ثبوتو چې د محیطي زاوې یوه ضلع د دايرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورنۍ په توګه زده کوونکو ته پاتې شو.

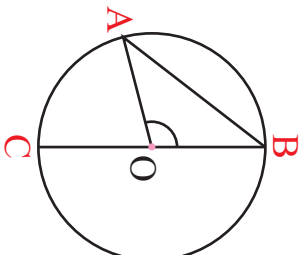
ثبوت: د $\angle AOC$ زاویه د $\angle AOB$ د مثلث خارجي زاویه ده، لیکلای شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AOC = \angle A + B \\ \angle A = B \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AOC = 2B$$

ولې $\angle A = B$ نو:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AOC = B + B \\ \angle AOC = 2B \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AC = 2B$$

په پایله کې $\angle ABC = \frac{\angle AC}{2}$



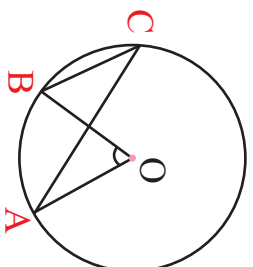
د $\angle ABC$ د محیطي زاوې پر انځوالی د $\frac{1}{2} \angle AC$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O, r)$ په دایره کې که مرکزي زاویه $\angle AOB = 60^\circ$ وي د $\angle ACB$ محیطي زاوې مخامخ قوس $\widehat{AB}$ بې پېدا کړئ.

حل: په یوه دایره کې د مرکزي زاوې او د هغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AOB = 60^\circ \\ \angle AOB = \widehat{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = 60^\circ \\ \angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ACB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

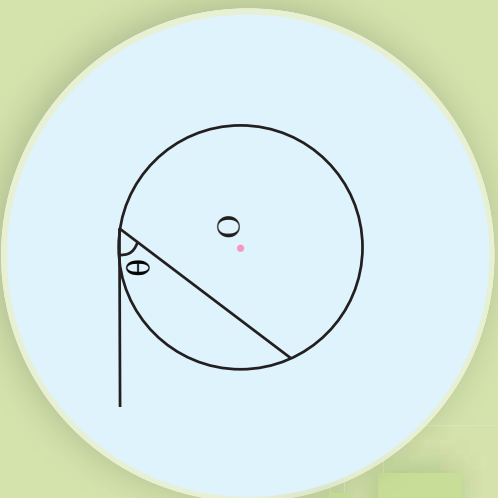


پوښتنې

- 1- په یوه دایره کې د 90° په اندازه محیطي زاویه رسم کړئ.
- 2- د دايرې پر محیط د A او B دوه ټکي په پام کې ونیسئ. د $\angle AB$ قوس په مقابل کې، څو محیطي زاوې رسمولای شو.

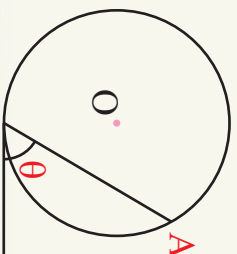
د دایرې مماسي زاویه

شکل ته پام وکړئ، هغه مستقیمې کرښې چې د θ زاویه یې جوړه کړې ده نوم واخلئ او د زاوې راس چېرته پروت دی.



تعریف

هغه زاویه چې یوه ضلع یې پر دایره مماس او دویمه ضلع یې د دایرې وتر وي او راس یې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاویه بلل کېږي، لکه: د θ زاویه



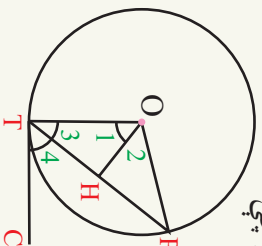
فعالیت

- د $C(0, 6)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یوه مماسي زاویه رسم کړئ.
- د دایرې د وتر انجمنونه د دایرې له مرکز سره ونښلوئ څه ډول منښت لاسته راځي.
- د دایرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د TOP مرکزي زاویه او د PTC مماسي زاوې سره څه اړیکې لري.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه ثبوتولی شو.

قضیه: په یوه دایره کې د مماسي زاوې پراخوالی د هغې د مخالف قوس نیمایي په اندازه دی.

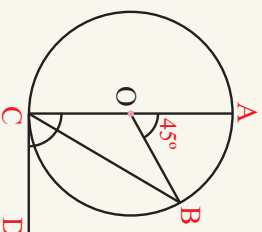
ثبوت: د OHT قایم الزاویه منښت او OTC قایمي زاوې څخه لرو چې:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{3} + \hat{1} = 90^\circ \\ \hat{3} + \hat{4} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{3} + \hat{1} = \hat{3} + \hat{4} \Rightarrow \hat{1} = \hat{4} \\ \hat{1} = \frac{\hat{POT}}{2} = \frac{\hat{PT}}{2} \Rightarrow \hat{PTC} = \frac{\hat{PT}}{2} \end{array}$$

نومړۍ مثال: په لاندې شکل کې که د $C(O, r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مرکزي زاویې او دهغې د مخالف قوس د اړیکو څخه به گټه لیکلی شو چې:



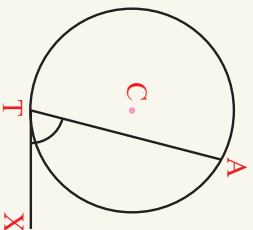
دویم مثال: په لاندې شکل کې د $\widehat{AT}$ قوس اندازه $(2\alpha - 6)^\circ$ ده، د $\widehat{ATX}$ مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او دهغې د مخالف قوس د اړیکو څخه د گټې اخیستلو له مخې لیکلای شو، چې:

$$\widehat{ATX} = \frac{1}{2} \widehat{AT}$$

$$\widehat{ATX} = \frac{1}{2} (2\alpha - 6)^\circ$$

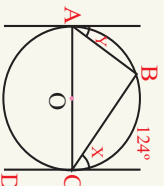
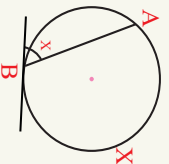
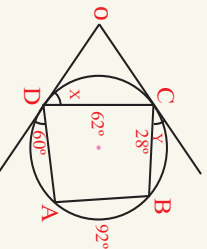
$$= (\alpha - 3)^\circ$$



پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.



د لومړي څپرکي لنډيز

••••• د هغو ټکو سټ يا هندسي محل چې د يوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن ولري دايره بلل کېږي.

• د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايري له شعاع څخه کوچنی وي د دايري دننه ساحه بلل کېږي.

• د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايري له مرکز او د دايري له شعاع سره مساوي وي د دايري محيط يا مخ بلل کېږي.

• د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايري له مرکز څخه نسبت د دايري شعاع ته لوي وي د دايري باندي ساحه بلل کېږي.

• د مستوي هغه برخه چې د منځني او د دايري د داخلي سطحي په واسطه پېله شوي وي د دايري سطحه بلل کېږي.

••••• هغه کرښه چې د دايري مرکز او د محيط يو ټکی نښلوي د دايري شعاع بلل کېږي.

••••• هغه ټوټه کرښه چې د دايري د محيط دوه ټکي سره نښلوي ددايري وتر بلل کېږي.

••••• د دايري هغه وتر چې له مرکز څخه تېرېږي د دايري قطر بلل کېږي. هر قطر د شعاع دوه برابره دی.

••••• د دايري د دوو ټکو په مرسته پېله شوې وي قوس بلل کېږي.

••••• هغه کرښه چې له دايري سره يو ګډه ټکی ولري مماس بلل کېږي.

• د دايري قطعه: دايري هغه برخه چې د دايري د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي د دايري قطعه بلل کېږي

••••• د دايري يوه برخه ده چې د دوو شعاعگانو او اړوند قوس په مرسته د دايري له سطحي څخه پېله شوې وي.

• که يو مستقيم له يوې دايري سره يو ګډه ټکی ولري د مماس او که چيري دوه ګډه ټکي ولري په قاطع په نوم يادېږي.

• په هره دايره کې د دايري له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نيملپي کوي.

- د دایري شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.
- د یوې دایري مسالوي وترونه د هغې له مرکز څخه مسالوي واټن لري.
- هغه زاویه چې راس یې د دایري په مرکز پروت او ضلعي یې د دایري شعاعګانې وي مرکزي زاویه بلل کېږي.

$$\bullet \text{ د هرې مرکزي زاوېې اندازه د هغې د مخامخ قوس سره مساوي ده.}$$

$$\bullet \text{ د مرکزي زاوېې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې، } \frac{\widehat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایري محیط}}$$

څخه په لاس راځي.

• • • • • هغه زاویه ده، چې راس یې د دایري پر محیط او ضلعي یې د دایري وترونه وي محیطي زاویه بلل کېږي.

- د هرې محیطي زاوېې پراخوالی د هغې د مخامخ قوس له نیمایي سره مساوي دی.

"• هره محیطي زاویه د هغې د مرکزي زاوېې نیمایي ده، چې د عین قوس په مخامخ کې پرته ده.

• • • • • هغه زاویه ده، چې یوه ضلعه یې په دایري مماس او بله یې د دایري وتر او راس د تماس په ټکي کې د دایري پر محیط پروت وي مماسي زاویه بلل کېږي.

- هره مماسي زاویه د هغې مرکزي زاوېې نیمایي ده، چې د عین قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دایرو حالتونه یو بل ته:

• که د دوو دایرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې څخه لوی وي دایري غیر متقاطع بلل کېږي.

• که د دوو دایرو د مرکزونو واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې سره مساوي وي دایري خارجي (یا له باندې خوا) مماس بلل کېږي.

• که د دوو دایرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له اوږدوالی څخه کوچنی او د شعاع ګانو د تفریق حاصل یې د مطلقه قیمت څخه لوی وي متقاطع بلل کېږي.

• که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغې د شعاعګانو د تفریق حاصل مطلقه قیمت سره مساوي وي دایري داخلي (دنده) مماس دي.

• که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دایري متحد المركز (د یوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

- په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې دایرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

$$2r \text{ (d)} \quad 2\pi \text{ (c)} \quad \pi \text{ (b)} \quad 3r \text{ (a)}$$

2- دایره په لاندې ډول ښودل کېږي:

$$C(o,r) \text{ (d)} \quad (b,a) \text{ (c)} \quad (1,2) \text{ (b)} \quad 0 \text{ (a)}$$

3- هغه مستقیمه کرښه چې له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري:

(a) د وتر په نوم یادېږي. (b) د قوس په نوم یادېږي.

(c) د مماس په نوم یادېږي. (d) د محیط په نوم یادېږي.

4- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له شعاع څخه لویه وي:

(a) د دایرې مخ بلل کېږي. (b) د دایرې خارج بلل کېږي.

(c) دایره بلل کېږي. (d) د دایرې داخل بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دایرې مرکز ته نږدی وي:

(a) پندو وتر دی. (b) وړوکی وتر دی.

(c) هېڅ یو. (d) لوی وتر دی.

6- که یوه مستقیمه کرښه دایره په دوو ټکو کې پری کړي هغه ته:

(a) مستقیمه کرښه او دایره ولېږي. (b) قاطع ولېږي.

(c) مماس ولېږي. (d) موازي ولېږي.

7- که د یوې دایرې مرکزي زاویه 80° وي د مخامخ قوس اندازه یې مساوي په:

$$80^\circ \text{ (d)} \quad 80'' \text{ (c)} \quad 70' \text{ (b)} \quad 90^\circ \text{ (a)}$$

8- یوه مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره څو حالتونه لري:

$$1 \text{ (d)} \quad 4 \text{ (c)} \quad 7 \text{ (b)} \quad 3 \text{ (a)}$$

9- هغه زاویه چې راس یې د ایرې پر محیط او ضلعې یې دوه وترونه وي:

(a) مرکزي زاویه ده. (b) مماسي زاویه ده.

(c) محاطي زاویه ده. (d) محیطي زاویه ده.

● تنش ځایونه په مناسبو کلمو ډک کړئ:

- 1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې څخه بېله شوي وي د
په نوم یادېږي.
 - 2- د دایرې تر ټولو لوی وتر دی.
 - 3- د هغو ټکو سټ چې بې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي د دایرې ویل کېږي.
 - 4- که مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره هېڅ ګډ ونلري هغه ته دایره ویل کېږي.
 - 5- په هره دایره کې قطر پر وتر، وتر نیمایي او قوسونه د هغې څخه بیلوي.
 - 6- په هر قائم الزاویه مثلث کې د وتر د ضلعو د مربعانو له مجموعې سره مساوي دي.
 - 7- په هره دایره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي تر ټولو وتر دی.
 - 8- د دایرې شعاع د تماس په ټکي پر عمود وي.
 - 9- مرکزي زاویه هغه زاویه ده چې بې د دایرې په مرکز او ضلعې بې د دایرې وي.
 - 10- هغه زاویه چې یوه ضلع یې په دایره او بله یې د دایرې او راس یې د په ټکي پروت وي د زاوې په نوم یادېږي.
- په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(س) او (ن) د تورو په مرسته په نښه کړئ.
- 1- () د یوې مستوي د ټولو ټکو سټ چې د O د یو ټاکلي ټکي څخه د r مساوي فاصلې ولري دایره بلل کېږي.
 - 2- () دایره د خپل محیط په نامه یادېږي.
 - 3- () هغه قطعه خط یا ټوټه کرښه چې د دایرې د محیط دوه ټکي سره نښلوي د دایرې د قطر په نامه یادېږي.
 - 4- () په یوه دایره کې شعاع یا وړانګه د قطر نیمایي ده.
 - 5- () د دایرې قطعه د $\cap$ په علامه ښودل کېږي.

6- () د هغو ټکو سټ چې د شعاع په اندازه مساوي فاصله ولري د دایرې خارجي ساحه بلل کېږي.

7- () په یوه دایره کې عمود قطر په وتر، وتر نیمایي او دوه بیلابیل قوسونه منځ ته راوړي.

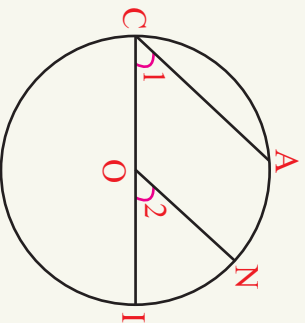
8- () ټوله دایره د دایرې د قوس په نوم یادېږي.

9- () د $d = \frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دایرې شعاع دی.

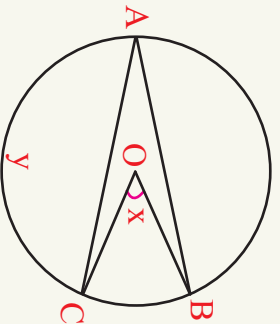
10- () د یوې دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

• لاندې سوالونه په تفصیل سره حل کړئ.

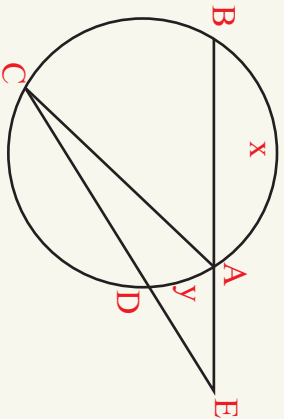
1- په لاندې شکل کې که $\overline{CI}$ د دایرې قطر او $\overline{ON} \parallel \overline{CA}$ وي ثبوت کړئ چې $\widehat{AN} = \widehat{NI}$ دی.



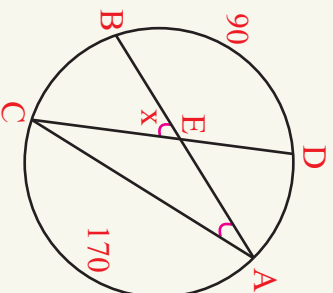
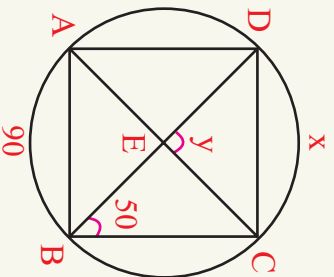
2- په لاندې $C(o, r)$ شکل کې که $y = 140^\circ$ او $\widehat{AB} = 48^\circ$ وي د $\hat{x}$ پیدا کړئ.



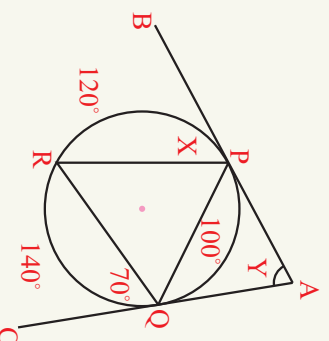
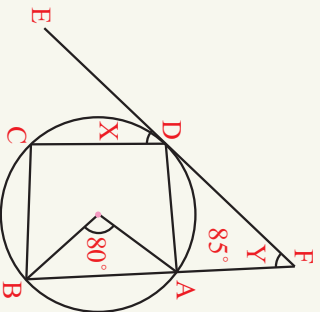
3- په لاندې شکل کې که $\hat{E} = 40^\circ$ او د $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ او $\widehat{CD}$ مساوي اندازه اوږدوالی مساوي وي د $\widehat{ACD}$ اندازه معلومه کړئ.



4- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازه وټاکئ.



5- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې پيدا کړئ.



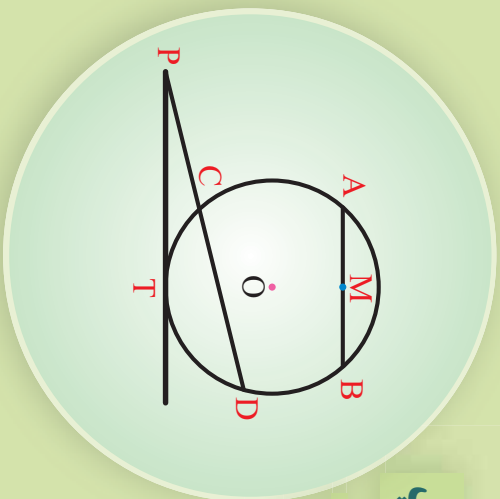
دويم چترکی

په يوه دایره کې د
اوږدوالی اړیکې



په دایره کې د اوږدوالي اړیکې

هغه تړپه کرښې چې په مخامخ شکل کې ونډنۍ نوم یې واخلئ.



تعریف

د اوږدوالی اړیکې: په یو هندسي شکل کې د کرښو د اجزاو تر منځ اړیکې د اوږدوالی اړیکو په نوم یادېږي.

فعالیت

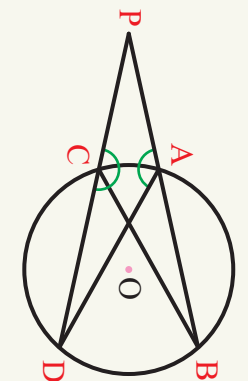
- د P له ټکي څخه چې د $C(O, r)$ دایرې په بهر کې پروت د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ قاطع کرښې رسم کړئ.
- د A د ټکي او D د ټکي C د ټکي سره ونښلوئ.
- ویلاي شئ چې د $\widehat{PAD}$ او $\widehat{PCB}$ منځنیزه مشابه دي؟
- په پورته دوو مثالونو کې د تشابه نسبتونه ولیکئ.

د دې فعالیت پایلې څخه لاندې قضیه خړگندېږي.

قضیه (۱-۲): که چیرې د یوې دایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي،

دیوې قاطع د قطعانو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعانو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \quad \text{یعنې:}$$



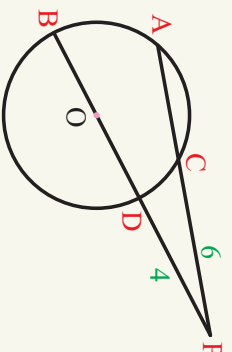
ثبوت: د $\widehat{PAB}$ او $\widehat{PCD}$ مثلثونو تر منځ لاندې اړیکې موجود دي. $\widehat{PA} \cdot \widehat{PB} = \widehat{PC} \cdot \widehat{PD}$
 د عین قوس محیطي زاوې $\widehat{D} = \widehat{B}$ او $\widehat{A} = \widehat{C}$ ګډ $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$

د پورتنیو درېو زاویو د تساوي څخه پوهېږو چې د $\widehat{PAB}$ او $\widehat{PCD}$ مثلثونه مشابه دي، نو لیکلی شو چې:

$$\widehat{PCB} \sim \widehat{PAD} \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

مثال: په لاندې شکل کې $\widehat{PA}$ او $\widehat{PB}$ د $C(O, r)$ د لایرې دوه قاطع کرښې دي. که $\widehat{PA} = 10\text{cm}$, $\widehat{PC} = 6\text{cm}$ او $\widehat{PD} = 4\text{cm}$ اوږدوالی ولري، د $\widehat{PB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: هغه قطعات (پورته کرښې) چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د $(1-2)$ قضیې په مرسته لیکلای شو، چې:

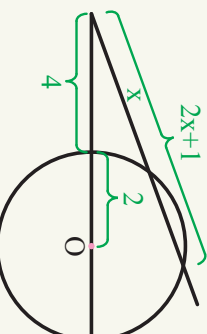
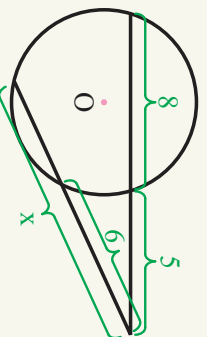


$$\begin{aligned} \widehat{PA} \cdot \widehat{PB} &= \widehat{PC} \cdot \widehat{PD} \\ 10 \cdot 6 &= \widehat{PB} \cdot 4 \\ 60 &= 4\widehat{PB} \\ \widehat{PB} &= 15\text{cm} \\ \widehat{DB} &= \widehat{PB} - \widehat{PD} \\ \widehat{DB} &= 15 - 4 \\ \widehat{DB} &= 11\text{cm} \end{aligned}$$

که چېرې د یوې لایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

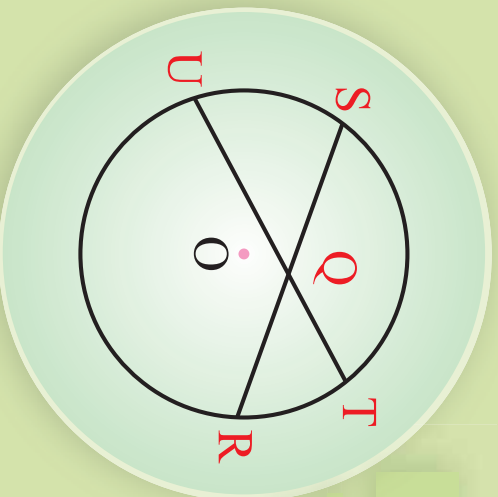
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د X عددي قیمت پیدا کړئ.



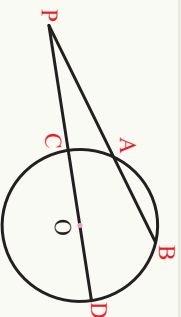
د یو ټکی طاقت نظر دایري ته

مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ. ویلاشې شې
چې د $\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$ مساوات
سم دي.



فعالیت

- د P له یو ټاکلي ټکي څخه چې $C(O, r)$ د دایري څخه بهر پروت دی پر هغه د $\overline{PAB}$ قاطع رسم کړئ.
- د P له بهرنی ټکي څخه د PCD قاطع داسې رسم کړئ چې د $C(O, r)$ دایري له مرکز څخه تیر شي.
- د $\overline{PAB}$ او PCD د ټوټه کرښو ترمنځ اړیکې د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ اوږدوالی د دایري له مرکز څخه ولیکئ.
- په پورتنۍ اړیکه کې د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ شعاع یا وړانګه په (I) سره ونښوئ، پورتنۍ اړیکه د d او I ترمنځ ولیکئ.

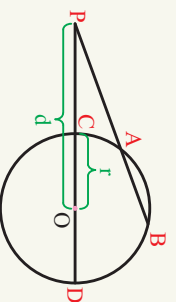


د پاسنی فعالیت د پایلي څخه لاندې قضیه څرګندېږي.

قضیه (2-2): که د یو ټاکلي ټکي څخه د یوې قاطع کرښې په یوه دایره داسې رسم کړئ چې، د دوه قاطع دایري له مرکز څخه تیره شي. د لومړي قاطع د ټوټه کرښو ترمنځ د ضرب حاصل د یو ټاکلي اندازې $(d^2 - r^2)$ سره مساوي دي، d د ټاکلي ټکي او د دایري د مرکز ترمنځ واټن او (I) د دایري شعاع یا وړانګه ده.

لومړی حالت: که چېرې ټاکلي ټکی د دایري په بهر کې پروت وي.

ثبوت: که چېرې د P ټکي د دایري په بهر کې او واټن له مرکز څخه په d او دایري شعاع په (r) سره ونښوئ، د $(1-2)$ قضیې



$$\begin{aligned}\overline{PA} \cdot \overline{PB} &= \overline{PC} \cdot \overline{PD} \dots (2-1) \\ \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (\overline{PO} - \overline{CO})(\overline{PO} + \overline{OD}) \\ \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (d-r)(d+r) \\ \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= d^2 - r^2\end{aligned}$$

له مخې ليکلاى شو:
دوه نور حالتونو چې ټاکلى ټکى يې د دايرې پر
محيط او دننه په دايره کې پرانه وي، دا د گرانو زده
کوونکو کورنۍ دنده ده.

تعريف

د $d^2 - r^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$ رابطه د P د ټکي طاقت نظر د $C(O, r)$ دايرې ته وايي چې، ثابتۀ اندازه ده چې د $P_{(0)} = d^2 - r^2$ په شکل ښودل کېږي.

$$r = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$P_{(0)} = d^2 - r^2$$

$$P_{(0)} = (13)^2 - (5)^2$$

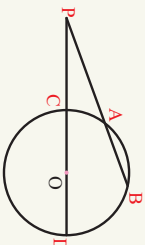
$$P_{(0)} = 169 - 25 \Rightarrow P_{(0)} = 144$$

د $d^2 - r^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$ رابطه د P د ټکي طاقت نظر د $C(O, r)$ دايرې ته وايي چې، ثابتۀ اندازه ده چې د $P_{(0)} = d^2 - r^2$ په شکل ښودل کېږي.

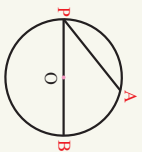
لومړى مثال: که د يوې دايرې قطر 10 cm او د P ټکى د 13 cm په اندازه د دايرې له مرکز

څخه ولټن ولري د P ټکى طاقت نظر $C(O, r)$ دايرې ته پيدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دايرې قطر راکړل شوى دى لومړى د دايرې شعاع يا وړانگه وروسته د P ټکي طاقت نظر دايرې ته پيدا کړئ.

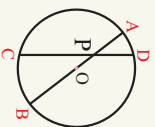


• که د يوه ټکي طاقت نظر يوې دايرې ته مثبت وي ټکى د دايرې نه بهر پروت دى، يا $P_{(0)} = d^2 - r^2 > 0$ لکه د $P_{(0)} = d^2 - r^2$ قضيه شکل



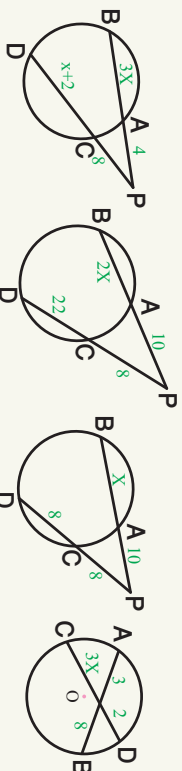
• که د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته صفر وي ټکى د دايرې پر محيط پروت دى، يعنې $P_{(0)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$

• که د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته منفي وي ټکى د دايرې دننه پروت ده، يعنې $P_{(0)} = d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$



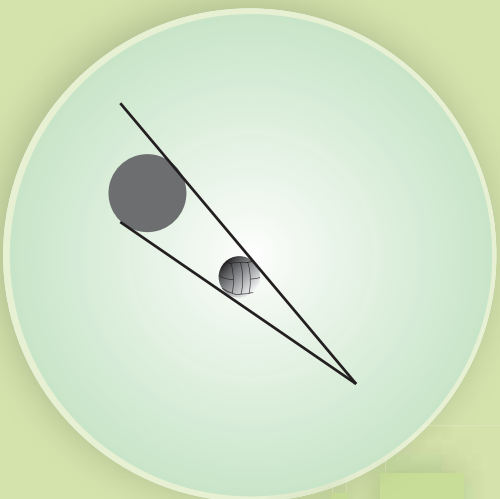
پوښتنې

1- په لاندي شکلونو کې د X قيمتونه پيدا کړئ.



2- په لاندي حالتونو کې د يوه ټکي طاقت نظر يوې دايرې ته پيدا کړئ.
الف) که $d = 7$ او $r = 4$ وي. ب) که $d = 3$ او $r = 3$ وي. ج) که $d = 3$ او $r = 5$ وي.

په دایري مماس کرښه



شکل ته پاملرته وکړئ.
که چیرې د نور د وړانګې حرکت مسیر
مستقیمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې
نظر توپ او د هغه له سیوري سره څه
ایکې لري.

فعالیت

- د P له یوه بهرنی ټکي نه د $C(O, r)$ په دایره د $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ دوه مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R ټکي پر دایره د تماس ټکي وي، یا د P له ټکي پر دایره بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکي د R, Q او P ټکو سره ونښلوئ.
- لاسته راځلي مثلثونه سره څه اړیکې لري؟
- یا رسم شوی مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه څرګندېږي.

قضیه (2-3): د یوې دایرې له بهرنی ټکي څخه پر دایره دوه مساوي مماسونه، رسمېږي.

ثبوت: په POR او POQ مثلثونو کې لیکلی شو چې:

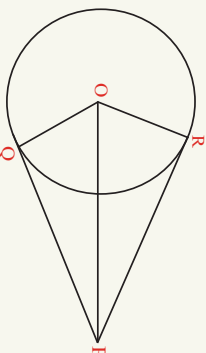
$$\overline{OR} = \overline{OQ} \dots \text{د دایرې شعاع یا وړانګه.}$$

$$\overline{PO} = \overline{PO} \dots \text{ګډ.}$$

$$\hat{R} = \hat{Q} \dots 90^\circ.$$

$$\hat{POR} \cong \hat{POQ}$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ}$$



قضیه (2-4): که د یوې دایرې له بهرنی ټکي نه یو مماس او یو قاطع پر یوه دایره رسم شي ثبوت کړئ، چې د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د مماس له مربع سره مساوي دی.

ثبوت: $C(O, r)$ په دایره کې $\overline{PT}$ مماس او $\overline{PAB}$ قاطع دی، که د T ټکي له A او B

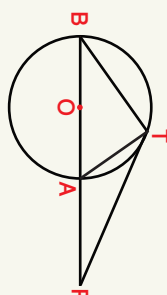
ټکوسره ونښلوو، د $\hat{PTB}$ او $\hat{PTA}$ مثالونو څخه لیکلای شو چې:

$$\hat{PTA} = \hat{PBT} \dots (I)$$

$$\hat{P} = \hat{P} \dots (II)$$

$$\Rightarrow \hat{PTB} = \hat{PAT}$$

محيطي زاوي او د
عين قوس گډ مماس



$$\Rightarrow \hat{PTB} \sim \hat{PTA}$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

په پايله کي ليکلای شو چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندي شکل کي د $\overline{PT}$ او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړی.

حل:

$$PA = 4\text{cm}$$

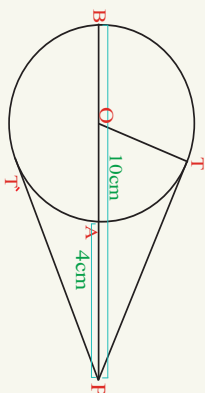
$$PB = 10\text{cm}$$

$$PT = ?$$

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

$$PT^2 = 4 \times 10 = 40$$

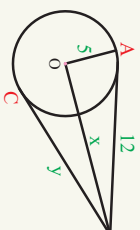
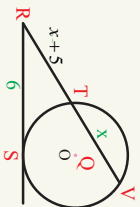
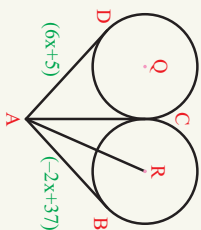
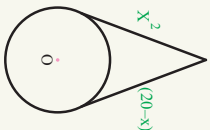
$$PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



- د یوې دایرې له باندني ټکي څخه پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو.
که چیرې د یوې دایرې له بهرني ټکي څخه پر دایره یو قاطع او یو مماس رسم شي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د مماس له مربع سره مساوي دي.

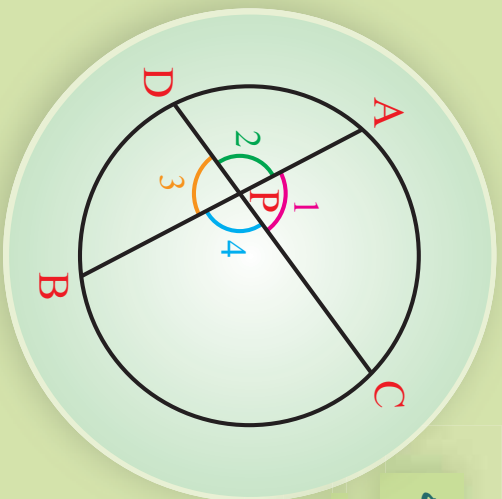
پوښتنې

په لاندي شکلونو کي د X قیمت لاسته راوړی.



د یوې دایرې دننۍ (داخلي) زاویه

د یوې دایرې په دننه کې دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او ووايست چې خو زاوېې جوړوې، او څه یې نوموئ.



تعریف

هغه زاوېې چې د دایرې په دننه کې د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي د دایرې دننۍ زاوېې بلل کېږي، لکه په پورتنۍ شکل کې د $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ زاوېې.

فعالیت

په یاد ولرئ:

- هره محیطي زاویه د مخالف قوس نیمایي ده.
- په یوه مثلث کې، د هرې خارجي زاوېې پراخوالی د دوو ناګاونډیو زاویو د مجموعې سره برابری.

د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ، په هغه کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه وترونه د اسې رسم کړئ چې د P په ټکي کې یو بل پری کړي هغه زاوېې چې منځ ته راځي د څه په نامه یادېږي؟

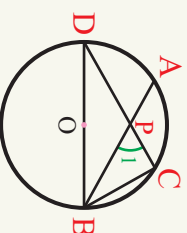
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د CPB زاویه چې د $\hat{CPB}$ باندنۍ زاویه ده، د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکه لري.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتو.

قضیه (2-5): د یوې دایرې د هرې دننۍ (داخلي) زاوېې پراخوالی، د هغو قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دی، چې د د زاویو د اضلاعو د پریکړې په مرسته منځ ته راغلی وي.

ثبوت: څرنگه چې د B او D د دایرې محیطي زاوېې دي نو کولای شو چې ولیکو:

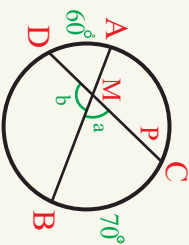
$$\left. \begin{aligned} \hat{B} &= \frac{1}{2} \hat{AD} && \text{د محیطي زاوېې وسعت} \\ \hat{D} &= \frac{1}{2} \hat{BC} && \text{د محیطي زاوېې وسعت} \\ \hat{CPB} &= \hat{B} + \hat{D} && \text{د هر مثلث خارجي زاویه} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{CPB} = \frac{1}{2} \hat{AD} + \frac{1}{2} \hat{BC} = \frac{1}{2} (\hat{AD} + \hat{BC})$$



لومړی مثال: په لاندې شکل کې د $\hat{a}$ او $\hat{b}$ زاوړې پېدا کړئ.
حل: څرنگه چې د یوې دایرې دننې زاوړې پراخوالی د هغو قوسونو مجموعه کې له نیمایي سره مساوي دی چې د زاوړو په مخامخ کې پراته وي، یعنې:

$$\widehat{CMB} = a = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{60 + 70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - a = 180^\circ - 65^\circ = 105^\circ$$

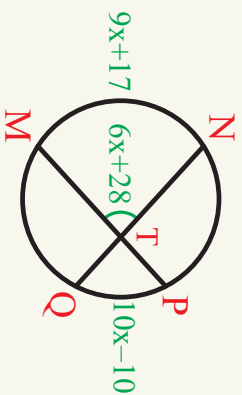


دویم مثال: په لاندې شکل کې د x او $\widehat{NTM}$ زاوړې پراخوالی وټاکئ.
حل: د یوې دایرې دننې زاوړو د اړیکو له مخې لیکلی شو چې:

$$\widehat{NM} = 9x + 17, \quad \widehat{PQ} = 10x - 10$$

$$\widehat{NTM} = 6x + 28$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$



$$12x + 56 = 19x + 7$$

$$-7x = -49$$

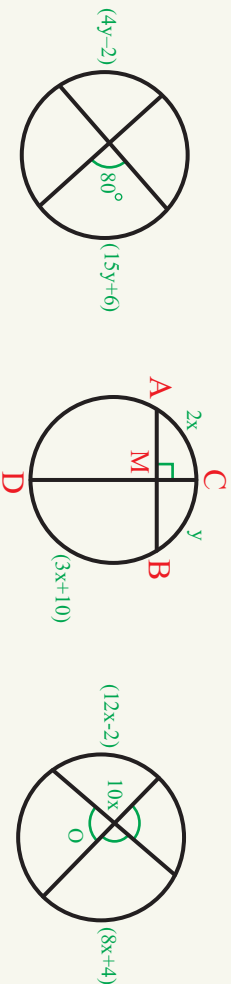
$$x = 7$$

$$\widehat{NTM} = 6x + 28$$

$$= 6 \times 7 + 28 = 42 + 28 \Rightarrow \widehat{NTM} = 70^\circ$$

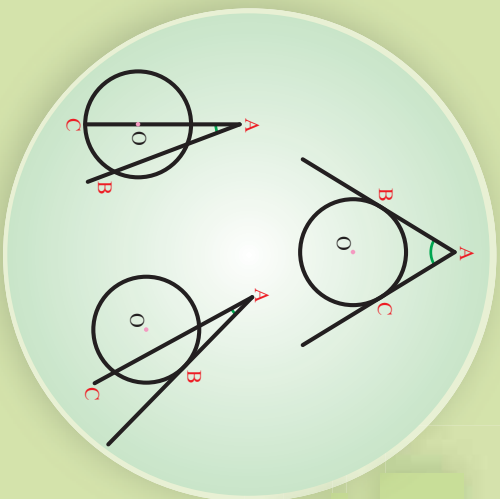
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلوم کړئ.



د دایرې باندنۍ زاویه

په مخامخ شکلونو کې د تیره کړنو او زاویو نومونه واخلئ.



تعریف

هغه زاویه چې د دوو قاطع کړنو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یوه مماس د پریکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلی وي د دایرې باندنۍ زاویه بلل کېږي.

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه غیر موازي وټرونه غزوو تر څو د BVD څارجي زاویه منځ ته راشي د C ټکي له B سره ونښلوئ.
- د BVC مثلث باندنۍ زاویه یعنې (1) د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکې لري؟

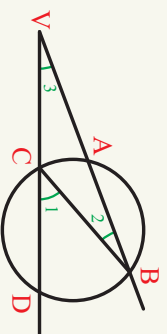
د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیانېږي.

قضیه (2-6): د یوې دایرې د باندنۍ زاوې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپیر له نښې سره مساوي دی، چې د وټرونو د تقاطع څخه منځ ته راغلی وي.

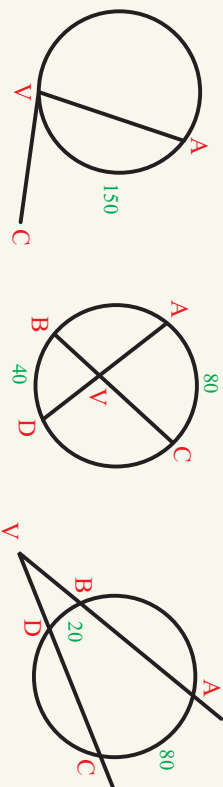
ثبوت: د B ټکي له C سره نښلو او BVC مثلث کې لرو چې:

$$\begin{aligned} \hat{1} &= \hat{2} + \hat{3} && \text{د مثلث څارجي زاوې پراخوالی} \\ \hat{3} &= \hat{1} - \hat{2} && \text{د محطې زاوې پراخوالی} \\ \hat{1} &= \frac{1}{2} \hat{AD} && \text{د محطې زاوې پراخوالی} \\ \hat{2} &= \frac{1}{2} \hat{AC} && \text{د محطې زاوې پراخوالی} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{3} = \frac{1}{2} \hat{BD} - \frac{1}{2} \hat{AC}$$

$$\hat{BVD} = \frac{1}{2} (\hat{BD} - \hat{AC})$$



نومړۍ مثال: په لاندې شکلونو کې د $\widehat{AVC}$ زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل: په دایره کې دانیو، باندنیو او محاسبي زاویو پراخوالی څخه په ګټه اخیستلو سره لیکلای شو چې:

$$\begin{aligned} a) \widehat{AVC} &= \frac{1}{2} \widehat{AV} & b) \widehat{AVC} &= \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD}) & c) \widehat{AVC} &= \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (150)^\circ & &= \frac{1}{2} \cdot (80 + 40)^\circ & &= \frac{1}{2} \cdot (80 - 20)^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{AVC} = 75^\circ$$

$$\widehat{AVC} = 60^\circ$$

$$\widehat{AVC} = 30^\circ$$

دویمه مثال: د لاندې شکل څخه په ګټه اخیستو سره د X او Y ارزښتونه پیدا کړئ.

$$\widehat{ANB} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140 \dots \text{I}$$

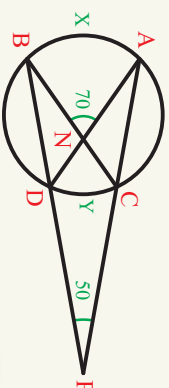
$$\widehat{APB} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 100 \dots \text{II}$$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:

$$2x = 240$$

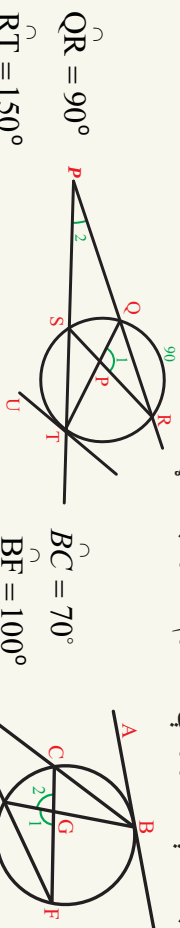
$$x = 120^\circ$$

$$y = 20^\circ$$



پوښتنې

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

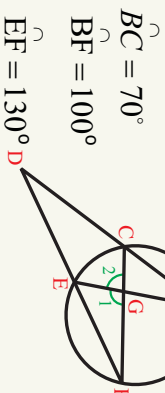


$$\widehat{QR} = 90^\circ$$

$$\widehat{RT} = 150^\circ$$

$$\widehat{QS} = 50^\circ$$

$$\widehat{STU} = ? , \quad \widehat{1} = ? , \quad \widehat{2} = ?$$



$$\widehat{BC} = 70^\circ$$

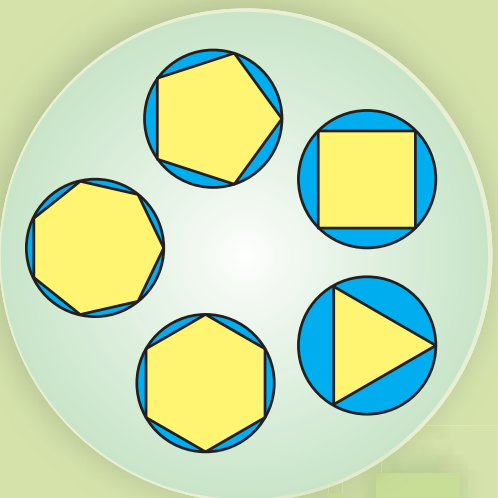
$$\widehat{BF} = 100^\circ$$

$$\widehat{EF} = 130^\circ$$

$$\widehat{1} = ? , \quad \widehat{2} = ? , \quad \widehat{D} = ? , \quad \widehat{ABC} = ?$$

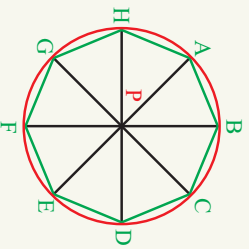
محيطي دایره

مخامخ شکل ته پاملر نه وکړئ، کوم هندسي شکلو نه وينئ نومونه يې واخلئ.



تعريف

هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېره شوي وي محيطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل:



د مثلث محيطي دایره: هغه دایره چې د مثلث د درې راسونو څخه تېره شوي وي د مثلث د محيطي دایرې په نامه یادېږي.

فعاليت

- د $\triangle ABC$ مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ د اضلاعگانو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په خړ ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکی په O سره وښئ.
- د $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, او $\overline{OC}$ اوږدوالی سره پرتله کړئ.
- که چیرې یوه دایره د O په مرکز او د $\overline{OA}$ په شعاع رسم شي آیا د B او C له ټکو تیرېږي او که نه؟
- آیا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تیرېږي؟ ولې؟
- رسم شوی دایره د مثلث د څه په نامه یادېږي؟

په یاد ولرئ چې:
هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیرېږي، د مضلع ته مرسوم په دایره وايي.

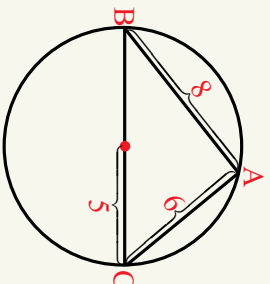
ددې فعالیت د پایلي څخه به لاندې ډول لکلاى شو:

پایله: د اضلاعگانو د وسطي عمودونو د پریکړې ټکي د مثلث د محیطي زاويې مرکز دی.

مثال: د $\triangle ABC$ قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د قایمو څنډو اوږدوالی په ترتیب سره 8 cm او 6 cm وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع (وړانگه) لاس ته راوړي.

حل: پوهیږو چې په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې د محیطي دایرې مرکز پر وتر باندې پروت وي نو لومړی د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د نیمایي ټکي یې د محیطي دایرې مرکز دی.

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ \overline{BC}^2 &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \\ \overline{BC}^2 &= \sqrt{100} \\ \overline{BC} &= 10\text{cm} \\ r = \frac{BC}{2} &\Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5\text{cm}\end{aligned}$$

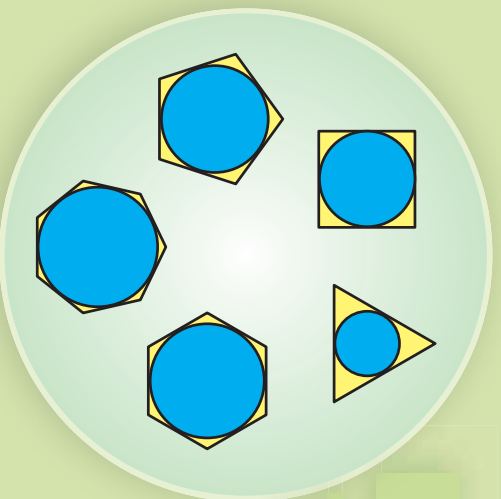


- هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېرېږي د مضلع محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره ولایي.
- د یو مثلث د اضلاعو د منځنۍ (وسطې) عمودونو د پریکړې ټکي د مثلث د محیطي دایرې مرکز دي.

پوښتنې

- 1- یو مثلث چې د اضلاعو اوږدوالی یې په ترتیب سره 3 cm ، 4 cm او 5 cm وي رسم کړئ. د هغې د محیطي دایرې شعاع یا وړانگه حساب کړي.
- 2 - د قایم الزاویه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقين مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې پراته دي په شکل کې یې وښیئ.

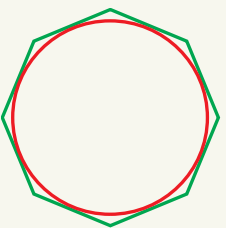
محاطي دائره



- هغه هندسي شڪلونډه چې په مخامخ شڪل کې ټپي وينئ نومونه راځي.
- د شڪلونو تر منځ څه اړيکي ويني.

تعريف

هغه دایره چې د محيطي مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع د محاطي دایري په نامه یادېږي لکه مخامخ شڪل چې د مضلع پواسطه احاطه شوی دی.



د مثلث محاطي دایره: هغه دایره چې د یو مثلث په درې ضلعو مماس وي د مثلث محاطي دایره بلل کېږي.

فعالیت

- د $\triangle ABC$ یو کیني مثلث رسم کړئ.
- د A, B, C زاویو ناصفونه رسم او د پریکړې ټکي په (O) سره ونښئ.
- د (O) له ټکي څخه د مثلث پر اضلاعو د $\overline{ON}, \overline{OM}$ او $\overline{OP}$ عمود کرښې رسم کړئ.
- ایا هغه دایره چې د (O) په مرکز او د $\overline{ON}$ په شعاع رسم شي د M او P له ټکو څخه تیرېږي؟ ولې؟
- رسم شوي دایره د څه په نامه یادېږي؟

موسمه:
د یوه مثلث وسطي
عمودونه د مثلث دننه په
یوه ټکي کې پریښکوي

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو چې په لاندې توګه څرګنده کړو.
د هر مثلث دننې ناصف الزاویو ترمنځ د پریکړې ټکی، د مثلث د محاطي دایرې له مرکز څخه عبارت دي.
د مثلث باندنۍ محاطي دایره

فعالیت

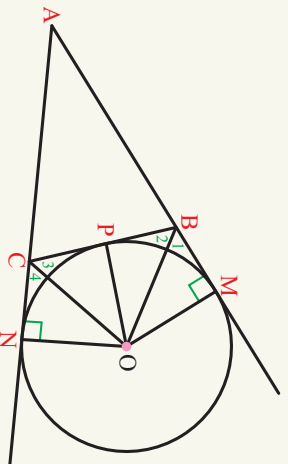
د مثلث باندنۍ دایره رسم کړئ.

- د $\triangle ABC$ مثلث رسم کړئ او $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعو ته امتداد ورکړئ.
- د مثلث د B او C زاویو باندنۍ ناصف الزاویې رسم او د پریکړې ټکی په O سره ونښئ.
- ایا د O ټکی د مثلث د باندنۍ محاطي دایرې مرکز کېدلی شي؟ ولې؟
- د O له ثابت ټکي څخه د $\overline{OM}$, $\overline{OP}$ او $\overline{ON}$ عمودي کرښې د مثلث په یوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او ونښئ چې د O دایرې شعاع ګانې دي.

فکر او څېړنه وکړئ:

- که چیرې د یوې څلور ضلعي د مخامخ زاویو مجموعه 180° وي څلور ضلعي په دایره مرسوم دي.
- په یاد ولرئ:**
- هر منظمه مضلع محاطي او محاطي دایره لري.

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو په لاندې توګه څرګنده کړو.
هغه دایره چې د یو مثلث په یوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي د هغه مثلث باندنۍ محاطي دایره بلل کېږي.

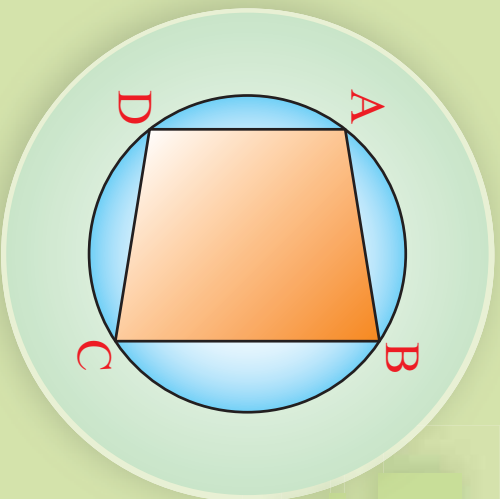


پوښتنې

- 1- په کومو مثلثونو کې د محاطي دایرې او محاطي دایرې مرکزونه منطبق دي، رسم او په شکل کې ښیئ.

په دایره کې د مرسوم څلور ضلعي ځای پټاوي (خواص)

په مخامخ شکل کې دایره د څلور ضلعي
له راسونو سره څه اړیکه لري.



فعالیت

- د $ABCD$ یو کيفي څلور ضلعي مرسوم په دایره رسم کړئ.
- د محيطي دایرې منځ ته راغلی زاويې څه نومېږي؟
- د دایرې مرکز د څلور ضلعي د دوو مخامخ راسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلی مرکزي زاويې مجموعه څو درجې دی؟
- د مرکزي او محيطي زاويو اړیکې چې د عین قوس مخامخ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره ولیکئ.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه بیانولای شئ:

قضیه: په یوه دایره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.

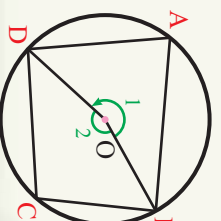
$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 360^\circ$$

$$\hat{DCB} = \frac{1}{2} \hat{O}_1$$

$$\hat{DAB} = \frac{1}{2} \hat{O}_2$$

$$\hat{DCB} + \hat{DAB} = \frac{1}{2} (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

ثبوت:

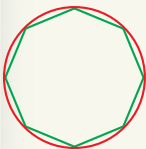


فعالیت

- منظم درې ضلعي د څه په نامه یادېږي، د هرې زاويې پراخوالي
- څو درجې ده؟
- منظم څلور ضلعي څرنگه ونوموو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟

تعريف

هغه مضلع چې اضلاع او زاويې يې يو له بل سره مساوي وي منظمه مضلع بلل کېږي.



فعاليت

- په خپله خوښه يوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- يو راس يې د هغې له ناکاوندو راس سره ونښلوئ، خو مثلاً نه منځ ته راځي؟
- د دې مثلاًونو دننېو زاويو مجموعه خو درجي ده؟
- د پنځه ضلعي دننې زاويو مجموعې په هکله څه فکر کوئ؟
- دغه فعاليت د يو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چيرې n ضلعي مضلع ولرو د هغې دننې زاويو مجموعه به يې خو درجي وي؟

که چيرې د يوې مضلع د ضلعو شمېر په n او د هغې دننېو زاويو مجموعه په S_n ونښو نو د

هر n ضلعي دننېو زاويو مجموعه $S_n = (n-2)180^\circ$ درجي ده.

مثال: د يو څلور ضلعي او لس ضلعي دننېو زاويو مجموعه پيدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننېو زاويو مجموعه د $S_n = (n-2)180^\circ$ اړيکې له مخې ټاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

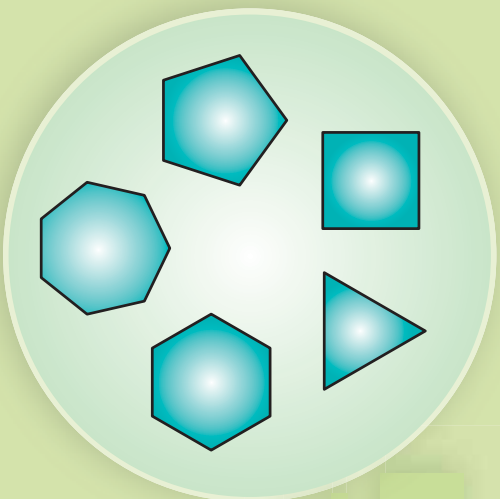
$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8 \times 180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

په ياد ولرئ چې:

- د قطرونو تعداد د n ضلعي له يو راس څخه د $n-3$ اړيکې په مرسته لاس ته راځي.
- له يو راس څخه د مضلع په منځ کې د مثلاًونو شمېر د $n-2$ اړيکې په مرسته لاسته راځي.
- په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° دي.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی يې سره مساوي وي منظم مضلع بلل کېږي.

پوښتنې

- 1- د يوې منظمې شپږ ضلعي مضلع د زاويو پراخوالی خو درجي دي؟
- 2- د يوې منظمې n ضلعي مضلع د زاويو اندازه خو درجي دي؟
- 3- په يوه لس ضلعي مضلع کې د قطرونو په مرسته د يوه راس څخه څو مثلاًونه منځ ته راځي؟

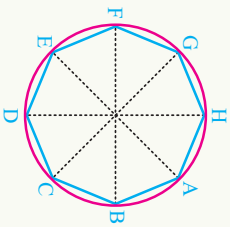


د منظمې مضلع ترسیم

- پاملرنه وکړئ.
- په شکل کې څه ډول مضلع گانې گورئ.
- ستاسې په نظر دغه مضلع گانې په څه ډول رسم شوي دي؟

فعالیت

- د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ د هغې په مرکز کې (O) مساوي مرکزي زاوې رسم کړئ.
- که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعې مرکزي زاوې وي یا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعي مضلع د $C(O, r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایرې محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د پریکړې ټکي ونښلوئ.
- آیا د منځ ته راغلي مضلع ضلعي سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلی مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامخ مرکزي زاوې پراخوالی څو درجې ده؟



$$\text{د یو منظم } n \text{ ضلعي مضلع د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاوې پراخوالی مساوي په } \hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n} \text{ دی.}$$

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي رابنده ده.
- د دایرې مرکز د مضلع له شپږو راسونو سره نښلو. څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاویو پراخوالی څو درجې دی؟
- منځ ته راغلی مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله کولی شو په لاندې توګه څرګنده کړو.

د یوې شپږ ضلعي د هرې ضلعي اوږدوالی د هغې د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي دی.

مثال: هغه دایره چې شعاع یې 2cm دی، خرنګه کولی شو چې هغه په یوه منظم شپږ ضلعي مضلع محاط کړو؟

حل: پوهېږو چې د هرې منظمې شپږ ضلعي مضلع هره ضلع د هغې د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي ده نو د پراکار خوله د 2cm په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه د دایرې له محیط څخه مساوي قوسونه جلاکړو د ټاکل شویو ټکو د نښلولو څخه منظم شپږ ضلعي منځ ته راځي؟

د محاطي دایرې د شعاع له مخې د منظمې مضلع مساحت

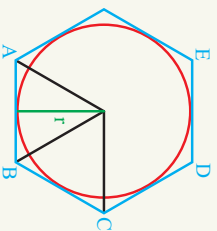
فعالیت

- د $C(O, r)$ محاطي دایره او د $ABCDEF$ منظمه مضلع رسم کړئ.
- د O ټکی د A, B, C راسونو سره ونښلوئ. د OAB او OBC مثلثونه چې منځ ته راځي دي انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\triangle AOB$ په مثلث کې د $\overline{AB}$ د ضلعي جګوالی (ارتفاع) د محاطي دایرې له شعاع سره مساوي دي. ولې؟
- د پورتنۍ مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- ایا د منظمې n ضلعي مضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دی؟
- د منظمې مضلع محیط د $P = AB \cdot n$ اړیکې یا رابطې څخه لاسته ته راځي. ولې؟

که چیرې د منظمې مضلع مساحت په A ، محیط یې په P او د یوې منظمې n ضلعي مضلع د محاطي دایرې شعاع په r سره ونښو نو د مضلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتېږي:

$$A = \frac{1}{2} AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \Rightarrow A = \frac{1}{2} P \cdot r$$

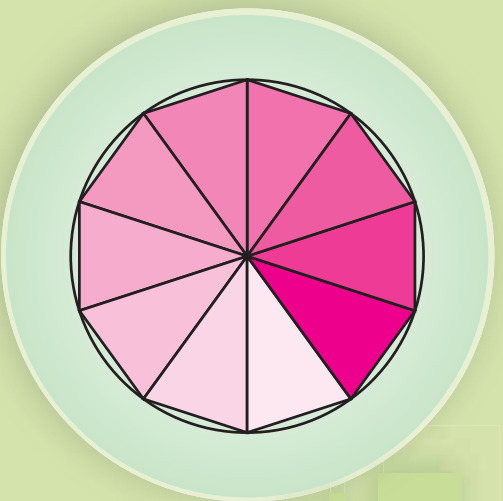


پوښتنې

1- په یوه دایره کې چې شعاع یې 3cm وي یو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ، چې محاط په دایرې وي؟

د دایري محیط او مساحت

په راکړل شوي شکل کې د مثلثونو مجموعي مساحت د دایري او د مثلثونو د یو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالي د دایري محیط سره پرتله کړئ.



د $C(O, r)$ په دایره کې که قطر په (d) او محیط یې د (C) په تورو وښودل شي د دایري د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړیکه وجود لري؟

$$\frac{\text{د دایري محیط}}{\text{د دایري فاعده}} = \frac{C}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = \pi d \quad \dots\dots (1) \quad [\pi \approx 3.14159\dots]$$

پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$ که چېرې په (I) اړیکه کې د (d) پر ځای د $(2r)$ قیمت وليکو، د دایري محیط د لاندې اړیکې څخه لاسته راځي:

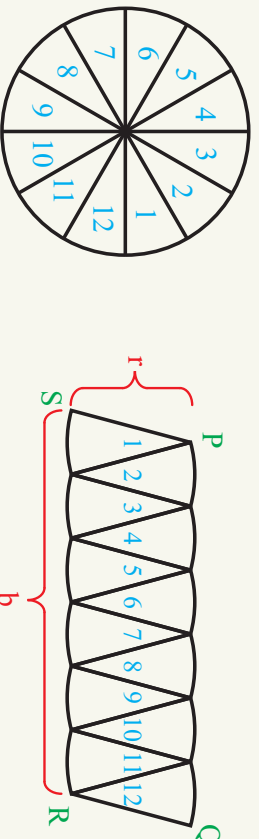
$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

د دایري د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره پر مختلفې ریاضي ته اړیو، نو په دې ډول د دایري د مساحت محاسبې لپاره په لاندې توګه عمل کوو:

یوه دایره د هغې د قطرونو په مرسته په (12) مساوي برخو ویشو او هره برخه یې د 1 څخه تر 12 پورې شمېر وښو وښو که چېرې د دایري دغه منځني ټوټې غوڅ او بیا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څیر ترتیب کړو.

په روښانه ډول لیدل کېږي، چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.



پوهېرو چې د b قاعده د دایرې د محیط نیمایي ده. ولې؟ نو:

جگوالی $\times$ قاعده = متوازي الاضلاع مساحت

$$\frac{1}{2}Cr = \text{متوازي الاضلاع مساحت}$$

له بلې خوا پوهېرو چې $C = 2\pi r$ = د دایرې محیط دی، نو لرو چې:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = A = \frac{1}{2} \cdot \text{متوازي الاضلاع مساحت}$$

پوهېرو چې د متوازي الاضلاع مساحت او دایرې سره ډېر نږدې دي، نو لیکلای شو: $A = \pi r^2$
په پایله کې ولې شو چې د دایرې مساحت د $A = \pi r^2$ اړیکې او محیط یې د $C = 2\pi r$ اړیکې په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د یوې دایرې وړانګه (شعاع) 14cm ده د دایرې مساحت پیدا کړئ.

$$A = \pi r^2$$

حل: د دایرې د مساحت د اړیکې څخه په

$$A = (3.14159)$$

گټو اخستو سره یعنې $A = \pi r^2$ لرو چې:

$$A = (3.14159) \cdot 196\text{cm}^2 \Rightarrow A = 615.75\text{ cm}^2$$

دویمه مثال: که چېرې د دایرې قطر 70cm وي د دایرې شعاع او مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دایرې محیط راکړل شوی دی، نو اول شعاع، وروسته مساحت پیدا کوو.

$$\frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\text{ cm}^2$$

درېیمه مثال: که چېرې د دایرې محیط $14\pi\text{cm}$ وي د دایرې شعاع او مساحت پیدا کړئ.

$$C = 14\pi\text{cm}$$

حل: څرنگه چې د دایرې محیط

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

راکړل شوي دی، نو د مساحت پیدا

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159) \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\text{ cm}^2$$

- د یوې دایرې مساحت د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړیکې څخه لاس ته راوړو.
- د یوې دایرې محیط د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړیکې څخه لاس ته راوړو.

پوښتنې

- 1- که چېرې دایرې محیط 4cm وي د دایرې شعاع یې لاس ته راوړئ.
- 2- د یوې دایرې محیط، چې شعاع یې د اوږدوالی یو واحد وي لاس ته راوړئ.
- 3- د یوې دایرې مساحت، چې شعاع یې د اوږدوالی یو واحد وي لاس ته راوړئ.

● هغه اړيکي چې د يو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودي وي، د اوږدوالی د اړيکو په نامه يادېږي.

● که چيرې د يوي دایري له بهرنیو ټکو څخه پر دايره دوه قاطع کرښي رسم شي، د يوي قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

يعني:

● که چيرې د يوه ټکي څخه دوه قاطع کرښي پر يوه دايره داسې رسم شي، چې دوسم قاطع د دايري له مرکز څخه تير شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنی قطعي د ضرب حاصل له يوي ټاکلي اندازې يعني: $d^2 - r^2$ سره مساوي دي.

● د يوه باندي ټکي څخه پر يوي دايري دوه مساوي مماسونه رسميدلای شي.

● که چيرې $0 < d^2 - r^2$ يا $d^2 > r^2$ وي ټکي د دايري په بهر کې برانه دی.

● که چيرې $d^2 = r^2$ يا $d^2 = r^2$ وي، ټکي د دايري پر محيط پروت وي.

● که چيرې $0 < d^2 - r^2$ يا $d^2 < r^2$ وي ټکي د دايري په دننه کې پروت دی.

.....
ته راځي د دايري دننی زاويي بلل کېږي.

● د يوي دايري د هرې دننی زاويي پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نيمايي

$$\overset{\frown}{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{a+b}}{2}$$

سره مساوي دي.

● هغه زاويه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، يا يو قاطع او يو مماس د پریکړې څخه د دايري په بهر کې منځ ته راغلي وي د دايري باندي زاويه بلل کېږي.

● د يوي دايري د هرې باندي زاويي پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نيمايي

$$\overset{\frown}{A} = \frac{\overset{\frown}{a-b}}{2}$$

سره مساوي دی، يعنې:

د دویم څپرکي پوښتنې

● په لاندې سوالونو کې د هر سوال لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي د سم ځواب څخه دایره تالو کړئ.

1- که چیرې د P ټکی د دایرې پر محیط پروت وي د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

- (a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چیرې د P یو ټکی د دایرې په دننه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته عبارت دی له:

- (a) د P ټکي طاقت مثبت دی. (b) د P ټکي طاقت منفي دی.
(c) د P ټکي طاقت صفر دی. (d) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3- که د P ټکي د دایرې څخه د باندې پروت وي، د P ټکي طاقت نظریوې دایرې ته عبارت دی له:

- (a) $d^2 - R^2$ (b) d^2
(c) $r - d$ (d) $R^2 - d^2$

4- که چیرې د یوې دایرې شعاع R او د دایرې دننې ټکی او مرکز ولن په d سره ونښو، د نوموړی ټکی طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

- (a) $R^2 = d^2$ (b) $d^2 = R^2$
(c) دواړه ځوابونه سم دي. (d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5- یو ټکی د 13cm په اندازه د $C(O, r)$ دایرې له مرکز څخه ولن لري که د دایرې قطر 10cm وي د قاطع د بهرنی برخې اوږدوالی د نوموړی ټکی څخه عبارت دی له:

- (a) 13 cm (b) 10 cm
(c) 12 cm (d) 8 cm

6- که چیرې د P له ټکي څخه د یو مماس اوږدوالی د $C(O, r)$ دایرې سره 12cm او قطر یې 10cm وي د P او O د ټکو تر منځ ولن عبارت دی له:

- (a) 13 cm (b) 12 cm
(c) 10 cm (d) 5 cm

7- که چیرې د $C(O, r)$ د دایرې د $\overline{AB}$ وتر د P ټکي پورې امتداد ورکړو داسې چې: $AP = 8\text{cm}$ او $BP = 2\text{cm}$ د $\overline{PT}$ د مماس اوږدوالی عبارت دی له:

- (a) 4 cm (b) 8 cm
(c) 2 cm (d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

● په لاندې پوښتنو کې تش ځایونه په وړ کلمو ډک کړئ.

1- $r^2 - d^2$ د یوه ټکي نظر یوې دایرې ته دی.

2- که چېرې $\overline{PT}$ د $C(O, r)$ پر دایره مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر $C(O, r)$ دایرې ته عبارت دی له دی $\overline{PT}^2$

3- که چېرې د P ټکي د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.

4- که ټکي د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.

5- که ټکي د دایرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.

6- که $\overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$ وي، د A, B, C او D پر محیط پرتې وي او د P ټکي د په دننه او یا بهر پروت دي.

7- که د A, B او T ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، A, B او P د یوې کرښې په امتداد دی او د P ټکي د دایرې بهر کې دی په دې توګه دی $\overline{PT}^2 =$

● د سمو جملو په مخامخ کې درس) او د ناسمو جملو مخامخ کې دن) توری ولیکئ.

1- (د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د ټکي او د دایرې مرکز ولاین له مربع سره مساوي دی.

2- (که ټکي د دایرې پر محیط پروت وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.

3- (که ټکي د دایرې په دننه کې وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.

4- (که ټکي د د دایرې په بهر کې وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.

5- (د یوه ټکي طاقت نظر هرې دایرې ته مثبت دی.

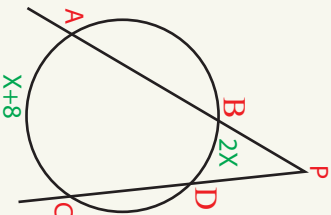
6- (د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته $r^2 - d^2$ دي که د d د ټکي ولاین دایرې ته او r

د دایرې وړانګه وي.

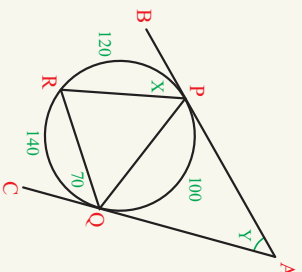
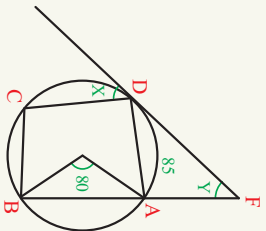
7- (که دوه دایرې مماس وي د هغوی طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

● لاندې پوښتنې په تفصيل سره حل کړئ.

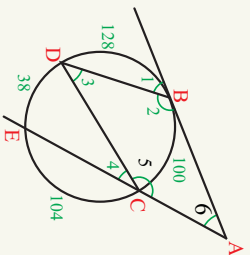
- 1- په لاندې شکل کې $\hat{P} = (x+1)$ او محامخ قوسونه يې په ترتيب سره $(2x)^0$ او $(x+8)^0$ وي د $\hat{APC}$ زاويې پراخوالی پيدا کړئ.



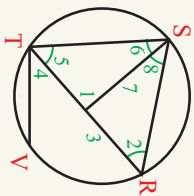
- 2- د $\hat{x}$ او $\hat{r}$ د زاويو پراخوالی په لاندې شکلونو کې پيدا کړئ.



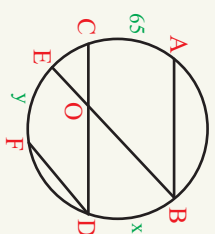
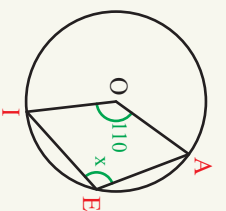
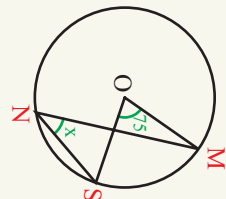
- 3- په لاندې شکل کې $\overline{AB}$ بر دایره مماس دی که $\hat{DB} = 128^\circ$ او $\hat{CE} = 104^\circ$ وي د $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$ زاويو پراخوالی پيدا کړئ.



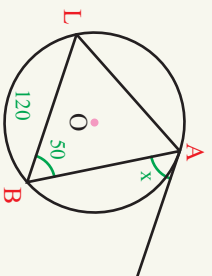
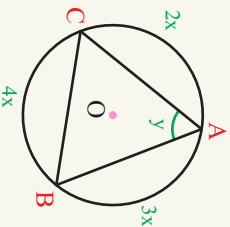
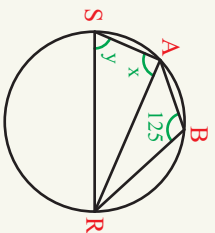
4- د $\angle C(O, r)$ په دایره کې $RS \parallel TV$ او $\angle RTS = 70^\circ$ د RT د دایرې قطر دی د
 $2, 3, 4, 5, 6, 7$ او 8 زاویو اندازه پیدا کړئ.



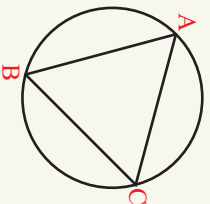
5- د $\angle x$ او $\angle y$ زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې وښکئ.



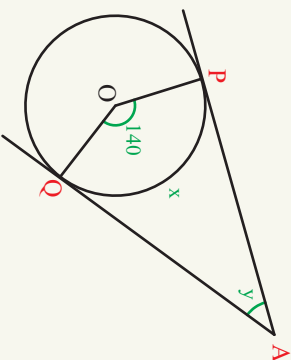
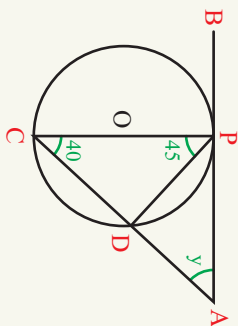
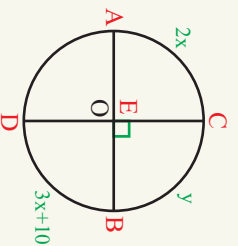
6- د $\angle x$ او $\angle y$ زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې پیدا کړئ.



7- د محاطي دایرې د تعریف له مخې وښیئ چې د هر مثلث دنیو زاویو مجموعه 180° وي.



8- په لاندې شکلونو کې د $\angle x$ او $\angle y$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



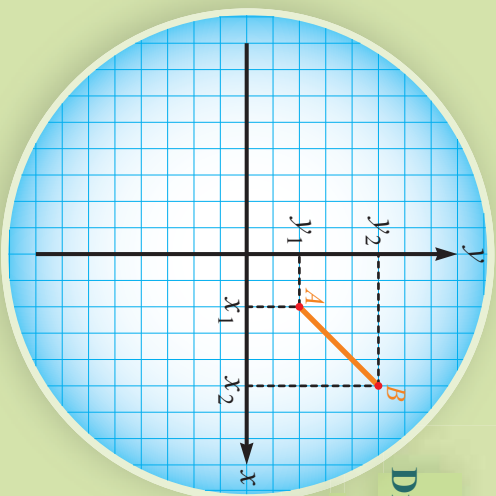
دریم چیری تحلیلی هندسه

تحليلي هندسه

Analytic Geometry

د الجبر او هندسي ترمنځ اړيکې له تحليلي هندسي څخه عبارت دی. چې د الجبري معادلو او هندسي شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نيول کېږي، فرانسوي رياضي پوه دیکارت د لومړي ځل لپاره د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ اړيکه و څيړله ونې ويل، چې ځينې الجبري معادلې يو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنگه چې د هندسي د علم بنسټ ټکی او دالجبري معادلو بنسټ عدد جوړوي نو لدې کبله لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړيکې تر څيړنې لاندې نيسو، دیکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړيکو د څيړنې لپاره د قايم مختصاتو د محورونو داسې يو سيستم راويزاند چې تراوسه د دکارت په نامه يادېږي.





د دوو ټکو ترمنځ واټن يا فاصله Distance between two Point

د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي د وضعيه کمپانو په سيستم کې د AB يوه ټوټه کرښه ټاکي ستاسې په اند خرنګه کولای شوي چې د A او B ټکو ترمنځ واټن (فاصله) حساب کړو.

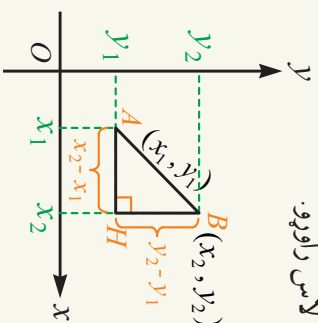
فعاليت

- د $A(3, 5)$ او $B(5, 4)$ ټکي د وضعيه کمپانو په سيستم کې وښیئ.
- د AB کرښه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واټن (فاصله) حساب کړئ.

د پورتنۍ فعاليت خخه کولای شو په عمومي ډول د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن (فاصله) په لاندې ډول په لاس راوړو.

په لاندې شکل کې ABC مثلث پوقايم الزاويه مثلث دی. ولې؟
د فيثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \dots\dots\dots \text{د فيثاغورث د قضیې} \\ \left. \begin{aligned} \overline{AH} &= x_2 - x_1 \\ \overline{BH} &= y_2 - y_1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \overline{AB}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \overline{AB} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



نومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن (فاصله) پیدا کړئ.
حل: د دوو ټکو له فاصلې د فورمول څخه په گټه اخستې لیکلای شو چې:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ unit}$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن (فاصله) له مبدأ څخه حساب کړئ.

حل: پوره وچې د مبدأ مختصات $O(0,0)$ دی نو د دوو ټکو ترمنځ د واټن د فورمول څخه په لاس راځي:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5$$

د $A(x_2, y_2)$ او $B(x_2, y_2)$ واټن عبارت له:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

یو بنسټي

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

2- که $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث د راسونو مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

3- د K عددی قیمت داسې وټاکئ چې د $A(2,3)$ او $B(5K,6)$ پوړۍ کرښې اوږدوالی پنځه برابره شي.

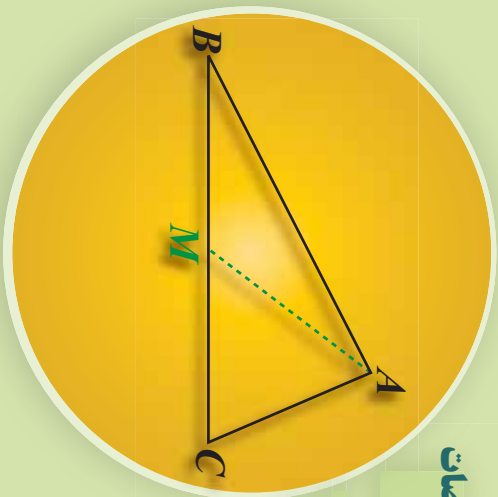
4- د $P(1, \sqrt{3})$ او $Q(-1, 1+\sqrt{3})$ ترمنځ واټن پیدا کړئ.

5- که $A(-1,4)$ ، $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث د راسونو مختصات وي د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ، چې راسونه یې د $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکو پراته وي.

7- که $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یوه مثلث د څوکو (راسونه) مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

د یوه قطعه خط د منځنۍ ټکي مختصات



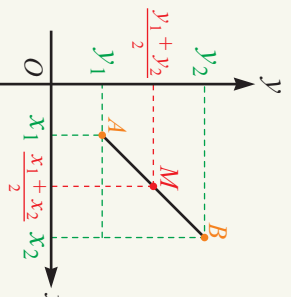
د $\triangle ABC$ په مثلث کې د $\overline{AM}$ قطعه خط د مثلث میانه ده، د میانې ځانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي د وضعیتو کمیانو په سیستم کې ونځای.
- که چیرې د C ټکي د $\overline{DE}$ توپه کرښې منځنۍ ټکي وي، د هغې مختصات ولیکئ.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتو سره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضعیتو کمیانو په سیستم کې ونځای.
- که چیرې د R ټکي د $\overline{PQ}$ توپه کرښې منځنۍ ټکي وي د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات د P او Q ټکو د مختصاتو سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو چې په بشپړ ډول داسې بیان کړو: که $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دوه ټکو د X په محور پرانه وي نو د M ټکي مختصات چې د $\overline{AB}$ توپه کرښې منځنۍ ټکي دی داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$

که $P(0, y_1)$ او $Q(0, y_2)$ دوه ټکي د Y په محور پرانه وي د M د ټکي مختصات چې د $\overline{PQ}$ توپه کرښه منځنۍ ټکي دی داسې په لاس راوړو: $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$



په بشپړ ډول $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ د وضعیتو کمیانو په سیستم کې دوه ټکي او M د $\overline{AB}$ کرښې منځنۍ ټکي وي نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

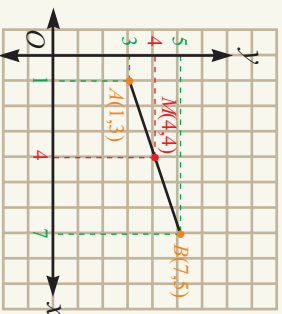
لومړی مثال: که چیرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د $\overline{AB}$ توپه کرښې د پیل اولی مختصات وي د توپه کرښې د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړئ.

حل: دیوې توپه کرښې د منځنۍ ټکي د مختصاتو څخه په گډه اخیستنه لیکلای شو چې:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$M(4,4)$$



دویم مثال: د $P(-1,3)$ ټکي واټن دهغي مستقیمې کرښې له منځنۍ ټکي څخه پیدا کړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تیر شي.

حل: د P ټکي واټن د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې له منځنۍ ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د $\overline{AB}$ منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړو، نو لیکلای شو چې:

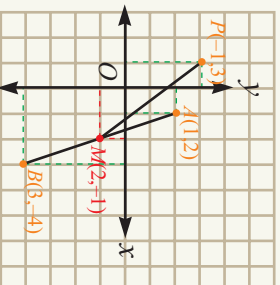
$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (2, -1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2, -1)$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$



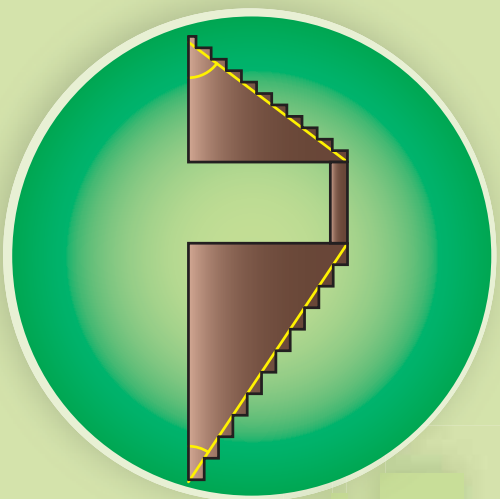
پوښتنې

- د یوه مثلث دری راسونه $A(5,-2)$, $B(3,-1)$ او $C(1,5)$ راکړل شوي دي د $\overline{AM}$ د میاني اوږدوالی پیدا کړئ.
- که چیرې $A(2,4)$, $B(5,9)$, $C(4,9)$ او $D(1,4)$ ټکي د یوه متوازي الضلاع راسونه وي د متوازي الضلاع د قطرونو د پریکړې د ټکو مختصات پیدا کړئ.
- که چیرې $A(-1,4)$, $A(-3,-7)$ او $B(1,9)$ د یوه مثلث راسونه وي د هغه د میاني یا منځنۍ کرښې اوږدوالی پیدا کړئ چې د BC په ضلع رستمېږي.

د مستقيمې کړنې ميل



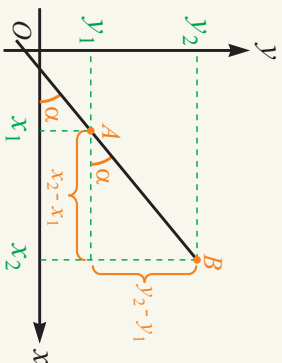
شکل ته وگورئ په کومه زینه په اسانۍ سره خنډی شئ ولې ؟ دلیل یې بیان کړئ.



که $\overline{AB}$ د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ مستقیمې کړنې دوه اختیاري ټکي وي د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت ته

د مستقیمې کړنې ميل وايي او په لاندې ډول یې

$$\text{ليکي: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



لومړی مثال: د هغې مستقیمې کړنې ميل پيدا کړئ چې د $A(3, 5)$ او $B(4, 6)$ ټکو

څخه تیر شي.

حل: پوهېږو چې د مستقیمې کړنې ميل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي نو لرو چې:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{4 - 3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2, 5)$ او $B(4, k)$ ټکو څخه تیرېږي د k قیمت په هغه کې داسې وټاکئ چې د مستقیمې کړنې ميل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ څخه په لاندې ډول گټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k - 5}{4 - 2}$$

$$k - 5 = 6 \Rightarrow k = 11$$

درېم مثال: د هغه مستقيمي کرني ميل پيدا کړئ چې د $P(2, 3)$ ټکي او د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرشي.

حل: څرنگه چې مستقيه کرښه د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرېږي نو د مبدا مختصات $O(0, 0)$ دي، نو ميل يې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\frac{m}{PO} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{m}{PO} = 1.5$$

فعاليت

- د $A(2, 3)$ او $B(4, 6)$ ټکي د وضعيه کمياتو په سيستم کې ونښئ.
- هغه مستقيم چې د A او B ټکو څخه تېرېږي رسم کړئ او په Δ_1 سره يې ونښئ.
- د Δ_1 مستقيم ميل په لاس راوړئ.
- د Δ_1 مستقيم د X محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي.
- د $M(1, 5)$ او $N(4, 2)$ ټکي په همغه وضعيه کمياتو کې په بل رنگ وټاکئ.
- هغه مستقيم چې د M او N ټکو څخه تېرېږي هغه ته Δ_2 ورايئ.
- د Δ_2 مستقيم ميل په لاس راوړئ.
- د Δ_2 مستقيم د X محور د مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- د تشکيل شويو زاويو او کرښو ترمنځ څه ډول اړيکه شته.

د پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايلې په لاس راځي:

د هرې مستقيمي کرني ميل په هغه زاويه پورې اړه لري، چې مستقيمه کرښه يې د X له محور سره جوړوي.

که يوه مستقيمه کرښه د X محور له مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي، ميل يې يو مثبت عدد دی، که يوه مستقيمه کرښه د X محور له مثبت جهت سره منفرجه زاويه جوړه کړي ميل يې يو منفي عدد دی.

يو بنسټي

- ۱- د هغه مستقيمي کرني ميل په لاس راوړئ چې د $A(1, 1)$ او $B(-1, -1)$ ټکو څخه تېرشي.
- ۲- هغه مستقيم چې د $A(-2, 2\sqrt{3})$ او $B(1, a)$ ټکو څخه تېرېږي، د a عددي قيمت داسې وټاکئ چې د مستقيم ميل $\sqrt{3}$ وي.
- ۳- که چيرې $A(5, -2)$ ، $B(3, -1)$ او $C(1, 5)$ ټکي د يوه مثلث راسونه وي د $\overline{BC}$ ضلعي د مياني ميل پيدا کړئ.

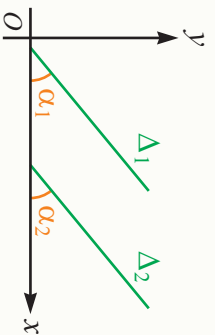
د موازي کرښو میل

په ورکړل شوي شکل کې زینه په پام کې ونیسئ د هغې د بازوگانو تر منځ څه ډول اړیکه شتون لري.



فعالیت

- د راکړل شویو وضعیه کمیالو په سیستم کې د Δ_1 او Δ_2 موازي کرښې یو له بل سره داسې رسم کړئ چې د X محور له مثبت جهت سره حاده زاوې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښو میلوڼه حساب او یو بل سره یې پرتله کړئ، کرښې یو بل سره څه اړیکې لري؟
- که چیرې د Δ_1 مستقیم د X محور له مثبت جهت سره د α_1 زاویه د Δ_2 مستقیم د X محور له مثبت جهت سره د α_2 زاویه جوړه کړي نو α_1 او α_2 یو له بل سره څه اړیکه لري.



په عمومي ډول د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

موازي کرښې د مساوي میلوڼو لرونکي دي.

که چیرې دوه مستقیمه کرښې مساوي میلوڼه ولري په پایله کې هغه زاوې چې د X محور له مثبت جهت سره یې جوړوي یو له بل سره مساوي دي.

مثال: که چیرې د Δ_1 مستقیم د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ ټکو او د Δ_2 مستقیم د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو څخه تیر شي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} &= \frac{-1 - (-5)}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} &= \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خړنگه چې د Δ_1 او Δ_2 ميلونه سره مساوي دي نو نومړي کرښې يوه له بلې سره موازي دي.

فعاليت

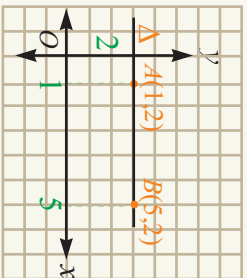
- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضعه کيښاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له A او B ټکو څخه تیرېږي رسم او په Δ بې وروموی.
- د Δ مستقیم د X محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول بیانو:

که چیرې A او B دوه اختیاري ټکي او مساوي ترتیبونه ولري، لکه: $A(x_1, a)$, $B(x_2, a)$

هغه کرښې چې د A او B ټکو څخه تیرېږي د X له محور سره موازي دی. او میل یې له

$$m = \frac{a - a}{x_2 - x_1} = 0 \quad \text{یعنې:} \quad \text{صفر سره مساوي دی.}$$



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي د وضعیه کمیلانو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې د M او N ټکو څخه تیرېږي رسم او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیمه کرښه د X له محور سره څه ډول زاویه جوړوي د Δ مستقیم میل په اړه څه ویلای شئ؟

د پورتنۍ فعالیت څخه دې پایلې ته رسیږو هغه مستقیمه کرښه چې د X له محور سره قایمه زاویه جوړه کړي نشو کولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ول کيږي چې د Δ مستقیم خط معین یا ټاکلی میل نه لري.

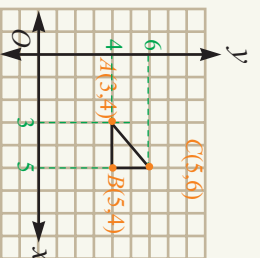
مثال: که چیرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکي د یوه مثلث راسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ او هغه د وضعیه کمیلانو په سیستم کې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې د AB مستقیمه کرښه د X له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{AB} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په همدې ډول د BC مستقیمه کرښه د Y له محور سره موازي نو میل یې نامعین (نه دی تعریف شوی) دی.

$$m_{BC} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4 \\ \overline{BC}^2 &= (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4 \\ \overline{AC}^2 &= (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8 \\ \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2\end{aligned}$$

په پایله کې

څرنگه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کېږي نو د $\overline{AB}$ مستقیمه کرښه د $\overline{AC}$ په مستقیمې کرښې عمود ده نو د $\triangle ABC$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x محور سره موازي او يا د y په محور عمود وي ميل يې صفر دی.

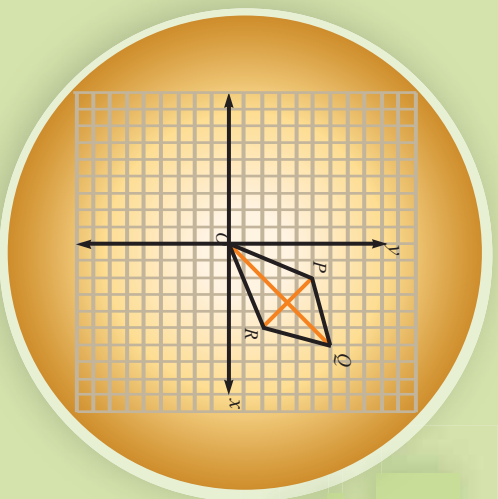
هغه مستقیمه کرښه چې د x په محور عمود يا د y له محور سره موازي وي ميل يې نه دی تعريف شوی. (معین عدد نه دی)

پوښتنې

- 1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د یوې څلورضلعې راسونه وي:
الف: د څلورضلعې مخامخ ضلعې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
ب: د قطرونو میلونه پیدا کړئ.
۲- $A(3,4)$ ، $B(-3,4)$ ، $C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکي په پام کې ونیسئ.
الف: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو څخه تیرېږي له هغې کرښې سره چې د C او D ټکو څخه تیرېږي څه اړیکې لري؟
ب: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو او هغه کرښه چې د C او D ټکو څخه تیرېږي څه اړیکه لري؟
ج: د $ABCD$ څلورضلعې څه ډول څلور ضلعې ده؟
د: د قطرونو میل یې پیدا کړئ.

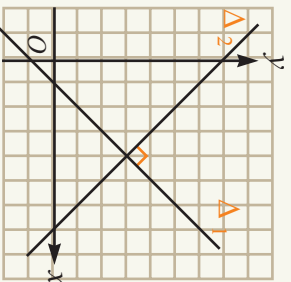
د یو پر بل عمود مستقیمو کرښو میل

$OPQR$ څلورضلعی یو لوزی دی. کولای شې د لوزی ځانګړتیا د هغې د راسونو د مختصاتو په مرسته بیان کړی.



تعریف

د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمې کرښې چې میلونه یې m_1 او m_2 دي هغه وخت یو پر بل عمود دي چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده ده. $m_1 \cdot m_2 = -1$



لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیرېږي له یو بل سره څه اړیکه لري.

حل:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{CD} = \frac{2 - 5}{2 - 0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{AB} \cdot m_{CD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ مستقیمې کرښې یو پر بل عمود دي.

فعالیت

- د $A(4,4), B(1,3), C(0,0), D(3,1)$ ټکي د وضعیه کمیانو په سیستم کې ونښئ.
- د $OBCD$ شکل رسم کړئ.
- د $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ او $\overline{DO}$ ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ.

- د $OBCD$ څلورضلي څه ډول څلورضلي ده؟
 - وښیئ چې د $\overline{OC}$ او $\overline{BC}$ قطرونه یو پر بل عمود دي.
- پوهیږو چې په یوه مستوي کې د دوو ټکوڅخه یوازې یو مستقیم تیرېږي په کوم حالت کې له درېو ټکو څخه یو مستقیم خط تیرېدلای شي؟

تعریف

د P, Q, R او R ټکي هغه وخت پر یوه مستقیم پراته دي چې د $\overline{PQ}$ میل د $\overline{QR}$ له میل سره مساوي وي.



دویم مثال: د $A(0, -1), B(2, 3), C(-1, -3)$ درې ټکي په پام کې ونیسئ، وښیئ چې دا درې واړه ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي.

حل: د AB میل عبارت دی له:

$$m_{AB} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{AC} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m_{BC} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

د AC میل عبارت ده له: $\overline{AC}, \overline{AB}$ او $\overline{BC}$ کرښو میلونه سره مساوي دي نو په پایله کې د A, B, C ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي.

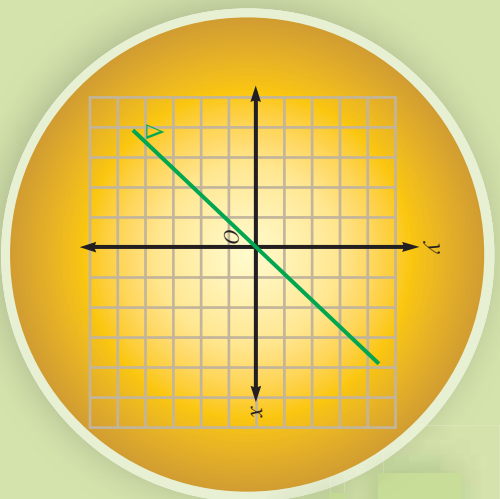
- که چېرې د دوو کرښو د میلونو د ضرب حاصل (-1) وي نو کرښې یو تړل عمودي دي.
- درې ټکي هغه وخت په یوه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو میلونه سره مساوي وي.

پوښتنې

- 1- که د $A(6, 1), B(8, 3), C(6, 5)$ ټکي د یوه مثلث څوکي یا راسونه وي وښیئ چې نوموړی مثلث قایم الزویه دی.
- ۲- هغه ټوټه کرښه چې د $(7, 5)$ او $(1, 1)$ ټکو څخه تیرېږي له هغه ټوټه کرښې سره چې د $(0, 5)$ او $(2, 2)$ ټکوڅخه تیرېږي، اړیکې یې یو له بل سره وڅیړئ؟
- ۳- یوه کرښه چې د $(2, 4)$ او $(7, 5)$ ټکو اوبله د $(1, -4)$ او $(-3, -5)$ ټکو څخه تیرېږي د دواړو کرښو حالت یو له بل سره بیان کړئ.

د مستقیمې کرښې معادله

په مخامخ شکل کې د مستقیمې کرښې پرمخ شو ټکي وټاکئ.
د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د فاصلې او ترتیب ترمنځ څه اړیکه ونښئ.



فعالیت

- د $A(1,-1)$, $B(-2,2)$, $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضعیه کمپلټو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د تړلو څخه کوم شکل لاسته راځي.
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پرته دي او که نه؟ ولې؟

د پورتنۍ فعالیت پایله په عمومي ډول داسې بیلانوَ:

د $x = y$ او $x = -y$ رابطې چې د یوې کرښې پرمخ د ټکو د فاصلې او ترتیب ترمنځ اړیکه رابښي د مستقیمې کرښې معادله بلل کېږي.

په هیږو چې د هرو دوو ټکو څخه چې په یوه مستوي کې برتې وي یوازې یوه مستقیمه کرښه تیرېږي. اوس غواړو چې د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړو چې له دوو اختیاري ټکو څخه تیرېږي.

فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي د وضعیه کمپلټو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه رسم کړئ، چې له A او B ټکو څخه تیر شي.
- ددې لپاره چې د $M(x,y)$ اختیاري ټکي د $\overline{AB}$ کرښې پرمخ پروت وي، کوم شرط لازمي ده؟ د $\overline{AM}$ او $\overline{AB}$ توپه کرښو میلونو له مساواتونو څخه کومه اړیکه لاسته راځي.

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو په عمومي ډول داسې بیان کړو:

د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ له دوو ټکو څخه تیره شي داسې په لاس راځي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(3, 4)$ او $B(2, -1)$ له ټکو څخه تیره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي یې معلوم وي لیکلای شو چې:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 3} = \frac{-5}{-1}$$

$$y - 4 = 5(x - 3)$$

$$y = 5x - 15 + 4 = 5x - 11$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د x محور په فاصله د $x = -3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y = 4$ ټکي کې پرې کړي.

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د x محور په $x = -3$ ټکي کې پرې کوي نو د مختصاتو په سیستم کې ددې ټکي د پریکړې مختصات $(-3, 0)$ دي، په همدې ډول د y له محور سره د پریکړې د ټکو د مختصات د وضعیه کمیانو په سیستم کې $(0, 4)$ دی، اوس د یوه مستقیم د دوو ټکو پېژندلو په مرسته کولای شو د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 0}{x - (-3)} = \frac{4 - 0}{0 - (-3)}$$

$$\frac{y}{x + 3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = 4(x + 3)$$

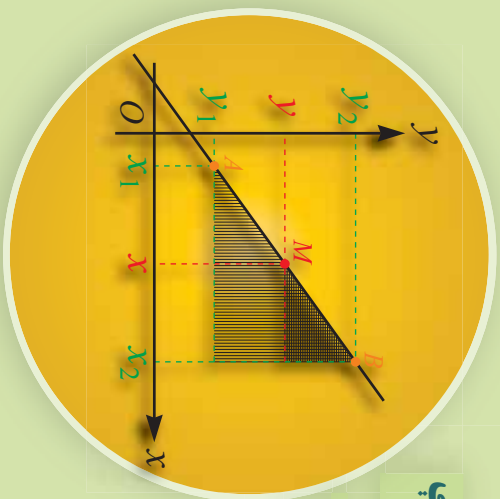
$$3y - 4x = 12$$

پوښتنې

- 1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(2, -1)$ او $B(3, 4)$ له ټکو څخه تیره شي.
- ۲- د هغه مثلث د $\overline{AM}$ میاني معادله ولیکئ چې راسونه یې $A(1, 3)$ ، $B(-1, 4)$ او $C(5, 6)$ وي.
- ۳- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3, 0)$ او د y محور په $B(0, -2)$ ټکي کې پرې کړي.

د هغه مستقيمي کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي

په مخامخ شکل کې د $\overline{AB}$ میل د $\overline{MA}$ له میل سره څه اړیکه لري؟
بله هره ټوټه کرښه چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو د $\overline{AB}$ له میل سره برابر میل لري، ولې؟



پوهیږو چې د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي ښکاره کوي عبارت ده له:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

یا

څرنگه چې $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ د مستقيمي کرښې میل رابښي نو پر رتې معادله لاندې شکل غوره

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

کوي.

وروستنۍ معادله د هغې کرښې معادله ده چې میل ئې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطه څخه تیرېږي.

لومړی مثال: د هغې مستقيمي کرښې معادله وليکئ چې د $(2, 3)$ ټکي څخه تیر شي

او میل يې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنگه چې د مستقيمي کرښې میل او یو ټکی راکړل شوي ده نو د $y - b = m(x - a)$ معادله لیکلای شو:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2(y - 3) = (x - 2)$$

$$2y - 6 = x - 2$$

$$2y - x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

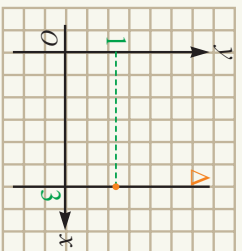
دویم مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $(3, 1)$ ټکي څخه تیره او له محور سره موازي وي ولیکئ.

حل: څرنگه چې مستقیمه کرښه د X له محور سره موازي ده نو میل $y - b = m(x - a)$ $y - 1 = 0$ $(x - 3)$ $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

درېم مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $(3, 1)$ ټکي څخه تیره او د y له محور سره موازي وي.

حل: څرنگه چې مستقیم د y له محور سره موازي ده نو میل یې نه دی تعریف شوی (معین میل نه لري) ځکه پوهیږو چې ددې کرښې پرمخ دهر ټکي واټن یا فاصله د $(3, 1)$ ټکي سره مساوي ده چې معادله یې په دې ډول $x = 3$ ده.

په عمومي ډول هغه کرښه چې د (a, b) ټکي څخه تیره او د X له محور سره موازي وي عبارت له $y = b$ سره ده.



هغه کرښه چې د (a, b) ټکي څخه تېرېږي او د Y له محور سره موازي وي عبارت له $x = 1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ توبه کرښه د عمودي ناصف معادله پیدا کړئ چې د $A(2, -4)$ او $B(-2, 4)$ ټکو څخه تیره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پیدا کولو لپاره لومړی د $\overline{AB}$ توبه کرښې میل په لاس راوړو او بیا د هغې د منځ د $\overline{AB}$ د منځني ټکي مختصات په لاس راوړو.

$$\frac{m_{AB}}{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 + 4}{-2 - 2} = -2 \Rightarrow m_{\Delta} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m}{AB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{0}{2} \right) = (0, 0)$$

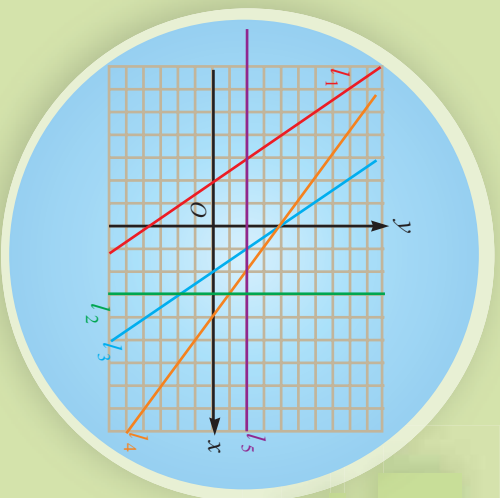
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

پوښتنې

- 1- د هغه مستیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې میل یې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پري کړي.
- 2- د هغه مستیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د $P(5, -4)$ ټکي څخه تیره او میل یې 2- وي.
- 3- د $3x + 4y - 7 = 0$ معادله کې د مستقیم میل او د Y له محور سره یې د غوڅوونې ټکي پیدا کړئ.

د مستقیمې کرښې عمومي معادله

د l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 څلور کرښې نسبت یو بل ته کوم وضعیتونه لري؟



د یوې کرښې الجبري معادله د هغه ټکي د مختصاتو اړیکه چې په مستقیمه کرښه پروت دی راښيي په عمومي ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول بیانوو:

په معیاري یا ستندور ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$$\frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}y = 0 \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{او} \quad c, a, b, \text{ او} \quad c \text{ حقیقي عددونه او} \quad b \neq 0 \text{ دی.}$$

په پورتنۍ معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې میل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د پریکړې ټکی یا تقاطع بلل کېږي. نو ویلای شو چې د هرې کرښې معادله په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$mx + h = y$ چې m د مستقیمې کرښې میل او h د y محور سره د پریکړې ټکی یا ترتیب دی په عمومي ډول هره خطي اړیکه د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان یو وي د مستقیمې کرښې معادله بلل کېږي.

فعالیت

- د $0 = 6 - 3y + 2x$ او $2 = x - y$ دوی مستقیمې کرښې د وضعه کولو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هریوه مستقیم میل پیدا کړئ.
- دا دوی کرښې یوله بل سره څه وضعیتونه لري.

له پورتنۍ فعالیت څخه پایله په لاندې ډول بیانوو:

که د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نو کرښو یوه بله پرې کرې دي.

په عمومي ډول که د $0 = c_1 + b_1y + a_1x$ او $0 = c_2 + b_2y + a_2x$ دوی کرښې یوه بله پرې کرې. وي نو میلونه یې سره مساوي نه دي له دې نه داسې پایله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- د $0 = 5 - y + 3x$ او $0 = 1 + 2y - 6x$ مستقیمې کرښې د فایمو وضعیه کمیانو په مستوي کې رسم کړئ.
- ددې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- دا دوي مستقیمې کرښې نسبت یو بل ته څه وضعیت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول د $0 = c_1 + b_1y + a_1x$ او $0 = c_2 + b_2y + a_2x$ دوه مستقیمې کرښې هغه وخت موازي دي چې میلونه یې سره مساوي وي له دې ځایه دا پایله په لاس راځي چې د هغوی د متحرکینو د ضریبونو ترمنځ لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

که د متحرکینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$ اړیکه وجود ولري په دې حالت کې کرښې یو پر بل پرتې (منطبق) دي یا سره یو دي.

لومړی مثال: د $5 = 4y + 3x$ او $-1 = 3y - 4x$ د مستقیمو اړیکې نظر یو بل ته بیان کړئ.

$$a_1 = 3 \quad b_1 = 4 \quad c_1 = -5$$

$$a_2 = 4 \quad b_2 = -3 \quad c_2 = 1$$

$$1- \text{خرنگه چې } \frac{3}{-3} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2} \text{ دی په دې صورت کې کرښې یو بل غوڅوي.}$$

$$2- \text{خرنگه چې } -1 = \frac{4}{-3} \times \frac{3}{4} = -1 \text{ نو } \frac{b_1}{b_2} \times \frac{a_1}{a_2} = -1 \text{ دي نو د کرښو د پریکړې په ټکي کې یو پر بل عمود دي.}$$

دویم مثال: په لاندې معادلو کې د k عددي قیمت داسې وټاکئ چې مستقیمونه یو بل سره

$$\text{عمودي وي } 0 = 3 + 2x - 6y \text{ او } 0 = 1 - 3y + kx$$

$$\text{حل: د عمودیت شرط څېړو:} \quad kx + 3y - 1 = 0, \quad 2x - 6y + 3 = 0$$

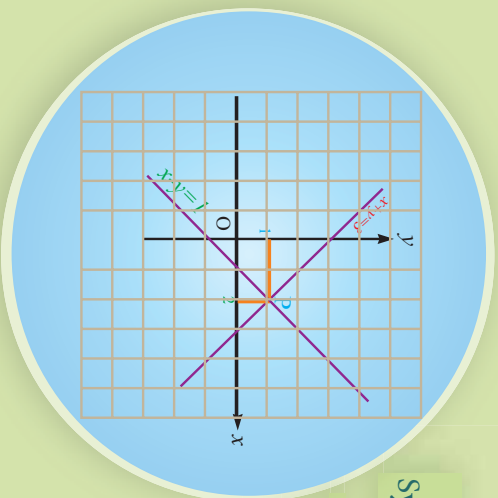
$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

$$2 \cdot k + (-6)3 = 0 \Rightarrow k = 9$$

پوښتنې

- د $0 = 1 - 3y + 4x$ او $0 = 5 + 6y + 8x$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.
- د $0 = 10 + 4y - 8x$ او $0 = 5 + 2y - 4x$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.
- د $0 = 0 + kx + (k+1)x$ او $0 = 5 + 3y - 2x$ معادلو کې د k قیمت داسې وټاکئ چې کرښې یوه له بلې سره موازي وي.

د خطي معادلو سیستم System of linear equation



شکل ته پام وکړئ ایا د P ټکي مختصات د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y = 4x - 2$ او $y = 3x + 5$ کرښو میلونه پیدا کړئ.
- دا کرښې نظر یوږل ته څه اړیکې لري؟ ولې؟
- پورتنۍ دواړې کرښې د وضعیه کمیانو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کېږي؟

په پورتنۍ فعالیت کې لیدل کېږي د هغو دوو کرښو چې میلونه یې مساوي نه وي یو بل د P په ټکي کې پرې کوي.

څرنگه چې د پریکړې ټکي د دواړو کرښو په منځ پراته دي نو د هغې ټکي مختصات د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د پریکړې د ټکي مختصات په $P(x, y)$ ونښو نو: $y = -3x + 5$ او $y = 4x - 2$ معادلو څخه لیکلای شو، چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

د کرښو په معادلو کې د x قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 = 2$$

نو د پریکړې د ټکي مختصات عبارت دي له $P(1, 2)$ په پایله کې ویلای شو، چې $P(1, 2)$

ټکي داسې ټکي دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري، چې د $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

- مخامخ د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ:
- a_1, b_1, c_1 او a_2, b_2, c_2 د څه په نامه یادېږي؟
- پورتنیو معادلو کې x او y ته څه وېل کېږي؟
- یا ددې دوو کرښو د پریکړې د ټکي، د مختصلاتو د سیستم یو حل کیدای شي؟

د خطي سیستم د حل لپاره د (1) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې چې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

- 1- که چېرې د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نو دا کرښې یو بل په یوه ټکي کې پریکوي.
- 2- که چېرې د کرښو میلونه مساوي وي اما د y محوره یې د پریکړې ټکي مساوي نه وي هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.
- 3- که چېرې د کرښو میلونه او د y محور سره د پریکړې ټکي مساوي وي نو هغه دوه کرښې سره منطبق یا یو پر بل پراته وي.

نوموړی مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

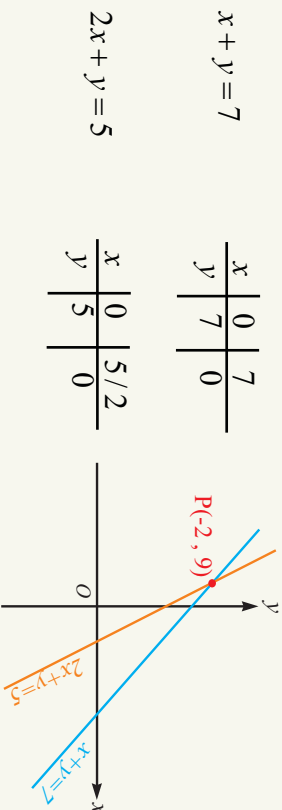
$$\begin{cases} y = 7 - x \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

ليدل کيږي چې د پورتنیو کرښو د معادلو میلو نه 1- او 2- دي څرنگه چې د دوو خطونو میلو نه مساوي نه دي نو کرښې یو بل په یوه ټکي کې پرېکړې کوي، چې د پرېکړې د ټکي د مختصاتو د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

$$\begin{aligned} -x + 7 &= -2x + 5 \\ -x + 2x &= 5 - 7 \Rightarrow x = -2 \\ \text{د کرښو په یوه معادله کې د } x \text{ پر ځای د } -2 \text{ په وضع کولو سره لرو چې:} \end{aligned}$$

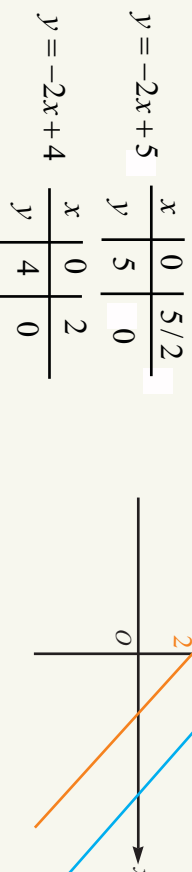
$$\begin{aligned} y &= -x + 7 \\ y &= -(-2) + 7 \Rightarrow y = 9 \end{aligned}$$

نو $(-2, 9)$ د کرښو د معادلو د سیستم حل او د پرېکړې ځای دی، چې په شکل کې لیدل کېږي.



دویم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کوئ.
حل: لومړی معادلې په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 12x + 3y = 6x + 12 \\ y = -2x + 5 \\ y = -\frac{6}{3}x + \frac{12}{3} \end{cases}$$



څرنگه چې د دواړو کرښو میل 2- دی په پایله کې کرښې خپل منځ کې موازي دي او یو بل نه پرېکړي یعنې د موازي کرښو د معادلو سیستم حل نه لري.

دړيم مثال: د لاندې خطي معادلو سيستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -28 = -4x - 4y \end{cases}$$

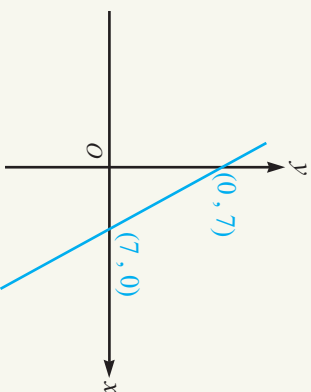
حل: لومړی د معادلانو سيستم په لاندې ډول ليکو:

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -\frac{-4}{4}x + \frac{-28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 7 \\ \hline y & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 7 \\ \hline y & 7 & 0 \end{array}$$



ليدل کېږي، چې د کرښو ميل او د y په محور د پړيکړې ټکي سره برابر دي نو دواړه کرښې سره منطبق دي په دې حالت کې کرښې ډېر گڼه ټکي لري په پايله کې د خطي معادلو سيستم ډېر حلونه لري.

که a_1, b_1, c_1 او a_2, b_2, c_2 حقيقي عددونه x او y مجهولونه وي په دې حالت کې د

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ دى.}$$

خطي معادلو سيستم

- که چيرې کرښې يوه له بلې په يوه ټکي کې پرې کړي معادلې يو حل لري.
- که چيرې کرښې يوه له بلې سره موازي وي معادلې حل نه لري.
- که چيرې کرښې يو پر بل منطبق وي معادلې بې نهايت حلونه لري.

پوښتي

د لاندې خطي معادلو سيستمونه حل کړئ.

1) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2 = y \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل د تعریف په لاره (طریقه)

د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ
د X مجهول عددي قیمت ستاسو په هاند
څنګه په لاس راغلی دی.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 4 \quad \dots\dots\dots \\ \text{II} \quad x - y = 6 \quad \dots\dots\dots \\ y = 4 - x \\ x - (4 - x) = 6 \\ x = 5 \end{array}$$

فعالیت

- د یوه مثلث د دواړو زاویو مجموعه 100° او د تفریق حاصل یې 20° دی الجبري معادلې یې ولیکئ.
- د معادلانو دا سیستم څو مجهول له لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ.
- په لاس راخلي قیمتونه د معادلانو په سیستم کې وازماینئ.

له پورتنی فعالیت څخه د مسألې حل او د خطي معادلو د سیستم د حل لاره په لاندې توګه داسې لیکو:

حل: که چېرې د مثلث زاويې په $\hat{A}$ او $\hat{B}$ ونوموو پورتنۍ عبارت د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 100^\circ \quad \dots\dots\dots \text{I} \\ \hat{A} - \hat{B} = 20^\circ \quad \dots\dots\dots \text{II} \end{array}$$

او د $\hat{A}$ زاويې قیمت د $\hat{B}$ زاويې له جنسه له لومړۍ معادلې څخه په لاس راوړو
 $\hat{A} = 100^\circ - \hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې دی $\hat{A}$ په عوض وضع کوو او معادله حلوو:
 $100^\circ - \hat{B} - \hat{B} = 20^\circ \Rightarrow -2\hat{B} = -80^\circ \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ$
اوس د $\hat{B}$ قیمت د خطي معادلانو په سیستم کې وضع کوو چې د $\hat{A}$ قیمت په لاس راځي.

$$\begin{aligned} \hat{A} - \hat{B} &= 20^\circ \\ \hat{A} - 40^\circ &= 20^\circ \Rightarrow \hat{A} = 20^\circ + 40^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \end{aligned}$$

دویم مثال: لاندې د دوه مجهولہ معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

حل: لومړی د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې یې وضع کوو:

$$2x + 3y = 0 \Rightarrow 2x = -3y \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 10 \\ 3(-\frac{3}{2}y) + 2y = 10 \\ -\frac{9}{2}y + 2y = 10 \\ \frac{-9+4}{2}y = 10 \\ -5y = 20 \Rightarrow y = -4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}(-4) \\ x = -3(-2) \\ x = 6 \end{array}$$

د دوه مجهولہ لومړی درجو معادلو د سیستم د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

- د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلي یو مجهولہ لومړی درجه معادله حلو او د مجهول قیمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلي مجهول قیمت د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قیمت په لاس راوړو.
- په لاس راغلي قیمتونه د سیستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولري د معادلې حل سم، او پرتله له هغه د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو حل د تعوضي په طریقه په لاس راوړئ.

1) $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x - 2y = 15 \\ 6x - y = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a - 3b = 25 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{4} = 4 \\ \frac{x+3}{3} = \frac{x-y}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{2} = -4 \end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل د افنا په لاره طریقه

$$\begin{aligned}x + y &= ? \\ \frac{1}{3}x + y &= ? \\ x &= ? \\ y &= ?\end{aligned}$$

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلې پیسې ما ته راکړې زه د 15 افغانیو څښتن کېږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلو پیسو دریمه برخه ما ته راکړې زه د 5 افغانیو څښتنه کېږم، هره یوه خوا افغانۍ لري؟

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکئ چې دوه معادلې او دوې مجهولې ولري.
- نوموړی سیستم د گراف په مرسته حل کړئ.
- نوموړي معادلې په تعویضي طریقه حل کړئ.
- ایا بله طریقه شته چې نوموړی معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره چې د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولای شو د افنا طریقه یا لاره ده، چې په

لاندې مثال کې یې څېړو.

مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 & \text{..... I} \\ 5x - 2y = 7 & \text{..... II} \end{cases}$$

حل: لومړی معادلو ته داسې بدلون ورکړو، چې که هغوی خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو نو له مجهولونو څخه یو مجهول افنا یا له منځه لاړ شي، لکه د x مجهول وخواړو، چې افنا یې کړو د لومړی معادلې دواړه خواوې د دویمې معادلې د x په ضریب یعنې (5) کې ضربوو او د دویمې معادلې دواړه خواوې د لومړی معادلې د x په ضریب یعنې (7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 205 & \Rightarrow 35x + 25y = 205 \\ 5x - 2y = 7 & \Rightarrow 35x - 14y = 49 \end{cases}$$

په لاس راغلي معادلې چې په هغه کې د x ضریبونه مساوي دي یو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{aligned} 35x + 25y &= 205 \\ 35x - 2y &= 49 \\ \hline + & \quad - \\ \hline 39y &= 156 \end{aligned} \quad \Rightarrow y = \frac{156}{39} \Rightarrow y = 4$$

د y په لاس راځلي قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو ترڅو د بل مجهول قیمت په لاس راشي.

$$5x - 2y = 7$$

$$5x - 2(4) = 7 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

دویم مثال: د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

حل: لومړی یو مجهول له منځه وړو لکه y نو لومړی معادله په -3 کې او دویمه معادله په -3 کې ضربوو په لاس راځلي معادلې خوراخوا سره جمع کوو:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y = 4 & \Rightarrow & -9x - 6y = -12 \\ 2x - 3y = -1 & \Rightarrow & -4x + 6y = -2 \\ \hline -13x + 0 = -10 & & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3\left(\frac{10}{13}\right) + 2y = 4 & \Rightarrow & \frac{30}{13} + 2y = 4 \\ 2y = 4 - \frac{30}{13} & \Rightarrow & 2y = \frac{52 - 30}{13} \\ x = \frac{10}{13} & & 2y = \frac{22}{13} \\ & & y = \frac{11}{13} \end{array}$$

د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل د افنا په طریقه کې په لاندې ډول عمل کوو.

- هر مجهول چې وغواړو هغه افنا کړو د هغې ضربونه په پام کې نیسو. لومړی معادله د دویمې معادلې د افنا شوی مجهول په ضرب کې او دویمه معادله د لومړې معادلې د افنا شوی مجهول په ضرب کې ضربوو.
- په لاس راځلي معادلې یوه له بلې څخه تفریق یا جمع کوو چې د یوه مجهول قیمت په لاس راځي دا په لاس راځلي قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

پوښتنې

د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

$$1) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = -39 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 5 \\ \frac{x}{3} + \frac{10}{y} = 18 \end{cases}$$

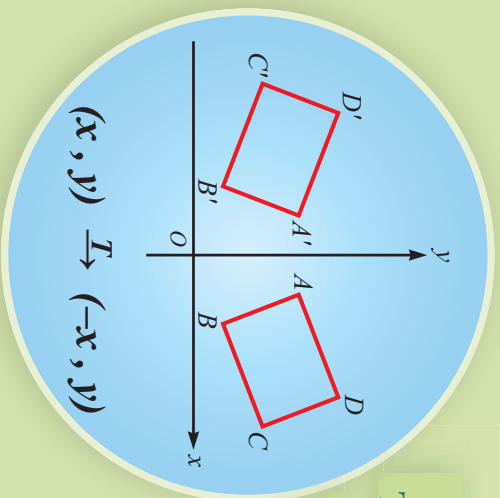
$$5) \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 10x + 3y = 26 \\ 8x + 3y = 18 \end{cases}$$

د ځای بدلون (تغیر مکان)

Transformation

په مخامخ شکل کې څه توپیرونه او څه یووالی وینئ؟
یووالی وینئ؟



فعالیت

- په مخامخ شکل کې څه توپیرونه او څه یووالی وینئ؟
- د $A(1,2)$, $B(2,4)$ او $C(2,3)$ ټکي د وضعیه کمیانو په سیستم کې وټاکئ.
 - ددې ټکو د x په مختصه باندې 2 واحد ورزیات کړئ.
 - په لاس راغلی ټکی د وضعیه کمیانو په سیستم کې ونښئ.

په پورتنۍ فعالیت کې ولیدل شول چې هراختیاري ټکی (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلی ټکی د راکړل شوی ټکي څیرې یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه چې د مستوي د هر ټکي د وضعیه کمیانو په مستوي کې یوازې او یوازې یوه نوی ټکی ته نسبت ورکړئ په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کېږي.

لومړی مثال: د $D(1,2)$, $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو څیرې یا تصویر د لاندې بدلون په اساس د وضعیه کمیانو په مستوي کې په لاس راوړئ.

$$a: (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$$

$$c: (x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$$

$$b: (x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$$

$$d: (x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$$

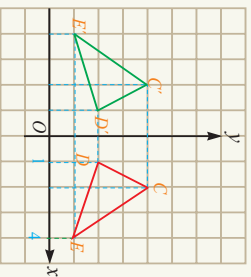
حل: لومړی راکړل شوی ټکی د وضعیه کمیانو په سیستم کې ټاکو.

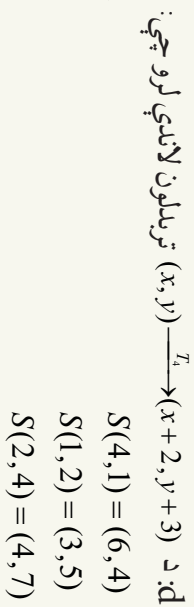
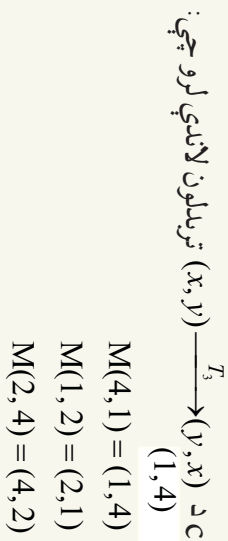
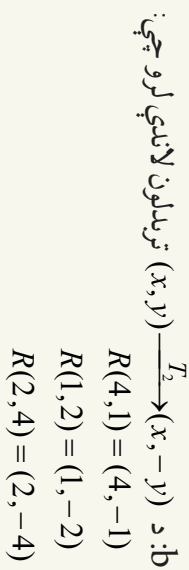
$$a: (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$$

$$T(4,1) = (-4,1)$$

$$T(1,2) = (-1,2)$$

$$T(2,4) = (-2,4)$$





د مثال په چول که $T(c) = c'$ او $T(E) = E'$ وي نو $EC = E'C'$ ده.

که یر شکل دایزومتری په ډول، خپل ځای بدل کړي نو د اصل څیرې یا شکل سره انطباق منونکي دي.

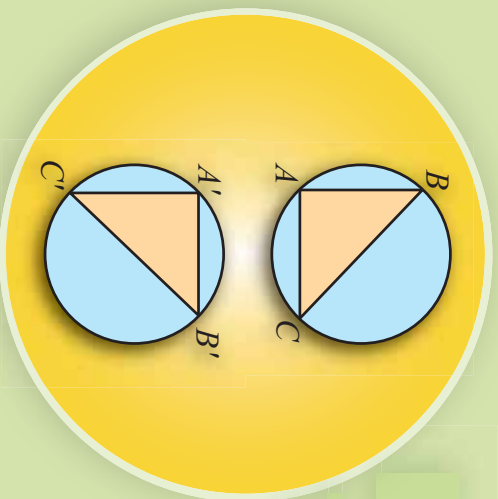
1- $(3,3)$ ٽڪو تصوير د لاندې بدلونو په اساس د وضعيه
 $(1,-1), (-2,-2), (-3,1)$ او
 $(3,3)$ ٽڪو تصوير د لاندې بدلونونو په اساس د وضعيه
1- $(-3,1), (-2,-2), (1,-1)$ او
 $(3,3)$ ٽڪو تصوير د لاندې بدلونونو په اساس د وضعيه
کميټو په سيستم کې په لاس راوړئ.

$$\mathbf{a}: (x, y) \xrightarrow{\mathbf{T}} (x-1, y+2) \quad \mathbf{d}: (x, y) \xrightarrow{\mathbf{R}} (0, y-2)$$

$$\mathbf{b}: (x, y) \xrightarrow{D} (2x, y) \qquad \mathbf{e}: (x, y) \xrightarrow{P} (3x-1, y+2)$$

$$c: (x, y) \xrightarrow{k} (x+5, 0)$$

انتقال Translation



په مخامخ شکل کې د $\triangle ABC$ مثال چې په مستوي کې يې له لومړۍ حالته دوم حالت $\triangle A'B'C'$ غوره کړی دی، تاسو کولای شئ چې ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ.

فعالیت

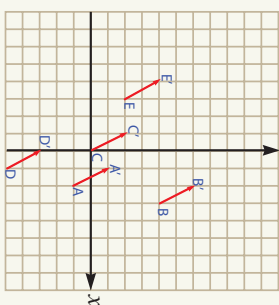
- د وضعیت کمياتو په مستوي کې د $\triangle ABC$ مثال رسم او مختصات يې وليکئ.
- د $\triangle ABC$ مثال راسونه د محور په مثبت جهت د (2) واحد په اندازه او د y' محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ نو يو حاصل شوی ټکوته A' , B' , او C' وړانئ.
- د A' , B' , او C' ټکی يو له بل سره ونړئ او د $\triangle ABC$ او $\triangle A'B'C'$ ملټونه د اضلاعو د اوږدوالي او ظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چيرې د يوه شکل يا څيرې ټول ټکي په يوه ټاکلۍ جهت (لورې) او يو ولټن (فاصل) حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دې حرکت ته انتقال وايي او هغه په دې ډول بنودل کېږي: $T(x, y) = (x + h, y + k)$ حقيقي عددونه دي. په داسې حال کې چې h او k حقيقي عددونه دي.

لومړی مثال: د $A(2, -1)$, $B(3, 4)$, $C(0, 0)$, $D(1, -5)$ او $E(-3, 2)$ ټکي د وضعیت کمياتو په سيستم کې د $T(x, y) = (x - 1, y + 2)$ انتقالې رابطې په اساس وښئ.

حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضعیت کمياتو په سيستم کې وښئ او بيا هغه ټکي چې د $T(x, y) = (x - 1, y + 2)$ اړيکې څخه لاسته راځي په لاس راوړئ.

$$\begin{aligned} A(2, -1), T_A(2-1, -1+2) &= (1, 1) \\ B(3, 4), T_B(3-1, 4+2) &= (2, 6) \\ C(0, 0), T_C(0-1, 0+2) &= (-1, 2) \\ D(1, -5), T_D(1-1, -5+2) &= (0, -3) \\ E(-3, 2), T_E(-3-1, 2+2) &= (-4, 4) \end{aligned}$$



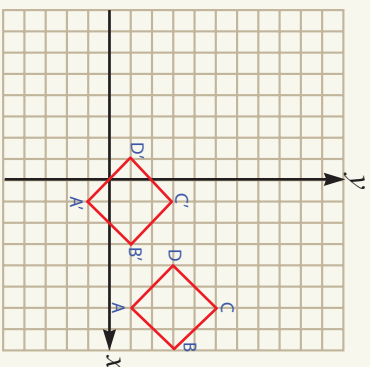
په پورتنۍ مثال کې د ټکو د تړلو څخه د شکل څیره لاسته راځي لیدل کیږي چې د $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ یو له بل سره موازي او مساوي دي.

دویم مثال: که چېرې $A(6, 1)$, $B(8, 3)$, $C(6, 5)$ او $D(4, 3)$ د یوې مربع راسونه وي هغه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې تر دې $T(x, y) = (x-5, y-2)$ اړیکه لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاعگانو اوږدوالی او تصویر نظر یوړل ته پرتله کړئ.
ب: د مربع د اضلاعگانو میل او څیره یی نظر یوړل ته پرتله کړئ.

حل: د $ABCD$ منظمه مربع تر انتقال لاندې د $A'B'C'D'$ څلور ضلعې ده.

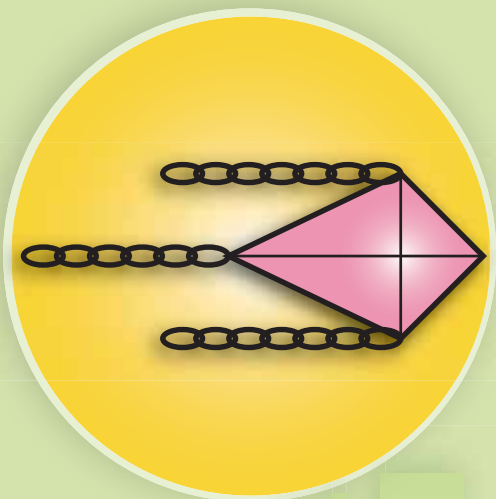
$$\begin{aligned} A(6, 1), T_A &= (6-5, 1-2) \Rightarrow A' = (1, -1) \\ B(8, 3), T_B &= (8-5, 3-2) \Rightarrow B' = (3, 1) \\ C(6, 5), T_C &= (6-5, 5-2) \Rightarrow C' = (1, 3) \\ D(4, 3), T_D &= (4-5, 3-2) \Rightarrow D' = (-1, 1) \end{aligned}$$



د (الف) او (ب) جزونو د ښاګردانو کورنۍ دنده ده.
انتقال یو ایزومتري رابطه ده.

پوښتنې

- 1- که د $O(2, 5)$, $N(2, -5)$, $M(1, -1)$ او $P(3, 3)$ یوه څلور ضلعې وي څلور ضلعې او د هغې تصویر تر دې رابطې $T(x, y) = (x+9, -y)$ لاندې رسم کړئ.
- ۲- که $L(7, 0)$, $I(5, 0)$ او $O(5, 3)$ د یوه مثلث راسونه وي مثلث او د هغې تصویر یا څیره د $F(x, y) = (-y+3, x-3)$ بدلون په اساس رسم کړئ.

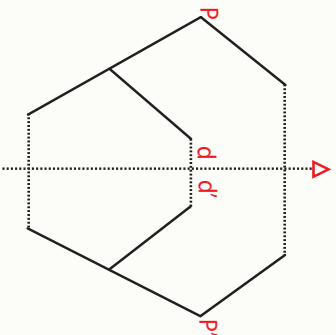


انعکاس Reflection

د پټنگ (کاغذ پیران) څیرې نه پاملرنه وکړئ، ستاسو په نظر دا کاغذ پیران (پټنگ) نسبت کوم یوه قطر ته منظر دی.

فعالیت

- د یوې صفحې په نمایی کې یو شکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرني په داسې رنگ رسم کړئ، چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوي لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، وواړئ، چې کوم شکل د اصلي شکل مخالف پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی.



تعریف

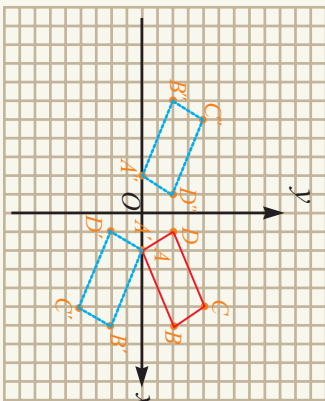
که چیرې د P شکل یا څیرې هر ټکی د P' شکل یا څیرې په هر ټکي داسې بدل شي چې د P شکل یا څیرې د هر ټکي فاصله نظر Δ محور ته د P' د شکل د هر ټکي فاصله سره مساوي وي، دې تبدیل ته نظر Δ محوريه انعکاس وایي او Δ محور ته د انعکاس محور وایي.

لومړی مثال: که چیرې د $A(2,0)$, $B(6,2)$, $C(5,4)$ او $D(1,2)$ ټکي د یوه مستطیل راسونه وي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې مستطیل رسم څیره او تصویر یې نظر x او y محوريه رسم کړئ.

حل: که چیرې د $ABCD$ مستطیل څیره نظر د y محوريه رسم کړو په دې حالت کې یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلېږي او که چیرې څیره یا تصویر یې نسبت x محوريه رسم کړو

یوازې د y مختصه یې په $(-y)$ بدلېږي څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.

نکې	نظر x محوره انعکاس	نظر y محوره انعکاس
(x, y)	$(x, -y)$	$(-x, y)$
$A(2, 0)$	$A'(2, 0)$	$A''(-2, 0)$
$B(6, 2)$	$B'(6, -2)$	$B''(-6, 2)$
$C(5, 4)$	$C'(5, -4)$	$C''(-5, 4)$
$D(1, 2)$	$D'(1, -2)$	$D''(-1, 2)$



د $T(x, y) = (-x, y)$ لېږدونه نسبت y محوره یو انعکاس دی.

د $T(x, y) = (x, -y)$ لېږدونه نسبت x محوره یو انعکاس دی.

د $T(x, y) = (x, y)$ لېږدونه نسبت $y = x$ مستقیم ته یو انعکاس دی.

پوښتنې

1- که $C(3, 1)$ او $B(7, 1)$ د یوه مثلث راسونه وي، مثلث او د هغې تصویر یا څیره د لاندې ورکړل شویو د انعکاس اړیکو په اساس رسم کړئ

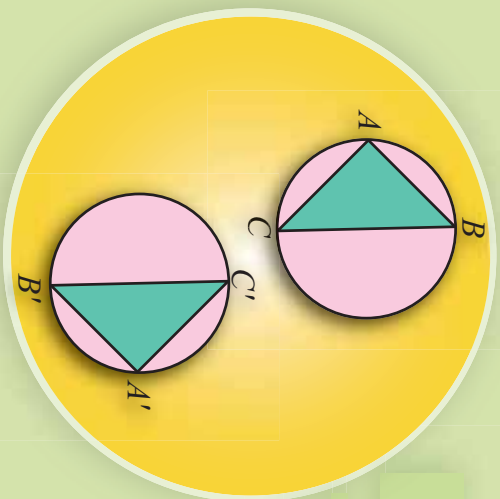
$$a: R_1(x, y) = (-x, y) \quad b: R_2(x, y) = (x, -y)$$

$$c: R_3(x, y) = (y, x) \quad d: R_4(x, y) = (-y, -x)$$

2- که چیرې $A(0, 2)$, $B(-5, 0)$ او $C(-3, -5)$ د یوې مربع راسونه وي مربع او د هغې تصویر د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاس اړیکې په اساس رسم کړئ.

۳- د $A(1, 4)$, $B(3, -2)$ او $C(5, 1)$ د یوه مثلث راسونه وي، د $\triangle ABC$ مثلث تصویر یا څیره تر انعکاس لاندې نسب لاندې کرښو ته:

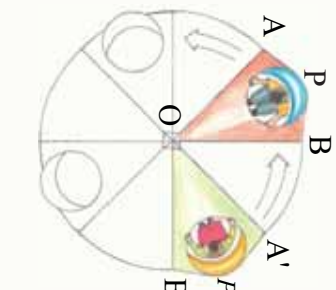
- $x + 2 = 0$ رسم کړئ او په $\triangle A'B'C'$ بې ونوموئ.
- $0 = y + 3$ رسم کړئ او په $\triangle A''B''C''$ بې ونوموئ.



دوران Rotations

په مخامخ شکل کې د $\triangle ABC$ مثلث په مستوي کې حرکت کړی او د $\triangle A'B'C'$ نوي ځای يې نيولی دی ناسې کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ.

فعاليت



مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د څرخ دوه بيلابيل ځايونه رابښئ.

- د شکل څخه ليدل کېږي چې A د A' ټکي متناظر او B د B' ټکي متناظر دي د $\triangle AOA'$ او $\triangle BOB'$ زاويې اندازه کړئ.
- او يوه له بلې سره بې پرته کړئ.
- اوس د څرخ د چوکۍ په لومړۍ ځای يوټکي وټاکئ او هغه P ونوموئ.
- د P ټکي متناظر ټکي د څوکۍ په دويم ځای کې پيدا کړئ او هغه P' ونوموئ.

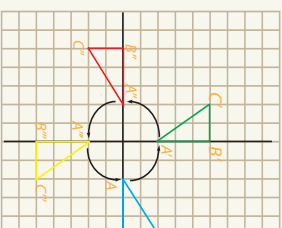
• د $\angle POP'$ زاويه اندازه کړئ.

د پورتنۍ فعاليت په پام کې نيولو سره دوران په مستوي کې د ليردونې په عنوان داسې تعريفو:

که يو شکل په يوه مستوي کې د يوټاکلي ټکي په شاوخوا د α زاويې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي يې د α زاويې په اندازه دوران کوي په دې حالت کې د O ثابت ټکي دوران مرکز او د α ثابت زاويې ته د دوران زاويه وايي.

مثال: د $A(2,0)$, $B(5,0)$ او $C(5,2)$ د يوه مثلث راسونه دي د وضعيه کمياتو په مستوي کې د $\triangle ABC$ مثلث او د هغه څيره يا تصوير د لاندي د تبديل دورک شويو اړيکو په اساس رسم او بيا هريو بدلون شرح کړئ.

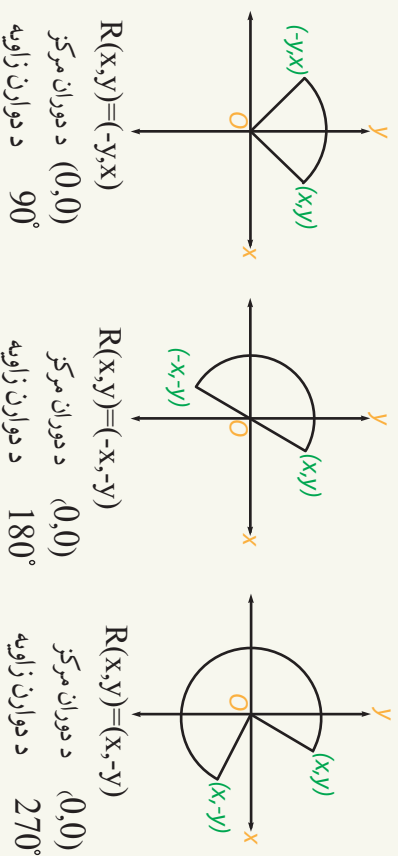
نکته	خبره (تصویر)		
(x, y)	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$
$A(2, 0)$	$A'(0, 2)$	$A''(-2, 0)$	$A'''(0, -2)$
$B(5, 0)$	$B'(0, 5)$	$B''(-5, 0)$	$B'''(0, -5)$
$C(5, 2)$	$C'(-2, 5)$	$C''(-5, -2)$	$C'''(2, -5)$



حل:

الف: $R_1(x, y) = (-y, x)$ ب: $R_2(x, y) = (-x, -y)$ ج: $R_3(x, y) = (y, -x)$

د شکل خنجه لیدل کېږي چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه د وضعیه کمیانو د مبدأ په مرکز دورانونه په ترتیب د $90^\circ, 180^\circ$ او 270° زاویو سره دي.



پوښتنې

- 1- که $A(0, 0)$, $B(6, -2)$ او $C(7, 1)$ د یوه مثلث راسونه وي.

الف: د $R(x, y) = (-y, x)$ تبدیل لاندې د ABC مثلث شکل او تصویر رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاعگانو اوږدوالی د هغه له تصویر یا خیرې سره پرتله کړئ. آیا دا دوران یو ایډومتری دی؟
- 2- که $A(-1, -2)$, $B(7, 2)$ او $C(5, 6)$ د $D(-3, 2)$ د یو مستطیل راسونه وي.

الف: $R(x, y) = (-y, -x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویر یا خیره رسم کړئ.

ب: د مستطیل د اضلاع گانو اوږدوالی او مساحت د هغه له تصویر یا خیرې سره پرتله کړئ.

• په يوه مستوي کې چې دوه افقي او عمودي محورونه يې لامل عمودا پرې کړي د وضعيه کميانو د سيستم په نامه يادېږي.

• د وضعيه کميانو په سيستم کې افقي محور ته د فاصلې يا ولټن محور او عمودي محور ته د ترتيب محور او د پريکړې ټکي ته يې مبدا وايي.

• د A او B دوو ټکوترمنځ ولټن د $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ او $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ اړيکې څخه لاسته راځي.

• د يوې کرښې د منځ ټکي مختصات د $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.

• هغه کرښه چې د Y مختصه يې صفروي د منځ د ټکي مختصات يې $(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$ دي.

• هغه کرښه چې د X مختصه يې صفروي د منځ د ټکي مختصات يې $(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ دي.

د هرې مستقيمې کرښې ميل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي.

• د هر مستقيم خط ميل په هغه زاويه پورې اړه لري چې مستقيم يې د X محور له مثبت جهت سره جوړه وي.

• هر مستقيم چې د X محور د مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي ميل يې مثبت او که منفرجه زاويه جوړه کړي ميل يې منفي دی.

• موازي مستقيمونه د مساوي ميلونو لرونکي دي.

• هر مستقيم خط چې له X محور سره موازي وي ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې پر X محور عمود وي ميل نه دی تعريف شوی.

• دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پر بل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) وي.

• درې ټکي هغه وخت په يوې کرښې پراته دي چې د هر قطعې خط ميلونه يې سره مساوي وي.

• د وضعيه کميانو په مستوي کې د يوه ټکي هغه اړيکه چې يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړی يوه ليردونه يا تغير مکان بلل کېږي.

• که چيرې د يوه شکل ټولو ټکو ته په يوه ټاکلي جهت او يوه فاصله حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل د لومړي شکل سره انطباق موندلی دی او دې حرکت ته انتقال وايي.

• که يو شکل په يوه مستوي کې د يو ټاکلي ټکي په شاوخوا د α زاويې په اندازه دوران وکړي

ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي دي حرکت ته دوران وايي.

- په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړ شوي دي صحيح ځواب وټاکئ.

1- د دوو عمودي کرښو د ميلونو د ضرب حاصل:

- (a) 1) دى. (b) صفر دى. (c) ∞ دى. (d) منفي يو دى.

2- د مستقيمې کرښې معادله چې د Y محور سره يې د پېرکړې ټکي او ميل يې ښکاره وي عبارت له:

- (a) $y = mx + c$ (b) $y = b$ (c) $y = mx + b$ (d) $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

3- د هغه کرښې معادله چې دوه ټکي يې ښکاره وي عبارت له:

- (a) $y = mx + b$ (b) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (c) $\frac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1}$ (d) $y = mx$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت له:

- (a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ (b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ (c) $M(\frac{y_1 + y_2}{2}, 0)$ (d) $M(0, 0)$

5- د $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت له:

- (a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ (b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ (c) $M(\frac{y_1 + y_2}{2}, 0)$ (d) $M(0, 0)$

6- د A او B دوو ټکو ترمنځ ولټن عبارت دى له:

- (a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ (b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$ (c) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ (d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- د يوه ټکي او د وضعيه کميانو د مېدا ترمنځ ولټن يافاصله عبارت ده له:

- (a) $AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$ (c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ (d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8- د يو مستقيمې کرښې ميل عبارت له:

- (a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ (b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ (c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دوه مستقيمونه هغه وخت يو له بل سره موازي وي چې:

- a: د هغو ميلونه سره مساوي وي. b: ميلونه يې مساوي نه وي.

d: ټول خواړونه سم دی.

C: د میلو د ضرب حاصل یې منفي یو وی.
• خالي خواړونه په مناسبو کلماتو ډک کړئ.

۱- د وضعه کمیاتو په سیستم کې د X محور ته د او محور ته د
وايي.

۲- په دویمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې X یې او Y یې
دی.

۳- په دریمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې X او Y دواړه دی.

۴- هغه مستقیم چې د X محور د مثبت جهت سره مساوي حاده زاویه جوړه کړي میل یې
دی.

۵- دوه موازي مستقیمې کرني چې د X محور د مثبت جهت سره مساوي
جوړه وي.

۶- د X محور سره د هر موازي مستقیم میل دی.

۷- درې ټکي هغه وخت په یوه مستقیمه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو
سره مساوي وي.

۸- که د دوو کرښو میلو نه یو بل سره مساوي نه وي دا کرني دی.

• لاندې جملې کومې سمې او کومې بې ناسمې دي د سمو په مخ کې د (س) تورې اود ناسمې
په مخ کې د (ن) تورې ولیکئ.

۱- () که د وضعه کمیاتو په مستوي کې د هر ټکي لپاره یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته
نسبت ورکړئ په مستوي کې بدلون بلل کېږي.

۲- () که د P شکل هر ټکي د P' شکل په یوه ټکي داسې تبدیل شي چې د P د شکل د
هر ټکي واټن نظر یوه محور ته د P' د شکل له هر ټکي سره مساوي وي دي بدلون ته انعکاس
وايي.

۳- () د $T(x, y) = (-x, y)$ بدلون نسبت y محور ته یو انعکاس دی.

۴- () د $T(x, y) = (x, -y)$ بدلون نسبت x محور ته یو انعکاس دی.

۵- () د $T(x, y) = (y, x)$ بدلون نسبت $x = y$ مستقیم ته یو انعکاس دی.

۶- () انتقال هغه تغیر مکان یا لیدونه دی چې په هغه کې د واټنو یا فاصلو جهت او د
زاویو پراخوالی ثابت پاتې شي.

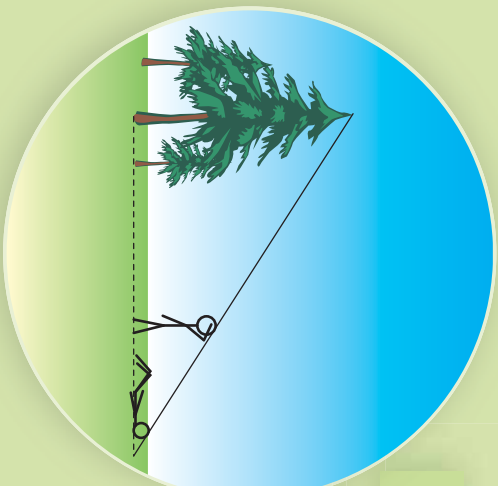
۷- () که په مستوي کې یو شکل (O) ټاکلي ټکي په شاوخوا د α° زاويې په اندازه دوران
وکړي د هغې ټول ټکي په عین زاویه دوران کوي.

• لاندې سوالونه حل کړئ

- 1- لاندې ټکي چې وضعيه کميات يې ورکړ شوی دی د وضعيه کمياتو په سیستم کې وټاکئ.
 $1: (0,1) \quad 2: (2,3) \quad 3: (0,-4) \quad 4: (5,0)$
- 2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ ولټن چې وضعيه کميات يې ورکړی شوی ښکاره کړئ.
 $1: (0,9), (-5,4) \quad 2: (4,1), (3,-2) \quad 3: (-7,4), (1,-11)$
- 3- وښئ چې لاندې ټکي د يوه قائم الزاويه مثلث راسونه دي او هم د مثلث مساحت پيدا کړئ.
 $1: (0,9), (-4,-1), (3,2) \quad 2: (3,-2), (-2,3), (4,-4)$
- 4- وښئ چې لاندې ورکړی شوی ټکي په يوه مستقيمه کرښه دپاسه پرانه دي.
 $1: (0,4), (3,-2), (-2,8) \quad 2: (1,2), (-3,10), (4,-4)$
- 5- د يوې مستقيمې کرښې ميل او يو ټکی په لاندې ډول ورکړل شوی د هغې معادله په لاس راوړئ.
 $1: (2,3), m = -\frac{1}{2} \quad 2: (-4,1), m = -\frac{2}{3} \quad 3: (-1,-4), m = -2$
- 6- که د يوه مستطیل راسونه $(-3,1), (-1,3), (3,-1)$ او $(1,-3)$ وي مساحت يې پيدا کړئ.
 7- که د يوه متوازي الضلاع راسونه $(2,4), (5,9), (4,9)$ او $(1,4)$ وي د قطرونو اوږدوالی يې پيدا کړئ.
- 8- وښئ چې د $(-3,1), (-9,4), (12,0)$ او $(6,3)$ د يوه متوازي الضلاع راسونه دي.
- 9- که $(5,0), (3,2), (-3,-2)$ او $(1,-3)$ د يوه مثلث راسونه وي د اضلاعگانو د منځني ټکي کميات وضعيه په لاس راوړئ.
- 10- ثبوت کړئ:
 الف: چې د مربع قطرونه يو پر بل عمود دي.
 ب: چې د مستطیل قطرونه يو بل نيمائي کوي.
- 11- هغه مستقيم چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکو څخه تیرېږي د وسطي عمود معادله يې پيدا کړئ.
- 12- د هغه مستقيم معادله پيدا کړئ چې $P(4,5)$ ټکي څخه تیر شي او په ترتيب سره د X او Y له محورونو سره موازي وي.
- 13- که چيرې $A(5,0), B(7,0)$ او $C(5,3)$ د يوه مثلث راسونه وي.
- الف: د $(-3, x+3, -y)$ ترتيب لاندې مثلث او د هغه تصوير يا څيره رسم کړئ.
- ب: د ABC مثلث تصوير د $(x, -y)$ او $R(x, y)$ تر دوران لاندې پيدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ وایئ وروسته د $(-3, y+3, x)$ او $T(x, y)$ تصوير يا څيره د تر انتقال پاليردوني لاندې وټاکئ.





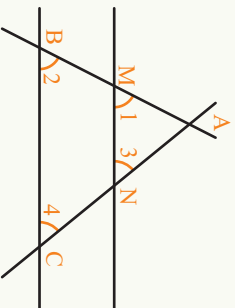


په مثلث کې د تالس قضیه

دوه زده کوونکي یو له بل سره خبرې کوي چې دیوې ونې جگ والي څنګه اندازه کړي یو بل ته داسې وړاندیز وکړ او په خپله په ځمکه اوږد پریوت، هغه له خپل ملګري څخه وغوښتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې څوکه په یوه مستقیمه کرښه سره ووښي. د زده کوونکي د وړاندیز په سموالي سوچ وکړئ.

فعالیت

• د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دی. د هر تړپه کرښې اندازه په تش ځایونو کې ولیکئ.



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

• هغه زاويې چې یو له بل سره مساوي دي وښئ.

• د $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ ، $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ نسبتونه پیدا او یو له بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت څخه د تالس قضیه داسې بیانوو؟

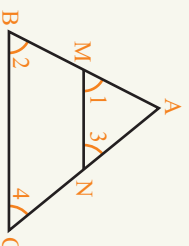
قضیه: که د $\triangle ABC$ مثلث په یوې ضلعې یا ځنډې موازي کرښه رسم کړو د تشکیل شوي

مثلث د اضلاعو نسبت د $\triangle ABC$ مثلث پر اضلاعو یو له بل سره مساوي دي. دا قضیه په

مثلث کې د تالس قضیې په نامه یادېږي.

ثبوت: څرنگه چې د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دي نو کولای شو ولیکو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \dots\dots \text{متواقله} \\ \hat{3} = \hat{4} \dots\dots \text{متواقله} \\ \hat{A} = \hat{A} \dots\dots \text{مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$



نومړۍ مثال: د $\triangle ABC$ په قایم الزویه مثلث کې که $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ سره موازي دي په پام کې ونیسئ د قایمو اضلاعو او د $\overline{EF}$ موازي کرښې اوږدوالی پیداکړئ.

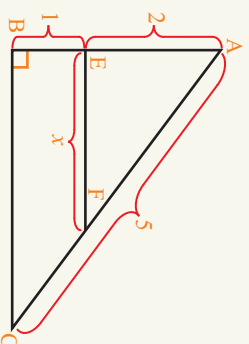
حل: څرنگه چې د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ سره دي نو د تالس د قضیې په اساس دا دوه مثلثونه سره ورته یا متشابه دي نو کولای شو ولیکو چې:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{AC^2 = BC^2 + AB^2}{5^2 = BC^2 + 3^2} \quad \frac{2}{3} = \frac{x}{3}$$

$$BC^2 = 25 - 16 = 9 \quad x = 2$$

$$\boxed{BC = 3}$$

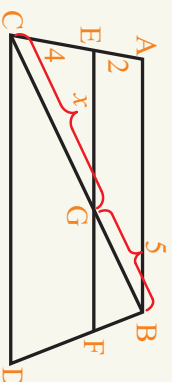


دویم مثال: په لاندې خوځنده کې $\overline{EF} \parallel \overline{BA}$ دي د x مقدار وټاکئ.

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$

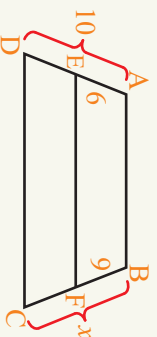
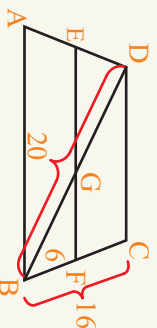
$$\frac{x}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

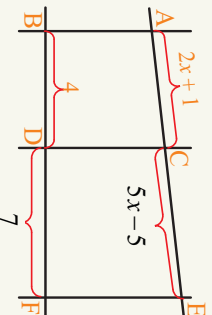


پوښتنې

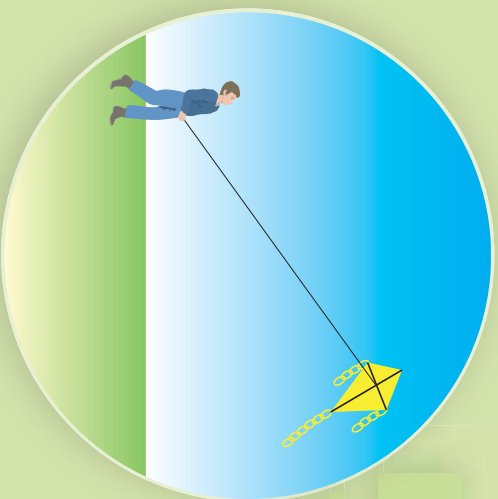
1- د خوځندو په لاندې شکلونو کې د x مقدار وټاکئ.



2- په لاندې شکل کې که $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ او $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وي د x مقدار وټاکئ.



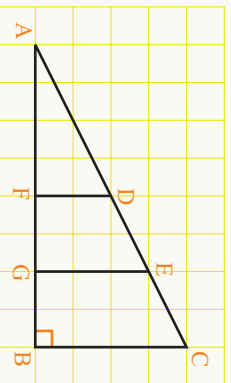
دیوی حاده زاويي ساین



که یو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ ولتنې ېې د خمکې څخه په لاس راوړئ؟

فعالیت

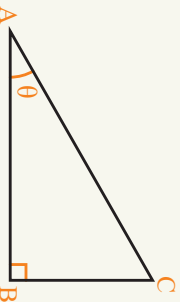
- په قایم الزویه مثلث کې د $\overline{AC}$ په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. د دې ټکو څخه د مثلث په $\overline{BC}$ ضلعو موازي رسم کړئ او د پریکړې ټکي ېې په وار سره F او G نوموړ.
- د خط کش څخه په ګڼه اخیسته د مثلث اضلاعوې اندازه او د $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}}$ نسبتونه محاسبه او پر تله ېې کړئ.



- ایا د E او D ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ دیره ټکي په ټاکلو سره هغه وڅیړئ.
- د AC د ځای په بدلون د $\hat{A}$ زاويې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.
- اوس $\overline{AC}$ ثابت پرېږدئ او د $\hat{A}$ زاويې ته زياتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ چې په پورتنیو مساوي نسبتونو کې څه پېښېږي؟ وېې څیړئ؟

تعریف

په هر قایم الزویه مثلث کې دیوی حاده زاويې د مخامخ څنلې یا ضلعې او بودوالی دوتر پر اوږدوالی تل مساوي له یو ثابت مقدار سره دی چې د حاده زاويې په اندازه پورې اړه لري. دې نسبت ته $\sin \theta$ (د حاده زاويي ساین) ویل کېږي.



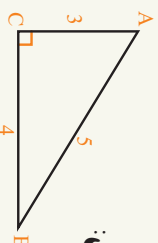
$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{دوتر اوږدوالی}$$

نومړۍ مثال: په لاندې شکل کې $\sin A$ او $\sin B$ په لاس راوړئ.

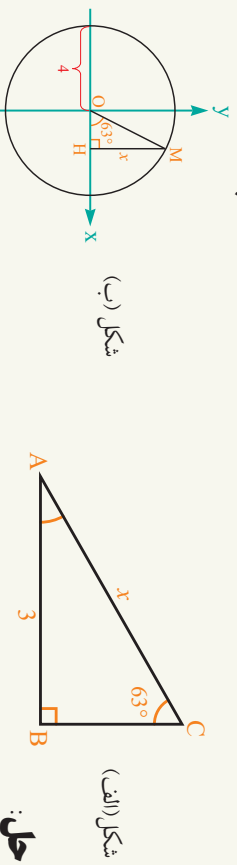
حل:

$$\sin A = \frac{\text{د } A \text{ د زاويې د مخالف څنډې يا ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = 0.8$$

$$\sin B = \frac{\text{د } B \text{ د زاويې د مخالف څنډې يا ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$



دویم مثال: که $\sin 63^\circ$ مساوي په 0.891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پیدا کړئ.



د الف جزه: د یوې حادثې زاويې د تعريف څخه په گټه اخیستنه کولای شو ولیکو چې:

$$\sin 63^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \Rightarrow x \approx 3.37$$

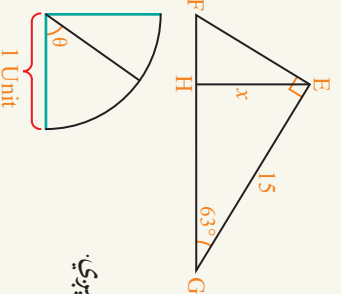
$$\sin 63^\circ = \frac{MH}{OM}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

د ب جزه:

پوښتنې

- 1- که $\sin 63^\circ$ مساوي په 0.891 وي، په مخالف شکل کې د x عددي قیمت پیدا کړئ.
- 2- د دایرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونیسئ.
- الف: که د θ زاویه لویه شي $\sin \theta$ څرنگه بدلون مومي؟
- ب: که د θ زاویه صفر ته نږدې شي، $\sin \theta$ کوم عدد ته نږدې کېږي.
- ج: که زاویه 90° ته نږدې شي، $\sin \theta$ کوم عدد ته نږدې کېږي.



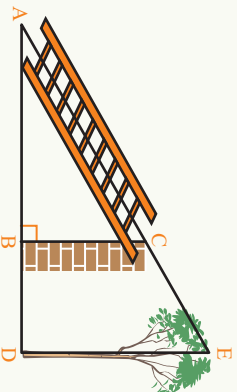
- 3- د 40° او 65° زاويې په وار سره رسم او بیا په هره زاویه یو قایم الزامه مثلث کې رسم کړئ د کرښې یا خط کش څخه په گټه اخیستنه د مثلث اضلاعوي اندازه او $\sin 80^\circ$, $\sin 5^\circ$ او $\sin 40^\circ$ پیدا کړئ او یو له بل سره یې پرتله کړئ.
- 4- یو متساوي الساقین مثلث چې قاعده یې 8 واحده او $\hat{B} = 54^\circ$ وي رسم کړئ که یوه څنډه یا ضلع یې 5 واحده وي د B زاويې $\sin$ ساين پیدا کړئ.

دیوي حاده زاويي کوساین



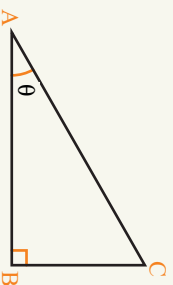
دنبړه دنبړال شاته د ناجو یوه ونه ولاړه ده. یو زده کونکی غواړي وپوهېږي چې ونه له دېواله څومره واټن لري. د دې کار لپاره یې یو زاوي یوه لنډه زینه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوي؟

فعالیت



- په مخامخ شکل کې د تشکیل شویو مثلثونو نومونه واخلئ.
 - $\overline{BC}$ او $\overline{DE}$ یو له بل سره څه اړیکه لري؟ ولې؟
 - د $\triangle ABC$ او $\triangle ADE$ مثلثونه یو بل سره څه اړیکه لري.
 - د زینې واټن تر دېوال او بیا یې تر فوټې پورې پیدا کړئ.
 - د تالس د قضیې په مرسته لاندې مساوات تکمیل او د $\overline{AE}$ اوږدوالی په لاس راوړئ.
- $$\frac{AB}{AC} = \frac{\dots}{AE}$$
- دا مقدار په څه پورې تړلی دی.

په عمومي ډول د $\triangle ABC$ په قایم الزویه مثلث کې چې یوه حاده زاویه یې θ ده، د دې زاويې د گاونډي یا مجاورې ضلعې د اوږدوالي او دوتر د اوږدوالي نسبت ته کوساین وايي.



$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{د } \theta \text{ زاويې د گاونډي ضلعې اوږدوالی} \\ \text{دوتر اوږدوالی}$$

مثال: د $\triangle AHB$ په مثلث کې که $\hat{A} = 30^\circ$ او $\hat{B} = 60^\circ$ وي ونښئ چې

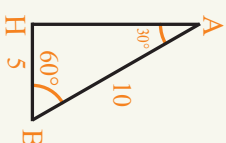
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ او } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

حل: د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د AH جگړالۍ کولای شو ولیکو چې:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$10^2 = \overline{AH}^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2 = 100 - 25 = 75$$

$$\overline{AH} = \sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH} = 5\sqrt{3}$$



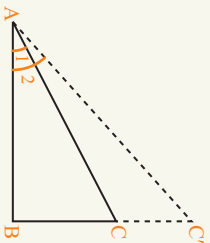
$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- که یوه حاده زاویه لویه شي، د کوساین په اندازه کې څه بدلون راځي؟ ولئ؟
د مخامخ مثلث او مثلثاتي دایرې په مرسته خپل نظر بیان کړئ.

- د $\cos A_1$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- د $\cos A_2$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- په تشو ځایونو کې مناسبې علائمې ولیکئ.



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \cos A_1$$

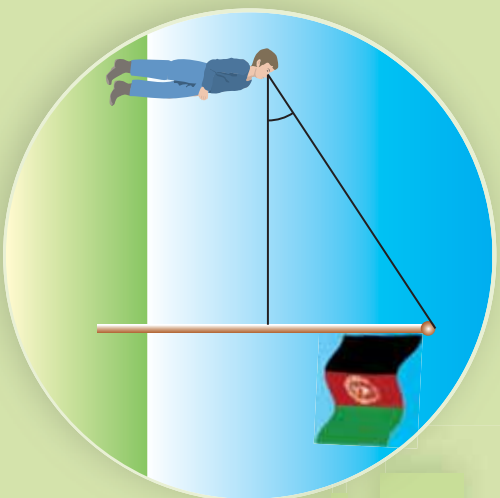
2- د 30° , 45° او 60° زاویو لپاره $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ پرېکړه وڅېړئ؟
3- په لاندې قایم الزاویه مثلث کې د $\sin A$ او $\cos A$ عددي قیمت پیدا کړئ.



4- د $\triangle ABC$ په مثلث کې چې د اضلاعو یا څنډو اوږدوالی یې 8, 6 او 10 واحد وي د $\sin A$ او $\cos A$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

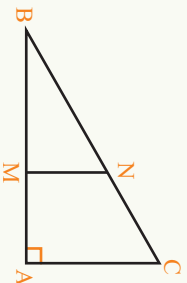
د حاده زاوي تانجنت

يو زده کورونکی د بيرغ مخکې ولاړ دی. سوچ کوي چې د بيرغ د ميلې اوږدوالی څنګه پيدا کړي؟



فعاليت

د $\triangle ABC$ مثلث چې د $\hat{A}$ زاويه يې قايمه ده د B زاويې مثلثاتي نسبتونه $(\cos B, \sin B)$ په پام کې ونیسئ چې د $\overline{MN}$ توپه کرښه په $\overline{AC}$ موازي رسم شوي ده.



د $\triangle ABC$ مثلث په پام کې نیولو سره $\sin B$ او $\cos B$ د $\triangle ABC$ مثلث اضلاعو یا د خنډو له مخې ولیکئ.

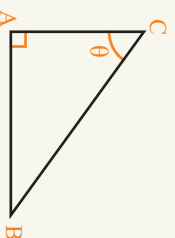
• د $\triangle ABC$ مثلث اضلاعو یا له مخې د $\frac{\sin B}{\cos B}$ نسبت ولیکئ.

• د $\triangle BMN$ مثلث څخه په ګټه اخیستنه او د اضلاعو یا خنډو له مخې $\frac{\sin B}{\cos B}$ ولیکئ.

د $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ او $\overline{BN}$ کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتنۍ دوه نسبتونه سرو پرته کړئ.

- سوچ وکړئ که چېرې $\frac{\cos B}{\sin B}$ پیدا کړو نو دا نسبت د مخامخ خنډو یا اضلاعو د اوږدوالي سره تړاو لري یا یوازې د زاويې په مقدار پورې تړاو لري.

لومړی پایله: په یوه قايم الراويه مثلث کې د یوې حاده زاويې د مخامخ خنډي یا ضلعي اوږدوالي او د هغه زاويې د ګاونډي ضلعي د اوږدوالي نسبت یو ثابت مقدار دی چې د (د حاده زاويې تانجنت) په نامه یادېږي.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \tan \theta \quad \text{د } \theta \text{ زاويې د ګاونډي ضلعي اوږدوالی}$$

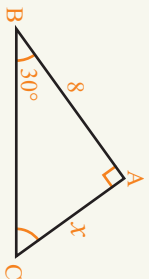
دویمه پایله: د θ حاده زاوې تانجنت د حاده زاوې سین ساین پر کوساین له نسبت سره مساوي

$$\text{دی: } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

دریمه پایله: $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ یو بل مقدار دی چې د حاده زاوې کوتانجنت ($\text{Cotangent}(\theta)$)

یا د θ زاوې دگاونډي یا مجاورې ضلعي اوږدوالي د θ زاوې د مخامخ خنډې یا مقابلې ضلعي پر اوږدوالي ته کوتانجنت $\text{Cot} \theta$ وایي. دا نسبت د نورو نسبتونو په شان یوازې د زاوې په پراخوالي پورې اړه لري.

لومړی مثال: په لاندې مثلث کې که $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ وي د



حل: د $\tan \theta$ تعریف څخه په ګټه اخیسته کولای شو ولیکو چې:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

دویم مثال: د $\triangle ABC$ مثلث چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\sin c$, $\cos c$, $\tan c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ.

حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته د $\triangle ABC$ په مثلث کې د AC اوږدوالی پیدا کړو.

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ 5^2 &= 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \\ \sin C &= \frac{3}{5} \quad \cos C = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan C = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot C = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

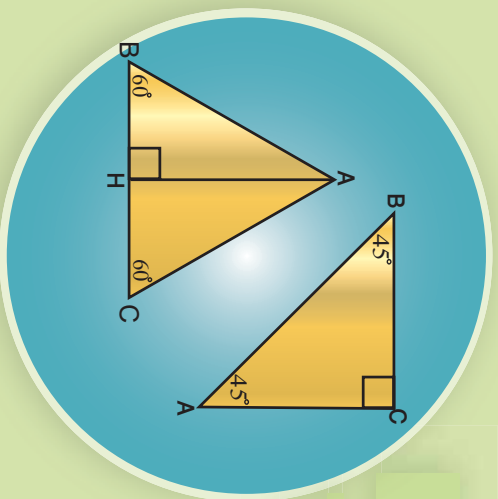
$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} = \tan C \Rightarrow \tan C = \frac{\sin C}{\cos C}$$

پوښتنې

- 1- په مخامخ شکلونو کې $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ او $\cot \theta$ پیدا کړئ.
- 2- د $\triangle ABC$ په مثلث کې چې ضلعي یې سره مساوي دي $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ.
- 3- که د یوه قائم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه یې لویه شي د $\tan \theta$ په نسبت کې څه بدلون پېښیږي.

د ځانګړو زاویو مثلثي نسبتونه (30° , 60° , 45° او 90°)

مخامخ مثلثونه څه ډول مثلثونه دي د
اضلاعګانو اوږدوالی یې وټاکئ.



فعالیت

- د $\triangle ABC$ یو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
 - د $\overline{AH}$ ارتفاع یا جګوالی رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې جګوالی کومې ځانګړتیاوې لري.
 - د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د جګوالی یا ارتفاع اوږدوالی یا د مثلث جګوالی پیدا کړئ.
 - یا کولای شئ چې د 30° او 60° زاویو مثلثي نسبتونو عددي قیمت پیدا کړئ.
 - د $\triangle ABC$ یو متساوي الساقین، قیم الزویه مثلث رسم کړئ، چې د هرې ضلعې یا څنډې اوږدوالی یې یو واحد وي.
 - هره حاده زاویه څو درجې ده؟ ولې؟ د وتر د اوږدوالي اندازه یې حساب کړئ.
 - د 45° زاویې مثلثي نسبتونه په لاس راوړئ.
- د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې جدول جوړ ولای شو:

زاویې مثلثي نسبتونه	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ناټاکلی (یا معین)

مثال: په لاندې اړیکو یا رابطو کې د x او y عددي قیمت پیدا کړئ.

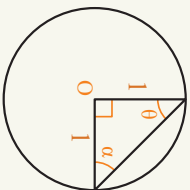
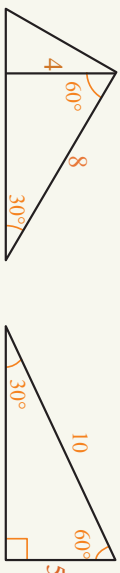
- 1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$
- 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$
- 3) $\tan 60^\circ - \sin 30^\circ = ?$
- 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$
- 5) $\tan 45^\circ - \sin 45^\circ = ?$
- 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې د هر مثلثي نسبت په ځای عددي قیمت وضع کوو:

- 1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- 3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$
- 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$
- 5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$
- 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$

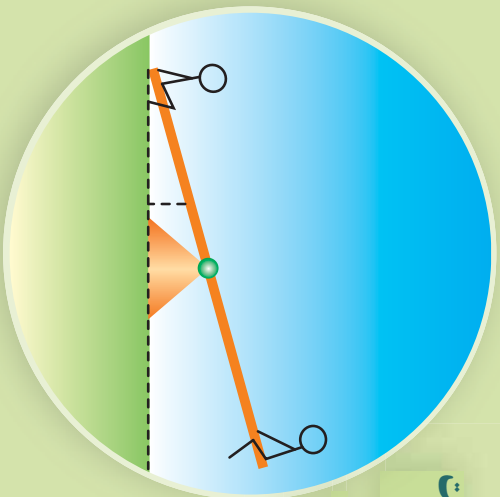
پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د 60° او 45° زاویو د $\sin$, $\cos$, $\tan$ او $\cot$ مثلثي نسبتونه پیدا کړئ.



د یوه مستقیم خط د میل او تانجنت اړیکه

د رافعي میل بنسټ یاکینې خوا ته په څه پورې اړه لري؟

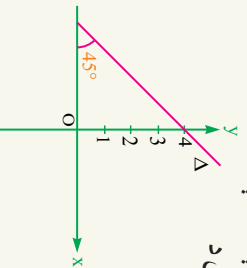


فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(0,0)$ ، $C(1,0)$ ټکي د وضعیه کمپاټو په مستوي کې ونښئ، هغه مثلث چې راسونه د دې ټکو څخه جوړېږي څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې معادله د $y = mx + h$ په شکل ولیکي.
- د $\tan A$ په لاس راوړئ؛ د $\overline{AB}$ د مستقیمې کرښې د میل سره څه اړیکه لري؟
- د $\overline{AB}$ په مستقیم دوه اختیاري ټکي په پام کې ونیسئ، د دې ټکو په لرل سره د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ. یا د $\tan B$ د مستقیمې کرښې د میل برابرې لیدل کېږي؟

د پورتنۍ فعالیت څخه لیدل کېږي، چې د هغې مستقیمې کرښې میل چې د x له محور سره حاده زاویه جوړوي، د هغې زاوې له تانجنت سره چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره یې جوړوي برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دي. **لومړی مثال:** Δ مستقیمه کرښه د y محور په 4 کې پریښکوي او د x محور له مثبت جهت سره 45° زاویه جوړوي، که $\tan 45^\circ = 1$ وي د Δ مستقیمې کرښې معادله ولیکئ. **حل:** پوهیږو چې د مستقیمې کرښې معادله $y = mx + h$ ده نو لومړی د مستقیمې کرښې میل په لاس راوړو:

$$\left. \begin{array}{l} m = \tan \theta \\ m = \tan 45^\circ \\ m = 1 \\ h = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = mx + h \\ y = x + 4 \end{array} \right\}$$



دویم مثال: د $y - x = 2\sqrt{3}$ مستقیمې کرښې په معادله کې د مستقیمې کرښې میل، د میل

زاویه او د y له محور سره د پریکړې ټکي په لاس راوړئ.

حل: لومړی د مستقیمې کرښې معادله په سټنډرډ شکل $mx + h = y$ بدلوه چې وروسته یې میل او له محور سره د پریکړې ټکي په اسانۍ سره پیدا کولای شو.

$$\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ, \quad h = 2$$

ایا کولای شئ د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

فعالیت

• د $\triangle ABC$ یو قائم الزاویه مثلث چې قائمې جوړونکې ضلعې یې 6 او 8 دي رسم او قایمه زاویه یې په A وښئئ.

• $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$ او $(\cos B)^2$ حساب کړئ.

• $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$ او $(\cos B)^2$ د $\sin B$, $\cos B$ او AC, AB د

اضلاعو له جنسه ولیکئ څه پایله ترې اخلي.

د پورتنۍ فعالیت څخه ښکاري چې د یوې حاده زاوې د سین او کوساین د مربعانو جمع مساوي له

$$1 \text{ سره ده. } (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

ځینې وخت د مثلثاتي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره ښودل کېږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ چې د 2 توان د زاوې په سین پورې اړه لري نه په زاویه پورې $\sin A^2 \neq \sin^2 A$

پوښتنې

1- د هغه مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ چې د x محور له مثبت جهت سره 60° زاویه

جوړه کړي او د y محور په $(0,5)$ ټکي کې پرې کړي.

2- د $y = 4 + x$ کرښې په معادله کې میل، د میل زاویه او د y له محور سره د پریکړې ټکي پیدا

کړئ.

$$a) \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = 1$$

$$b) 1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

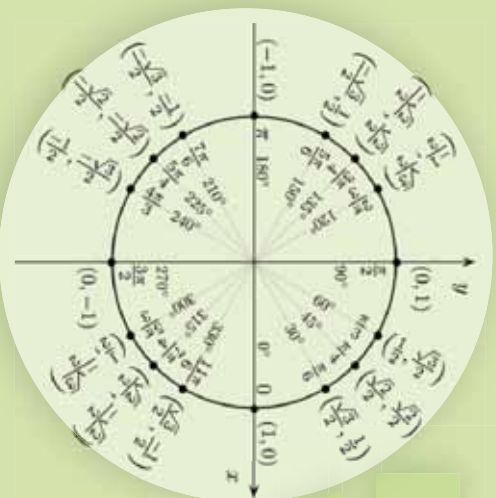
$$c) \frac{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \times \tan^3 \theta$$

$$d) \frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2 \sin A} = \cos A$$

$$e) \sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

مثلاثي جدول او دهغي استعمال

په مخامخ مثلاثي دايرې په شکل کې د نوموړو زاويو مثلاثي نسبتونه ښودلای شئ.



فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم او هرې زاويې پر اخوالی يې وټاکئ.
- په يو مثلث کې د 30° او 60° زاويو مثلاثي نسبتونه پيداکړئ.
- د زاويې مثلاثي نسبتونه په يوه مثلث کې وټاکئ.
- ايا د هرې زاويې مثلاثي نسبتونه په پورته شکل پيداکولای شو؟

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:

د ځينو زاويو مثلاثي نسبتونه کولای شو په آساني سره په لاس راوړو خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلاثي نسبتونو محاسبه گران دی نو ددې کار لپاره د ځينو پوهانو لخوا مثلاثي جدولونه د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوي چې ددې ټوله جدول په مرسته د هرې زاويې مثلاثي نسبتونه پيداکولای شو.

د يادونې وړ ده چې د جدول په ترتيب کې په يوه قايم الزويه مثلث کې د θ او $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ زاويو د اړيکو څخه گټه اخيستل شوی ده.

مثانی جدول

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	θ
0° 00'	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00'
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00'	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00'
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00'	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00'
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00'	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00'
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00'	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00'
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00'	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00'
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	θ
6° 00'	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00'
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00'	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00'
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30'	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30'
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00'	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00'
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00'	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00'
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00'	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00'
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00'	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00'
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	θ	



θ	$\text{Sin } \theta$	$\text{Cos } \theta$	$\text{TAN } \theta$	$\text{Cot } \theta$	θ
12° 00'	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78° 00'
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00'	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77° 00'
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00'	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76° 00'
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00'	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75° 00'
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.7391	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6891	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6470	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.6059	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5656	10
16° 00'	0.2756	0.9613	0.2867	3.5261	74° 00'
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4874	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4495	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.4124	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3759	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3402	10
17° 00'	0.2924	0.9563	0.3057	3.3052	73° 00'
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2709	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2371	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.2041	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1716	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1397	10
18° 00'	0.3090	0.9511	0.3249	3.1084	72° 00'
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0777	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0475	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	3.0178	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9887	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9600	10
19° 00'	0.3256	0.9455	0.3443	2.9319	71° 00'
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.9042	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8770	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8502	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.8239	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7980	10
20° 00'	0.3420	0.9397	0.3640	2.7725	70° 00'
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7475	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.7228	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6985	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6746	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6511	10
21° 00'	0.3584	0.9336	0.3839	2.6279	69° 00'
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.6051	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5826	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5605	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5386	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.5172	10
22° 00'	0.3746	0.9272	0.4040	2.4960	68° 00'
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4751	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4546	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4342	30
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.4142	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3945	10

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	θ
23° 00'	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67° 00'
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00'	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66° 00'
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00'	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65° 00'
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00'	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64° 00'
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00'	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63° 00'
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00'	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62° 00'
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00'	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61° 00'
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00'	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60° 00'
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00'	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59° 00'
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00'	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58° 00'
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00'	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57° 00'
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	
34° 00'	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56° 00'
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00'	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 00'
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00'	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 00'
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00'	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 00'
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00'	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52° 00'
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00'	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51° 00'
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00'	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50° 00'
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00'	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49° 00'
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00'	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48° 00'
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00'	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47° 00'
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00'	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46° 00'
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00'	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00'

فعالیت

- د جدول لومړي پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښيي؟
- د جدول د کینې او ښي خوا لومړي ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوی؟
- د جدول لومړی او وروستی کرښه څه راښيي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنی وي هغه د جدول کښه خوا کې د درجې په ستون کې پیدا کړو او مثلاً نسبت یې له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي څه کوو؟

د پورته فعالیت پایله داسې ښانور:

که زاویه له 45° څخه کوچنی وي هغه د جدول د کینې خوا په لومړی ولاړه لیکه ستون کې، او مثلاً نسبت یې په پورته خوا لومړی پرته لیکه یا سطر کې گورو.
که زاویه له 45° څخه لویه وي هغه زاویه د جدول دښی خوا په لومړی ولاړه لیکه یا ستون کې، او مثلاً نسبت یې په ښکته خوا څخه پورته خوا ته په وروستی پرته لیکه یا سطر کې پیدا کړو. چې د پام وړ زاوینې د اړوند کرښې او د مثلاً نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون پرېکړه د زاوینې مطلب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ 10'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړی د جدول د کینې خوا په لومړی ولاړه لیکه یا ستون کې مطلوبه زاویه ($30^\circ 10'$) پیدا کړو او د جدول په لومړی کرښه (سطر) کې مطلب مثلاً نسبت پیدا کړو ددې ولاړې او برتې لیکې (سطر او ستون) پرېکړه د $0,8646$ عدد راکوي چې دا د ($30^\circ 10'$) زاوینې کوساین دی.

$$\begin{array}{ccc} & \circ & \cos \\ & \vdots & \vdots \\ \cos(30^\circ 10') = ? & 30^\circ 10' & \dots\dots\dots 0,8646 \end{array}$$

دویم مثال: د $84^\circ 50'$ سین وټاکئ.

حل: لومړی د جدول د ښي خوا په لومړی ستون کې د پام وړ زاویه $84^\circ 50'$ پیدا کړو او د جدول په وروستی کرښه (سطر) کې د پام وړ مثلاً نسبت پیدا کړو ددې برتې او ولاړو لیکو (سطر او ستون) پرېکړه د ($0,9959$) عدد راکوي چې د $84^\circ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ \sin 84^\circ 50' = ? & 0,9959 & \dots\dots\dots 84^\circ 50' \\ & \vdots & \sin \end{array}$$

يادونه

هغه جدول چې تر اوسه مو ترې کار واخسته د هغو زاويو مثلثي نسبتونه چې توپير يې لس دقيقې وي راښيي د هرې زاوې مثلثي نسبت د دې جدول په مرسته نشو ټاکلې، نو اوس غواړو داسې طريقه بيان کړو چې ددې جدول په مرسته د هرې زاوې مثلثي نسبتونه په لاس راوړو چې دا طريقه د انټرپوليشن Interpolation په نامه يادېږي او په لاندې مثالونو کې يې ترې کار اخلو:

دريم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاوې تانجنت په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاوې تانجنت نشته خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاويو تانجانتونه په جدول کې شته دی چې د هغوی په مرسته $42^\circ 35'$ زاوې مثلثي نسبت داسې پيدا کوو:

دو زاويو توپير	د مثلثي نسبتونو توپير
$10'$	0.00054
$5'$	x
$\tan 42^\circ 30'$	$\left[\begin{array}{l} 0.9217 \\ 10 \end{array} \right]$
$\tan 42^\circ 35'$	$\left[\begin{array}{l} x \\ 0.0054 \end{array} \right]$
$\tan 42^\circ 40'$	$\left[\begin{array}{l} 5 \\ 0.9163 \end{array} \right]$

ليدل کېږي چې د لومړۍ او دويمې زاوې فرق 5 او د لومړۍ او دريمې زاوې فرق 10 په همدې ترتيب سره د $\tan$ فرق يې X او 0,0054 دی يعنې که زاويه د 10 په اندازه فرق ولري نو $\tan$ يې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاويه د 5 په اندازه فرق وکړي نو $\tan$ د X په اندازه فرق کوي چې د تناسب په مرسته ليکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0.0054} \Rightarrow x = 0,0027$$

د X قيمت د کوچنۍ زاويو له $\tan$ سره جمع کوو:

$$\tan 42^\circ 35' = 0,9190$$

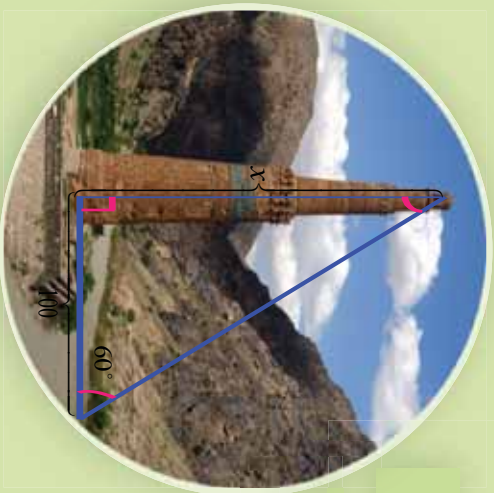
$$0,9163 + 0,0027 = 0,9190$$

پوښتنې

د مثلثي جدول څخه په گټې اخيستي سره د $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ مثلثي نسبونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاويو پيدا کړئ.

د قایم الزاویه مثلثونو حل

مخامخ شکل ته پام وکړئ د څلې (منار)
جگړالې څنگه پیدا کولی شئ.



فعالیت

- که دیوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه $30^\circ 40'$ وي بله زاویه یې پیدا کړئ.
- که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه 29° او وتر یې $25cm$ وي د مثلث مجهول عناصر پیدا کړئ.
- که د قایم الزاویه مثلث دوی ضلعي یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي د مثلث نور عناصر څنگه پیدا کولای شو.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قایم الزاویه مثلث کې که یوه حاده زاویه یا دوه ضلعي معلومې وي د مثلث پاتې اجزايې د مثالني توابعو په مرسته په لاس راوړو.

مثال: دیوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه 40° که ددې زاوېې مجاور ضلعه 120 واحد د اوږوالې وي نوموړی مثلث حل کړئ.

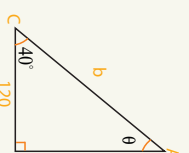
حل: څرنگه چې د مثلث یوه زاویه او دوه ضلعي نا معلومې وي نو ددې معلومو اجزاو په مرسته نا معلومې اجزايې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$1, \quad \theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$2, \quad \tan 40^\circ = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0.8391 = 100.692$$

$$3, \quad \cos 40^\circ = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40^\circ} = \frac{120}{0.7660} = 156.6579$$

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{(120)^2 + (100.692)^2} = 156.6579$$



دویم مثال: د یوه قایمه الزاویه مثلث وتر 49.7 cm او یوه قایمه ضلع به 25 cm وي نوموړی مثلث حل کړئ.

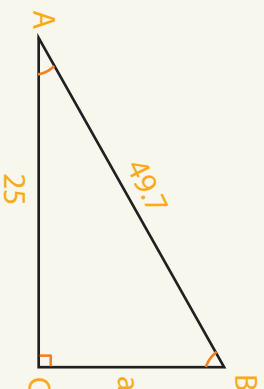
حل: لیدل کېږي چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي نو نا معلوم عناصر به داسې پیدا کوو:

$$1) \cos \hat{A} = \frac{25}{49.7} = 0.503$$

$$\cos \hat{A} = 0.503 \Rightarrow \hat{A} = 59.8^\circ = 59^\circ 48'$$

$$2) B = 90^\circ - \hat{A} \Rightarrow B = 90 - 59.8^\circ = 30.2^\circ = 30^\circ 12'$$

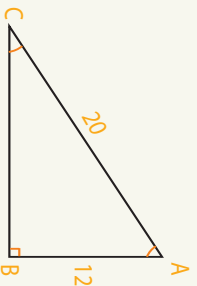
$$3) \tan \hat{A} = \frac{a}{25} \Rightarrow a = \tan \hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1.7182 = 43$$



پوښتنې

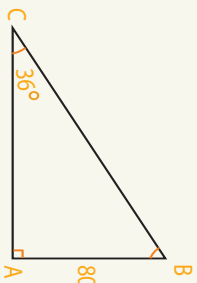
1 - د یوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه $50^\circ 38'$ او د دې زاوینې مجاوره ضلع 11 واحد ده نو موږی مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.



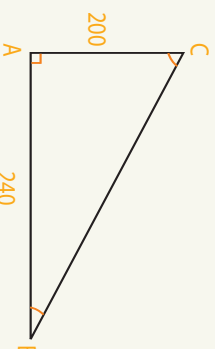
$$x = ?$$

$$\hat{A} = ?$$



$$x = ?$$

$$\hat{B} = ?$$

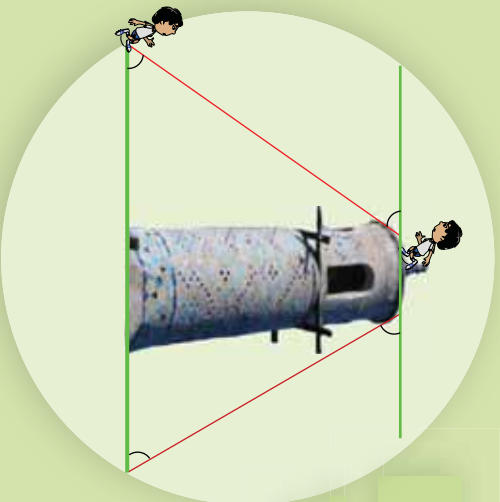


$$\hat{B} = ?$$

$$\overline{BC} = ?$$

د میل یا ارتفاع او تنزیل زاوې

مخامخ شکل ته پام وکړئ د میل او تنزیل زاوې ونښای.



فعالیت

- که احمد په یو جگوالی پروت وي د لید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي (د تحول ساحه بې کومه فاصله ده)؟
- که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي د لید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یا دېږي (د تحول ساحه بې په کومه فاصله ده)؟

ډیورته فعالیت پایله داسې بیاوړ:

1 - د ارتفاع زاویه Angle of Elevation

که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي نو د لید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي چې د جگوالی زاویه بلل کېږي لکه ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

د افق کرښه

β

2 - د تنزیل زاویه Angle of Depression

د لید کرښه

که یو شی په ټیټ ځای کې پروت وي د لید کرښه له شی سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.

α

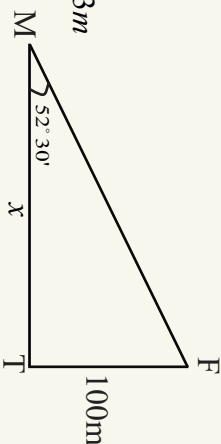
P_2

د افق کرښه

نومړی مثال: د $M\hat{F}T$ قايمه الزاويه مثلث کې د جگوالی يا ارتفاع زاويه $30^\circ 52'$ که د مثلث جگوالی $100m$ وي د مثلث وتر او قاعده يې پيدا کړئ.

$$\tan 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow x = 76.73m$$



دویم مثال: د یوه کاغذ پران (پتنگ) د تار اوږه دوالی $120m$ وي ددې کاغذ پران (پتنگ) د جگوالی يا ارتفاع زاويه 45° ده د کاغذ پران (پتنگ) جگوالی وټاکئ.

$$\frac{h}{120} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 60 \cdot \sqrt{2}m$$

درېم مثال: یو نوري (ترسدا) برج له بحر څخه $120f$ جگوالی لري هغه نړولې زاويه چې د برج نه یو نېړی (کنستی) لیدل کېږي 15° درجې ده نوموړې نېړی له برج نه څومره فاصله لري .

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 15 = \frac{\overline{AC}}{120}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 15^\circ = 120 \cdot 3.7 = 444f$$

پوښتنې

- 1- د هغه ونې ارتفاع پيدا کړئ چې د ارتفاع زاويه يې له 20° څخه 40° واوړي نو په هغه صورت کې به لیدونکی $75ft$ ونې ته نږدی شي.
- 2- یوه ونه باد له پورته خوا څخه داسې ماته کړې چې د ونې تنه او ماته برخه يې یو قايمه الزاويه مثلث له ځمکې سره جوړه کړې که ماته برخه له ځمکې سره 50° زاويه جوړه کړې وي او د ونې تنه $20ft$ وي د ونې جگوالی پيدا کړئ.

مثالتي معادلې

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ?$$



مخامخ مثالتي اړيکې له څه سره مساوي دي
وضاحت ورکړئ.

پوهېږو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د متحول د ټولو قيمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د ځينې قيمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي.

فعاليت

- د فيثاغورث د قضیې او مثالات ترمنځ اړيکه وښئ يا دا اړيکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه توپير لري دا توپير په مثالتي اړيکو کې وڅېړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجهول دی که $\sin x$
- داسې قوسونه يا زاوې چې يو شان مثالتي نسبتونه ولري وښئ.

د پورته فعاليت پايله په يو تعريف کې په لاندې ډول بيانوو:

تعريف:

- هره معادله چې په هغې کې يو يا څو مثالتي نسبتونه گډون ولري مثالتي معادله بلل کېږي لکه $\sin x - 1 = 0$ يا $2 \cos x - 1 = 0$
- هغه قوس يا زاويه چې د هغې مثالتي نسبت مطلوب وي اصلي مجهول بلل کېږي لکه په پورتنیو معادلو کې x اصلي مجهول دی.
 - د اصلي مجهول مثالتي نسبت ته فرعي مجهول وايي لکه په پورتنیو معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دی.
- هغه زاوې چې مثالتي نسبتونه يې يو شان دي پريودیک توابع بلل کېږي، چې فورمولونه په

لاندې ډول دي:

$$x = m\pi + (-1)^n \cdot \theta, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$1- \sin \theta \text{ مثلثي نسبت عمومي فورمول}$$

$$x = 2m\pi \pm \theta, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2- \cos \theta \text{ مثلثي نسبت عمومي فورمول}$$

$$x = m\pi + \theta, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$3- \tan \theta \text{ مثلثي نسبت عمومي فورمول}$$

د مثلثي معادلو د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

1- د الجبري معادلو د حل په مرسته د فرعي مجهول قیمت په لاس راوړو.

2- د مثلثي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلي مجهول قیمت په لاس راوړو.

3- څرنگه چې مثلثي معادلې پریودیک معادلې دي نو ډېر حلونه لري نو د هغو زاویو د فورمولونو په مرسته چې یو شان نسبتونه لري د معادلې حلونه دي.

مثال: د $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ او $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ مثلثي معادلو حلونه پیدا کړئ.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos x + \frac{1}{2} = 1$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$x = m\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 2m\pi \pm \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

پوښتي

دې لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$$a) \sqrt{3} \cot x - 1 = 0$$

$$b) 2 \sin 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$c) 2 \cos 4x - \sqrt{2} = 0$$

- مثالان له دوو یوناني کلمو څخه چې تریگون او متری چې د مثلث د اندازه کولو معنی لري جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړیکې څیړي.
- که په یوه ضلع د مثلث یوه موازي کرښه رسم شي پرېکړې ضلعي په مناسبو ټوټو وېشي دا قضیه د تالس د قضیې په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د مخالف ضلعي اوږدوالی دوتر په اوږدوالي د حاده زاوې د سین sine په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د گاونډي یا مجاورې ضلعي اوږدوالی د وتر په اوږدوالي د حاده زاوې د کوساین cosine په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د مخالف څنډې یا ضلعي اوږدوالی د گاونډي یا مجاورې څنډې یا ضلعي په اوږدوالي د حاده زاوې د تانجنت tangent په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د $\sin \theta$ او $\cos \theta$ نسبتونو نسبت د حاده زاوې د $\tan \theta$ په نامه یادېږي $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاوې د $\cos$ او $\sin$ نسبتونو نسبت د حاده زاوې د $\cot$ په نامه یادېږي $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$.
- هغه زاویه لکه α چې مستقیمه کرښه یې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي د میل زاوې په نامه یادېږي او د دې کرښې میل د $\tan \alpha$ سره مساوي ده $m = \tan \alpha$.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړیکه رښتیا ده.
- د $\tan x$ او $\cos x$ ، $\sin x$ مثلاًني نسبتونه پرته له زاوې معنا نلري.
- د $mx + b$ ، m ، y معادله کې، m دهغه زاوې تانجنت دی چې مستقیمه کرښه یې د محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y محور سره د پریکړې ټکي دی.
- $\sin 30^\circ$ له $\cos 60^\circ$ سره برابر دی.
- $\sin 60^\circ$ له $\cos 30^\circ$ سره برابر دی.
- $\sin 45^\circ$ له $\cos 45^\circ$ برابر دی.

د څلورم څپرکی پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي چې یو یې سم دی. سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې حاده زاوې $\sin \alpha$ عبارت له:

د حاده زاوې د گاونډي (مجاورې) ضلعې اوږدوالی	(c)
دوتر اوږدوالی	
دوتر اوږدوالی	(d)
د حاده زاوې د مخالف ضلعې اوږدوالی	
دوتر اوږدوالی	(b)
د حاده زاوې د گاونډي (مجاورې) ضلعې اوږدوالی	

2- د $\tan \alpha$ نسبت مساوي دی په:

(a) $\frac{\sin x}{\cos x}$	(b) $\frac{\cos x}{\sin x}$	(c) $\frac{1}{\sin x}$	(d) $\frac{1}{\cos x}$
(a) $\frac{3}{2}$	(b) -1	(c) 1	(d) a او b

4- د هغې مستقیمې کرښې معادله چې د y محور په (۳، ۰) کې پریکړي او د x محور

له مثبت جهت سره 45° زاویه جوړه کړي برابر ده ده له:

(a) $y = x + 3$	(b) $2y = 2x - 3$	(c) $2x - y = 0$	(d) هېڅ یو
(a) 1	(b) 2	(c) -2	(d) -1
-6	$\sin 45^\circ$ او $\cos 45^\circ$ برابر دي له:		

(a) 1	(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$	(d) $\sqrt{2}$
-------	--------------------------	--------------------------	----------------

7- د $\frac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ افادي قیمت برابر دي له:

(a) 0	(b) 1	(c) -1	(d) درې واړه ځوابونه سم دي.
-------	-------	--------	-----------------------------

• تش خايزنه په مناسبو بيانونو ډك كړئ.

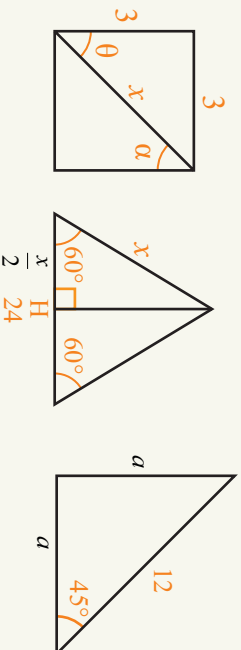
- 1- په يوه قايم الزويه مثلث كې د دوو نورو حاده زاويو مجموعه ده.
- 2- كه د يوه متساوي الضلاع مثلث يوه خنډه $10cm$ وي جگوالى يې دى.
- 3- ديو حاده زاويې ساين عبارت له او څخه جوړه شوې ده.
- 4- Trigonimetry له دوو كلمو او څخه جوړه شوې ده.
- 5- $\tan \theta \cdot \cot \theta$ برابر په دى.

• د لاندې جملو څخه كومه سمه او كومه ناسمه ده، دسپې په مخ كې د (س) توري او د ناسپې په مخ كې د (ن) توري وليكي.

- 1- () $\sin x$ نسبت مساوي په دى.
- 2- () $\sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ$ يو بل سره مساوي دي.
- 3- () $2x - 1 = 5x$ معادله كې د دې كرنېې ميل $\frac{2}{5}$ دى.
- 4- () $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ نسبت د $\tan \theta$ سره برابر دى.
- 5- () $1 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ دى.

• لاندې سوالونه حل كړئ.

1- په لاندې شكلونو كې د ورځې زونو مثالني نسبتونه پيدا كړئ.



-2 په لاندې سوالونو کې د A او B قیمتونه حساب کړئ.

- 1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$ 2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$
- 3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$ 4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$
- 5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$ 6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$
- 7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$ 8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$
- 9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

-3 د $\sin x - \cos x$ رابطه ثبوت کړئ.

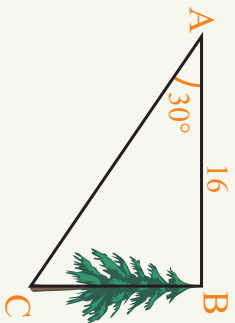
$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cos x} = \sin x - \cos x$$

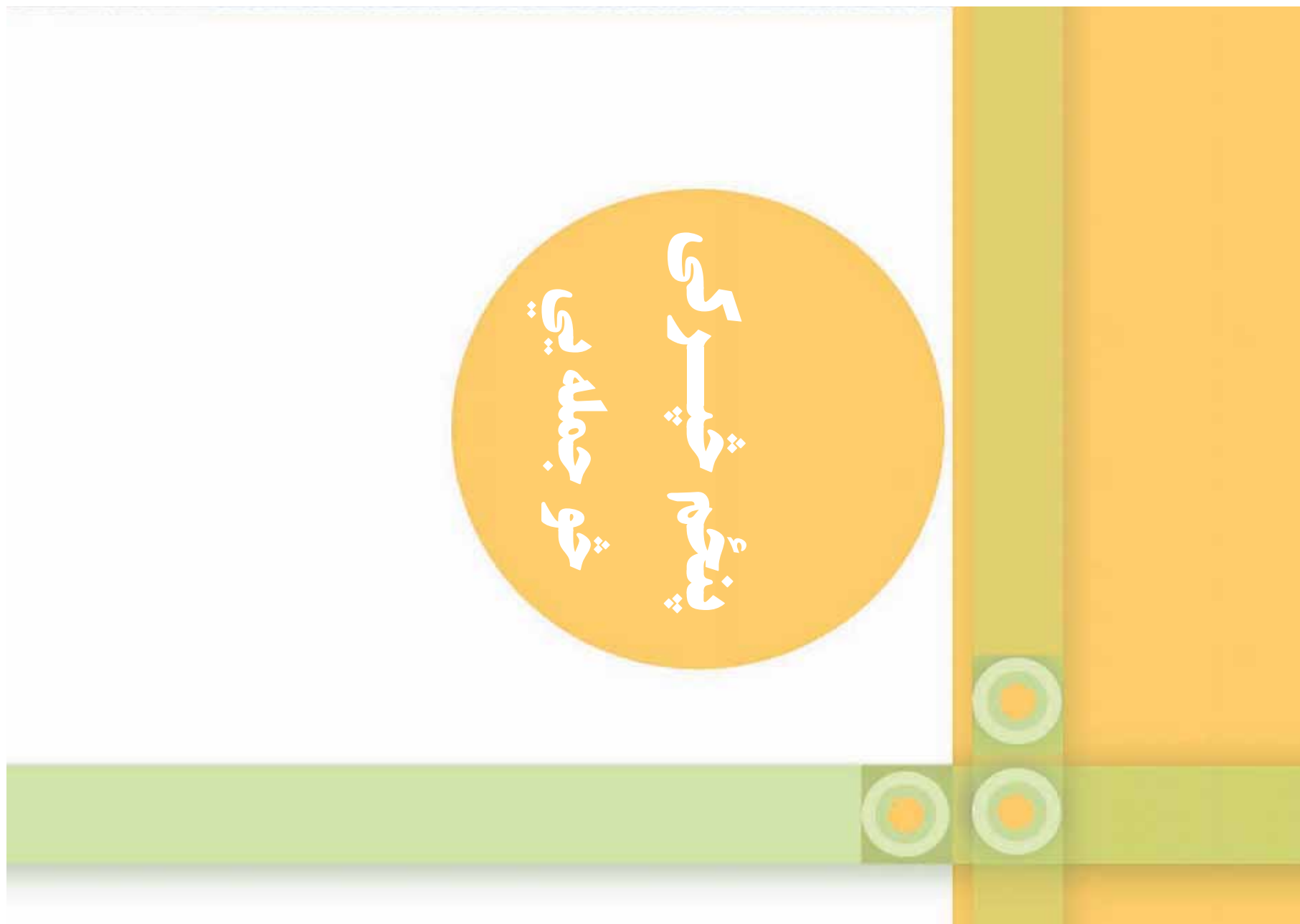
-4 که $\sin x = \frac{7}{12}$ وي او $\cos x$ پیدا کړئ.

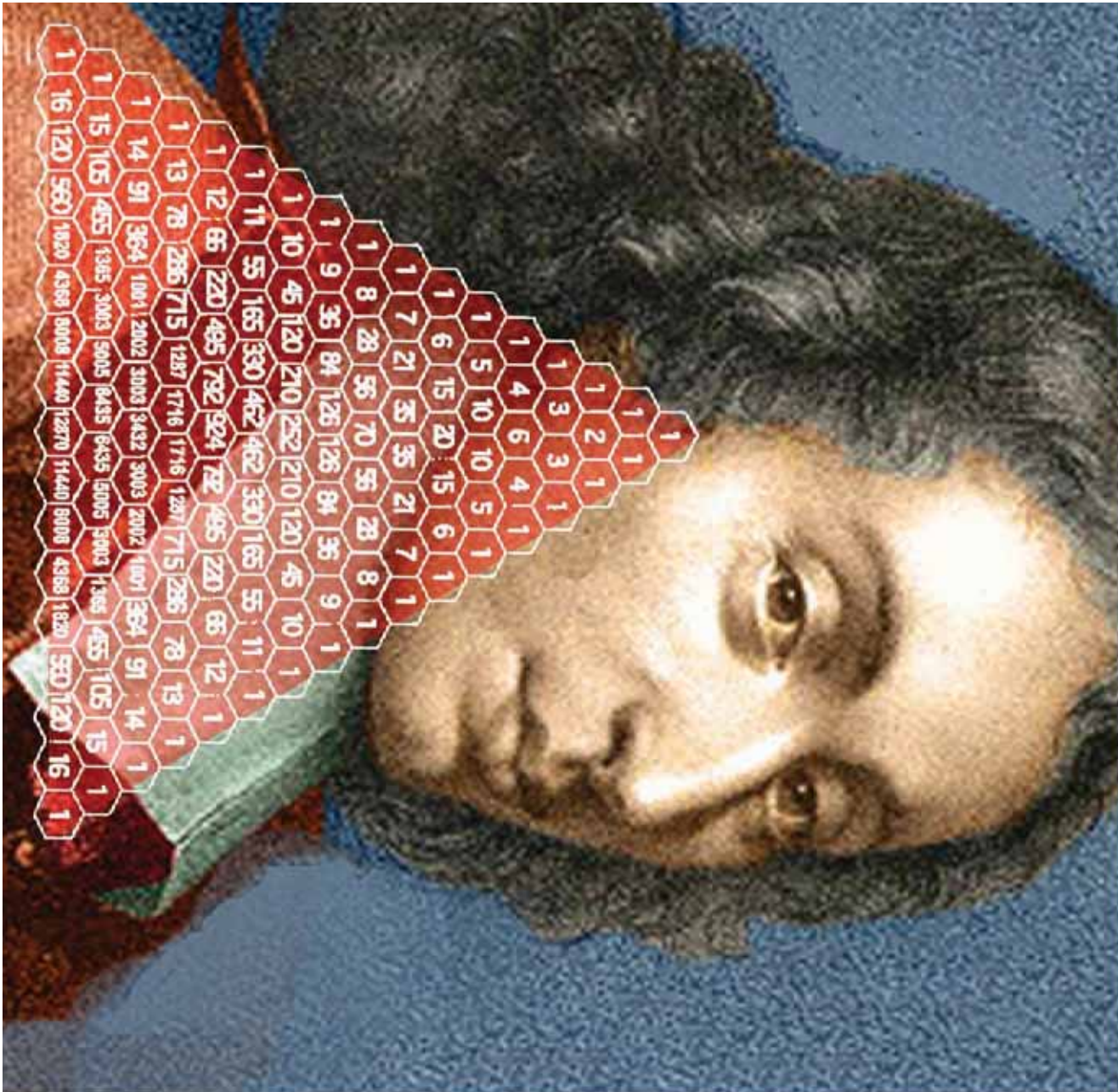
-5 که $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي او $\sin x$ پیدا کړئ.

-6 که چېرې α زاویه صفر ته نږدې شي $\tan \alpha$ ، کوم عدد ته نږدې کېږي د شکل له مخې د خپلې وینا سموالی وښیئ.

-7 په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ وایتونه حساب کړئ.

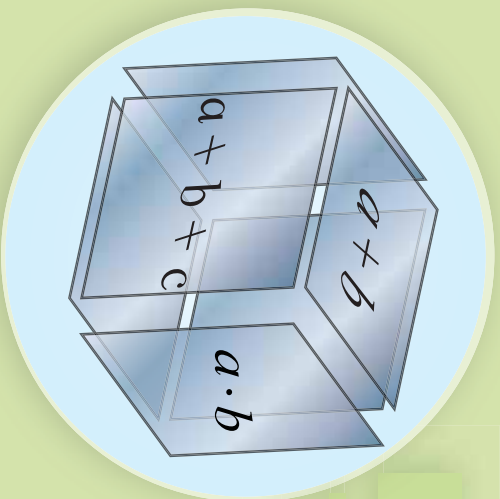






الجبري افادي

د مځامځ شکل په سطحو ليکل شويو
الجبري افادو نومونه واخلئ.



فعاليت

لاندې افادي په پام کې ونیسئ:

$$a) \ 2x \qquad b) \ \frac{1}{3}xy^3 \qquad c) \ \sqrt{2}xym' \qquad d) \ 9x^2$$

$$e) \ 5x \qquad f) \ 2xy^3 \qquad g) \ 3x^2 \qquad h) \ \frac{4x^2}{x-1}$$

• یوېل ته ورته افادي په نښه کړئ.

• لاندې الجبري افادي تر ممکن حده ساده کړئ.

$$a) \ 2x + 6x^2 + \sqrt{2}xym^4 \qquad b) \ 3x^2 + 6x^2 \qquad c) \ \frac{1}{3}xy^3 + 2x \qquad d) \ \frac{1}{3}xy^3 + 2xy^3$$

• هغه افادي چې نشي ساده کېدای، څنگه باید ولیکل شي، د هر یوې لپاره نوم لازم گنئ؟

• په هر حالت کې د افادو تر ټولو لږ توان نسبت X ته وټاکئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو وليکو چې:

که چیرې په یوه الجبري افاده کې د مشابه جملاتو له ساده کولو څخه وروسته یوازې یو حد ولري، هغې ته یو حده، (Monomial)، که جمع یا تفریق د دوحدونو ولرو هغې ته دوه حده یا (Binomial)، که جمع یا تفریق د دریو حدونو ولرو هغې ته درې حده یا (Trinomial) او که له دریو حدونو څخه زیات حدونه ولرو پولینوم یا (Polynomial)، په نامه یادېږي په دې شرط چه د تورو توانونه ئې مکمل عدرده ئې هر ه الجبري افاده کې تر ټولو لږ توان نسبت یوه ځانگړی متحول ته د الجبري افادي درجه نظر هغه متحول ته بلل کېږي.

مثال: لاندې جدول بشپړ کړئ.

الجبري افادې	مناسبي نومونه				درجه	
	خو جمله	درې جمله	دوه جمله	يوه جمله	نظر Y ته	نظر X ته
$\sqrt{32}y^2 - 3y + 2y^3$						
$3x^2 - 7x$			✓			2
$6x^2 - 4x - 1$						
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$						
$13x - 2y^3 + 6x^3y$						
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$						
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$						

يو بنسټي

1- لاندې الجبري افادې ساده او د هرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

$$a) x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x \quad b) \sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$$

$$c) -4x^2 + 2x^2 + 14x - 8 + 4x^3 - 16x - 2x^2 \quad d) 4 - x^3y - 2 + xy^3 - 4xy - 1$$

2- لاندې الجبري افادې، خو جمله يي دي، د هرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

$$a) 6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5 \quad b) 8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$$

$$c) 6x^2y^6m^9 \quad d) \sqrt{3}x - y + 6x^2y^3 - 2y^2$$

$$e) 3pq^3 - 8p^4q^3 - 12q^4 - 0.5p^6 \quad f) \frac{4m - 2n}{2m - n}$$

3- د A, B او C په افادو کې ورته حدود وښيي او افادې ساده کړئ.

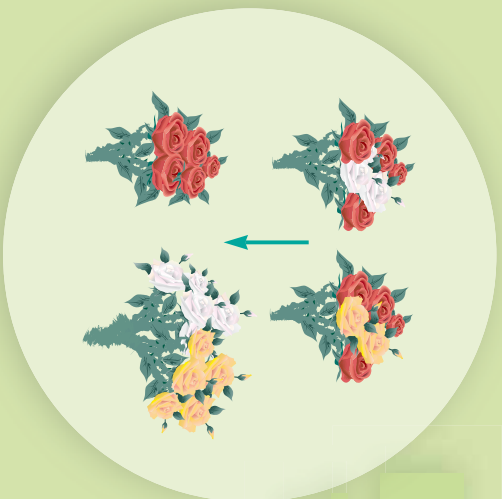
$$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$$

$$C = 2\sqrt{8x} + \sqrt{2} - 3\sqrt{8x} + \sqrt{32}$$

په فکتورونو تجربه (فکتور نیونه)

په مخامخ شکل کې خو غوښې گلونه ورننۍ؟
کومې غوښې یو بل ته ورته دي؟ یوه غوښه خو
گلانو څخه جوړه ده؟



فعالیت

- تش ځایونه وکړئ.
 $5x = (\dots\dots + \dots\dots)x = \dots\dots x + \dots\dots\dots x$
 $6y = (\dots\dots + \dots\dots)y = \dots\dots y + \dots\dots\dots y$
- پالنېو اړیکو کې له کومې ځانګړتیا څخه ګټه اخیستل شوي ده.
- د بنۍ اوڅ عددي ضربونه د کین اوڅ د متحولینو له ضربونو سره څه اړیکه لري.
 $3x + 2x = (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots)x = \dots\dots\dots x$
 $ax + bx = (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots)x = \dots\dots\dots x$
- ایا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟

په پورتنۍ فعالیت کې لیدل کېږي چې:

د ځینو الجبري افادو په تجربه کې کولای شو چې د ضرب توزیعي خاصیت څخه پر جمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پېژندلو سره په افاده کې کولای شوالجبري افادې تجربه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجربه کړئ.

a) $ab + ac - ad$

b) $x^4 - x^3y + x^2y^2$

c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m$

d) $3xy - 6x^2$

حل: په راکړل شویو افادو کې لومړی په ټولو حدونو کې ګډ پیدا کړو او هغه د قوس منځکې لیکو وروسته ټول حدونه بیل بیل په جمله ویشو اوحاصل یې دقوس په منځ کې لیکو:

a) $ab + ac - ad = a(b + c - d)$
b) $x^4 - x^3y + x^2y^2 = x^2(x^2 - xy + y^2)$
c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m = m(\frac{1}{2}m - 2)$
d) $3xy - 6x^2 = 3x(y - 2x)$

دویم مثال: لاندې الجبري افادې تجزیہ کریں.

a) $Ax + Bx + Ay + By$ b) $x^2 - 4y^2 + x + 2y$
c) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$ d) $2x - 2y + 2x + 2y$

حل: لومړۍ افاده داسې ترتیبو چې ورته حدوده څنګ پر څنګ راشي او ورسته دافادې ګډه حدود پیدا کړو او داسې تجزیہ کړو.

a) $\underbrace{Ax + Bx}_x + \underbrace{Ay + By}_y$ b) $x^2 - 4y^2 + x + 2y$
 $= x(A + B) + y(A + B)$ $= [x^2 - (2y)^2] + (x + 2y)$
 $= (A + B)(x + y)$ $= (x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y)$
 $= (x + 2y)(x - 2y + 1)$

c) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$ d) $2x + 2y + 2x + 2y$
 $= 2x(x + y) + 3(x + y)$ $= 4x + 4y$
 $= (x + y)(2x + 3)$ $= 4(x + y)$

پوښتنې

لاندې افادې تجزیہ کړئ.

1) $x^4 - x^3y + x^2x$	2) $x(2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y)$
3) $10ab - 15ac$	4) $32x^2y - 4xy^2$
5) $\sqrt{2}x^3y^2 - \sqrt{8}xy$	6) $0.5mn^2 - 0.125m^4n^3$
7) $ab + b + b$	8) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^4$
9) $mab + my + ny + nab$	10) $ab(b + a + c) + ac(a + b + c) + bc(c + b + a)$

دالجيبري افادو ضرب چي يوه گډه جمله ولري

د مخامخ قوسونو له ضرب څخه
وړاى است چې د دوو عددونو د جمعې
او ضرب حاصل له کومو عددونو سره
برابر دی.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

فعاليت

• په هره مربع کې، داعدادو ترمينځ څه ډول اړيکه ليدل کېږي؟



• ډيورتني اړيکي څخه په گټه اخيستنه تش ځايونه وکړئ:



$$(x+4)(x+3) = x^2 + \dots x + \dots = x^2 + \dots x + \dots$$

$$(x-3)(x+2) = x^2 + \dots x + \dots = x^2 + \dots x + \dots$$

$$x^2 + 8x + 12 = (x + \dots)(x + \dots)$$

له پورتنی فعالیت خڅه لیدل کړي:

د دوو الجبري عبارتونو له ضرب څخه چې یوه گډه جمله ولري لیکلای شو چې:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \times b$$

که چیرې وخواړو یوه ترینوم الجبري افاده د $x^2 + bx + c$ تجزیه کړو نو لومړی باید دوه عددونه داسې پیدا کړو چې د ضرب حاصل یې c اود جمع حاصل یې b شي، که دې اعدادونه m او n وویل شي، لرو چې:

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m+n)x + m \cdot n$$

مثال: د لاندې افادو ضرب او تجزیه سرتیه ورسوئ:

a) $(t-4)(t+5)$

b) $(a+3)(a+4)$

c) $(x-0.4)(x+0.2)$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$

e) $x^2+12x+32$

f) x^2+4x+3

g) $x^2-3x-28$

h) x^2-5x+6

حل:

a) $(t-4)(t+5) = t^2 + (-4+5)t + (-4 \times 5) = t^2 + t - 20$

b) $(a+3)(a+4) = a^2 + (3+4)a + (3 \times 4) = a^2 + 7a + 12$

c) $(x-4)(x-2) = x^2 + (-4-2)x + (-4 \times -2) = x^2 - 6x + 8$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2}) = y^2 + (\frac{2}{3}+\frac{1}{2})y + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} = y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{2}{6}$

e) $x^2+12x+32 = x^2+4x+8x+32 = x(x+4)+8(x+4) = (x+8)(x+4)$

f) $x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3 = x(x+3)+(x+3) = (x+3)(x+1)$

g) $x^2-3x-28 = x^2+(4-7)x+(4)(-7) = x^2+4x-7x-28$
 $= x(x+4)-7(x+4) = (x-7)(x+4)$

h) $x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6 = x(x-2)-3(x-2) = (x-3)(x-2)$

پوښتنې

1- لاندې افادې تجزیه کړئ.

a) $x^2+7x+12$

b) m^2-6m-7

c) a^2+a-2

d) x^2-x-20

2- لاندې افادې ضرب کړئ.

a) $(2x-1)(x+3)$

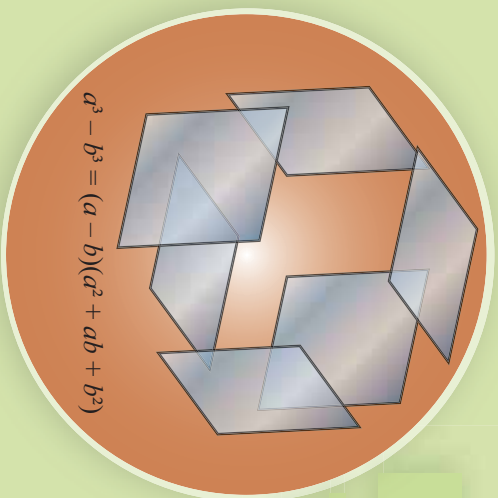
b) $(\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

c) $(a-3)(a+4)$

d) $(0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل

شکل ته پام وکړئ، وړایست چې ددې سطحو څخه که سره نږدی شي، کوم جسم په لاس راځي.



فعالیت

لاندې جدول ډک کړئ:

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
-3	2				
3	-2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو لیکو ترمنځ څه اړیکې لیدل کېږي؟
- ایا کولای شئ یوه ورته رابطه د $a^3 - b^3$ لپاره ولیکئ؟

ډیورنټي فعالیت څخه کولای شو دا پایله ولیکو:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا رابطه کولای شو چې په الجبري ډول وښیو:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

لوپړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$$a) b^3 - 8 \qquad b) a^6 b^6 - x^3 y^3 \qquad c) h^3 + \frac{1}{h^3}$$

حل: لومړی الجبري افاده د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړه وړو، وروسته د مطابقت په مرسته هغه تجزیه کوو:

$$a) b^3 - 8 = b^3 - 2^3 = (b - 2)(b^2 + 2b + 4)$$

$$b) a^6 b^6 - x^3 y^3 = (a^2 b^2)^3 - (xy)^3 = (a^2 b^2 - xy)(a^4 b^4 + a^2 b^2 xy + x^2 y^2)$$

$$c) h^3 + \frac{1}{h^3} = h^3 + \left(\frac{1}{h}\right)^3 = \left(h + \frac{1}{h}\right)\left(h^2 - 1 + \frac{1}{h^2}\right)$$

دویم مثال: د یوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3 - \frac{1}{8}$ ښودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جگوالی $3x - \frac{1}{2}$ وي ددې مکعب مستطیل دقاعدي مساحت به څومره وي؟

$$\text{د مکعب مستطیل حجم} = \frac{\text{د قاعدي مساحت} \times \text{ارتفاع}}{\text{ارتفاع}} = \text{د قاعدي مساحت} = \text{د مکعب مستطیل حجم}$$

$$\frac{27x^3 - \frac{1}{8}}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8} (3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8} (3x)^3 - \frac{1}{8}}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8} [(3x)^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}]}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \left(9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

دویم مثال: د $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل: لومړی د صورت مطابقت په انکشاف یا غږیدلې بڼه لیکو:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$$

$$x^3 + \frac{2}{x^3} = x^3 + \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3} = x^3 + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)^3$$

$$= \left(x + \frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

څلورم مثال: د $x^3 + \frac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ:

پوښتنې

$$1- \text{د } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) a^6 b^6 + x^3 y^3 & b) 8 + b^3 \\ c) x^{12} - y^{12} & \\ d) 125x^3 + y^3 & e) 0.125x^3 - 1 \\ f) \frac{1}{x^3} + 1 & \\ g) 8 - 64a^3 b^6 & h) 8a^3 - 27b^3 \\ i) b^6 - 1 & \end{array}$$



کو چنی گڊ مضرب (L.C.M)

د $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ د کسرونو په حاصل کې د

6 او 4 د کوچنی گډ مضرب یا دواړو

کسرونو گډ مخرج پیدا کولو لپاره مو یوه

لاره درلوده د $\frac{2}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1}$ جمعې

د حاصل لپاره څه وړاندیزونه کوئ؟

فعالیت

• د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو لومړی د ۶ او ۸ کوچنی گډ مضرب یا دواړو

کسرونو گډ مخرج پیدا کولو پړاوونه توضیح کوئ.

• د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ افادې په ضربي عواملو تجزیه کوئ.

• ضربی گډ او ناکه عوامل بې وټاکئ.

• د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گډ مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکړئ څه باید وکړو.

• د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گډ مضرب خوندی؟ هغه په لاس راوړئ.

• د $\frac{2}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1}$ کسرونو د جمع حاصل په لاس راوړئ.

ددو یا څو الجبري افادو د کوچنی گډ مضرب د پیدا کولو لپاره لومړی هغوی په لومړنیو ضربی عواملو تجزیه، وروسته هغه گډه عوامل چې ترټولو لوی توان لري د ناکه عواملو سره ضربوو چې کوچنی گډ مضرب په لاس راځي.

لومړی مثال: د $4x^2 + 2$ ، $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گډ مضرب په لاس راوړئ.

$$4x^2 = 2^2 \cdot x^2$$

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

ليال کبري چي هغه گڊ عامل چي لوی توان لري $(x+2)$ او 2^2 دی، چي د ضرب حاصل ټي د ناگډوعلو ملوسره برابر په $4x^2(x^2-1) = 4x^2(x-1)(x+1)$ دی، چي د کوچني گڊ مضرب يا (L.C.M) په نامه يادېږي.

دويم مثال: د $4x^2 + 12x - 16$ او $6x^2 - 6$ افډو کوچني گڊ مضرب پيدا کړئ.

$$4x^2 + 12x - 16 = 4(x^2 + 3x - 4) = 2^2(x+4)(x-1)$$

$$8x^2 + 40x + 32 = 8(x^2 + 5x + 4) = 2^3(x+4)(x+1)$$

$$6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 2 \times 3(x-1)(x+1)$$

په پايله که کوچني گڊ مضرب عبارت له:

$$2^3 \times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتي

د کوچني گڊ مضرب په پام کي نيولو سره ټي ساده کړئ.

$$1) \frac{2x}{3} - \frac{4}{5x} \div \frac{3}{10x}$$

$$2) \frac{3x-1}{x^2+2x-15} - \frac{2}{x+5}$$

$$3) \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$4) \frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x^3-1} + \frac{1}{x+1}$$

د الجبري افادو ویش

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

پام وکړئ چې د مخرځ افاده د صورت په کومه افاده پورې اړه لري، کولای شئ هغه ساده کړئ.

فعالیت

995 کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر نور ونشو کړای ساده یا اختصار کړو؛ نو پایله څه ده؟

• لاندې الجبري افادې تر ممکن حده پورې ساده کړئ.

a) $\frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}$, $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ b) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x \neq 2$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}$, $x \neq -2$

• لاندې عملیو ته پاملرنه وکړئ او توضیح کړئ چې هر گام دکوم کار په پایله کې لاس ته راځي ولې؟

a)
$$\begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ -7 & 142 \\ \hline 29 & \\ 28 & \\ \hline 15 & \\ 14 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 & x + 2 \\ \pm x^3 \pm 2x^2 & \\ \hline -4x^2 - 11x & \\ \mp 4x^2 \mp 8x & \\ \hline -3x - 6 & \\ \mp 3x \mp 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

• د (a) په جزء کې موږ لې ویش دځینې خوا له لومړي رقم ۹ څخه پیل کړ؟ سوچ وکړئ په (b) جزء کې موږ لې له x^3 څخه د وېش عملیه پیل کړې ده؟

لیکل اوترتیبول دیوې الجبري افادې د کین لورې (خوا) نه ښي لورې (خوا) ته په ترتیب د لورې

درجې څخه کوچنی درجې ته د پولینوم نزولي ترتیب نومېږي

ددواو الجبري افادو دیو پر بل د ویش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

۱- د مقسوم او مقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیب کړئ.

۲- د مقسوم لومړی حد د مقسوم علیه په لومړی حد وویشی چې حاصل یې د خارج قسمت لومړی حد دی.

۳- په لاس راغلی خارج قسمت د مقسوم علیه په ټولو حدونو کې ضرب حاصل یې د مقسوم له ورته حدودونه تفریق کوو.

۴- د مقسوم بل حد رابنګته کوو د پاتې افادې څنګ ته یې لیکو وروسته ددې افادې لومړی حد د مقسوم علیه په لومړی حد ویشو او حاصل یې د مقسوم علیه په ټولو حدودو کې ضربوو او حاصل یې له پاتې افادې څخه تفریق کوو.

۵- وروسته ۲، ۳، ۴ پړاوونو ته ترهغه ادامه ورکوو چې د پاتې حدودو درجه د مقسوم علیه د حدونو له درجې څخه کوچنۍ شی.

لومړی مثال : د $x^3 - 3x^2 - 23x + 30$ افاده په $x - 6$ افاده ویشی.

$$\begin{array}{r} x-6 \overline{) x^3-3x^2-23x+30} \\ \underline{-(x^3+6x^2)} \\ 3x^2-23x \\ \underline{-(3x^2+18x)} \\ -5x+30 \\ \underline{-(5x+30)} \\ 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I - \frac{x^3}{x} = x^2 \\ II - \frac{3x^2}{x} = 3x \\ III - \frac{-5x}{x} = -5 \end{array} \right\}$$

دویم مثال: د $x^2 - x - 4$ فاده په $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ افادی ویشی.

حل : دمقسوم اومقسوم علیه پړلنومونه په نزولي ډول ترتیوړاویښا عملیه سرته رسوړ.

د تقسیم مراحل

$$\begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \quad | \quad x^2 - x - 4 \\ \underline{x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} \\ x^4 + 2x^3 + x^2 \\ \underline{x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} \\ 3x^3 + 5x^2 - 8x \\ \underline{3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} \\ 8x^2 + 4x + 4 \\ \underline{8x^2 \mp 8x \mp 32} \\ 12x + 36 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I - \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\ II - \frac{x^4}{x^2} = x^2 \\ III - \frac{3x^3}{x^2} = 3x \\ IV - \frac{8x^2}{x^2} = 8 \end{array} \right.$$

څرنگه چې د دوو عددونو ویش دسموالي لپاره مودونه شرطونو څیړل، نو د دوو الجبري افادو ویش دسموالی لپاره هم دوه شرطونه څیړو.

1- د خارج قسمت اومقسوم علیه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم دالجبري افادي سره باید برابره وي.

۲- د پاتې درجه د مقسوم علیه له درجې څخه باید کوچنی وي.
لکه په دویم مثال کې:

$$(x^2 - x - 4)(x^3 + x^2 + 3x + 8) + 12x + 36 = x^5 - 2x^3 - 8x + 4$$

لیدل کېږي چې د خارج قسمت اومقسوم علیه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم له افادي سره برابر دی او د خارج قسمت درجه نظر x ته له ۲ سره برابره ده پاتې درجه (۱) ده نو په لاس راغلی پایله سمه ده.

درېم مثال: د $x^4 - 3x + 1 + 2x^2$ افاده په $x + 3$ افاده وويشي:
حل: لومړی دمقسم او مقسوم عليه افادې په نزولي ډول ترتيبوو.

$$\begin{array}{r} x^4 + 0 \cdot x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad | \quad x + 3 \\ \underline{-x^4 \pm 3x^3} \\ -3x^3 + 2x^2 \\ \underline{\mp 3x^3 \mp 9x^2} \\ 11x^2 - 3x \\ \underline{\pm 11x^2 \pm 33x} \\ -36x + 1 \\ \underline{\mp 36x \mp 108} \\ 109 \end{array}$$

پوښتي

د لاندي افادو د ویش حاصل پیدا کړئ.

- 1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$
- 2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$
- 3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$
- 4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$

د الجبري افادو د عمليو سر ته رسولو ترتيب

که چيرې په الجبري افادو کې مخامخ
نښې راغلې وي په څه ډول په ترتيب
سره افاده ساده کړو؟



فعاليت

- دلاندې افادو د ساده کولو لپاره کومې عمليې سر ته ورسو. د عمليې د سر ته رسولو ترتيب په شمير سره ونوموئ.

$$3 - 2^4 \times 5 + (16 \div 4)$$

$$4 \times 5 \div 2 - 3(2 + 3^2) + 2$$

$$3x^2 - 4x(2 + x)$$

$$2x - 3\{-2(x+1)(x+2)\} + 6x \div 2$$

په پورتني فعاليت کې مو ليدل چې د الجبري افادو عمليو په ترتيب سره سر ته رسول د عددونو د قانون له ترتيب څخه پيروي کوي. د پوري الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره په لاندې

ډول عمل کړو

1- توان رفع کړو.

۲- د قوسونو په لړلو سره لومړۍ هغه ساده کړو.

۳- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د ضرب او ویش عمليې سر ته رسو.

۴- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د جمع او تفریق عمليې سر ته رسو.

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{2}m-3\left\{\left[5\left(m-\frac{1}{2}-m\right)\right]-m-6\right\}\div 2 \\ &= \frac{1}{2}m-3\left\{5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right\}\div 2 \\ &= \frac{1}{2}m-3\left\{-m-\frac{17}{2}\right\}\div 2 \\ &= \frac{1}{2}m+\left(3m+\frac{51}{2}\right)\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4} \\ &= \frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4} \\ &= 2m+\frac{51}{4} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 2) \quad & 2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x \\ &= 2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x \\ &= 2x-1+2x+4+x\times 5x \\ &= 2x-1+2x+4+5x^2 \\ &= 4x+5x^2+3 \end{aligned}$$

فعالیت

• مخامخ عبارتونه ساده کړئ:

$$\begin{aligned} a) \quad & \sqrt[3]{\frac{5}{8}} \\ b) \quad & \sqrt{8x^3y^3} \\ c) \quad & \sqrt{3a\sqrt{49a^2}} \end{aligned}$$

• د $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$ کسرونو دمخارج د جذرونو د منځه وړلو لپاره چې مخارج گویا شي $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ د کوم مطابقت څخه مرسته اخیستلای شئ:

• د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونو جذرونه په مخارج له منځه یوسي اوساده یې کړئ. دیو کسرد مخارج د جذرونو د منځه وړلو عملیه د الجبري کسر دگویا کولو یا ناطق کولو په نامه یادېږي.

مثال : لاندې کسرونو مخرج ناطق کړئ

$$1) \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$$

$$3) \frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$$

$$4) \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

حل:

$$1) \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$2) \frac{2}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} \\ = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

$$3) \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} \times \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1} \\ = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2} \\ = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1} = \sqrt{a}+1$$

$$4) \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} \\ = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

د یوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتیب سره لومړې قوسونه له منځ څخه وړو، ورپسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د ورش، ضرب، جمع او تفریق عمليې له پلي څخه کین اړخ ته سر ته رسوو.

- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x} + 1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - 1$ دی.
- د $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندې افادې ساده کړئ.

- 1) $2x \times -2\{x - (2 + x) - 1\} \div 2$
- 2) $\frac{1}{3}y - 5 \left\{ -2 \left[6(y - \frac{1}{3} - y) \right] \right\} \div 3$
- 3) $5 + (-18) - [24 + (-30)] \times (-7)$
- 4) $[(-102) + (-330)] \div 16 + [68 + 240 - (-210)] \div 6$
- 5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$
- 6) $\frac{3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
- 7) $2\sqrt{2000ab} - \frac{b}{a}\sqrt{72ab}$
- 8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$
- 9) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
- 10) $2\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \frac{1}{2}\sqrt{20x}$
- 11) $(\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2})$

• هغه الجبري افادې چې د یوه حد څخه جوړه شوي وي د مونوم یا یو حده په نامه یادېږي لکه: ax^n

• هغه الجبري افاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شوې وي، دوه حده یا بینوم بلل کېږي، لکه: $ax^2 + b$

• هغه الجبري افاده چې له دریو حدونو څخه جوړه شوې وي، درې حده یا ترینوم بلل کېږي، لکه: $ax^2 + bx + c$

• هغه الجبري افادې چې له څو حدونو څخه جوړې شوې وي او د تورو ترانزونه ئې مکمل عدونه وی څو حده یا پولینوم بلل کېږي لکه: $ax^5 + bx^3 + cx^2 - x - d$

• په یوه الجبري افاده کې د متحول ترټولو لوی توان د الجبري افادې درجه بلل کېږي.

• د پولینوم هغه ترتیب چې د کینې خوا څخه بنسې ځوانه له لوی توان څخه کوچني ته ترتیب شوی وي، نزولي ترتیب بلل کېږي.

• دهر a او b لپاره لرو:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

• د الجبري افادو د ګډو عواملو چې تر ټولو لوی توان ولري د ضرب حاصل له ناګډو عواملو سره د I.C.M په نامه یادېږي.

• که چېرې په یوه الجبري افاده کې قوسونه او $+$ ، $-$ ، $\times$ او $\div$ عمليې راغلي وي د ساده کولو لپاره یې په ترتیب سره لومړی کوچنی، منځنی او بیا لوی قوس له منځه وړو ورپسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د وېش، ضرب جمع او تفریق عمليې له کینې څخه ښي لور ته سرته رسوو.

• د $\sqrt{x}$ د ناطق کول عامل $\sqrt{x}$ دی.

• د $\sqrt{x} + 1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - 1$ دی.

• د $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل عبارت له $\sqrt{y} - \sqrt{x}$ دی.

- پہ لاندی سوالون کی ہر سوال تہ خلور خواہو نہ ور کرل شوی سم خواب بی وناکی.

$$-1 \text{ د } -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \text{ افادہ کی گہ عامل :}$$

$$(a) 2 \text{ دی.} \quad (b) x \text{ دی.} \quad (c) 2x \text{ دی.} \quad (d) \text{ نہ لری.}$$

$$-2 \text{ د } (x-2)(x+3) \text{ الجبری افادو مضرب حاصل عبارت لہ:}$$

$$(a) x^2 + 5x + 6 \quad (b) x^2 - 5x - 6$$

$$(c) x^2 + x - 6 \quad (d) x^2 - x + 6$$

$$-3 \text{ د } \frac{3}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1} \text{ افادی کوچنی گہ مضرب عبارت لہ :}$$

$$(a) 2(x+1)(x-1) \quad (b) (x+1)(x-1)$$

$$(c) (2x+2)(x^2-1) \quad (d) \text{ ہیخ یو.}$$

$$-4 \text{ د } \frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8} \text{ افادی دوش حاصل عبارت لہ:}$$

$$(a) -2x+1 \quad (b) \frac{-2x}{2x^2-8} + (-2x+1)(2x)$$

$$(c) \text{ الف او ب} \quad (d) \text{ ہیخ یو.}$$

$$-5 \text{ د } \sqrt{a}-\sqrt{b} \text{ د ناطق کولو عامل عبارت لہ :}$$

$$(a) \sqrt{a} \quad (b) \sqrt{b}$$

$$(c) \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (d) \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

• تنش ځایونه په مناسبو جملو د ک کړئ.

$$1- \text{ د } 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 \text{ الجبري افاده پوره } \dots\dots\dots \text{ حده درجه } \dots\dots\dots \text{ افاده ده.}$$

$$2- \text{ د } x^2 + 7x + 12 \text{ الجبري افادې ضربی عوامل } \dots\dots\dots \text{ او } \dots\dots\dots \text{ دی.}$$

$$3- \text{ د } \frac{x^2 - 1}{x + 1} \text{ ویش حاصل عبارت له } \dots\dots\dots \text{ دی.}$$

$$4- \text{ د } (\dots\dots\dots) (\dots\dots\dots) = a^3 + b^3$$

$$0- \text{ د } (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) \text{ د ضرب حاصل عبارت له } \dots\dots\dots \text{ دی.}$$

• په لاندې جملو کې کومه یوه سمه او کومه یوه ناسمه ده، د سمې مخ ته (س) توری اوانسمې

مخ ته (ن) توری ولیکئ

1- (هغه الجبري افادې چې دڅو حلونو څخه جوړه شوي وي، د پولینوم په

نامه یادېږي.

$$2- \text{ د } (x^2 + 2ax + a^2) \text{ افادې تجزیه } (x + a) \text{ ده}$$

$$3- \text{ د } (21x^3y^3 \text{ او } 14x^3y^2 \text{ کوچنی گډ مضرب } 42x^3 \text{ دی.}$$

$$4- \text{ د } (a^3 - b^3) = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$5- \text{ د } (a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

• لاندې سوالونه مفصل حل کړئ

۱- تجزيه يې کړئ

a) $y^2 - y - 2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

e) $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

۲- ساده يې کړئ

a) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

۳- و يې ویشئ

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

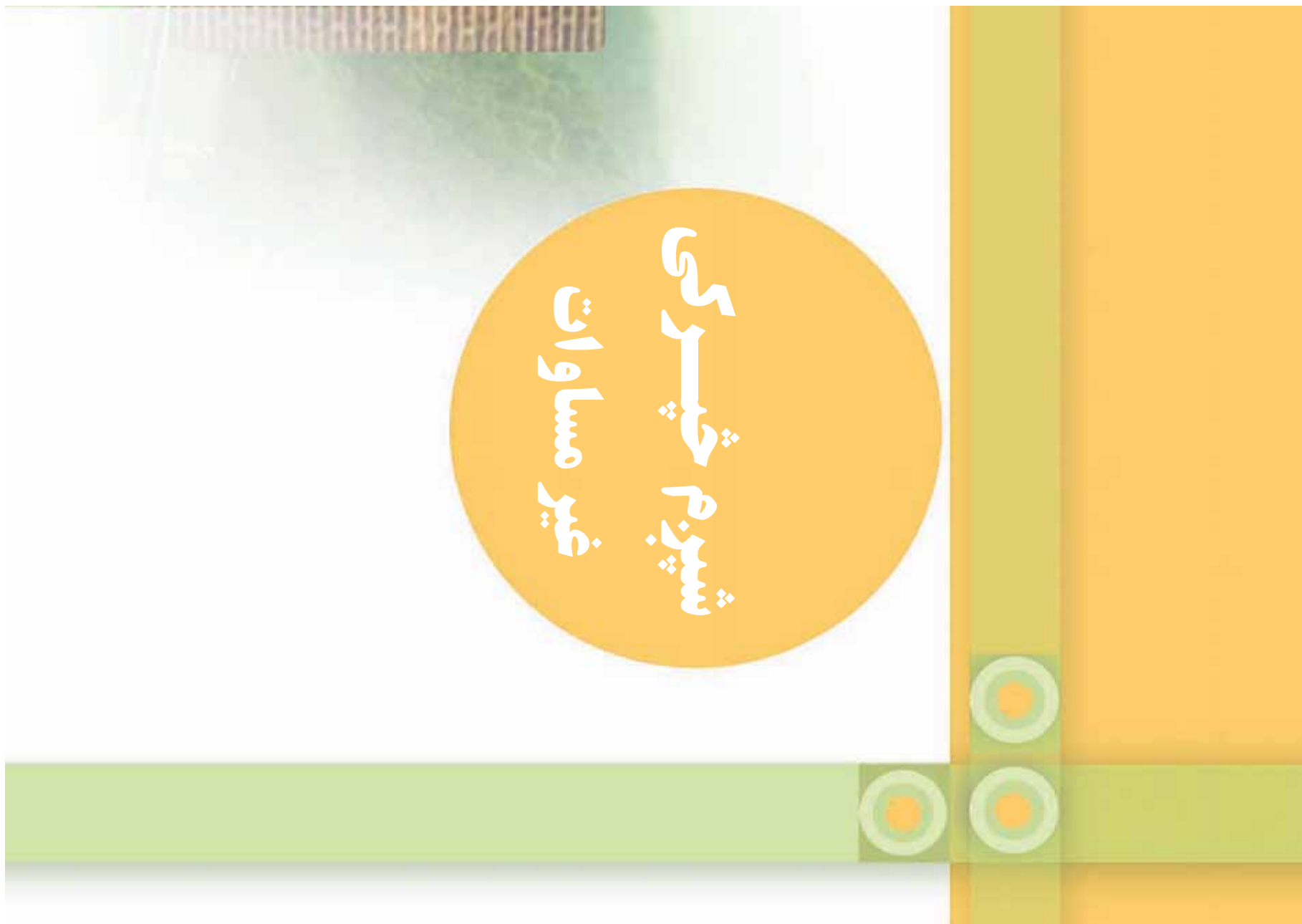
b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $2x^3 - x^2 - 4 \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

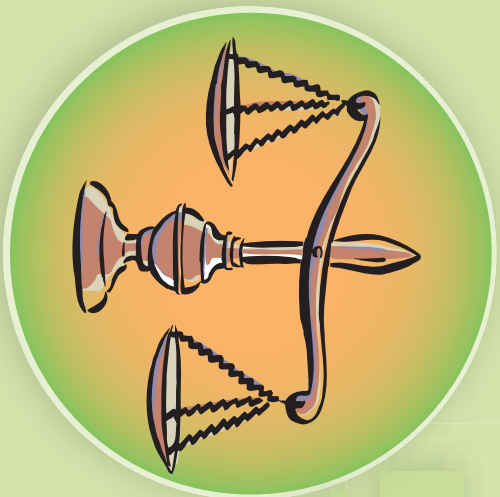
e) $x^2 - 5x + 64 \div (-x + 5)$

سپریم چیری غیر مساوات





غیر مساوات Inequality



تله په کوم حالت کې قرار لري؟ ولې؟

عموماً په ورځني ژوند کې د غیر مساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه پوښلگي د زده کوونکو د نمر و مجموع له زیاتو څخه کمو نمر ته درجه بندي کړو، یا تاسې کولی شئ داسې نور مثالونه په ورځني ژوند کې وښی چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چیرې عددونه دي ($<$, $>$, $\geq$, $\leq$) علامو په مرسته اړیکې ولري د نامساوي په نامه یادېږي لکه: $4 > 5$, $2 < -3$...

فعالیت

• د 3 , $\frac{-3}{2}$, $\sqrt{2}$, -4 او $\frac{2}{3}$ عددونه د عددونو په محور وټاکئ.



• له مناسبو علامو څخه په کار اخیستلو، پورتنی عددونه په ترتیب سره له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.

• د اعدادو په محور د اعدادو د ترتیب او د اعدادو د ځای تر منځ څه اړیکې وښئ؟

د پورتنۍ فعالیت مشاهدات په لاندې ډول داسې لنه‌وو:

د عددونو په محور هغه عدد چې د عدد ښی خوا ته پروت وي، لوی او له هغه عدد څخه چې د هغې ګڼې خوا ته پروت دی کوچنی دی.

په بشپړ ډول (کلې) ډول وبلې شو چې که د a , b او c درې حقیقي عددونه وي، نو لیکلای شو، چې:

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

فعالیت

- دوه غیر مساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچني یا لويي علامو په کار اخیستلو بیان کړئ.
- د غیر مساوي دواړو خواوو ته د 0 عدد ورجمع کړئ، ایا د غیر مساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنۍ غیر مساوي له دواړو خواوو څخه د ۳ عدد تفریق کړئ، ایا د غیر مساوي د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟

په بشپړ ټول سره د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

که $a < b$ وي نو د a, b او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو:

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c$$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچني یا لويي علامې (ک) څخه په کار اخیستلو ولیکئ.
- د پورتنۍ غیر مساوي دواړه خواوې د ۴ په عدد کې ضرب کړئ، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنۍ غیر مساوات دواړه خواوې د ۴- په عدد کې ضرب کړئ، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟
- که د $4 < 7$ غیر مساوات دواړه خواوې معکوس کړو، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې بدلون راځي.

$$a < b \quad , \quad 0 < c \Rightarrow ac < bc$$

$$a < b \quad , \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

په بشپړ ټول د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

د a, b او c حقیقي عددونو لپاره لرو چې:

په یاد ولرئ چې د ویش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعنې که وغواړو چې یو عدد په a وریشو هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربو نو د غیر مساوات د ضرب د عملیې ټول خواص د

ویش په عملیه کې هم حقیقت لري.

پوښتنې

- د $9 < 3$ - په نامساوي کې د یو اختیاري عدد په جمع او تفریق کولو سره د غیر مساوات ټول خواص وڅیړئ.

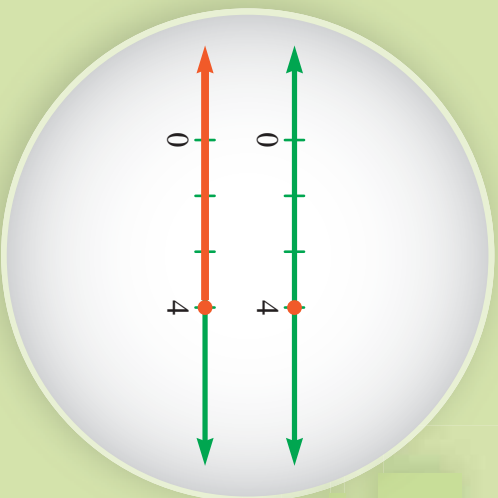
د لومړۍ درجه خطي غیر مساوات حل

د $x = 4$ او $x \leq 4$ دوه الجبري جملې

په پام کې ونیسئ.

د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والی او

څه توپیر وینئ.



فعالیت

- د $7 = x + 3$ معادله، د x د کوم عددي قیمت لپاره سمه ده.
- آیا د x په لاس راځلی قیمت څخه پرته بل قیمت x ته پیدا کولی شئ چې په معادله کې رښتینوالی ولري؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره د $7 < x + 3$ نامساوي سمه ده.
- یا د x په لاس راځلی قیمت څخه پرته، بل قیمت شته چې غیر مساوات صدق پری وکړی.

• د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنۍ غیر مساوات صدق کوی.

د پورتنۍ فعالیت په لیدو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.

هغه الجبري رابطې چې د $<$, $>$, $\leq$, او $\geq$ علامو په مرسته یو له بل سره اړیکې ولري او په هغه کې د متحول توان یو وي د لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کېږي.

لاندې نامساوي د یو مجهوله لومړۍ درجې نامساواتو بېلگه ده.

$$x + 3 < 0 \quad , \quad 2x - \frac{1}{3} > 3 - x$$

$$6x + 7 \leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5} + \sqrt{2} \geq 12$$

په بشپړ ټول د x د هغو قيمتونو پيدا کولو لپاره چې په غیر مساوات کې حقيقت ولري د غیر مساواتو د خواصو څخه په ګډه اخيستي سره غیر مساوات ته داسې بدلون ورکړو چې د غیر مساوات یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.

د غیر مساوات د حل څخه موخه داده چې د x لپاره هغه قيمتونه پيدا کړو چې غیر مساوات په ساحه کې حقيقت ولري دا ساحه د غیر مساوات د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x + 4 \geq -7$ غیر مساوات حل کړئ او د غیر مساوات د حل ساحه یې د عددونو په محور وښیئ.

حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د (-4) عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x + 4 - 4 \geq -7 - 4$$

$$x \geq -11$$



دویم مثال: د $2x + 1 > 5$ نامساوي حل کړئ.

حل: د غیر مساوات له خواصو څخه په ګډه اخيستي سره کو لای شو چې معلوم د غیر مساوات علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته نقل کړو:

$$2x + 1 > 5$$

د نامساوي له دواړو خواوو څخه د (-1) عدد تفریق کوو:

$$2x + 1 - 1 > 5 - 1$$

$$2x > 4$$

د نامساوي دواړه خواوې په 2 ویشو یا په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2} \times (2x) > \frac{1}{2} \times 4$$

$$x > 2$$

یعنې د ټولو هغو قيمتو لپاره چې له 2 څخه لوی وي غیر مساوات صدق کوي دا مطلب د



عددنو په محور داسې ښودلای شو.

پوښتنه: سوچ وکړئ چې ولې په لومړۍ مثال کې د عددونو په محور -11 په $(\bullet)$ او دویم مثال کې د عددونو په محور 2 په $(\circ)$ ښودل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې هغو علامو ته چې د غیر مساوات د حل ساحې ټاکلو لپاره پکار وړل شوی پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې د $ax + b < cx + d$ الجبري عبارت چې په هغه کې a, b, c, d حقيقي عددونه او x متحول وي، لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي غیر مساوات بلل کېږي. د غیر مساوات د حل لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

- د غیر مساوات د خواصو په پام کې نیولو سره معلوم یو اړخ او مجهول د غیر مساوات بل اړخ ته انتقالوو.

- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجهول حدونه خپل منځ کې جمع کوو.

- د متحول د عددي قیمت د پیدا کولو لپاره د غیر مساوات دواړه خواوې د متحول په ضریب د غیر مساوات د خواصو په پام کې نیولو سره ویشو.

درېم مثال: د $3x + 1 < x - 5$ نامساوي حل کړئ.

حل:

$$2x < -6$$

$$x < -\frac{6}{2}$$

$$x < -3$$



$$x + 5 < 3x - 1$$

$$x - 3x < -1 - 5$$

$$-2x < -6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$$

$$x > 3$$



څلورم مثال: لاندې غیر مساوات حل کړئ.

1- د لاندې غیر مساواتو حل پیدا او د هغوی دحل ساحه د عددونو په محور وښیئ:

a) $4x \geq 8$

b) $8 + x < 5$

c) $5 + x < 2x - 1$

d) $-3x - 4 > x + 7$

e) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

f) $0.5 - x < 3x - 1$

g) $2 - x \leq 2$

h) $2x - 5 - 7x > 0$

i) $15x + 6 > 0$

2- د 1325 د ویش پر 25 باید تر ټولو لوی عدد پیدا کړو، چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی یا ورسره مساوي شي، دا عبارت په غیر مساوات وښیئ او خارج قسمت یې پیدا کړئ.

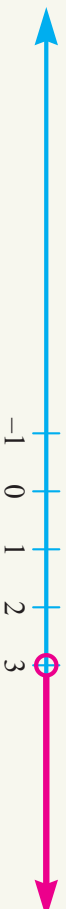
3- که تاسې ته وویل شي چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت لري دا عبارت په غیر مساوات وښیئ.



$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$$

د غیر مساوات د حل لپاره ډېر عددونه کولی شو په لاس راوړو چې دهغه غیر مساوات حل وي، داسې ټول حقیقي عددونه که د یو سټ په ډول په پام کې ونیسو، دې سټ ته د غیر مساوات حل وایي.

د مثال په ډول $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ نامساوي د حل سټ دی، ځکه هر هغه عدد چې له 3 څخه لوی وي په نوموړی نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ د ریاضي په ژبه داسې $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$ ښودل کېږي:



لیدل کېږي، چې د عددونو دا سټ د عددونو د محور یوه برخه ده، چې په ریاضي کې ورته ولاین (فاصله) یا انټروال وایي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوی هغه فاصله (انټروال) ده، چې له -1 څخه لوی یا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی یا ورسره مساوي دی.



دا فاصله په $[-1, 4]$ یا $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کېږي.

پاملرنه وکړئ چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د انټروال د پیل او پای ټکی په کې ګډون ولري، دې ولاین یا فاصلې ته ترلی فاصله وایي.

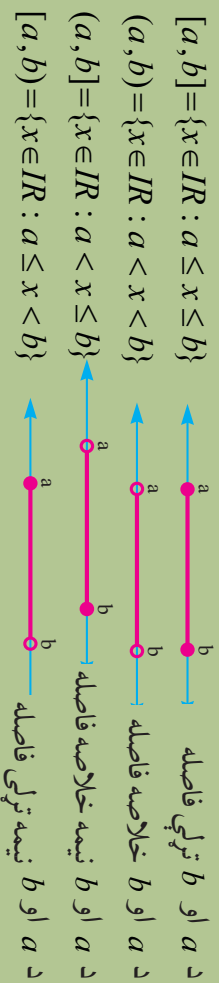
نو که په پورتنۍ فاصله کې د -1 او 4 ټکي ګډون ونلري دې فاصلې ته خلاص ولاین یا فاصله وایي او په لاندې ډول یې ښودلای شو:



که د ممکنې فاصلې د پای د ټکو څخه یوازې یو ټکی لکه 4 په فاصله کې شامل وي، هغې فاصلې یا واټن ته نیمه خلاصه یا نیمه تړلی واټن یا فاصله وايي، او هغه په لاندې شکل ښیو:



په عمومي ډول د هرو دوو a او b حقيقي عددونو چې $a \leq b$ څخه وي لرو:



پاملرنه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولی شو هغه فاصلې په پام کې ونيسو چې له یوې خوا څخه تړلی نه وي، په دې حالت کې فاصله یا واټن د ∞ علایمي څخه په ګټه اخیستنه چې هغه یې نهایت لولو ښیو، لکه د هغو عددونه سټ چې د 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي داسې ښیو:



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچني وي، عبارت دی له:



نو په عمومي ډول که a یو حقيقي عدد وي نو لرو چې:

- د a څخه لوی حقيقي عددونه $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- د a څخه لوی یا ورسره مساوي حقيقي عددونه $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- د a څخه کوچنی حقيقي عددونه وي $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- د a څخه کوچنی یا ورسره مساوي حقيقي عددونه $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

پوښتنې

1- لاندې انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو په محور یې وښیئ

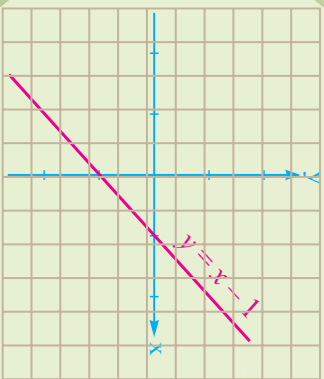
1) $[5, 7]$ 2) $(9, -3)$ 3) $[-2, 8]$ 4) $(6, 1]$ 5) $[2, \infty)$

2- لاندې ستونزه د انټروال په ډول ولیکئ:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$ 2) $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$

3) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 4\}$

د لومړۍ درجې دوه حده (ينوم) د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې x د کوم قیمت لپاره د $y = x - 1$ مستقیم خط د x د محور څخه د پاسه او د x د کوم قیمت لپاره مستقیم خط د x محور نه لاندې پروت وی.

فعالیت

- د $2x - 4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قیمت مساوي له صفر سره ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟

د پورتنۍ فعالیت رياضي بيان په لاندې ډول په جدول کې لښوړو:

x		$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$		-	0	+

په دې جدول کې لیدل کېږي چې د $2x - 4$ ینوم په $x = 2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي منفي علامه او په هغو قیمتونو کې چې له 2 نه لوی وي ینوم مثبت علامه لري.

لومړۍ مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ ینوم علامه وټاکئ:

حل: لومړۍ هغه قیمت پیدا کړو چې ینوم په هغې کې صفر وي.

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow x = 6$$

وروسته هغه قيمتونه چې بېنوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

$$-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x > -3 \Rightarrow x < 6$$

په همدې ترتيب هغه قيمتونه چې بېنوم په هغې کې منفي وي عبارت دی له:

$$-\frac{1}{2}x + 3 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x < -3 \Rightarrow x > 6$$

په لاس راغلي پايلې لاندې جدول کې راټولوو:

x	$x < 6$	6	$x > 6$
$-\frac{1}{2}x + 3$	+	0	-

يادونه: په عمومي ډول د $ax + b$ بېنوم د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قيمت په لاس راوړو چې بېنوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د ټاکلو جدول يې په لاندې ډول دی.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$	$a > 0 - 1$
$ax + b$	ته مخالفه علامه	0	سره ورته علامه	

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$	$a < 0 - 2$
$ax + b$	د a مطابقه علامه	0	د a مخالفه علامه	

پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ:

- 1) $3x - 9$
- 2) $7x - 2$
- 3) $\frac{3}{4}x - 1$
- 4) $0.5x + 10$
- 5) $2x - 4 + x - 1$
- 6) $\frac{1}{2}x + 3$

د کسري افادو د علامو تحليل او ټاکل

$$\frac{?}{?} = + \quad \frac{?}{?} = -$$

د a ، b حقيقي عددونو لپاره د $\frac{a}{b}$ کسر، څه وخت مثبت او څه وخت منفي علامه لري.

فعاليت

- د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده په پام کې ونیسئ.
- پورتني افاده په کوم حالت کې مثبت کېږي.
- پورتني افاده په کوم حالت کې منفي کېږي.
- د x په کوم قيمت سره د پورتني کسري افاده مساوي په صفر ده.
- ايا کولای شئ په نوموړی افاده کې د x په ځای (۱) وضع کړئ. ولې؟

د نوموړی افادي د صورت او مخرج د علامې د ټاکلو څخه وروسته کولای شو د نوموړی کسري افادي علامه د صورت او مخرج د علامو د ویش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

پوهېږو چې د $x < \frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه منفي او د $x > \frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قيمت پیدا کوو، چې $2x - 2 = 0$ شي.

په پایله کې د $x < 1$ څخه بینوم د مخرج علامه منفي او د $x > 1$ لپاره د بینوم د مخرج علامه مثبت ده.

پاملرنه وکړی په هغه قیمت کې چې د کسري افادي مخخړج صفر کېږي نه دی تعریف شوی، پورتنۍ بحث په لاندې ډول د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې داسې لاندو:

x	$x < -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3} < x < 1$	1	$1 < x$
$3x+5$	-	0	+		+
$2x-2$	-		-	0	+
$\frac{3x+5}{2x-2}$	+	0	-	نه دی تعریف شوی	+

نو د $\frac{-5}{3} < x < 1$ او $x > 1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادي اشاره مثبت او د $x < -\frac{5}{3}$

قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسر افادي اشاره منفي ده.

او د $x = \frac{-5}{3}$ قیمت لپاره کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول د کسري افادي د اشارې د تحلیل او ټاکلو لپاره لومړی د کسر د صورت او مخخړج اشاره ټاکو وروسته د صورت او مخخړج د اشارو او د ویش د حاصل څخه د کسري افادي اشاره په لاس راوړو.

مثال: د $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادي اشاره وټاکئ.

$$-x+3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x=0$$

x		0		3	
$-x+3$	+		+	0	-
x	-	0	+		+
$\frac{-x+3}{x}$	-	نه دی تعریف شوی	+	0	-

پوښتنې

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکئ.

a) $\frac{-x+1}{5+x}$

b) $\frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{7}$

کسري غير مساوات

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$$y > 0$$

$$y < 0$$

$$?$$

د x په کوم قیمت سره د مخامخ کسري افاده مثبت او د x په کوم قیمت سره افاده منفي ده؟

فعاليت

$$d \quad \frac{x-2}{4+2x} > 0 \quad \text{کسري غير مساوات په پام کې ونیسئ.}$$

- د پورتنۍ نامساوي د رښتينوالي لپاره د کسري افادي صورت او مخرج باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کوم قيمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادي صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کوم قيمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادي مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کوم قيمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادي صورت منفي دی؟
- د x متحول د کوم قيمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادي مخرج منفي دی؟
- د پورتنۍ فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قيمتونو لپاره $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیر مساوات سم دی؟

د پورتنۍ فعالیت د سرته رسولو څخه ولیل شول چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیر مساوات د حل

لپاره باید بېلابېل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسري نامساواتو د حل د ست پيدا کولو یوه بڼه

لاره د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی. د مثال په ډول د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیر مساوات د حل

ست پيدا کولو لپاره داسې عمل کوو:

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 & \Rightarrow & x=2 \\ 4+2x &= 0 & \Rightarrow & x=-2 \end{aligned}$$

x		-2	2
$x-2$	-		+
$4+2x$	-	0	+
$\frac{x-2}{4+2x}$	+	نه دی تعریف شوی	+
	د نامساوي حل	د نامساوي حل	د نامساوي حل

د علامو د تحلیل او ټاکلو جدول ته په پاملرنې سره لیدل کېږي، چې هغه قیمتونه چې له $(x < -2)$ او له $(x > 2)$ وي افاده مثبت ده، او دهغو قیمتونو څخه چې له (-2) څخه لوی او له (2) کوچنی $(-2 < x < 2)$ وي منفي ده. په پایله کې د غیر مساوات د حل سټ عبارت له $x < -2$ او $x > 2$ یا $\{x \in R : x < -2\} \cup \{x \in R : x > 2\}$ یا $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3} \geq 1$ کسري غیر مساوات حل کړئ.

حل: د غیر مساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره لومړی کسري افاده یو وار د صفر څخه کوچنی یا لویه لیکو:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{5x+3} &\geq 1 &\Rightarrow \frac{2x}{5x+3} - 1 &\geq 0 \\ \frac{2x - (5x+3)}{5x+3} &\geq 0 &\Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$-3x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$5x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

اوس د غیر مساوات د علامې د ټاکلو له جدول څخه د غیر مساوات حل په لاس راوړو.

x	-1	$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	+	-	-
$5x+3$	-	0	+
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	-	+	نه دی تعریف شوی
	د نامساوي حل	د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی

له پورتنۍ جدول په پاملرنې سره د غیر مساوات حل عبارت دی له: $\{x \in R : -1 \leq x < -\frac{3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره په لاندې ډول پرمخ ځو:

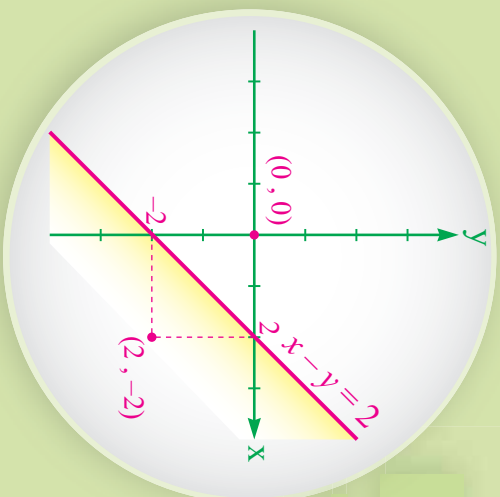
- غیر مساوات داسې لیکو چې له صفر څخه کوچنی یا لویه وي.
- غیر مساوات د علامو د ټاکلو له جدول څخه د غیر مساوات د حل سټ په لاس راوړو.

پوښتنې

د لاندې غیر مساواتو د حل سټ پیدا کړئ.

- 1) $\frac{-x-9}{2x+4} < 0$
- 2) $\frac{6x+7}{7-6x} \leq 0$
- 3) $\frac{x+10}{2x-3} \geq 0$
- 4) $\frac{7x-2}{3-2x} > 3$

خطي دوه متحولہ غیر مساوات



د $x - y = 2$ مستقیم خط د وضعیہ کمیانو مستوی په دوه پاسني او لاندني ناحیو ویشي.
د کرمي ناحیې د ټکو مختصات په $x - y < 2$ غیر مساوات کې صدق کوي.

د $x - y < 2$ نامساوي چې په هغه کې د x او y متحولین لومړی درجه دی یو خطي دوه متحولہ غیر مساوات بلل کېږي.

فعالیت

- د (x, y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ چې په $x - y < 2$ غیر مساوات کې صدق وکړي.
- خوږمه مرتبې جوړې پیدا کولای شئ چې په پورتنۍ غیر مساوات کې حقیقت ولري.

• ایا کولای شئ چې نورې مرتبې جوړې پیدا کړئ چې په پورتنۍ غیر مساوات کې صدق وکړي.

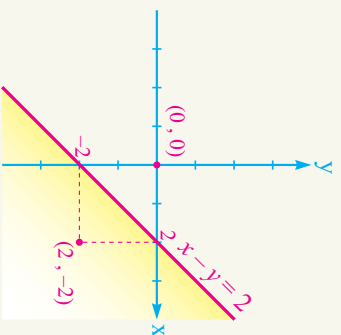
په پورتینو حالاتو کې ویلای شو چې:

د $c < ax + by$ نامساوي چې په هغه کې a, b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ یا $b \neq 0$ وي خطي دوه متحولہ غیر مساوات بلل کېږي.

د دې غیر مساوات د حل سټ د هغو عددونو مرتبې جوړې دی چې په نامساوي کې صدق کوي.

لومړی مثال: د $x - y < 2$ دوه متحولہ غیر مساوات د حل سټ پیدا کړئ.

حل: د دې غیر مساوات د حل لپاره لومړی $x - y = 2$ کرښه د وضعیہ کمیانو په مستوي کې رسمو. لیدل کېږي چې د $x - y = 2$ مستقیمه کرښه د وضعیہ کمیانو مستوي په



دوو ناحیو ویشي د دې لپاره چې وپوهېږو د کومې ناحیې د عددونو مرتبې جوړې په غیر مساوات کې صدق کوي له هرې ناحیې څخه یوه مرتبه جوړه ټاکو او په غیر مساوات کې یې وضع کوو.

د مثال په ډول $(0, 0)$ مرتبه جوړه په غیر مساوات کې صحیح دی.

$$0 - 0 < 2 \Rightarrow 0 < 2$$

نو هغه ټکي چې د مستقیمې کرښې پورته خوا ته دی د غیر مساوات حل دی.

د غیر مساوات د حل سټ د ښودلو لپاره هغه اړخ د مستقیمې کرښې تورو چې په غیر مساوات کې سم والی نه لري.

پوښتنه: څو نور ټکي د مستقیمې کرښې څخه پورته او ښکته خوانه وټاکي پورتنۍ پایله وڅیړئ.

دویم مثال: د $2x + 3y < 6$ نامساوي د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $2x + 3y < 6$ کرښه د

وضعیه کمیاتو په مستوي کې رسمو وروسته د

غیر مساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره د مستقیم

د پاسه یا ښکته خوا د یوه ټکي مختصات ټاکو

او په غیر مساوات کې یې وضع کوو که حقیقت

یې درلود هغه اړخ د غیر مساوات حل دی او بل

عکس نه دی.

لکه د $(0, 0)$ د وضعیه کمیاتو مبدا مرتبه جوړه

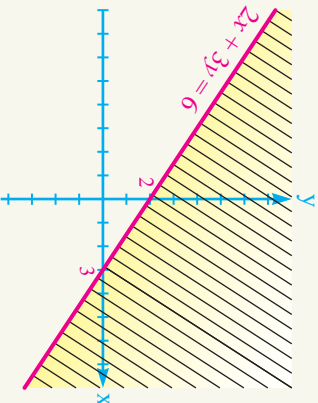
په پام کې نیسو:

$$2x + 3y < 6$$

$$2 \times (0) + 3 \times (0) < 6$$

$$0 < 6$$

څرنگه چې نوموړی ټکی مختصات په غیر مساوات کې حقیقت لري نو د کرښې لاندې خوا ټکي د غیر مساوات د حل سټ دی.



پوښتنې

1) $3x - 2 < 5x + y$

2) $2y < 3x$

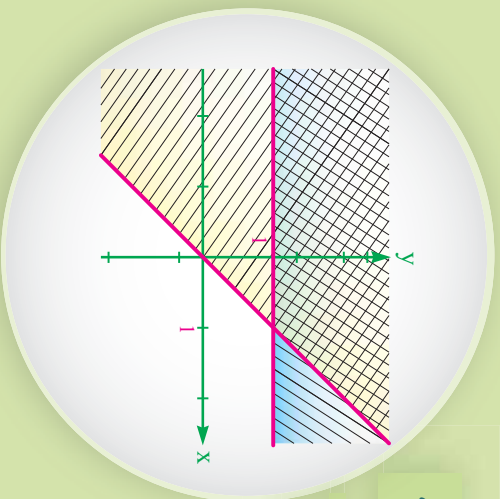
3) $x + y > 0$

4) $2x - 6y \geq 8x + 4y$

5) $x + y < 0$

6) $5x - 3y < -1$

د دوه متحول له خطي غیر مساواتو سیستمونه

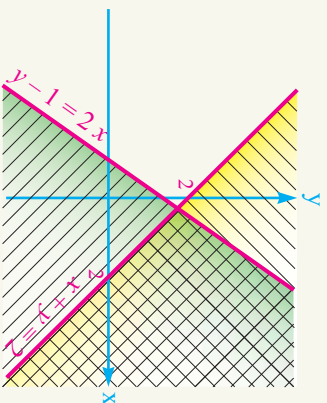


د لاندې غیر مساواتو د حل سټ پیدا کړئ.
ایا کولای شئ اټکل وکړئ چې مخامخ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه رابښي.

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ y - 1 > 2x \end{cases}$$

د غیر مساواتو سیستم چې په هغه کې دوه خطي دوه متحول له غیر مساوات دی

د غیر مساوات سیستم بلل کېږي.
د غیر مساواتو سیستم له حل څخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوړې پیدا کړو چې په یوه وخت کې په دواړو غیر مساواتو کې صدق وکړي.
لومړی د هر یوه نامساوي حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړو.
هغه ناحیه چې ګډه نه ده خط، خط شوی د غیر مساوات همزمان د حل په سټ کې ګډون لري او دا ناحیه د غیر مساوات د سیستم حل دی.



د $x + y = 2$ رسمولو لپاره که $x = 0$ وړي $y = 2$ او که $y = 0$ وي نو $x = 2$ کېږي او د $2x = y - 1$ کرښه کې که $x = 0$ وي $y = 1$ او که $y = 0$ وي نو $x = -\frac{1}{2}$ سره کېږي.

د دوه متحول له خطي غیر مساوات د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو:
لومړی د هر یوه دوه متحول له خطي نامساوي د سیستم حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو.
هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو غیر مساواتو د حل د سټ یوه برخه وي د سیستم حل دی.

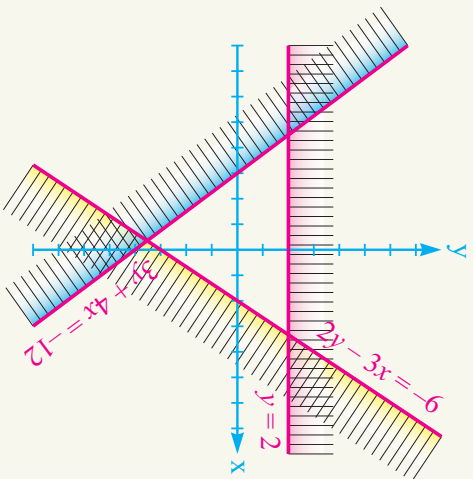
مثال: د لاندې غیر مساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y - 3x > -6 \\ y - 2 < 0 \\ 3y + 4x > -12 \end{cases}$$

$$3y + 4x = -12$$

حل: لومړی د پورتنۍ غیر مساوات هره یوه کرښه رسموو یعنې:

$$2y - 3x = -6 \quad \text{او} \quad y - 2 = 0$$



د $2y - 3x = -6$ رسمولو لپاره که $x = 0$ وي $y - 2 = 0$ د $y - 2 = 0$ گراف لپاره که $x = 0$ وي $y = 2$ کيږي او د $3y + 4x = -12$ کرښې د رسمولو لپاره که $x = 0$ وي $y = -4$ کيږي چې د نوموړو قیمتونو په مرسته یې گراف په مخامخ بڼه رسموو.

وروسته د هرې یوې غیر مساوات د حل ساحه په بیل بیل ډول ټاکو. د ورکړل شویو نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې نه دي توريږي شوي ناحیې په شکل لیدل کېږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ د گراف په مرسته په لاس راوړئ.

1)
$$\begin{cases} x < 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2x + 3y < 9 \\ 5x - 2y > 5 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x < 3 \\ y > 2 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 2x - 3y < -3 \\ 5x - 2y > 9 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x + y < 4 \\ x - y < 3 \\ 5x - y > 1 \end{cases}$$

• که چېرې عددونه د دې علامو ($<$, $>$, $\geq$) په مرسته یو له بل سره اړیکه ولري د غیر مساوات په نامه یادېږي.

• که د یوه غیر مساوات دواړو خواوو ته یو حقیقي عدد ور جمع یا تفریق کړو په نامساوي کې بدلون نه راځي.

• که د یوه غیر مساوات دواړه خواوې په یوه مثبت حقیقي عدد د صفر خلاف ضرب یا تقسیم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.

• که د یوه غیر مساوات دواړه خواوې په یوه منفي حقیقي عدد د صفر خلاف ضرب یا وویشل شي د غیر مساوات لورې بدلون کوي.

ترلی انټروال $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

خلاص انټروال $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

نیمه خلاص انټروال $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

نیمه ترلی انټروال $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

• د یوې کسري افادې د علاقمې د ټاکلو لپاره لومړی د صورت او مخرځ علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د ویش حاصل په لاس راوړو.

• $3 \leq 5$ دوه متحولې خطي غیر مساوات د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو. لومړی د هر دوه متحولې خطي غیر مساوات د سیستم حل د وضعیې کمیاتو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو غیر مساواتو د حل د ست یوه برخه وي د سیستم حل

دی.

● په لاندې سوالونو کې د هر سوال لپاره څلور ځوابه ورکړل شوی دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1- د لاندې نامساواتو څخه کوم یو سم دی:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \leq 2 - \frac{1}{3} \quad b) \frac{3}{2} > \sqrt{2} \quad c) \sqrt{9+16} \geq 5 \quad d)$$

د a, b او c څوابونه

$$a) \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} \quad b) \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$$

$$c) \{x \in \mathbb{R} : x \leq 8\} \quad d) \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$$

$$a) [-2, \infty) \quad b) (-\infty, 2]$$

$$a) \frac{1}{b} < -\frac{1}{a} \quad b) \frac{1}{b} < -\frac{1}{a}$$

$$a) (-3, 3) \quad b) (-\infty, 3)$$

● تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- $ax + by < 0$ نامساوات کې د ټولو هغه سټ چې په نامساوات کې

صدق وکړي د پورتنۍ نامساوات د حل سټ بلل کېږي.

۲- د $[4, 5]$ انټروال د په نامه یادېږي.

۳- د $2x + 4$ بینوم د قیمتونو لپاره یادېږي.

۴- د $x + \frac{1}{2}$ بینوم د قیمتونو لپاره مثبت کېږي.

$$0 - x - \frac{1}{5} \leq 2x + 5 \text{ نامساوي د حل سټ عبارت دی له } \dots\dots\dots$$

• د لاندې جملو څخه کومه یوه سمه دهغې په مخ کې د (س) توري او د ناسمې په مخ کې د (ن) توري وليکئ.

- 1-) د یوې غیر مساوات د حل سټ یو عنصر لري.
- ۲-) د $\{x \in R : 2 \leq x < 5\}$ یو تړلی انټروال دی.
- ۳-) د غیر مساواتو د سیستم د حل سټ د وضعیه کمیالو د مستوي یوه برخه ده.
- 4-) د خطي غیر مساوات د حل سټونه بې شمیره دی.
- 0-) څرنگه چې $3 < -2$ څخه دی نو له دې ځایه دا پایله $\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

1- د لاندې غیر مساوات گانو حل په لاس راوړئ.

- a) $\frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$
- b) $x-2 < 3(2x-9)$
- c) $(x-3)(x+3) < 0$
- d) $\frac{3x+4}{x} - 1 < 0$
- e) $1 - \frac{2}{x} \leq 3$

2- لاندې انټروالونه د عددونو پر محور وښئ.

- a) $[-1, 2]$
- b) $(-2, 1]$
- c) $[-1, 1)$
- d) $(-2, 2)$

-3- د لاندې عددونو ستونځه د انټروال په بڼه وليکئ او د عددونو پر محور رښتي وښتئ.

a) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 5\}$

a) $\begin{cases} y > x \\ x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 6 \\ 3y < 2 \end{cases}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 2\}$

b) $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$

-4- د لاندې غير مساوات د سيستم حل پيدا کړئ:

c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$

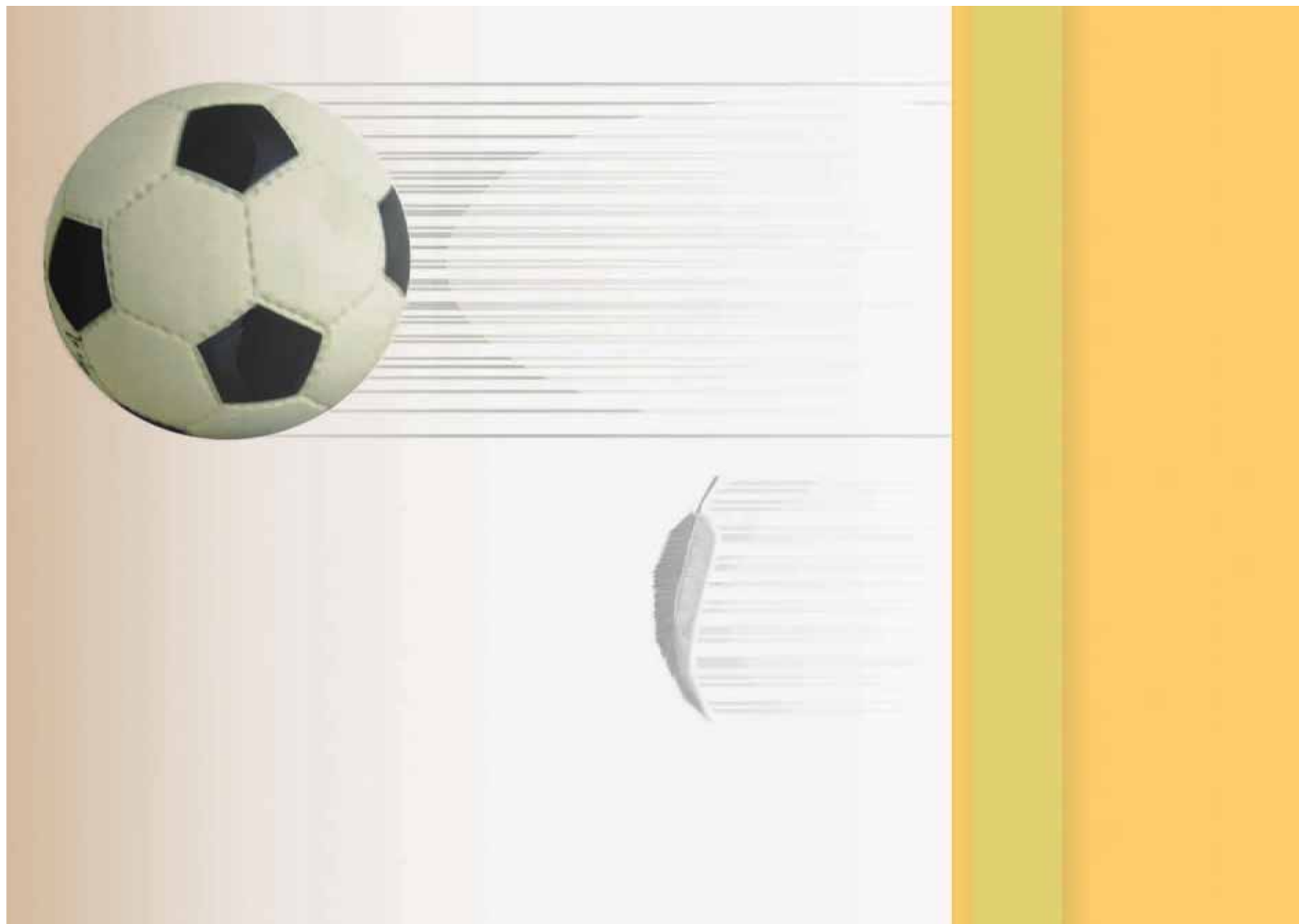
e) $\begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$

اووم چیرگی

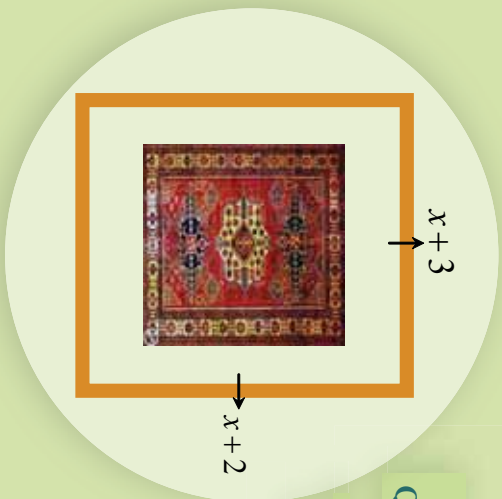
دویمه درجه یو مجهوله

معادله



دویمه درجه یو مجهول له معادلې Quadratic Equation

که چیرې یوه کوټه د یوې مربع شکلې قالین په واسطه داسې فرش شي چې د کوټې اوږدوالی $3m$ او سوري $2m$ په اندازه د قالین د خنډې څخه زیاده وي، لکه مخامخ شکل، وریاست چې د کوټې مساحت څومره دی؟



فعالیت

- الجبري افاده تعريف کړئ.
- معادله تعريف کړئ.
- د یو مجهول له لومړۍ درجې معادلې یوه بېلگه ولیکئ.
- د یو مجهول له لومړۍ درجې معادلې عمومي شکل ولیکئ.
- د $(x+3)(x-2) = 0$ معادلې د قوسونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.
- د پورتنۍ معادلې درجه د $3x - 1 = x + 4$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.
- هغه معادلې چې یو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي یو مجهول دوه درجه معادله بلل

کېږي، چې عمومي شکل یې $ax^2 + bx + c = 0$ ، چې $a \neq 0$ ، b ، او c حقیقي اعداد او x مجهول بلل کېږي که چیرې $b = 0$ یا $c = 0$ وي په دې حالت کې دې ډول معادلې ته نیمګړی دویمه درجه معادله وايي.

لومړی مثال: یو تار چې یو متر اوږدوالی لري غواړو د هغې څخه یو مستطیل چې مساحت یې 600cm^2 دی جوړ کړو د دې مستطیل اوږدوالی او سوري په لاندې څرخګه وټاکو.

حل: که د مستطیل اوږدوالی x او سوري په y وښود مستطیل محیط د $100 \dots 2(x+y)$ اړیکې او مساحت یې $600 \dots x \times y$ اړیکې څخه په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(x+y) = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x+y = 50 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \quad \text{I} \\ &\Rightarrow \quad \quad \quad \text{II} \end{aligned}$$

د I معادلي څخه د y قيمت د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x) = 600$$

$$50x - x^2 = 600$$

څرنگه چې په پورتنۍ معادله کې د x درجه دوه ده نو نوموړی معادله دويمه درجه ده د معادلو د حلولو پيدا کولو لپاره نيلايلي لارې شته چې هغه تر څېړنې لاندې نيسو.

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوړی چې مربع يې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زياته وي. **حل:** که چيرې عدد په x ونوموو: نو پورتنۍ بيان د رياضي په بڼه داسې ليکو:

$$x^2 = 6 + x \quad \text{يا} \quad x^2 - x - 6 = 0$$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکي لوست کې وڅېړو.

دريم مثال: په لاندي معادلو کې د عمومي شکل له مخې د a , b او c ضريبونو قيمتونه وليکئ. **حل:**

$$a) \quad 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$b) \quad 3x - x^2 = 4$$

$$c) \quad 4x^2 - 1 = 0$$

$$d) \quad 7x^2 = 49$$

$$e) \quad x^2 - 4 = 0$$

$$f) \quad \frac{3}{4} - x^2 = \frac{2}{3}x$$

جزء	معادلي	د a ضريب	د b ضريب	د c ضريب
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	-4	1
b	$3x - x^2 = 4$	-1	3	-4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	-1
d	$7x^2 = 49$	7	0	-49

پوښتنې

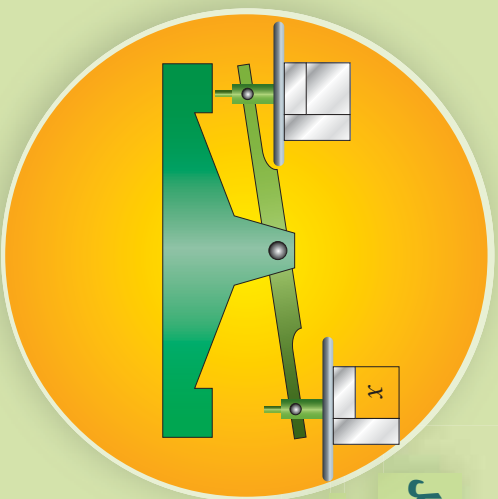
1- په لاندي معادلو کې مکملې او نيمگړې دوهم درجه يو مجهوله معادلي په گوته کوئ.

$$a) \quad 6 - 2x + x^2 = 0 \quad b) \quad 5x^2 - 3x + 1 \quad c) \quad \sqrt{2}x^2 - 4x = 0 \quad d) \quad -x^2 = 3$$

2- په لاندي معادلو کې د a , b او c ضريبونه وښئ.

$$a) \quad 6x^2 - 4x = 2 \quad b) \quad 3x - 4 = x^2 \quad c) \quad 4x - x^2 - 6 = 4x^2$$

د دویمه درجه یو مجهول معادلې حل



آیا کولای شي چې د x لپاره داسې قیمت پیدا کړئ چې تله په تعادل کې راشي.

فعالیت

x	$2x + 4$	$3x - 1$
-3		
-2		
0		
5		

وڅېړئ.

• د $2x + 4 = 3x - 1$ معادلې حل پیدا کړئ.

• پورتني مساوات د x د بېلابېلو قیمتونو لپاره په مخامخ جدول کې

x	$x^2 - 4x + 3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	

• د جدول او پاسنۍ پوښتنې په پام کې نیولو سره توضیح ورکړئ چې د معادلې د حلولو پیدا کول یعنې څه؟
 • مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلې حلوله په لاس راوړئ.

هغه قیمتونه چې په یوه دویمه درجه معادله کې برابر والی راولي د یو مجهول دویمې درجې معادلې حل بلل کېږي.

لومړی مثال: هغه عدد پیدا کړئ چې مربع یې د 12 واحدو په اندازه له عدد څخه ډېره وي.
حل: که چېرې عدد ته x ووايو نو الجبري عبارت داسې ښیي:

$$x^2 = x + 12$$

څرنگه کولای شو چې د پورتنۍ مساوات څخه د هغې حل پیدا کړو.

که چیرې $x = 1$ به معادله کې وضع کړو نو لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ د 13 عدد او ښی اړخ ته یې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې د $x = 2$ قیمت په وضع کولو سره لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته 14 او ښی اړخ ته یې د 4 عدد په لاس راځي او د $x = 3$ په وضع کولو سره لیدل کېږي چې ښی اړخ ته د 15 عدد او ښی اړخ ته د 9 عدد دی.

په همدې ترتیب د نورو قیمتونو په وضع کولو سره لکه $x = 4$ لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته د 16 عدد او ښی اړخ ته هم 16 عدد په لاس راځي لیدل کېږي، چې د $16 = 16$ مساوي کېږي نو $x = 4$ د معادلې یو حل دی.

x	x^2	$x + 12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنۍ لارې لښیز چې د معادلې حل د پیدا کولو لپاره مو ترې گټه واخیسته کولای شو په مخامخ جدول کې داسې ولیکو.
یا کولای شو چې د دویمې درجې معادله د حل لپاره یوه بشپړه لاره پیدا کړو.

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ، چې دهغې د مربع جمع د 1 سره مساوي په صفر شي.

حل: د پاسني بیان الجبري افاده عبارت ده له: $x^2 + 1 = 0$

د پورتنۍ لارې په څېر د اټکل شویو اعداد په وضع کولو سره د معادلې د حل په لټولو پیل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتنۍ جدول په څیر مخامخ جدول په پام کې نیسو.

د دې جدول څخه لیدل کېږي چې نشو کولای تعادل برقرار کړو یعنې د x لپاره داسې قیمت نشو پیدا کولای، چې د معادلې دواړې خواوې مساوي کړي. له بلې خوا د معادلې څخه څرگندېږي هر کله چې یو عدد مربع کړو او یو ورسره جمع کړو هیڅ وخت مساوي په صفر نشي کېدلای؛ نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

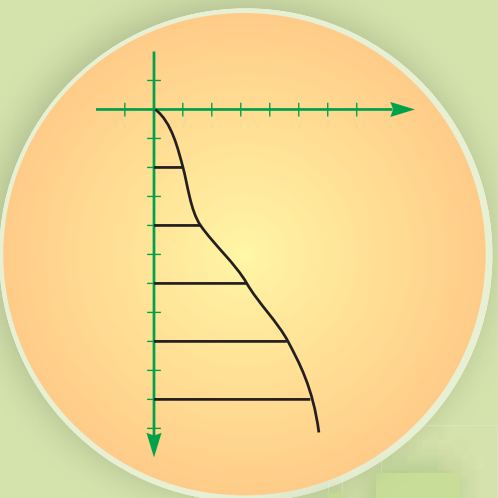
پوښتنې

1- یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله ولیکئ چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلې حل کړئ.

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 = 0$

غير خطي اړيک (رابطي)



ډاکټران د يوه ماشوم د ونې (قد) اوږدوالی په بېلابېلو وختونو کې په مخامخ گراف کې څېړي. ايا تاسې تر اوسه پورې د خپلې ونې (قد) د اوږدوالی بدلون ته سوچ کړی دی چې په بېلابېلو وختونو کې څومره ورو؟

فعاليت

- د يوې مربع د ضلعي د اوږدوالی او مساحت تر منځ اړيکه په پام کې ونيسئ، د مربع د ضلعي اوږدوالی په x او مساحت يې په y ښو.
- د x او y اړيکه په يوه معادله کې ونښئ.
- مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د پورتنیو مرتبو جوړو ټکي وټاکئ او يو بل سره يې ونښلوئ.
- د دقيق گراف رسمولو لپاره، x ته ډېر سره نږدی قيمتونه ورکړو، لاندې جدول پوره کړی د پرېته په څېر ټکي د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ او گراف يې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتنی جدول په مرسته لاندې جدول په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	-3	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-2	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	
$y = x^2$															0

- د پورتنیو جدولونو څخه په گټه د $y = x^2$ معادلې گراف په ډېر دقت رسم کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

پایله: په پورتنۍ فعالیت کې مو ولیدل چې د $y = x^2$ معادلې گراف مستقیم نه دی.

مثال: د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ سیستم معادلانو گراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ او

گډ حل یې پیدا کړئ.

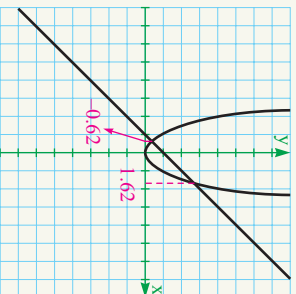
حل: د هغو لارو څخه چې مخکې مو د گراف د رسمولو لپاره ترې ګټه واخیسته د پورتنیو معادلو د گرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو جدولونه ترتیب او مرتبې جوړې یې د مختصاتو په سیستم کې پس له ټاکلو د معادلو گرافونه رسموو.

د $y = x^2$ لپاره لرو:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

د $y = x + 1$ لپاره:

x	0	1
$y = x + 1$	1	2



د گراف له مخې د گډ حل د ټکو ورژنې قیمتونه یې مساوي په:

$$x_1 = 1.62, \quad x_2 = -0.62$$

پوښتنې

د 1- سیستم د معادلانو گراف رسم کړئ.

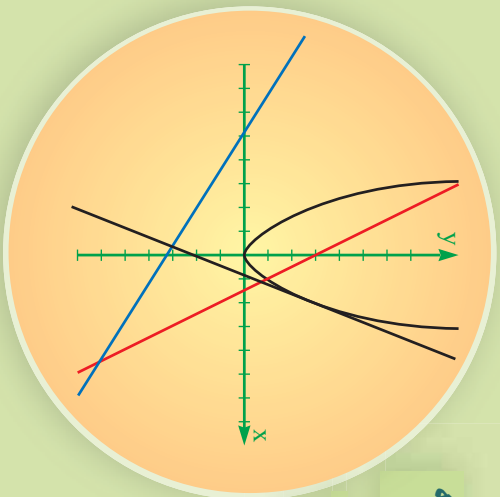
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

د 2- سیستم د معادلانو گراف رسم کړئ.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

د دویمې درجې معادلې حل په هندسي لاره (طریقه)

په مخامخ شکل کې مستقیم خط له ورکړل شوی منحنی سره په څو حالتونو کې قرار لري؟



فعالیت

- یاد $x^2 - 6x + 7 = 0$ معادله کولای شو چې داسې $x^2 = 6x - 7$ ولیکو؟
- که چېرې نوموړی مساوات له $y = x^2 = 6x - 7$ سره مساوي وي نو $y = x^2$ او $y = 6x - 7$ معادلو د سیستم گراف د مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ.
- د پورتنی سیستم گرافونه یو بل په څو نقطو کې قطع کوي؟
- د پورتنی سیستم حل د گرافونو د تقاطع له ټکو سره څه اړیکه لري.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- هره دویمه درجه معادله کولای شو چې د $y = x^2$ معادلې او د $y = ax + b$ کرښه ایزو معادلو په څیر ولیکو.

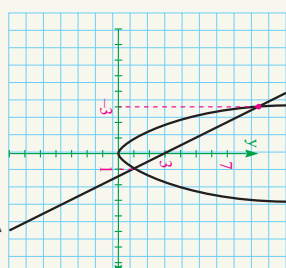
- د x ټکی د پریکړې مختصه، په هغه صورت کې چې وي) د دویمې درجې معادلې حل دی د پورتنی کرښې په مرسته د دویمه درجه معادلې حل پیدا کول د هندسي حل په نامه یادېږي.

نوموړی مثال

حل: $0 = x^2 + 2x - 3$ معادلې حل په هندسي لاره پیدا کړئ.

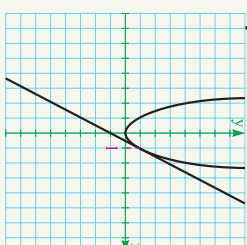
$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4
x	0	3			
y	3	-3			



له شکل څخه لیدل کېږي چې مستقیم خط منحنی په دوو ټوکو کې قطع کوي چې د پریکړې ټکي د x مختصه د دویمه درجه معادلې حل دی یعنې $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
دویم مثال: د $x^2 + 2x + 3 = 0$ معادلې حل د هندسي لارې په مرسته پیدا کړئ.
حل: د $y = x^2$ معادلې او د $y = 2x - 1$ مستقیمې کرنيې شکلونه رسمو.

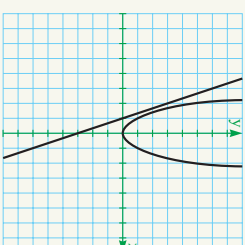
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9
x	0	-1					
y	-1	-3					



لیدل کېږي، چې کرښه له منحنی سره په یوه نقطه کې تماس ده چې ددې نقطې مختصه (قیمت) د معادلې حل دی.

دویم مثال: د $x^2 + 3x + 3 = 0$ معادلې حل په هندسي لاره پیدا کړئ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9
x	0	-1					
y	-3	0					



لیدل کېږي، چې مستقیم خط منحنی نه قطع نو دویمه درجه معادله حل نه لري.
یادونه:

که چیرې منحنی په دوو ټوکو کې پریکړې کړي معادله دوه حله لري.
که چیرې منحنی په یوه ټوک کې پریکړې کړي معادله یو حل لري.
که چیرې منحنی قطع یا غوڅ نه کړي، معادله حل نه لري.

پوښتنې

- 1- د لاندې معادلو حل په هندسي لاره (طریق) پیدا کړئ.
- a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 - 6x + 8 = 0$ c) $x^2 - 5 + 7 = 0$

د یو مجهول دوهمه درجه معادلو حل د تجزیه په لاره (طریقه)

د دوو عددونو د ضرب حاصل څه وخت
مساوي په صفر دی.

$$0 = x \times x$$

فعالیت

- که a او b دوه حقیقي عددونه وي څه وخت $a \times b = 0$ کېږي.
- د $(2x+3)(x-1)$ د ضرب حاصل په پام کې ونیسئ، ایا ویلای شئ چې څه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $x^2 + x - 3 = 0$ معادله د $(x+3)(x-1)$ حاصل ضرب سره څه اړیکه لري؟
- د مخکیني لارې (طریقي) څخه په ګټه اخیستې سره د $x^2 + x - 3 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ او د $(x+3)(x-1) = 0$ معادلې له حلونو سره یې پرتله کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول په لاس راوړو:

پایله: که وکړای شو، چې دویمه درجه معادله د دوو خطي افادو د ضرب د حاصل په شکل

واړو نو په دې حالت کې د معادلې حل ساده کېږي، چې په لاندې ډول عمل کوو:

- د اعدادو له خاصیتونو څخه پوښو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغوی د ضربې اجزاوو څخه یو مساوي په صفر وي، دا مسئله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.

- د هرې خطي الجبري افادې حل چې د یوې دوهمې درجې معادلې مساوي ده، د دویمې درجه معادلې حل دی.

لومړۍ مثال: د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حل د تجزيې په مرسته په لاس راوړئ.
حل: د $x^2 - 7x + 6$ له تجزيې څخه لرو چې:

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$$

د نوموړې ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغو فکتورونو څخه مساوي په صفر

$$1) \quad x-1=0 \Rightarrow x_1=1$$

وي او یا دواړه صفر وي؛ یعنې:

$$2) \quad x-6=0 \Rightarrow x_2=6$$

نو 1 او 6 د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حلونه دي.

دویم مثال: د $2x^2 - 5x - 3 = 0$ معادلې حل د تجزيې په لاره (طریق) پیدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکتورونو تجزیه کړي، چې د x^2 ضرب (1) وړخو د هغو معادلې چې د x^2 ضرب یې یو نه وي په لاندې ډول یې بدلوو ددې لپاره چې د x^2 ضرب یوه کومه مربع شي د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضرب کې ضربوو:

$$4 = 2x^2 - 5x - 3$$

$$2A = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$2A = (2x+1)(2x-6)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A = (2x+1)(x-3)$$

$$1) \quad 2x+1=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$2) \quad x-3=0 \Rightarrow x_2 = 3$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

پوښتنې

لاندې معادلې د تجزيې په لاره (طریقه) حل کړئ.

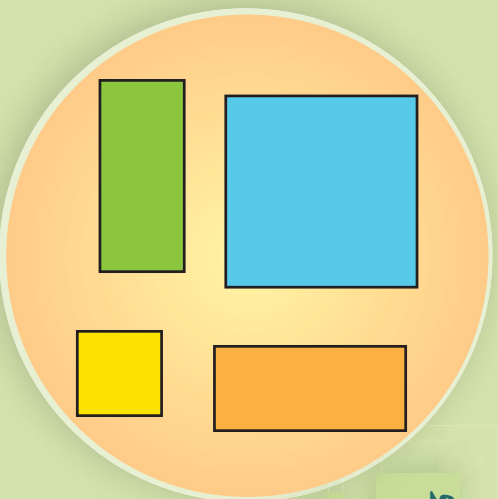
$$1) \quad x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$2) \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$3) \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

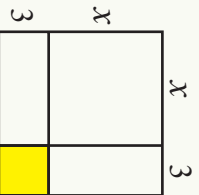
د دویمې درجې یو مجهول معادلو حل د تکمیل مربع په طریقه

هڅه وکړئ چې د دې شکلونو له یو ځای
کیدو څخه یوه لویه مربع جوړه کړئ.



فعالیت

- د یوې مربع د ضلعي اوږدوالی څومره دی.
- د هرې برخې مساحت د هر مستطیل او مربع په مخ ولیکئ.
- د $x^2 - 40x + 6x = 0$ معادله داسې ترتیبو چې متحول لرونکی حدونه یو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته چاڼ شي.
- متحول لرونکی الجبري افاده څه اړیکه له رنگ شوی مساحت سره لري؟



- د مستطیلونو د مساحت عددي ضریب د دویمه درجې معادلې د x له ضریب سره څه اړیکه لري.
- د یوې مربع مساحت څومره دی.

- د دې لپاره چې د متحول لرونکی الجبري افادې د لویې مربع د مساحت سره برابره شي کوم عدد د تسلاوي دواړو خواوو ته ورزیات کړو.
- د په لاس راغلی اړیکې څخه د قیمت (د دویمې درجه معادلې حل) په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره (طریقه) د دویمه درجه معادلې لپاره پیدا کړله. د دې طریقې په پوره کیدو سره د دویمې درجه معادلو په حل کې په بشپړه (عمومي) توګه ګټه اخیستل کېږي، په دې تګلاره (روش) کې د $x^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله په $q^2 = (x + p)^2$ بڼه بدلیږي چې د تجزیني پړاوونه یې عبارت له:

• لومړی P د x د ضرب د نيمایي سره وضع کوو يعنې $P = \frac{b}{2}$

• وروسته $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + q^2$ وضع کوو.

• په پای کې د $x + p = q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2 + 2x - 8 = 0$ معادله د تکميل مربع په تګ لاره حل کړئ.

حل: لومړی معادله په لاندي ډول لیکو:

$$x^2 + 2x = 8$$

د x د ضرب نيمایي په لاس راوړو، مربع يې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 9$$

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

يادونه: ټولې دويمه درجه معادلې نشو کولای په دې تګ لاره حل کړو ځکه دا لاره هندسي تعبير ته اړتيا لري؛ نو ځکه په دې لاره نشو کولای هغه معادلې چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندي معادلې د تکميل مربع په طريقه حل کړئ.

$$a) x^2 + 8x - 24 = 0 \quad b) x^2 - x - \frac{5}{4} = 0 \quad c) x^2 - 6x - 13 = 0$$

د محمد بن موسی فورمول یا د تکمیل مربع د طریقې توسعه

د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب ویشو نو ووايست چې مخامخ مساوات حقیقت لري؟ که نه؟

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

مو لیدل چې دویمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2 + bx + c = 0$ لیکو چې په هغې کې a, b او c حقیقي اعداد او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

• د $0 = ax^2 + bx + c$ معادلې دواړه خواوې په a ویشو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

• ثابت عددونه د معادلې یو خوا او مجهول حدونه د مساوي بلې خوا ته سره چاړوو د x د

ضریب د نیمايي مربع د معالې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د لنډې لیکنې لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ سره ښیرو.

فعالیت

هره دویمه درجه معادله چې $0 = ax^2 + bx + c$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه وړایئ:

1- که $0 = 4ac - b^2$ وي؟ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $0 < 4ac - b^2$ وي؟ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $0 > 4ac - b^2$ وي؟ نو آیا معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل لري؟

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

لومړۍ پایله: د $0 = ax^2 + bx + c$ دویمې درجه معادلې چې a, b او c حقیقي عددونه

او $a \neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ د قاسمې په نوم یادېږي.

1- که $\Delta > 0$ وي معادله دوه بېلابېل حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

2- که $\Delta = 0$ وي معادله دوه مساوي یا مضاعف حلونه لري چې عبارت له:

3- که $\Delta < 0$ وي معادله په حقيقي اعدادو کې حل نه لري.

دویمه پاڼه: د حلونو د جمع او ضرب حاصل b $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او د ضرب له حاصل څخه کولای شو د دویمې درجه معادلې په تجزیه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قیمت پیدا کوو:

څرنگه چې $\Delta = 0$ ده نو معادله دوه حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

دویم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4 \times 9 \times 4) = 144 - 144 = 0$$

څرنگه چې $\Delta = 0$ ده معادله دوه مساوي حلونه لري.

$$x_1 = x_2 = \frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}$$

درېم مثال: د $5x^2 + 3x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړی معادله حل نه لري ځکه $\Delta < 0$ څخه ده یعنې

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتنې

لاندې معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

د اووم څپرکي لنډيز

- د دويمې درجه معادلې عمومي بڼه د $ax^2 + bx + c = 0$ چې $a \neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې چې د $ax^2 + c = 0$ او $ax^2 + bx = 0$ په ډول وي، د دويمې درجې نيمگړي معادلې په نامه يادېږي.
- د $ax^2 + bx = 0$ معادلې حل عبارت له $x_1 = 0$ ، $x_2 = -\frac{b}{a}$ دي.
- هره دويمه درجه معادله له دوو برخو مستقيم خط او يوه منحنې جوړه شوې ده.
- که يو مستقيم خط يو منحنې په دوو نقطو کې قطع معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحنې سره مماس وي معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کرښه له منحنې سره پرېکړه ونه لري معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی چې لږ تر لږه يو ټي مساوي په صفر وي.
- د حلونو، د جمع حاصل له دې اړيکې څخه $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړيکې $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړه ډول د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه يا حل $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي، چې $\Delta = b^2 - 4ac$ دی.
- که چيرې $\Delta > 0$ وي معادله دوه حقيقي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta = 0$ وي معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta < 0$ وي معادله په حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.
- د دويمه درجه معادلو د تشکيل لپاره ده $x_1 \cdot x_2 = 0$ ، $x + x_1 + x_2 - (x_1^2 - x_2^2)$ يا $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ څخه گټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $3x^2 = 4x$ معادلې a , b او c ضریبونه عبارت دي له:

الف) $a=1$, $b=4$, $c=3$ ب) $a=1$, $b=4$, $c=-3$

ج) $a=-1$, $b=3$, $c=4$ د) هېڅ یو.

2- معادله $3x^2 - 8x + 5 = 0$ حلونه عبارت له:

الف) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{3}$

ج) الف او ب د) هېڅ یو.

3- د $x^2 = y$ معادلې گراف عبارت دی له:

الف) مستقیم دی. ب) منحنی دی.

ج) الف او ب. د) هېڅ یو.

4- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ معادلې د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $5 = x_1 + x_2$ ب) $5 = -x_1 + x_2$

ج) $8 = x_1 + x_2$ د) $10 = x_1 + x_2$

5- که $\Delta > 0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري ب) دوه حقیقي او مختلف حلونه لري

ج) حل نه لري د) یو حل لري

• تش ځایونه وکړئ.

1- د یو مجهوله دویمه درجه معادلو عمومي بڼه ده.

2- $-\frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \dots$ او $\frac{c}{a}$ د حلونو دی.

3- که وي معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي معادله لري.

5- د $x^2 - x + 0.25 = 0$ معادلې حلونه او دی.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې (س) او د ناسم په مخ کې (ن) کلیمه ولیکئ.

1-) (که $b^2 - 4ac < 0$ وي، معادله د حقيقي اعدادو په set کې حل نه لري.

2-) (د محمد بن موسی فورمول $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

3-) (د $2x^2 - 4x = 0$ معادلې یو حل صفر دی.

4-) (د دویمې درجه معادلې د تشکیل لپاره د $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 - (x_1^2 - x_2^2)$ یاد
 $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ څخه گټه اخلو.

5-) (که چیرې په یوه دویمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي نو معادله یو منفي حل لري.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې معادلو کې a ، b او c ضریبونه وښئ او وړایست کومه معادله کامله او کومه معادله ناقصه ده.

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 1 = 0$ c) $2x^2 - 6x = 0$

2- لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

a) $3x^2 + x - 4 = 0$ b) $x^2 + 4x - 32 = 0$ c) $6x^2 - x - 2 = 0$

3- لاندې معادلې د تجزیه په لار (طریقه) حل کړئ.

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ b) $x^2 + 4x - 32 = 0$
c) $x^2 - 2\sqrt{3} + 3 = 0$ d) $cx^2 - 2acx + ca^2 = 0$

4- لاندې معادلې په هندسي تګ لاره حل کړئ.

a) $2x^2 + 7x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

5- د لاندې معادلو حل د تجزیه په طریقه حل کړئ.

a) $4x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$
c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ d) $x^2 + 3x = 0$

6- د عمومي فورمول څخه په گټه اخیستې سره لاندې معادلې حل کړئ.

a) $7x^2 - 8x + 1 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

c) $t^2 - 0.27 + 0.6t = 0$

7- که دیوه مستطیل مساحت $20cm^2$ او اوږدوالی د عرض دوه برابره وي د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث د قایمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a + 1$ وي د وتر اوږدوالی پیا کړئ.

9- که دیوه مستطیل مساحت $24cm^2$ او محیط پې $36cm$ وي اوږدوالی او سور پې پیدا کړئ.

10- هغه معادلې ولیکئ چې حلونه یې په لاندې ډول دی.

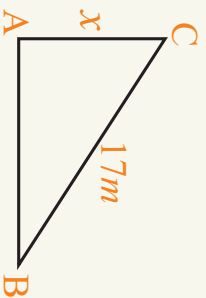
a) $-2, 0.5$

b) $3, -1$

c) $0, 2$

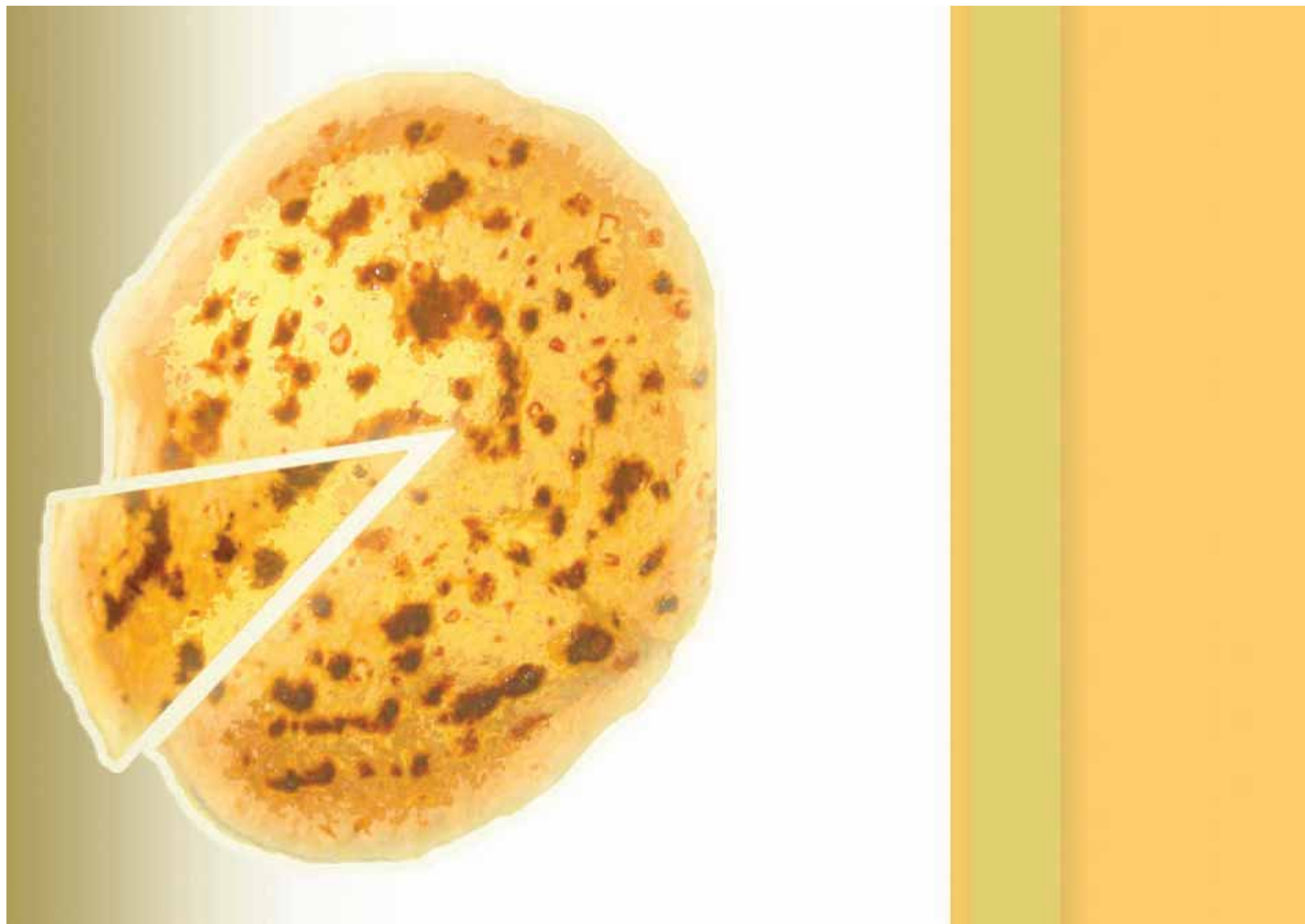
d) $\sqrt{2} - 1, 2$

11- دوه تنه بائیسکل چلوونکي د A ټکي څخه یو ختیځ لور ته او بل شمال لور ته حرکت وکړ په هغه وخت کې چې د دوی تر منځ واټن $17m$ دی هغه بائیسکل چلوونکي چې ختیځ لور ته حرکت کړی دی $7m$ زیات واټن له هغه تن څخه چې شمال لور ته حرکت کړی طی کړی دی. هغه الجبري معادله چې د هغې له مخې وکړای شو چې وهل شوی واټن د هر یوه بائیسکل چلوونکي ولیکئ.



آبۂ حیات احصائے







د دیتا (Data) د ډیټی کولو لاره

آیا تاسې په خپل ټولګی کې تر ټولو جګه ونه لرئ؟ که چیرې د فلپین او یا اندونیزیا ته ولاړ شئ څنګه؟
تاسې په کومه کچه په یوه هیواد کې جګ او په بل هیواد کې لنډه ونې شمیرل کېږي، معیارونه مو کوم دي؟

فعالیت

د یو شمېر کورنیو شمېر چې په څو کلیو کې پرتې دي، په لاندې ډول لیکل شوي اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

غواړو دا راکړل شوی دیتا data په دریو ګڼیو کې داسې ځای په ځای کړو تر څو پوه شو،

چې کوم کلي ډیر، منځنۍ، او کم وګړي لري.

• ایا کولای شو، چې یو یا څو ورکړل شوی دیتا data له منځه یوسي؟

• تر ټولو لوی او تر ټولو کوچنی کورنۍ پیدا کړئ.

• د لږو او ډېرو دیتاګانو data تر منځ وسعت څومره دی؟

• دا وسعت د ګڼیو په شمېر ویشئ. سوچ وکړئ دا عدد څه شی رابښي؟

• د عددونو څخه په ګټه اخستې سره جدول ټک کړئ.

• میله یي ګراف یې رسم کړئ.

د کورنیو شمېر	د کلیو شمېر
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

- د دیتا data د دسته بندې یا ګیلې کولو لپاره لاندې ګامونه په وار سره تر سره کړئ.
- د دیتاگانو د زیات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړئ.
 - دا وسعت د دستو په تعداد وویشئ او د اوردوالی په لاس راوړئ که چیرې حاصل یې طبیعي عدد نه وي نو لای شئ هغه (round down) کړئ.
 - له دې مقدارونو څخه دستې جوړې کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونو ناروغان چې په ټکلي ډول نیول شوی داسې راغلي دي:

152	151	152	160	157	140	161	165	163
164	166	170	172	174	154	146	153	149
172	175	165	172	170	169	146	158	177
160	165	168						

دا دیتاګانې په څلور دستو یا ګیلېو کې ځای په ځای کړئ.

- که چیرې د ناروغانو شمېر په یوه روغتون کې له 175 څخه زیات وي هغه روغتون ته ازدهامې (ګڼه ګوڼه) روغتون ولېږئ. خو روغتونونه ازدهامې (ګڼه ګوڼه) دي.
- د ازدهام د پرتله کولو لپاره میله یې ګراف رسم کړئ.

حل: د دې لپاره چې ډاډه شو ټول ارقام په یوه جدول کې ځای په ځای کوو او تر ټولو زیات او تر ټولو کم ارقام یې په لاس راوړو.

$$140 = \text{تر ټولو ټیټ رقم}$$

$$177 = \text{تر ټولو لوړ رقم}$$

$$177 - 140 = 37 = \text{ټیټ رقم} - \text{لوړ رقم}$$

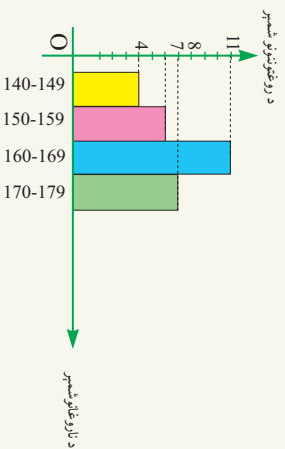
د دستو یا ګیلېو د اوردوالی د پیدا کولو لپاره دا وسعت د دستو یا ګیلېو په شمېر ویشو

$$9.25 = \frac{37}{4} = \text{د دې عدد څخه د دستې یا ګیلې په اوردوالی کې ګڼه اخلو. اما د کار د اسانۍ لپاره دا عدد روڼه ژون یا کښته خوا په پام کې نیسو چې په دې ډول د ګیلې اوردوالی د (9)}$$

عدديه لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونو کثرت	د ګیلېو وسط یا منځی	f · X
140 – 149	4	144.5	$4 \times 144.5 = 575$
150 – 159	7	154.5	$7 \times 154.5 = 1081.5$
160 – 169	11	164.5	$11 \times 164.5 = 1809.5$
170 – 179	$\frac{8}{n = 30}$	174.5	$8 \times 174.5 = 1396$

$$\bar{X} = \frac{575 + 1081.5 + 1809.5 + 1396}{30} = \frac{4865}{30} = 162.1$$



پاملرنه وکړئ که چېرې د دستې اوږدوالی پورته خوا پوره په پام کې ونه نیسو یعنې روزنارف نه کړو، د دستو ګیلېو) د اوږدوالی مجموعه له 37 څخه لږ په لاس راځي، چې په دې ډول یو شمېر داناگانې حساب او له جدول څخه خارجېږي او دا سم کار نه دی.

په ځینو وختونو کې د دستو یا ګیلېو د شمېر (ګروپونو) په ځای د دستو یا ګیلېو اوږدوالی مونږ ته پېژندل شوی دی په دې حالت کې د دستو یا ګیلېو شمېر مونږ ته اهمیت نلري. د دستو یا ګیلېوو د اوږدوالی په لرلو سره داسې لیکو چې د هغو اوږدوالی د فرض شویو دستو یا ګیلېو سره برابر وي او وروسته یې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتنۍ مثال کې که د دستو یا ګیلېو په ځای د دستو یا ګیلېو اوږدوالی 8 فرض کړو منځنۍ یا اوسط قیمت یې پیدا کړئ.

حل: ټیټ رقم یعنې 140 څخه پیل کوو. څرنگه چې د ګیلېو یا دستې اوږدوالی 8 دی د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ ولټئ. باید 8 وي. یعنې د دویمې ګیلېو یا دستې لاندنۍ سرحد باید 148 وي. اته، اته تر هغه زیاتو تر څو تېرې داناگانې په جدول کې ځای په ځای شي تر پایه دوام ورکړو.

د ناروغانو شمېر	د روغتوبونو شمېر	د ګیلېو اوسط	f · X
140 – 147	3	143.5	430.5
148 – 155	6	151.5	909
156 – 163	6	159.5	957
164 – 171	9	167.5	1507.5
172 – 179	$\frac{6}{n = 30}$	175.5	1053

$$\bar{X} = \frac{430.5 + 909 + 957 + 1507.5 + 1053}{30} = 161.9$$

1- لاندې دیتاگانې د 20 زده کونکو د رسېدلو وخت په دقیقو له کوره تر ښوونځي رانښي:

10	50	65	33
48	5	11	23
37	26	26	32
17	7	13	19
29	43	21	22

• پورتنۍ دیتاگانې په اوو گروپو کې گیلې یا دسته بندې کړئ.

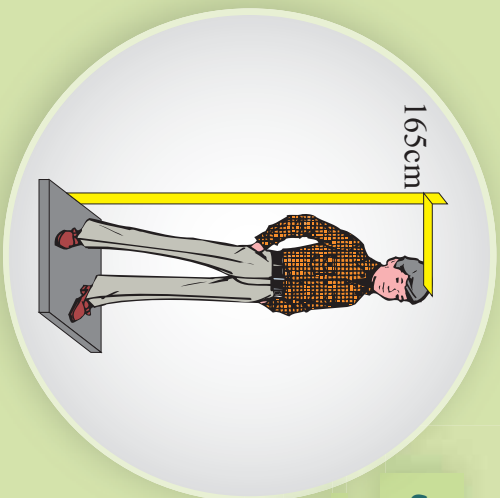
• د هرې گیلې کثرت پیدا کړئ.

• میله یي گراف یې رسم کړئ.

• که چېرې دیتاگانې په هغه گروپونو کې چې د گیلې اوږدوالی یې 10 وي کېږدو د کثرت جدول یې جوړ کړئ.

2- یو مثال راوړئ چې دیتاگانې د دسته بندې لپاره د گیلېو له اوږدوالی څخه گټه اخیستل شوی وي.

3- د موضوع د څېړلو لپاره یو مثال وړکړئ، چې د دیتاگانو د گیلې کولو گیلېو له شمېر څخه گټه اخیستل شوی وي.



د نښتو يا پيوسته ديتاگانو دسته بندي

که چيرې له تاسې څخه پوښتنه وشي چې ونه مو څومره جگه ده څه ځواب ورکوئ.
يا تېک داسې عدد دی چې د متر له مخې يې لولئ؟

فعاليت

• که له تاسې څخه پوښتنه وشي چې څو ورونه لرئ، څه وايئ؟ ايا کولی شئ ادعا وکړئ، چې د دغه ډول سوال په ځواب او يا نورو عمومي پوښتنو چې لا تېک وسایل مو لرلي، کولای مو شول، چې د خپلو هم صنفانو د ورونو د شمېر په تېک ډول ووايئ.

• ناڅاپي متحول مو څه شي دی او دکومو ډولونو څخه دی.

• که ستاسې يو دوست ووايې د ونې اوږدوالی يې ۱۵۶ سانتي متر دی. ايا تېک د ونې(قد) اوږدوالی يې ۱۵۶ سانتي متره دی؟

• د ۱۵ زده کونکو د ونو اوږدوالی وروسته له پوښتنې څخه داسې ورکړل شوي.

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

لاندې جدول بشپړ کړئ.

د زده کونکو شمېر	د زده کونکو د ونې جگه لري
	130 – 140
	140 – 150
	150 – 160

• په سوچ ووايئ چې ولې د ۱۴۰ عدد يو وار د دستور يا گيليو د پورتنۍ سرحد په څېر او يو وار د دستور د لاندینۍ سرحد په څېر راوړل شوي دي.

• که چيرې د يوه سړی د ونې اوږدوالی ۱۴۰ سانتي مترو وي څه سوچ کوئ، چې په کومه دسته يا گيلی کې قرار لري.

که چیري یو نښتی یا پیوسته متحول ولرو د اطلاعاتو په ګلبی یا دسته بڼدي کې د یوې دستې یا ګلبی پورتنی سرحد به له کورنی سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که داټا د پورتنی ګلبی یا دستې سره برابر وي په ورپسې سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول، ډول موټرونو چټکتیا په لاندې ډول احصایه نیول شوې ده.

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

• د کثرت جدول یې ډک کړئ.

• که چیري د چلولو د جواز سرعت په ښار کې په یوه ساعت کې 30 کیلومتره وي خو موټرونو د چټکتیا د مجاز سرعت څخه زیات چلیدلي دي.

• د ګلبیو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد د څه شی سره برابر دی؟

حل: څرنگه چې سرعت یو پیوسته متحول دی؛ نو جدول د پیوسته یا سره نښتی متحول لپاره جوړوو. د 30 عدد په دویمه ګلبی کې او د 40 عدد په دریمه ګلبی کې لوېږي د ګلبو

سرعت	تعداد
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 66	$\frac{5}{25}$

د کثرت جمع برابر ده له $25 = 4 + 9 + 7 + 5$ چې د موټرونو د شمېر سره مساوي ده او (۲۱) موټرونو له خپل جواز څخه زیات چلیدلي دی.

پوښتنې

1- لاندې داټاګانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب د ښوونځي په اول کال کې راښيي په پام کې ونیسئ.

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 دسته یې جدول په جوړولو سره د ګلبیو د کثرت د جمع حاصل، د ګلبو مرکز، او data منځنی قیمت پیدا کړئ.

مضمون	ژبه او اډیان د 2 په ضریب	تولیز علوم د 2 په ضریب	طبیعی علوم د 3 په ضریب	ریاضی د 4 په ضریب
ضریب	3	2	3	4
لومړی زده کونکی	61	66	62	61
دویم زده کونکی	61	66	62	60

● د دواړو زده کونکو د نمبرو منځني يا وسطي قيمت پيدا کړئ.

-

که چیري دیتاگانې په ځانګړی ضریب سره ورکړل شوی وي دا په دې معنا ده چې د دیتا اغیزه یو شان له هغه ضریب سره تړلی ده. په دې حالت کې د ضریبونو د کثرت جدول د دیتاگانې د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره ښودل کېږي. په لاس راغلی اوسط ته وزني اوسط وایي:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: په ځینو پوهنتونو کې نمبرې د تورو په اساس لکه A, B, C, D او F اعلا تیري په دې پوهنتونو کې د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي یوه محصل لاندې نمبرې اخیستی دی.

مضمون	نمبري	د کړیالونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

- د دې محصل د نمبرو اوسط څو دی.
حل:

مضمون	حرفي نمبره	د کړیالو شمېر x	عددي نمبري w	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

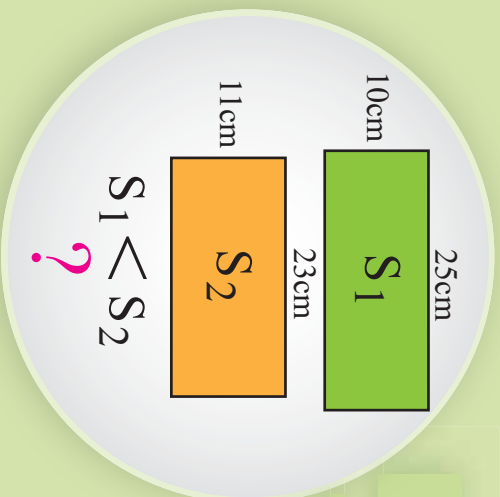
$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

پوښتنې

که د کانکور په یوه ازموینه کې د یوه زده کوونکي نمبرې په وار سره 61, 70, 53 او ضریبونه یې په وار سره 1, 2, 3 وي د دې زده کوونکي د نمبرو اوسط حساب کړئ.

مستطيلي گراف Histogram

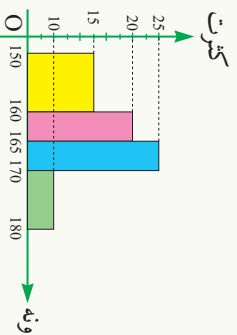
که د يوه مستطيل اوږدوالی 25 سانتي متره او سوري ي 10 سانتي متره او دبل مستطيل اوږدوالی 23 سانتي متره او سوري ي 11 سانتي متره وي. د دې دواړو مستطيلونو مساحتونه پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.



فعاليت

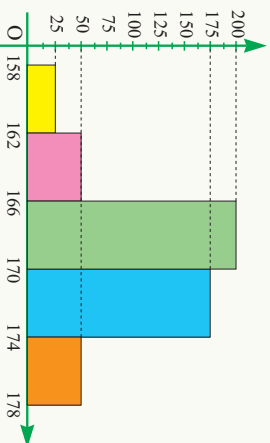
ديوي ښوونځي د 70 زده کونکو د ونې (قد) اندازه په لاندې ډول په جدول کې ورکړل شوې ده.

ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرت	15	20	25	10



- په پورتنۍ گراف کې د مستطيلونو قاعدې څه شې رابښي.
 - د هر مستطيل مساحت په لاس راوړئ. د مستطيل مساحت څه شې رابښي.
 - د مستطيلونو جگوالی (ارتفاع) څه شې رابښي.
 - پورتنۍ گراف له ميله يي گراف سره څه توپير لري.
- يو ځل بيا د يوه ښوونځي د 50 زده کونکو ونې چې اندازه يې په لاندې جدول کې ورکړل شوی ده په پام کې ونيسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرت	25	50	200	175	50



- جدول ته په پاملرنې سره د مستطیل قاعده څه شی رابښي.
- د مستطیل اوږدوالی څه شی رابښي.
- میله يي گراف له پورتنۍ گراف سره څه توپیر لري؟

د دیتاگانو د پیورسته یا نښتې ښودلو لپاره د مستطیلي گراف څخه گټه اخلو په دې گراف کې د مستطیل عرض د دستو یا گیلپو د اوږدوالی سره برابر دی په مستطیلي گراف کې مساحتونه د هرې دستې یا گیلپې کثرت رابښي.

که د دستو یا گیلپو اوږدوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راسا کثرت پرته کړو په دې صورت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور رابښي.

مثال: د یوه ټولگي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

د زده کوونکو وزن په کيلو گرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د زده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

دلته لیدل کېږي چې د دستو یا گیلپو واټن مساوي نه دی، مخکې د مستطیلي گراف د رسمولو څخه لازمه ده چې د مستطیلونو جگوالی (ارتفاع) یوه گټه واټن ته په پام کې نیولو سره د ټولو دستو یا گیلپو پیدا کړو په دې مثال کې $5K$ گټه یا مشترک دی نو کولای شو چې ټول پنځه واړه واحد د 5 په محور په یوه واحد وښیو:

- د $40 - 45$ گیلپې لپاره یو واحد
- د $45 - 50$ گیلپې لپاره یو واحد
- د $50 - 60$ گیلپې لپاره یو واحد
- د $60 - 70$ گیلپې لپاره یو واحد
- د $70 - 90$ گیلپې لپاره یو واحد

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیدا کولو لپاره د دستو یا ګیلپو کثرت د دستو یا ګیلپو په اوږدوالي ونښو.

$$40-45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

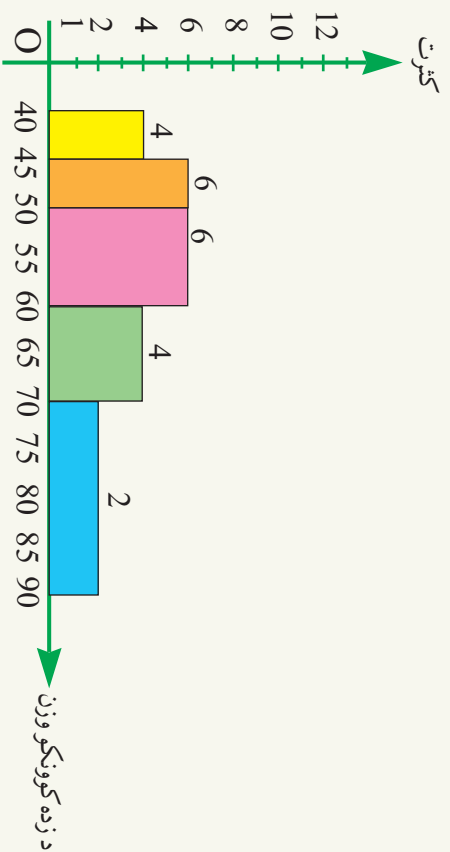
$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60-70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70-90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوس په لاس راغلی پایلې په لاندې جدول کې ترتیب او مستطیلي گراف د راکړل شوي مثال رسمو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلې ته	4	6	6	4	2



1- لاندې جدول د يوه روغتون د ناروغانو تعداد د هغو ټاکلو ورځو رابښې چې په روغتون کې بستر شوي دي.

د ورځو شمېر	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25
د ناروغانو شمېر	12	10	16	18	14	8

- د پورتنۍ جدول مستطلي گراف رسم کړئ.

2- د يوه ټولگي 50 زده کونکو د IQ (دکاوت) په ازميښه کې گون کړی دی، چې پايلې يې په لاندې ډول دي.

115	113	109	118	92	130	112	114	117	122
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	110
94	134	98	129	102	103	107	113	117	112

- نوموړو دانگانو ته د کثرت جدول جوړ کړئ. د دې جدول لپاره ۷ گروپونه داسې په پام کې ونيسئ چې د گڼيو اوږدوالی يې مساوي وي.
- د دې ديتاگانو مستطلي گراف رسم کړئ.
- څه پايلې اخلي.

دایره وي گراف

مخامخ شکل د لرگي يوه کنده ده هغه کرښې چې ددې لرگي په مقطع کې ونډې د څه شې شکل ته ورته دی.



فعالیت

د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د ښوونځیو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپرې کړي دي: د ابتدایي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنیو ښوونځیو د زده کوونکو شمېر 20000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 15000 دی.

- که د هرې داتا نسبتي کثرت په 360° درجو کې ضرب کړو هره دوره به څو درجې وي؟
- یوه دایره رسم او مرکزي زاوې یې په لاس ته راغلو اعدادو په اندازه پیلې کړئ. د هرې زاوې دننه د اړوند تحصیلي دورې نوم ولیکئ.

- یو عنوان د گراف لپاره وټاکئ او د گراف لاندې یې ولیکئ.
- په دایروي گراف کې څه، څه سره پرتله کېږي.
- د دایرې په کوچنۍ کېدو یا لوییدو سره په دایروي گراف کې څه توپیر راځي؟

له پورتنۍ فعالیت څخه پوه شو چې کولای شو دیتاگانو د دایرې په مرسته وښوو. د یو ناڅاپي یا اتفاقي متحول د دیتاگانو ښودل د دایرې په مرسته د دایروي گراف په نامه یادېږي، په دایروي گراف کې لومړۍ نسبت د هرې دستې یا ګیلۍ او ټولې دیتاگانو شمېر په 360° ضرب چې د ګیلیو مرکزي زاویه رانښيي په لاس راوړو؛ یعنې:

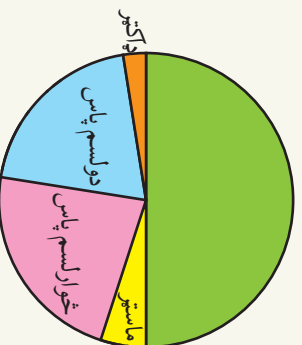
$$360^\circ \times \frac{\text{د دیتاگانو کثرت}}{\text{د ټولو دیتاگانو شمېر}} = \text{کثرت د درجې له جنسه}$$

مثال: یوه مؤسسه چې د کارکوونکو شمېر یې ۲۰۰ او د تحصیل د درجې له مخې ویشل شوی دی.

د تحصیل درجه	ډاکټر	ماستر	لیسانس	څوارلسم پاس	دولسم پاس
د کارمندانو شمېر	5	10	100	45	40

ددې دیتا دایروي گراف په لاندې ډول دی.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9^\circ$
ماستر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18^\circ$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180^\circ$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81^\circ$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72^\circ$



پوښتنې

- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د کورنیو دایروي گراف د جمعیت له مخې رسم کړئ.

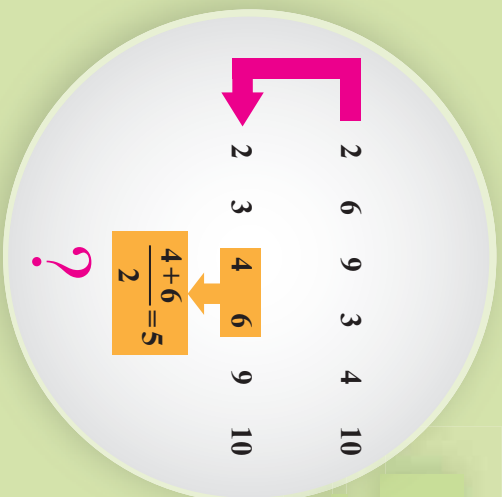
د کورنۍ نوع	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر
د کورنۍ نوع	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر
د کورنۍ نوع	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر	د کورنۍ شمېر

- دایروي گراف د څه ډول متحول لپاره مناسب دی.
 - که د دیتاگانو کثرت دوه برابره کړو، ایا مرکزي زاویه یې بدلون مومي؟

میانه Median

که له ناسېي څخه پوښتنه وشي، چې د نومرو اوسط مو څو دی؟ له اوسط څخه ګټه اخلي، که له ناسېي څخه ویوښتل شي، چې تر ټولو ډیر ځله ستاسو د نومرو په اطلاعاته کې څو دي؟

که له ناسېي پوښتنه وشي، چې ناسېي د ښو زده کوونکو په منځ کې یاست که د کمزورو زده کوونکو په منځ کې ناسېي دي سوال ته ځواب ورکوی.



فعالیت

- سوچ وکړئ د ((میاني)) لغت یعنې څه؟
- که یو شمېر دیناگانو ولرو څرنگه کولای شو د هغو وسطي مقدار پیدا کړو.
- که د دیناگانو شمېر طاق وي، ایا وسطي مقدار د دیناگانو په میانه کې شته دی؟
- که د دیناگانو شمېر جفت وي، ایا وسطي مقدار د دیناگانو په میانه کې شته دی؟
- ایا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو د دیناگانو په لاس راوړو.
- که د دیناگانو مقدار جفت وي اټکل کولی شئ، چې څه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو.

• لاندې دیناګانې په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4

- وسطي مقدار یې پیدا کړئ.

- د دینا د وسطي مقدار یې شمېر مخکنی دانا له شمېر سره څه اړیکه لري.

- لاندې دینا په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4 5

- یو وسطي عدد پیدا کړئ، چې د دینا شمېر یې وروسته او د مخکنی له هغه عدد د دینا له شمېر سره برابر وي.

که د ګیلپیو اوږدوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې وضعیت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور رانښيي نو په دې حالت کې مساحت نشو په لاس راوړئ.

مثال: د يوه ټولگي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

10000	7000	4000	6000	3000
-------	------	------	------	------

ددې data مېانه حساب کړئ.

حل: لومړی data مرتب کوو:

3000	4000	6000	7000	10000
------	------	------	------	-------

ليدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې قرار لري نو د data مېانه د پورته عددونو ده.

دويم مثال: د لاندې data مېانه وټاکئ.

2	6	9	3	4	10
---	---	---	---	---	----

حل: د مېاني د حسابولو لپاره عددونه ترتيب کوو.

2	3	4	6	9	10
---	---	---	---	---	----

دا عددونه د پورته عددونو د data مېانه ده.

ليدل کېږي چې د data منځ کې داسې عدد نشته چې د مېاني خاصيت صدق کړي نو که چيرې تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونيسئ چې د مېاني ځانگړتيا په کې صدق کوي او دا عدد د پورتنۍ داتا مېانه ده چې د پنځو څخه وروسته د داتا شمېر د پنځو څخه د پورته داتا سره برابر دی.

يو بښنې

1- لاندې جدول د يوه روغتون د ناروغانو شمېر د هغو ټاکلو ورځو رابښي چې په روغتون کې بستر شوی دی.

1	2	3	او	0	2	100
---	---	---	----	---	---	-----

2- د پورتنۍ جدول مستطلي گراف رسم کړئ.

5	0	5	6	5	15	12	0	4	15
---	---	---	---	---	----	----	---	---	----

3- که له ټولو دیناگانو سره یو ثابت عدد جمع شي د مېاني په مقدار کې څه اغیزه منځ ته راځي په یوه مثال کې یې وښئ.

4- که دیناگانې دوه برابره کړو د مېاني په مقدار کې څه اغیزه کوي په یوه مثال کې یې وښئ.



د تحول ساحه Range

د خپلو هم ټولگيو الو وني مو اندازه کړی.
د تر ټولو لوړو وني او د تر ټولو لنډو ونيو تر منځ
توثير حساب کړئ، که و مورغوښتل چې د
زده کوونکو تر ټولو زيات توثير پيدا کړئ يا
لازمه ده چې د نورو زده کوونکو وني اندازه
کړئ؟

فعاليت

- د اووم ټولگي د 10 زده کوونکو او لسم ټولگي 10 زده کوونکو د ونيو لوړوالی په اتفاقي ډول ټاکل شوی، چې لاندې راوړل شوی دی.
- 152, 150, 149, 148, 148, 148, 146, 145, 142 : د اووم ټولگي زده کوونکي
160, 160, 159, 158, 158, 156, 153, 151, 150 : د لسم ټولگي زده کوونکي
- د دواړو گروپونو د لوړو ونيو تر منځ وسعت پيدا کړئ.
 - آیا د دواړو گروپونو د اعدادو تر منځ وسعت يو شان دی.
 - که چيرې دینگانې و نه لرو، یا د دینا د لږو او ډیرو توپيرونو په لرلو سره د دې گروپونو په اړه مونږ کولای شو چې سره پرتله یې کړو.
 - یا د بدلون یا تحول د ساحې برابروالي په دواړو گروپونو کې د دینا د بیروالی په معنا دی.
 - د نمونې د تعریف په پاملرنې سره که دا گروپونه د ټولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د ولټن د اوږدوالي زیاتوالي، په ټولنه کې د ولټن د اوږدوالي د زیاتوالي پایله راکوي.

د پورتنۍ فعالیت څخه پوهیږو د ولټن اوږدوالی چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري د تحول د ساحې په نامه یادېږي. دا معیار د جگې او ټیټې دینگانو تر منځ وسعت را په گوته کوي، پاملرنه باید وشي چې د تحول د ساحې لوی والی په یوه ټولنه کې د توپیر یا پراگندګې ډیر والی دی هر څومره چې دا توپیر کم وي د وګړو پراگندګې کمه ده. د یوې ټولنې وګړي د دې ځانګړتیا له مخې یو بل ته نږدی دی که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د څېړنو د ځانګړتیاوې سره برابرې او یو شان وي په دې حالت کې ټولنه یوه متجانسه ټولنه بولي.

مثال: د دوو زده کوونکو د $\frac{1}{2}$ مياشتنۍ ازموينې نښې په لاندې ډول دی.

الف: 20, 21, 25, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39
ب: 20, 33, 34, 35, 35, 35, 34, 34, 35, 39

• د دواړو دستو يا گيليو د تحول ساحه پيدا کړئ.

• ايا د ديتاگانې پراگندگي په لومړۍ يا که په دويم گروپ کې کمه ده.
حل: د دواړو گروپونو د تحول ساحه يو برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

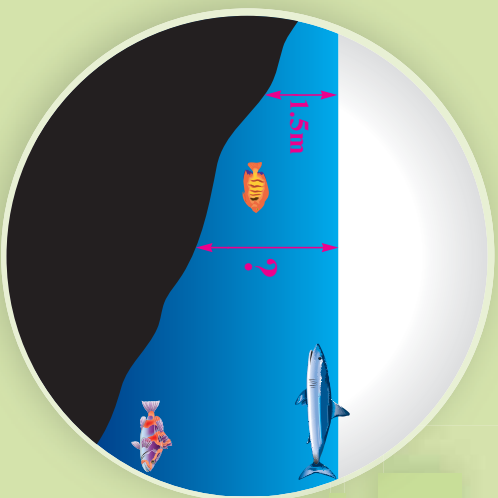
د دويم گروپ د ديتاگانې پراگندگي لږ او په ديتاگانې کې د 34 او 35 عددونه زيات تکرار شوی دی وائين يې کم دی. ولې پراگندگي په لومړۍ گروپ کې ډېره ده د تحول ساحه يوازې له لږو او زياتو مقدارونو سره کار کوي. د ديتاگانو په اړه او د هغوی ترمنځ هېڅ اطلاعات مونږ ته نه راکوي. نو د تحول د ساحې په لرلو سره نشو کولای د ديتاگانې د ميانې د پراگندگي د ميزان اټکل وکړو.

پوښتنې

1- لاندې داتاگانې په پام کې ونيسئ.

1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15

- ددې داتاگانې د تحول ساحه پيدا کړئ.
- که د پورتنۍ data تر ټولو زيات او کم data له منځه يو سو د تحول ساحه يې پيدا کړئ.
- دا دواړه د تحول ساحه يو له بل سره پرتله کړئ او ووايست چې د کوم يو پراگندگي زياته ده.



د انحراف اوسط Average deviation

که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي سوچ وکړئ چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کونکو په یوه صنفی ازموینه کې لاندې شمېرې اخیستي دي.

20	18	16	14	12
----	----	----	----	----

- د دې شمېرو اوسط او یا منځنۍ قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو دیتاگانو د منځ یا اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې دیتاگانو د منځنیو د توپیر د جمع حاصل وليکئ.
- د هرې دیتاگانو د اوسط یا منځ د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلی قیمتونه سره پرتله کړئ.
- د پنځو دیتاگانو تاسې پخپله یو مثال ورکړئ او پورتني عملېې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه پوهېږو هغه توپیر چې د دیتاگانو او اوسط تر منځ دی د منځ یا اوسط انحراف په نامه یادېږي.

د data د منځنۍ یا اوسط انحراف مجموع همیشه صفر ده. په دې دلیل د data د څېړنې لپاره د انحراف د مطلقه قیمت څخه ګټه اخلو. که د ټولو انحرافونو د مطلقه قیمت جمع کړو او د data په شمېر کې ویشو د انحراف اوسط یا منځی ورته ویل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي.

$$\text{د انحراف اوسط یا منځی} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

دلیته $X_1, X_2, \dots, X_n$ عبارت له $\bar{X}$ د دیناگانو منځنۍ یا اوسط او n د دیناگانو

شمېر دی، لیدل کېږي چې هر څومره د منځنۍ انحراف لوی وي، نو په هم هغه اندازه د $data$ د پراگندګي له اوسط نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کونکو شمېر په لاندې جدول کې ورکړل شوی دی.

د پورتنیو شمېرو د انحراف منځنۍ پیدا کړئ.

حل: لومړی د اوسط یا منځنۍ مقدار په لاس راوړو.

نمبرې	کثرت
0-10	2
10-20	7
20-30	4
30-40	5
40-50	10
50-60	12

د کثرت f	د دیناگانو اوسط $f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	5	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	15	$15 - 37.5 = -22.5$	$7 \times (-22.5) = -157.5$
4	25	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	35	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	45	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	55	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
$\frac{1}{n} = \frac{1}{40}$		$\frac{1500}{40}$	

$$\bar{x} = \frac{10 + 105 + 100 + 175 + 450 + 660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

لیدل کېږي چې د $f(x - \bar{x})$ د جمعې حاصل له صفر سره مساوي دی. نو باید مطلقه قیمت یې سره جمع کړو.

$$\begin{aligned} \text{د انحراف اوسط} &= \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40} \\ \text{د انحراف اوسط} &= \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25 \end{aligned}$$

پوښتنې

- د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه لاندې راکړل شوی.
- د A جمعیت انحرافونه: 4 2 0 0 -1 -2 -3
- د B جمعیت انحرافونه: 8 1 0 0 -2 -3 -4
- د A جمعیت د انحراف منځنۍ پیدا کړئ.
- د کوم جمعیت پراگندګي زیاته ده.

د اتم څپو کي لنډيز

- گډې د هغو دیناگانو مجموعه ده، چې د گډې ځانگړتیاوې ولري. د دیناگانو د گډې کیدو یا لپاره لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:
 - د تحول ساحه: د دیناگانو د ډیر لږو او ډیر زیاتو تر منځ وسعت.
 - د گډې اورډوالی: د تحول د ساحې او د دستو د شمېر نسبت.
 - د دستو کثرت: د هغو دیناگانو د گډیو شمېر چې په هره دسته کې قرار لري.
 - د گډې مرکز: د هرې دستې د منځنۍ محاسبه.
- په دسته بڼې کې که متحولونه پیوسته یا پرله پسې وي د ورپسې گډې پورتنۍ سرحد د مخکینۍ گډې یا دستې لاندې سرحد سره برابر دی. په هغه صورت کې چې دیناگانو د دستې د پورتنۍ سرحد سره برابر وي هغه دیناگانو په ورپسې دیناگانو پورې اړه لري.
- دیناگانو د دستو د شمېر مجموع د ټولې دیناگانو د شمېر سره برابر دی.
- فرض کوو $X_1, X_2 \dots X_n$ په ترتیب د $W_1, W_2 \dots W_n$ ضریبونه وي دغه اطلاعات کولی شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	...	X_n
د وزن ضریب	W_1	W_2	...	W_n

- په دې حالت کې د پورتنۍ داناگانو منځنۍ په لاندې ډول محاسبه کړو.

$$\text{وسط وزنې} = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots + W_n X_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n}$$

- هستوگرام یا مستطلي گراف عبارت له هغه گراف څخه دی، چې د کثرت توزیع یې د مستطیلونو په مرسته ښودل کېږي.
- د مستطیل جگوالی د دستې یا گډې د کثرت سره برابر ده.
- د هر مستطیل مساحت د دستې یا گډیو د اوږدوالی او د دستې یا گډې د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.
- په مستطلي گراف کې مستطیلونه یو بل سره تړلی او د تړلیو (پیوسته) متحولینو څخه د گراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

● په يوه اختياري شعاع يوه دايره د مرکز زاويې په مرسته په Π برخو وېشو داسې، چې دهرې برخې برخې د مرکزي زاويې اندازه د کثرت سره د هغې قيمت متناسبه وي په دې حالت کې بې مرکزي زاويه نظر لومړی دستې يا گيلی ته عبارت دی له:

$$\text{د دیناگانو کثرت} = \frac{\text{د کثرت د درجې له مخې}}{\text{د ټولو دیناگانو شمېر}} \times 360^\circ$$

● د ميانې د پيدا کولو لپاره په لومړۍ مرحله کې دیناگانې منظم کړو او روسته:

- که د دیناگانې شمېر طاق وي د دیناگانې منځې يا اوسط ده.

- که د دیناگانې شمېر جفت وي ميانه د دوو دیناگانې منځنی اوسط دی.

● د تر ټولو کوچنی دیناگانې او تر ټولو لوی دیناگانې توپیر د تحول د ساحې څخه عبارت دی يا په بل عبارت د اناگانې په هغه ساخنه کې بدلون کوي.

● د هرې دیناگانې د منځنی تفاضل ته د منځنی انحراف وايي.

د انحراف منځنی يا اوسط د انحرافونو د مطلقه قيمت د اوسط څخه عبارت دی او فورمول يې د اړوند دیناگانې لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}| + |\bar{x}_2 - \bar{x}| + \dots + |\bar{x}_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم خپرکي پوښتنې

1- لاندې جدول وکت کړئ.

تجمعي کثرت	د دستې مرکز	کثرت	گډې (دسته)
		12	7,5-10,5
		10	10,5-13,5
		15	13,5-16,5

● پورتنی جدول د کومې دسته بندې گراف رښې: پيوسته يا نښتی يا معجزا.

2- لاندې جدول د 200 شل کلنو ځوانانو د ونو اوږدوالي رښې:

د دستې مرکز	کثرت	گډې (دسته)
153	15	149,5-156,5
160	20	156,5-163,5
167	30	163,5-170,5
174	25	170,5-177,5
181	10	177,5-184,5

● مستطلي گراف يې رسم کړئ.

- 3-د A, B, C, D او E ښارونو کې 200 ميليونه افغاني سرمايه په کار اچول شوی ده داسې چې:
- د A ښار لپاره 110 ميليونه افغاني
 - د B ښار لپاره 32 ميليونه افغاني
 - د C ښار لپاره 24 ميليونه افغاني
 - د D ښار لپاره 14 ميليونه افغاني
 - د E ښار لپاره شل ميليونه افغاني معلومات ورکړل شوی او دايروي گراف يې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمايې ویش په مليون	سرمايه په فيصلي	سرمايه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- يو شمېر کورنۍ د خپلو غړو د شمېر سره په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی.

کورنۍ	18	12	15	8
دکورنۍ غړي	2	4	5	8

- میانه یا منحنی پیدا کریں۔
- د کورنی مود پیدا کریں۔
- اوسط میانه پیدا کریں۔
- د تحول ساحه محاسبہ کریں۔

5- د یوه ټولگی د زده کوونکو د ونډ اندازه په لاندې جدول کې ورکړ شوی.

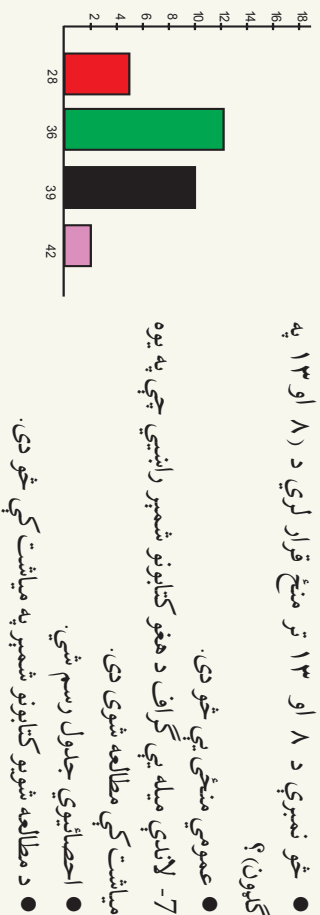
د ونډې اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرت	5	16	9	4	1

- د گډی مود مشخص کریں.
- د گډیو مرکز حساب کریں.
- منحنی یې پیدا کریږي.
- 6- یوه ښوونکی د یوه صنفی ازموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

$$1.4 + 3.6 + 2.8 + 7.9 + 3.10 + 3.11 + 5.12 + 1.15 = \text{د ازموینې اوسط}$$

25

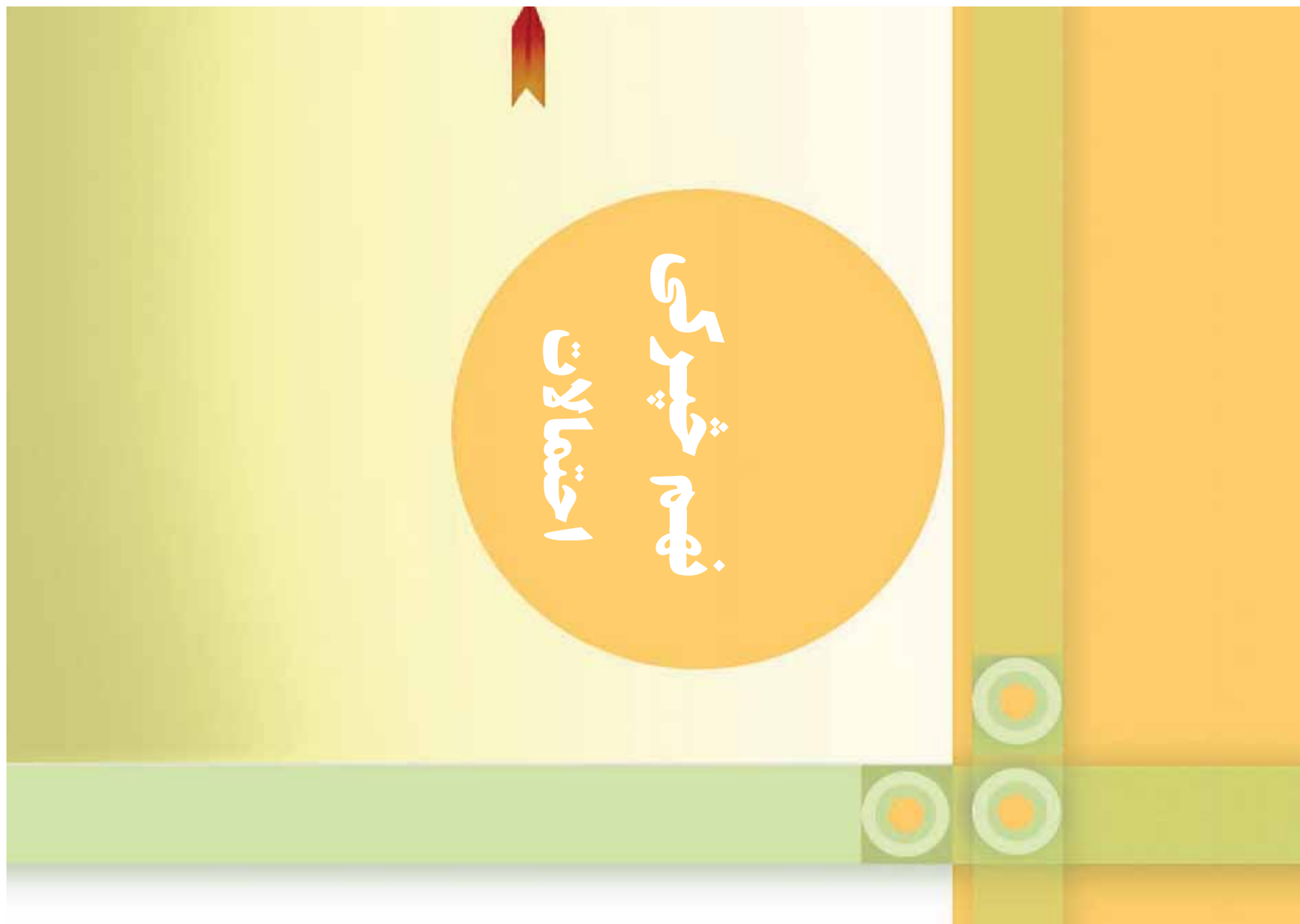
- د ټولگی د زده کوونکو شمېر پیدا کریږي.
- څو شمېرې د ۸ او ۱۳ تر منځ قرار لري د (۸ او ۱۳ په ګډون)؟



- عمومي منحنی یې څو دی.
- 7- لاندې میله یې ګراف د هغو کتابونو شمېر راښيي چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.
- احصائیوي جدول رسم شوي.
- د مطالعه شویو کتابونو شمېر په میاشت کې څو دی.
- 8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي د دانګانې څخه څه پایله اخلي.
- 9- که په دانګانې باندې یو ثابت مقدار علاوه کړو د تحول ساحه څرنگه تحول کوي؟
- 10- د څلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لویو ته یې ورکړی دی په لاندې ډول راځي دی:

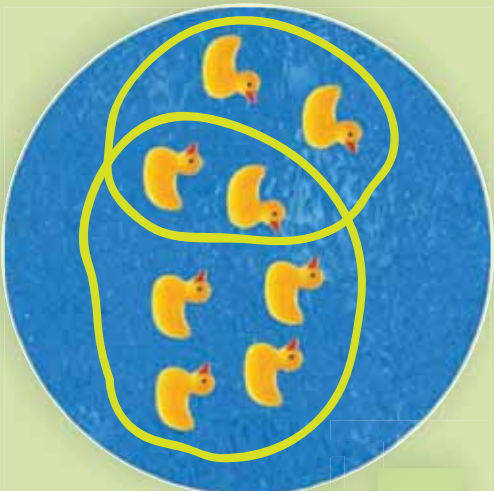
1 5 7 9

- د پورتنۍ دانګانو د انحراف منحنی یا اوسط حساب کریږي.





د ناڅاپو پښو اتحاد



په دواړو شکلونو کې یو ځای خړ هیلې وینئ.
هیلې په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې د $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نمونې فضا او د $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{4, 5, 6\}$ او $C = \{1, 2\}$ ناڅاپي پښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناڅاپي پښې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا B پښې رامنځ ته شوي وي یا وېلې شئ چې د $A \cup B$ پښه شوې ده؟
- د A پښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پښه چې هیڅ پښه شوې نه ده نا ممکنه یا $\emptyset$ وېلې شئ چې د $A \cup \emptyset$ او د A پښې یو د بل سره څه توپیر لري؟

پښه نومول کېږي.

د پورتنۍ فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونه یې فضا کې د A ، B ، او C ناڅاپه پښو لپاره په لاندې ډول په لاس راوړو.

پایله:

- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د $A \subseteq B$ ناڅاپې پښه وي، په دې صورت کې:
 $A \cup B = B$
- که چیرې د S په یوه نمونه فضا کې د A او B ناڅاپي پښه وي، د $A \cup B$ او $B \cup A$ پښې یو بل سره توپیر نه لري؛ یعنې:
 $A \cup B = B \cup A$
- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د A یا B یوه پښه رامنځ ته شي نو د $A \cup B$

پېښه هم رامنځ ته شوې ده، چې سربېره په دې
 $A \subseteq A \cup B$ او $B \subseteq A \cup B$

- د A پېښه د S په نمونه کې فضا کې پېښه شوې ده او يوه بله پېښه چې هيڅ نه پېښېږي، يعنې $\emptyset$ ، په دې معنا ده چې يوازې د A پېښه را منځ ته شوی ده.

$$A \cup \emptyset = A$$

- د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه په دې معنا ده، چې لږ تر لږه د A يا B پېښه منځ ته راځي ده.

مثال: که چيرې د C ناڅاپي پېښه د A او B دوي بېلا بېلي ناڅاپي پېښې په خپل ځان کې ولري په دې صورت کې د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په خپل ځان کې لري په يوه مثال کې يې واضح کړئ.

حل: د $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ او $C = \{1, 2, 3, 4\}$ پېښې په پام کې نيسو ليدل کېږي، چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دی نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پوښتنې

1- د S د يوې نمونه يې فضا څخه د A, B او C د ناڅاپو پېښو لپاره د يو مثال (بېلگې) په مرسته د لاندې اړيکو سم والی وڅېړئ.

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي په يوه مثال کې وښئ چې $A \cup B = B$ دی.

3- که چيرې د A او B ناڅاپي پېښې سره برابري وي، په يوه گراف کې وښئ چې د A ناڅاپي پېښه د B ناڅاپي پېښه په بر کې لري.

د ناڅاپي پښو قاطع

د نور اصلي رنگونو د پریکړې څخه
کوم رنگونه لاسته راځي؟



فعالیت

- د رمل د یوې دانې د اچولو نمونه یې فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ او د $A = \{2, 4, 6\}$ او $B = \{4, 6\}$ او $C = \{1, 3, 5\}$ ناڅاپي پښې په پام کې نیسو.
- د $A \cap B$ او $B \cap A$ ناڅاپي پښې یو بل سره څه اړیکه لري.
- یاد A او B پښې د $A \cap B$ ناڅاپي پښه په بر کې لری شی که نه؟
- وښيي چې د $C \cap B$ ناڅاپي پښه یوه ناشونی پښه ده.
- که د B پښه د A پښه په ځان کې ولري، د A او $A \cap B$ ناڅاپي پښې سره پرتله کوئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو لاندې پایلې په عمومي ډول بیان کړو.

پایله:

- د S په یوه نمونه یې فضا کې د A, B او C ناڅاپي (تصادفي) پښو لپاره لرو.
 - د $A \cap B$ او $B \cap A$ ناڅاپي پښې یو شان دي.
 - د A او B ناڅاپه پښې هر یوه یې د $A \cap B$ ناڅاپه پښه په خپل ځان کې لري.
 - که د A او B دوه پښو چې تشې نه $A \cap B = \emptyset$ وي په دې حالت کې د A او B پښې یوه له بله بېلې پښې بلل کېږي.
 - د A پښې لپاره لرو:
- $$A \cap S = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$
- که چیرې د B پښه د A پښه په خپل ځان کې ولري، نو $A \cap B = A$ سره ده.

مثال: د ښوونځي د فوټبال له ټيم څخه درې تنه د ښوونځي د واليبال د ټيم غړي هم دي که

چيرې د فوټبال د ټيم غړي په A ، د واليبال د ټيم غړي په B او دواړو ټيمونو گډه غړي په C

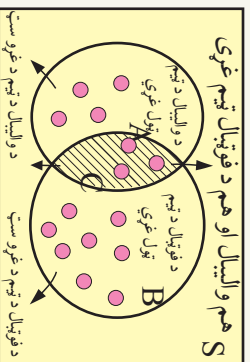
سره وښيو په دې حالت کې د ستونزو تر منځ اړيکه د

ستې د تيوري په بڼه وليکئ:

$$A \cap B = C$$

يا پورهېږئ چې د B د ستې په مکمله ستې کې يعنې $\bar{B}$ کې د واليبال د ټيم ټول غړي گډون لري. که نه؟

نو B ټول هغه زده کونکي دي، چې د فوټبال د ټيم غړي نه دي، څرنگه چې 3 تنه زده کونکي د واليبال د ټيم غړي، چې په عين حال کې د فوټبال د ټيم غړي هم دي په $\bar{B}$ کې گډو نه لري؛ نو په دې اساس د واليبال ټيم B ستې په پام کې نيولو سره ناقص دی.



پوښتنې

1- د A, B ناڅاپي پيښه د ډياگرام په مرسته د A او B د بېلابېلو حالتونو لپاره چې د C پيښه د A او B پيښې په خپل ځان کې لري وښئ او وضاحت ورکړئ.

2- په يوه مثال کې د A, B او C پيښې چې A او B په خپل ځان کې لري وښئ چې:

- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3- لاندې پيښې په بيان سره وليکئ:

- $\bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A \cup B}$

کلي او مکمله سټ



که چیري S د افغانستان ولایات، A د شمال او B د نور پاتي ولایات وي، نو $A - S$ او $S - B$ کوم ولایات رابښي؟

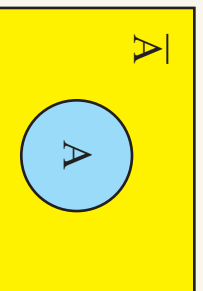
فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو نمونه یي فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ او د $A = \{1, 3, 5\}$ ناڅاپي ښښه په پام کې ونیسئ.
- د A د ناڅاپي ښښې مکمله یعنې $\bar{A}$ کومه ناڅاپي ښښه کېدلې شي؟
- یوه ناڅاپي ښښه پیدا کړئ، چې A یې په بر کې ولري، او په $\bar{A}$ کې شامله نه دی.
- ایا کولای شئ د S نمونه یي فضا څخه یو ښښه پیدا کړي چې په یو وخت کې نه په A کې او نه په $\bar{A}$ گډون ولري.
- د A او $\bar{A}$ د ناڅاپي ښښو اتحاد له ډاډمنې ښښې سره څه اړیکه لري؟
- د A او $\bar{A}$ ښښو تقاطع ناممکنې یا ناشوني ښښې سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

پایله: که چیري S یوه نمونه یي فضا او A یوه ناڅاپي ښښه وي:

- $\bar{A}$ یوه ناڅاپي ښښه ده، چې په یوه وخت د A سره نه پېښېږي.
- د A هره ناڅاپي ښښه چې پېښېږي:

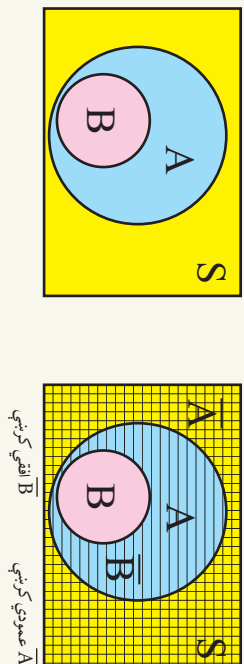


د S نمونه فضا

- $A \cup \bar{A} = S$
- $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې د A ناڅاپي پېښه د B ناڅاپي پېښه په بر کې ولري، په گرافیکي ډول ونښئ چې د $\bar{B}$ ناڅاپي پېښه د A ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې ولري.

حل: څرنگه چې $B \subseteq A$ دی، که چیرې مونږ په شکل کې $\bar{A}$ او $\bar{B}$ ونښو د لاندې شکل څخه په پوره ښکاره لیدل کېږي، چې:



پوښتنې

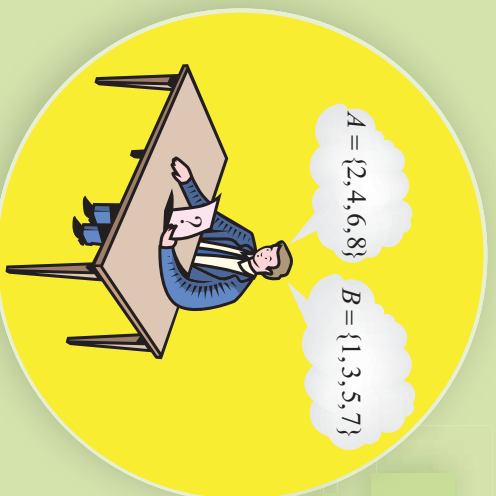
1- د یوه مثال او گراف په مرسته د S د نمونه یي فضا او د A او B ناڅاپي پېښو لپاره ونښئ، چې:

- a) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- b) $\bar{S} = \emptyset$
- c) $S = \emptyset$

2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناڅاپي پېښو لپاره لاندې پېښې په عبارت سره ولیکئ:

- a) $\bar{A} \cap \bar{B}$
- b) $\overline{(A \cup B)}$

په ستونزو مثال جوړونه



تر اوسه مو الجبري يا هندسي قوانينو څخه د ژوندانه د مسائلو په حل كې گټه اخيستله.

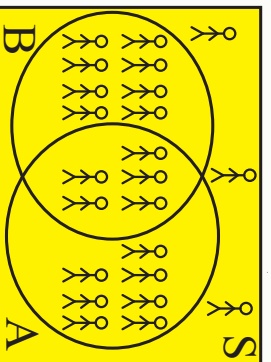
أيا سوچ مو كړئ، چې د ستونزو څخه هم كولاى شو چې د خپلو مسائلو د حل لپاره گټه واخلو؟

فعاليت

د يوه ټولگي د 23 زده کوونکو څخه مو د خویندو او وروڼو لرونکو زده کوونکو احصائیه راټوله کړئ، چې په لاندې دیاگرام کې لیکل شوی ده.

په شکل کې ټول هغه زده کوونکي چې خویندی لري د A په سټ او هغه زده کوونکي چې وروڼه لري د B په سټ سره ښودل شوي دي. شکل په پام کې ونیسئ د لاندې فعالیت سوالونو ته ځواب پیدا کړئ.

- څو تنه خویندی لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خویندی او هم وروڼه لري؟
- څو تنه نه خویندی او نه وروڼه لري؟
- څرنگه کولی شو دا مسأله د ریاضي په ژبه ولیکو.
- ټول هغه کسان چې خویندی نه لري څو تنه دي؟



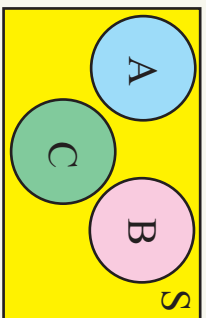
لیلل کبړي چې پورتنی گراف کولی شي چې پورتنی ټولو سوالونو ته او د هغوی په شان نورو سوالونو ته په ښه توگه ځواب ورکړئ.

نو د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله به لاس راوړو.

نایله: لیدل کپړې، چې دست د تیوري په کارولو سره په ورځني ژوندانه کې د ډېرو مسائلو سره مخامخ کپړو، چې کولای شو هغه حل پیدا کړو، او هغه و ارزوو.

د سټ د تیوري تطبیق په احتمالاتو کې او یا په بل عبارت د هغو ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسائلو د حل او د هغې د ښودنې د سټ د تیوري په مرسته د سټ تیوري یوه بله د تطبیق ساحه شمېرل کېدای شي.

مثال: د S نمونه یي فضا د A, B او C ناڅاپه پېښې په لاندې ډیاگرام کې ورکړل شوي دي په پام کې ونیسئ مطلب دی د پېښو د پېښېدو احتمال:



a. د دې احتمال چې د A یا B حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b. د دې احتمال چې د A یا B پېښه، پېښه شي.

c. د دې احتمال چې د C پېښه، پېښه نه شي.

حل:

a. د A یا B احتمال په حقیقت د $A \cup B$ احتمال دی څرنگه چې د اېښې یو د بل څخه بېلې دي، یعنې $A \cap B = \emptyset$ دی نو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b. د دې احتمال چې د A پېښه ناڅاپه پېښه، پېښه شي د $\bar{A}$ مکمله پېښې څخه عبارت ده، چې د A پېښه نه ده پېښه شوی، په بل عبارت هغه پېښه ده چې د C یا B حادثه پېښه نه شي نو:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = P(C \cup B)$$

$$P(A) = 1 - (P(C \cup B)) = 1 - P(C) - P(B)$$

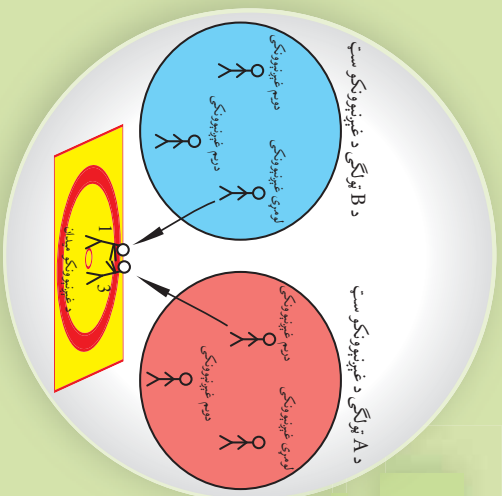
c. د دې احتمال چې د C پېښه ناڅاپه پېښه نه شي د هغې پېښې د پېښېدو احتمال سره برابر دی چې د A یا B پېښې، پېښې شي، او دا د $A \cup B$ ډیښې د پېښېدو څخه عبارت ده.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پوښتنې

- 1- هغه مثال چې په فعالیت کې مو ترې گټه اخیستې ده په پام کې ونیسئ:
- a) د دې احتمال مطلب دی، چې له دې پوښتنې څخه یو زده کوونکی په تصادفي یا ناڅاپي ډول وټاکل شي چې خور او وروڼه لری.
- b) د یوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال چې تصادفي ټاکل کپړي پیدا کړئ، چې لږ تر لږه خور یا وروڼه ولري.

د شمېرنې اصل



د A او B دوو ټولګيو څخه درې تنه د غېږنې لپاره ټاکل شوي دي په څو ډوله کولای شئ چې يو له بل سره په غېږه ورشي.

فعالیت

دوه عددو تور او سرمه يي رنگه پتلونونه له درې عددو سپين، ابې او فولادي رنگه کميسونه په پام کې نيسو.

- په څو ډوله کولای شو هغو په ځان کروړواغونډو.
- د شمېرنې د ترتيب لپاره د ونې د شکل له گراف څخه گټه واخلي.
- د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کميسونو د شمېر تر منځ څه اړيکه شته ده.

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

پايله:

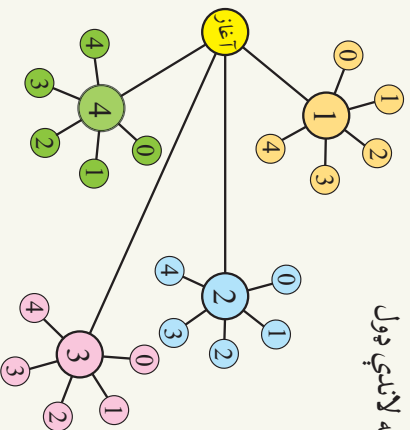
- 1- د دوو ستونو د عناصرو په تركيب کې د ټولو امکاناتو شمېر د ترکيبي مجموعه د هرې يوې مجموعې د عنصر د شمېر د مجموعو دضرب حاصل سره مساوي دی.
- 2- که چېرې د امکاناتو شمېر او يا د يو سټ عناصرو په m عدد او د يوه بل سټ د عناصرو شمېر مساوي په n عدد وي په دې حالت کې دواړه ټاکنې يو د بل سره د $(m \times n)$ د شمېر په ډول امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو څخه په گټه اخستې سره څو دوه رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو؟ برسيره پر دې د امکاناتو د ونې گراف يې رسم کړئ او هغه احتمال پيدا کړئ، چې له دې عددونو څخه يو عدد په اتفاقي (ناڅاپي) ډول و ټاکل شي، چې هغه عدد په 2 د وېش وړ وي.

د دې کار لپاره د ذکر شوی دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره دوه تش ځایونه د هر رقم لپاره په پام کې نیسو.

د کینې خوا په تش ځای کې د راکړل شویو پنځو رقمونو څخه 4 امکانونه (پرته له صفر) د 0, 1, 2, 3 او 4 عددونو د ځای په ځای کولو لپاره شته دي، خو د بڼې خوا د تش ځای لپاره 0, 1, 2, 3 او 4 هرو پنځو عددونو څخه گټه اخلو. په دې ترتیب د دې رقم د ټاکلو پنځه امکان شته دي، چې په مجموعي ډول $4 \times 5 = 20$ شمېر د دوه رقمي عددونو د جوړولو لپاره د پورتنیو عددونو په وسیله موجود دي.

دا مطلب کولای شو د ونه ییز د گراف په مرسته په لاندې ډول وښو، لکه:



د دې لپاره چې نوموړی رقم پر 2 ویش قابلیت ولري د بڼې خوا په تش ځای کې د 5 برابرې امکانو څخه یوازې 3 امکان د (0, 1, 2, 3 او 4) شته دي. د داسې عددونو د جوړولو لپاره چې پر 2 د ویش وړ وي د $4 \times 3 = 12$ برابر حالتونه دي، چې په لاندې حالت کې د هغه رقم د ټاکل احتمال چې پر 2 ویش وړ وي عبارت دی له:

$$P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\% \quad (\text{مطلوب عدد})$$

پوښتنې

- 1- د (م، د، ی) تورو څخه په گټه اخیستنه څو څلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کلیمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ییز گراف په مرسته تشریح کړئ.
- که چېرې د دې ترکیبي کلمو څخه په ناڅاپي ډول یوه کلمه وټاکو د دې احتمال پیدا کړئ، چې دا کلمه ((مریم)) وي.
- 2- د 0, 1, 4, 7, 8 او 9 عددونو څخه د میایل تلیفون څو داسې شپږ رقمي نمبري جوړولای شو چې د کینې خوا څخه په 077 پیل شوي وي.

د نهم خبر کی لنډيز

- د دې لپاره چې وکولای شو د ناڅاپي پېښو د ترکیب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره د ستونو د تیوري په کارولو سره یو ښه تصور ولرو هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د حادې احتمال	د Venn دیاگرام او اتفاقي حادثه	د بیان اړایه د ست په واسطه	د اتفاقي حادثې بیان
خرنگه چې $P(S) = 1$ نر		$\bar{A} = S - A$ یا $S = A \cup \bar{A}$	د S هغې ټولې ناڅاپي پېښې چې د A په پېښه کې ګډون ونه لري د A پېښې عکس دی.
$P(A \cap B)$		$A \cap B$	د A ناڅاپه پېښه یا د B ناڅاپه پېښه پېښوي.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		$A \cup B$	لږ تر لږه یو د A یا د B د ناڅاپي پېښو څخه پېښوي.

د شمیرنې حل: د دوو ستونو د عناصرو په ترکیب کې ټولو امکاناتو شمېر د هرې ترکیبي مجموعې د عناصرو ضرب د حاصل سره مساوي دي.

که د یوې مجموعې د عناصرونو امکان په m ډول او د بلې مجموعې د عناصرونو (غزو) امکان په n ډول وي دوی یو د بل سره د ترکیب د ټولو امکاناتو شمېر د $m \times n$ سره برابر دی.

د نهم خبر کی پوښتنې

1- که S یوه نمونه یي فضا او A د هغې یو ناڅاپه پېښه وي وښیئ چې:

a) که $A \subseteq \emptyset$ وي وښیئ، چې $P(A) = 0$ دی.

b) که $A \subseteq S$ وي په دې حالت کې $P(A) = 1$ دی.

که چیرې د C ناڅاپي پېښه د A او B ناڅاپي پېښې په بر کې ولرئ، وښیئ چې همدارنگه د C ناڅاپي پېښه د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه په بر کې ولري.

3- که چیرې S د A او B یوه نمونه یي فضا وي د B او $A \cup B$ ناڅاپي پېښې یو بل په بر کې ولري وښیئ، چې د $A \cup B$ او B یو بل سره برابر دي.

4- که د S په یوه نمونه یي فضا کې د B ناڅاپه پېښه د A پېښه په بر کې ولري، وښیئ چې د A او $A \cup B$ ناڅاپه پېښې یو بل په بر کې ولري. بر سېره پر دې ښکاره (واضح) کړئ، چې د دې ناڅاپي پېښو احتمال یو د بل سره څه اړیکه لري؟

5- که چیرې S یوه نمونه یي فضا وي او B د هغې یوه ناڅاپه پېښه وي وښیئ چې: $S - B = \bar{B}$

6- د ګراف په مرسته وښیئ چې د A او B دوي ناڅاپي پېښې او S یوه نمونه یي فضا د

$$A - B \text{ او } \bar{A} - \bar{B} \text{ ناڅاپي پېښې سره برابري دي، یعنې: } \bar{A} - \bar{B} = B - A$$

7- وښیئ چې د $\overline{A \cap (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})}$ ناڅاپي پېښ، احتمال د صفر سره مساوي دی.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library