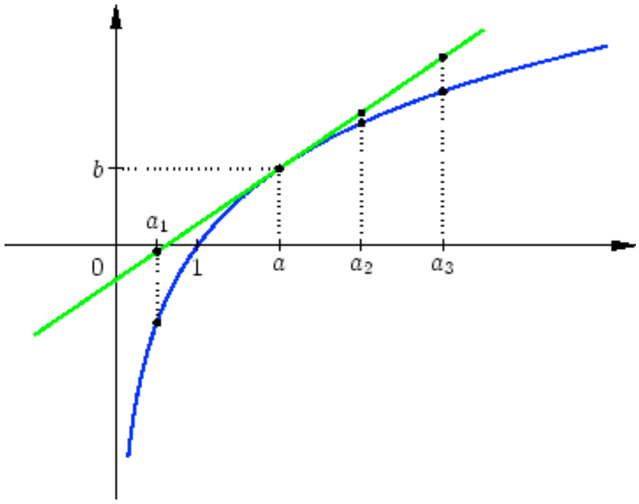
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



ډاکتر ماخان میرزي شینواری

دلوي ښبنتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ٢٠١٢

د ژباړي بريښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرۍ یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ تیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 درېګودېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x,y,z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0;r) = \{x \in M : d(x,x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونداری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرۍ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
ليکونکي: اٍپپ او هوليګ

د اويکليد يا اقليدس متريک Euklidische Metrik

په $\mathbb{R}^n$ کې د اويکليد واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

يو متريک دی.
مثبتوالی او سيومتري سملاسي ليدل کيږي او درپکوډي مساوات سيده د لاندې مينکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$$d_2(x,y) =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هامينګ واټن Hamming-Abstand

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تيوري کې (دوه بيز- -Binär) لغاتونه بلل کيږي.
د دوه n -ځايزو لغاتونو x او y د هيمينګ-واټن $=$
د k ګڼون يا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره $= d_H(x,y)$
يو ماتريکس دی په n -ځايزو بينارلغاتونو.
د بيلګې په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011,110) = 2$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

$$001, \quad 111, \quad 100 .$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځایونو کې توپیر لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن باید له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سیمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعریف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| .$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا M کې یوه پرلپسي (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کیږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسي پوله بلل کیږي او یواځنۍ ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

که (x_n) د x او y په لور وهڅیږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

$$d(x,y)=0$$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا اينډکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$$d(x_m,x_n)<r$$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو اينډکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$$d(x_n,x)<r/2$$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديوني تعريف شي. له دې سره سړی $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګي سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. پّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لپاره}$$

- Homogenität: هوموجينيټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: دربګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،هیورنر

د یوې نورمي وکتور فضا متریک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا V د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانځ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- هوموجینیتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

نیم نورم **Halbnorm**

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V باندې یو نیمنورم یو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

دی د لاندې خویونو سره:
HN1(HN د نیم نظم لپاره)
: ناکمیزوالی یا نامنفیوالی:
$$p(v) \geq 0$$
HN2
هوموجینوالی Homogenität:
$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$
HN3
درېګوډي یا مثلثي نابرابرون Dreiecksungleichung:
$$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

یو نیم نورم ټیک هلته یو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نیم نورم د تعریف لپاره وروستني دواړه خویونه بسیا کوي. ناکمیزوالی کیدی شي له دوي لاس ته راوستل.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له هوموجینیټي څخه سیده لاس ته راځي
$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$
او د درېګوډي نامساوات سره
$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = \\ = p(x) + |-1| p(x) = 2p(x)\,,$$
دا په دې معنا چې ناکمیزوالی یا نامنفیوالی
$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

متریک، چې د نیم نورم څخه رامنځ ته کیږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \, .$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هځیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \, . \, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل

$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$

باور لري او له دې امله

$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$

باور لري، کوم چې مخامخوالی یا تضاد دی.

له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره

$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$

باور لري. که کيږدو

$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k\,,$$

نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري

$$d(v_n, v) =$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)}$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

$<$

څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا M د یوې برخدېرئ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاې ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$ ، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخئ پروسي خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرئ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخدېرئ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخدېرئ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخدېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلې او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخدېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دریم: څلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقیقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ څخه پوښ کیږي، مګر دې ته یو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نیم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د طبیعي اعدادو پرلپسي $1,2,\ldots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په یوه ساحه باندې ناپرېکیدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیزو) ناپریکیدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نیمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره یو متریک تولیدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\,.$$

نسبت دې متریک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکیدنه خوندي پاتې کیږي.
د تولیزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای یوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېریو پرلپسي

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$$

کارول کیږي یا استعمالیږي.
د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکیدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

د يوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکيږي، د $C_0^\infty(D)$ سره يا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کيږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او ديستريبوتيو تيوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کمزوري يا ضعيف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتيګرال په مرسته کيدی شي کلاسيکي مشتقکليمې ټولنيزې شي. يو تابع
$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

يو په تعريف ورشو يا ساحه D تعريف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه يادوو، که
$$\int\limits_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$
د $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ږاندنيونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتيګرالونه شتون لري. د بيلګې په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کيږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتيګرالوړ وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

توپولوژيکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

يو توپولوژيکي وکتروفضا V يوه وکتور فضا ده، د وازو ډېريوو ياسټونو په يوه سيستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخويونو سره ورکړل شوی يا روښانه شوی دی

T1
$$\emptyset \in \mathcal{U}$$

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېریو یا ستونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېریو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

یوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د یوه ټکي $v \in V$ چاپیریال بلل کیږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچینې یا پیل د چاپیریالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کیږي، که هر چاپیریال $U(0)$ د لوکال بنسټ یو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې یو توپولوژیکي جوړښت کیدی شي د بیلګې په توګه د یوه متریک یا نورم له لارې کره وټاکل شي یا کره شي. دا یو پولې ته تلنکلیمه راکوي. یوه پرلپسې (v_n) تیک هلته یوه کوښې پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره یو ایندکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپیریال U کې د پرلپسې ټول

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې یعنې پای ډېر غړي کیدی شي له دې چاپېریال دباندې پراته وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بانخ فضا **Banach-Raum**

یو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کیږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متریک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې یو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخېدونکي یا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په یوه کومپاکت ډېریو باندې ناپرېکیدونکې توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکیدونکو (حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیز) توابع په یوه کومپاکت برخه ډېریو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعریف شوي نورم ته. پوره کیدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.
د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په کومپاکت ډېریو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکیدونکو مشتقوړ توابعو)(حقیقي – یا کومپلکس ارزختیزې) فضا $C^m(K)$ په یوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع **p-integrierbare Funktionen**

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \leq p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p \right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکې ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $L^p(D)$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $\|\cdot\|_p$ ته ده.
توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا ٔفرستې سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څېرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په تولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع Beschränkte Funktionen

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې

$$|f(x)| \leq c < \infty$$

نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

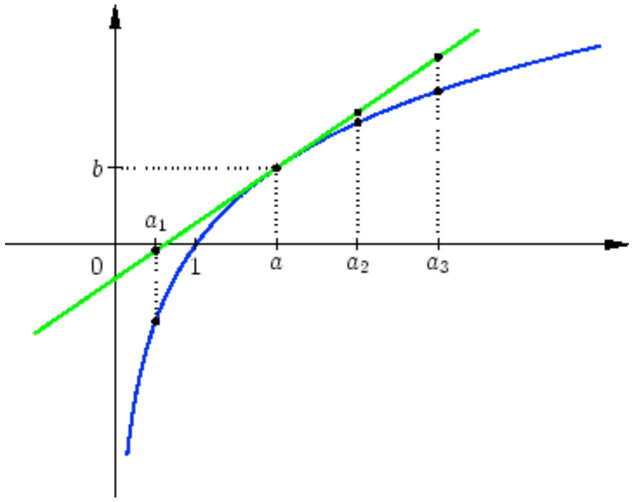
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سړی د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ \ y = b + \frac{1}{a}(x-a)$$

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a)\right) = b + \frac{1}{a}\left(\sum_i \lambda_i a_i - a\right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$ سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.

د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدلیدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx\,.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارڅ نامساوات هم بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څیرنې لاندې نیسو. داپسې بې له ټولیزو بندیزونو کیدی شي ونیول شي یا فرض شي، چې انتیګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زیاتیز یامثبت دي. که د بیلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چیرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اینواریانت یا بې تغیره دی، کیدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونیول یا فرض شي.

د موَزنو اریتمیتیکي - او هندسي - یا څمککچیز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتیګرالونې پسي لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \le p < \infty$ سره د مینکوفسکي نامساوات باور لري

$$\left(\int\limits_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو f ، g څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I = \int\limits_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له تولیزو محدودیتونو زایاتیز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\le \int\limits_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int\limits_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx. \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int\limits_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سرى د مينكوفسكي نامساوات لاس ته راوړي
ليكونكي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليف فضاوې Sobolev-Räume

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

كي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k}\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی
$W^{0,p}(D) = L^p(D)\,.$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$

په n–بعدیزې یا n–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

تر ځیرنې نیول کیږي. د $s > -n$ لپاره f انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سړی لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s\,dx = c_n\int_0^1 r^s r^{n-1}\,dr\,,$$

چیرته چې c_n دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1 - n$ لپاره د f یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتې سره. په غونډاري کواودینات کې سړی لاس ته رانړي

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,2}^2 &= \int\limits_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx \\ &= \text{const.} \int\limits_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr\end{aligned}$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1 - n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي ځخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅیړل شي، نو f مربع انتیګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1 - n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const} \int\limits_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کیدی شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه تږليزه کوي، مګر قوي سينګولاريټي اجازه نه لري. د بيلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا n– پراخيدوني انتروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅېرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزوری مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx = -\int\limits_{x_1 \geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسي حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارخ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \quad \leq \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کې خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره تیک یوه خوندیونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.

د محدودې ورشو لپاره خوندیونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

د بیلګی په توګه خوندیونه

$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په n–بعدیز یونغونډاري

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

څیرل کیږي. تابعه د $s > -n/q$ لپار q–انتیګرالوړ ده، ځکه چې د غونډاري کواوردینات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int_D |x|^{sq}\, dx = c_n \int_0^1 r^{sq} r^{n-1}\, dr\,,$$

د کوم سره چې c_n د یوونغونډاري $(n-1)$-بعدیز حجم دی. نور پسې دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$$

د f یو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره p– انتیګرالوړ دی. دا بیرته کیدی شي د غونډاري کواوردینات له لارې وازمایل شي

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \leq |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \leq \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديوني جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right) > n \left(-\frac{1}{q} \right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بانخ ځای په ځای ټکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسې (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسې د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیټی ته اړتیاپیښه نه شي، کیدی شي سرې د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ $\|x-y\|$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

د لاندې خویونو سره:

- مثبتوالی: Positivität:

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- مایلسیمتري Schiefsymmetrie:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

- کرښيزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مايل سيومتري په بسټ يو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دويمي متحولي يا اووښتونې ته کرښيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

يواځې د حقيقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګيشن بې معنا دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کرايخ

هيلبرت - فضا Hilbert-Raum

يوه هيبرت – فضا H يوه پوره نورمي (حقيقي يا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعريف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرڅ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخيز-ايدنتيتي يا - - کتمتوالی

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

سړی د هيلبرت-فضا Hilbert-Raum سيپارابل Hilbert-Raum بولي، که يوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- وديزينه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k} \,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دی، ځکه چې هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2} \,,$$

دا په دې معنا، چې فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

$$\langle f,g\rangle_2 = \int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښویي تابع په خیر د رابندېدني په توګه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتیګرالوړ تابع کېدی شي د يوې ناپای پرلپسي په توګه د زیاتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسیمی یا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f-f_n\|\to 0,\quad n\to\infty\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بیلګې په توګه تابع

$$f(x)=|x|^s$$

په پراخیدوني یا - بعدیزې یوونګردی(دایره واحد)

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$$

تر ځیرنې لاندې ونیل شي.

د غونډاري کواوردینات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\int\limits_D |f(x)|^2\,dx = c\int\limits_0^1 r^{2s}r^{n-1}\,dr = c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s>-n$ لپاره مربع اېګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>1\},$$

تر ځیرنې لاندې ونیسو، نو بیا هم د غونډاري کواوردینات سر لاس ته راځي

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int\limits_1^\infty r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چي $2s < -n$ د f لپاره مربع انتيګرالوړ دی.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا
Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقيقي - يا کومپلکس ارزښتيزو) هيلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتيګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چي نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f,g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f,g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د فورير- لړئ

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتيګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty\,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx}\,dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوريی – بنسټ e^{ikx} د اورتوګوناليټي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتيګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty\,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx}\,dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2\,.$$

دا چې له دويم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هاردي-ليبسګ فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-ليست – فضا HL د ټولو د يوونکردئ په ټيکلي

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f\rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty\,.$$

سره.

پوره اورتونورمالسيستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

يو اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ په هيلبرت- فضا كي پوره يا ماسيمال بلل كيږي، كه

$$\forall_{i\in I} \quad \langle u, e_i\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i\in I} \quad \langle u, e_i\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

يو اورتونورمال سيستم ټيک هلته د هيلبرت – فضا يو اورتونورمال بنسټدی، كله چط هغه پوره وي.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت٠فضا كي فوری-پروجكشن (پرېوستون)
Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د يوه وكتور v فوريي –پروجكشن په يوه هيلبرت-فضا H كي د اورتونورمالسيستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot , \cdot \rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\| v - p_n v \| = \min_{q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \| v - q \| .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیتي څخه تړلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n .$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\| v - q \|^2 = \| v - p_n v + p_n v - q \|^2$$

$$= \| v - p_n v \|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \| p_n v - q \|^2$$

$$= \| v - p_n v \|^2 + \| p_n v - q \|^2 ,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

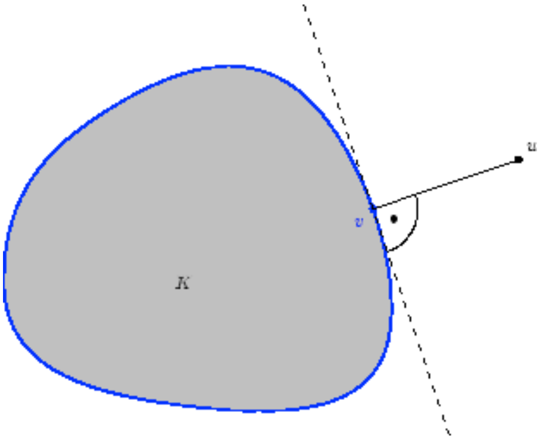
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت- فضا باندي د کونوکسو(وتلو) ډېريو خورا ښه اپروکسیمیشن

Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د یوه هیلبرت-فضا H د یوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته یو یواځنی ځورابنه اپروکسیمیشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u-v\| = \inf_{w\in K}\|u-w\|\,.$$



خورابنه اپروکسیمشن یواځنی د

$$\langle u-v, w-v\rangle \le 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتریزه(خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u-v$ او $w-v$ ترمنځ کونج پخ دی.

په ځانګړي توګه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسیمشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټیکاوی $u-v$ و U ته اورتوګونا دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2 .$$

د غبرګ اړخيز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2 \\ &= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2 \\ &\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2 . \end{aligned}$$

دا چې د کږوږ ورږو نوکانو افاده یا وینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي-پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d .$ سره.

پوله ارزښت یواځنی دی، ځکه چې که یو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د $\|u-w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی او باید $v = w$ باور ولري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپلیمنت
Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د یوې هیبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – یا برخه – فضا Uته یو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې یوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \ .$$

سره.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

دا چې $U^{\perp}$ د H یو لاندې – یا برخه فضا ده، سیده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسې

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره یو خورا ښه اپروکسیمیشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

میمال کوي. که کیږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې

.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$v \in U^{\perp} . \qquad \langle \tilde{u}, v\rangle = 0$$

همداسې

.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات

Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

$$v \in H$$

د ټولو لپاره.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ښونه فقط یوه ګڼلوړ اورتونورمال سیسم لپاره مخ ته بیایو.

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ایدکشن(پیژند نخښو) یوه په خوبنه پرلپسي په I کې. د کومپلکی اعدادو یوهپه خوبنه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورمالیتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبرت-فضا H کې د یوه پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

$$u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – ودیزینه بولي.
ليکونکي: اېپ، هيوليک

په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم
$\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2 -نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزيوال – کتوتوالی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز بنکشنل Λ يو ناپرېکيدونکی کرښيز تابع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري څېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

$\|v_n\| \le 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \le \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سرې ړنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

په صفر د يوونغونداري د ټولو u لپاره. كه اوس سړی يوه په V كې په خوښه پرلپسي (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنكشال ناپرېكيدنه لرو.

ليكونكي: اېپ، هيوليګ

د پيلګې لپاره دا كرښيز فنكشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانيسو.

د په $C[0,1]$ د ماكسيموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنكشنال ناپرېكيدونكی دی. د تابع (فنكشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنكشنال د نورم لپاره راكوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2-نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n, \quad n \in \mathbb{N} \,,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1)\, x^{2n} \, dx = 1 \,,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلني یا مخ ته بیوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکیدونکي کرښیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u| .$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)^2\, dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\, b^2 + \frac{4}{3}\, ac + \frac{2}{5}\, c^2\,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0\neq f\in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2}\,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b=0$ ، $c=-\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}_{p(x)} f(x)\, dx$$

کوو او ضریبونه α,β,γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\}.$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارڅ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\,dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګونې فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کربنیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیده لیدل کیږي، چې V' یوه نورمي وکترفضا ده. د بشوول یې د V' پروه والی دی.

وي دې (Λ_n) یوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ یوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو یو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعریف شوی تابع کرښیز او له پورته تخمینونو نورم پرلپسي د ناپرکیدنې له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکیدونکې دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\ .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه ييزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه ييزه فضا V'' د V' دوه ييزه فضا ده. دا چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کرښيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V\,,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاي بعدي(پراخيدوني) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \leq p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

اوس يوائې $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اينکلوزيون يا خونديونه ښوول کيږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda: \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ يو ناپرېکيدونکی کرښيز فنکشنال تعريف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتيګرالونو لپاره دی

$$(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\Lambda f| \le \|g\|_q \,.$$

د $f = \operatorname{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تيره يا تيز دي، دا په دې معنا، چې سرې لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q \,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ريسخ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د يوې هيبرت-فضا H او يوه کره يا کلک $v \in H$ لپاره د

$$\Lambda: \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v\rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کربنيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو تيک يوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو تيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د يواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا L^2 د خپلې دوال- يادوه
ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپيژندل شي.

ليکونکي: ايپ، هيوليک

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په يوه نورمي شوي وکتورفضا V يوه پرلپسي (v_n) کمزورې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسي

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی يا په ځتوالی په ټوليزه توګه باور نه لري.

ليکونکي: ايپ، هيوليک

د بيلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کيدونکي پرلپسېو l^2 کې پلپسي

$= (0,0,0,\ldots)$	e
$= (1,0,0,\ldots)$	e^1
$= (0,1,0,\ldots)$	e^2
$\vdots$	

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال Λ په l^2 د رسسخ(ووینه: ریخ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$||e^n - e|| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L: \quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کې د کرښيز تابع په ځای کاروي، چې داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له V څخه د W پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که W يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K: \quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y)f(y)\,dy$$

له لارې يو كرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته ښيري- يا تابع - او ډښيري فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړې تابع K د خويونو په واک کې دي.

په لاندې کې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه وركړ شوې.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېكيدونكې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int\limits_D |K(x,y)|\,dy$$

- $$K \in L^2(D \times D)$$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2\,dx\,dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

د کرښیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کرښیزو اوپراتورونو پرلپسیو لپاره لاندې دوه کلیمې کارول کیږی.

- Punktweise Konvergenz ټکي ډوله پولې ته تلنه

یوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټکيډوله د یوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to Lv, \quad \forall v \in V\,.$$

- Gleichmäßige Konvergenz برابرډوله پولې ته تلنه

یوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله دیوه اوپراتور L په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - Lv\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټولیزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښيز اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V ,$$
،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty ,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرېوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا(غلیضه) برخه دېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ ټیک هلته ټکي دوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v \ , \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U \ , \quad L_n u$$
پولي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty \ .$$
(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جي U په V کې ټینګه یا کیمنډلي ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري، داسې چې دی

$$\|u-v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} .$$

پرلپسېږي $(L_n u)$ د نيونې يا فقضيي له مخې پولې ته ځي، يعنې يو اينډکس يا پيژندنښه n_0 شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \le \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\mathrm{p}\,\|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon ,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې يوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، يعنې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W .$$

د L محدودوالی او کرښيزوالی تړلی د نورم له ناپرېکيدنې لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرايط b) و ښوول شي. دا د برابرډوله محدودوالي له شرايطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتيګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زياتيز يا مثبت وي او s_n ټيک دی د $< n$ درجې پولينوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاينهوز له جملې ټرلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1], \mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولينومونو ټينګه برخه فضا باندې. د پولينوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښايو، سړی په پام کې نيسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

دا چې s_n د ثابتو یا د تل همغو توابعو $f(x)=c$ لپاره تیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V,W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکې یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسې (v_n) لپاره پرلپسې (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولرې.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V,W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V=W=l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، څکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسېو پلرپسي

	e_1	$= Le_1 = (1,0,0,\ldots)$
	e_2	$= Le_2 = (0,1,0,\ldots)$
	$\vdots$	$\vdots$

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.

- Der Operatorکرښيزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسيو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. يعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځايونه $(c_{n,1})$ تر ځيرنې لاندې ونيسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پيداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځايونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسيو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځايونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونيسو، نو بيرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پيداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي يا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځایونو وکتور $(d_{k,1},\dots,d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښایو، چې (d_k) غوښتونې برخپرلپسي ده، نو یوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس K داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty}\frac{4}{j^2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسې (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنیو K ځایونو لپاره پولې ته ځی، نو یو ایندکس N شتون لري،دا سې، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K}\frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2=\sum_{j=1}^{K}\frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2}+\sum_{j=K+1}^{\infty}\frac{\overbrace{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ یو په باندې(surjektiver) محدود کرښیز اوپراتور L یوه وازه ډېرئ په یوه وازه ډېرئ ځېره کوي.

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې ځخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دويم نامساوات سملاسې د L د محدودوالي ځخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ځيرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښنه کيږي او ځېره -فضا W د نورم

$$\|w\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښنه کيږي. د

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_1$$

له امله کتمتوالی L يو په (bijektiver) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_{\infty} = 1$$

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L:\ V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$v_n \to v$ او $w_n = Lv_n \to w$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې ښخه لیدل کیږي، چط سړی د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیي صرف نظر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L: \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. L یوو کربنیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په یوه سیپارابل هیلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کیدی شي د
ماتریکس

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چيرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضريبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د فورير-پروجکشن د پولې ته تلنې او د L کرښيزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سرې د L ماتريک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه به د يوه 2π -پريودي يا 2π - تل بيرته راګرځيدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو Matrix-Einträge لپاره سری لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوریي- ضریبونو یو دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\,dt\,dx$$

په تعریف کې سری $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)}e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = 2\pi\varphi_k\delta_{j,k}\,.$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتری یا دیاګونال دی، د f د فوریي- ضریبونه د 2π –واره د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود کربنيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^\star w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريکس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^\star = L$ باور ولري، نو سرې L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړي تابع وي د

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \, ,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کربنيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارځ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_D |(Lf)(x)|^2 \leq \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int\limits_D |f(y)|^2 dy \, ,$$

دا په دې معنا، چې L يو محدود کرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L ټيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \,,$$

چيرته چې I کټوټوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خوونې يا کرګتريزه کونې دي

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتيويتې يا په باندې والی له مخه نيول شوی دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

که Q يونيتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې يا سورجکتيو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^\star Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^\star Q = I$، دا په دې معنا، چې خوېې (a.

دا ساده ليدل کيږي،چې له خوي يا کرمتريزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^\star Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^\star Q - I = L^\star$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسي

$$0 = \langle L(v+w), v+w\rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، كه په ځتنګړې توګه كيږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سكالار شوى د فوريې – ترانسفورميشن رانيسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دى ، نو L يونيتار دى، او اديونكيري اوپراتور د، اړونده سكالار شوى، د معكوس فورى-ترانسفورميشن له لارې وركړ شوى دى:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

د يوه کرښيز اوپراتور آيګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د يوه V وکتور فضا يوه کرښيز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آيګن ارزښت بولو او v د آيګنوکتور په حيث(همداسې ديوه وکتور فضا V لپاره آيګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آيګن فضا بلل کيږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آيګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بيلګې لپاره به يو ناپرېکيدونکی نا- ثابت 2π - پريوديکي(تل بيرته راګرځيدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه راونيول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L: \quad f \mapsto \varphi f$$

آيګن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آيګن تابع په څير لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ايګن ارزښتونه دی.

د هرميتيکي اوپراتورونو آيګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د يوه هرميتيکي اوپراتور $L: H \to H$ آيګن ارزښتونه حقيقي دي او آيګنوکتورونه و مختلفو أيګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرميتيکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقيقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آيګن وکتور وي و آيګن ارزښت λ ته، نو

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسې

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آيګنوکتور وي و آيګن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L: H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيګن ارزښت دی

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| \,.$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څېر $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle+\langle LLv,v\rangle+\langle Lv,Lv\rangle-\frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$=4\langle Lv,Lv\rangle=4\|Lv\|^2\,.$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle|=\|v\|^2\left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\leq s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخيز – يا مازی الاضلاع کڅمتوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2\leq\frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v+\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2+\left\|\alpha v-\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$=\frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2+\frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right)\,.$$

که په ځانګړې توګه کېږدو

$$\alpha=\left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\|\leq s\|v\|$$

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\|\,,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|\,.$$

سره.

اوس فقط ښايو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2\,,$$

د کوم سره چې ښی اړخ د ∞ $k \to$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅیږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots ,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیګن رازښتونه λ_j یوه همغږیزه صفرپرلپسي جوړوي، یعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots , \quad \lambda_j \to 0 \, .$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j \, .$$

ښوونه یې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کیږي.

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| \,.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\| \,.$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، خکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

$$\dim \operatorname{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دویم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنیونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپای ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \dots\}$ څېره یا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ یا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \dots\}$$

نسبي کومپاکت ده، باید یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې یې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دریم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \dots$ یو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \operatorname{Bild} L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا ودیزېنه ترلې د کرښیزوالي څخه لاس ته راځي، چیرته چې آیگنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تیریدلی شو یا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-لیوویل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \text{ auf } (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکیدونکي، کره همغږيزو توابعو p, q سره يو ځانګړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آيګن توابعو څخه وښوول شي، د ايګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مګر له دې برسيره نور فکر کونې ته اړتيا لري.

د آيګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب ټوټه انتيګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

راکوي، يعني $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يوائځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل u د f کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر L ته يو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af \, .$$

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې A د ځان سره – يا خپل ادجونګيري ده. د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag \rangle \, .$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c \, \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0 \, \|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعنې د سوبليو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځورونې څخه له آيګن توابعو څخه د يوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چيرته چې د آيګنارزښت مطلق ارزښت λ_j يوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وينا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتيز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نيمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې يو متريک تعريفوي. د يوه په خوښه کره ټاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ايندکس جوړه Multiindexpaare سرې

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1+|f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ړدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ د شوارخ د ازماېښت تابع د $\mathcal{S}$ يو نينګه يا غليظه لاندي فضا ده. په انالېز کې په $\mathcal{S}$ باندي د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګي توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانييونې Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چي p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|<1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دي سره په $\mathcal{S}$ پورې.

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګونې فضا S' جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \,, \quad f \in \mathcal{S} \,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha| \,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha f| \right) \leq \tilde{c} \sum_{|\alpha| \leq k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونډ زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \le \left(\max_\alpha |c_\alpha|\right) \sum_\alpha |f|_{0,\alpha}\,.$$

په ازماښت توابعو د کرښیزو توابعو لپاره بېلګې چې په S ناپرېکېدونکي(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تیمپریري دیستریبیوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د یوه دیستریبیوشن $\Lambda \in S'$ توته مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\, (\partial^\alpha f)\ , \quad f \in S\,,$$

له لارې تعریف شوی دیستریبیوشن دی. دا تعریف د کمزورو مشتقونو کونځپت(کنسپت) تولیز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int_D \varphi(x) f(x)\, dx\,, \quad \varphi \in C_0^\infty(D)\,,$$

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غږیز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \, .$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

Dirac- und Heavyside-Funktional دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال

د هیویزایډ-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \, .$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \, ,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه كمزوري چټكېدونكي تابع $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ ,\, f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شړى تيمپريرى ديستريبيوشن $(\varphi\Lambda)$ دى.

$$\sup_x \left|\left(1+|x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi\right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو(ډېر) اندكشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانګړې توګه د ټول پولينومونو لپاره پره دى.

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو قات كونه يا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه ګړندي لويدونكي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$\left(\Lambda \star \varphi\right)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرګونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعني د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

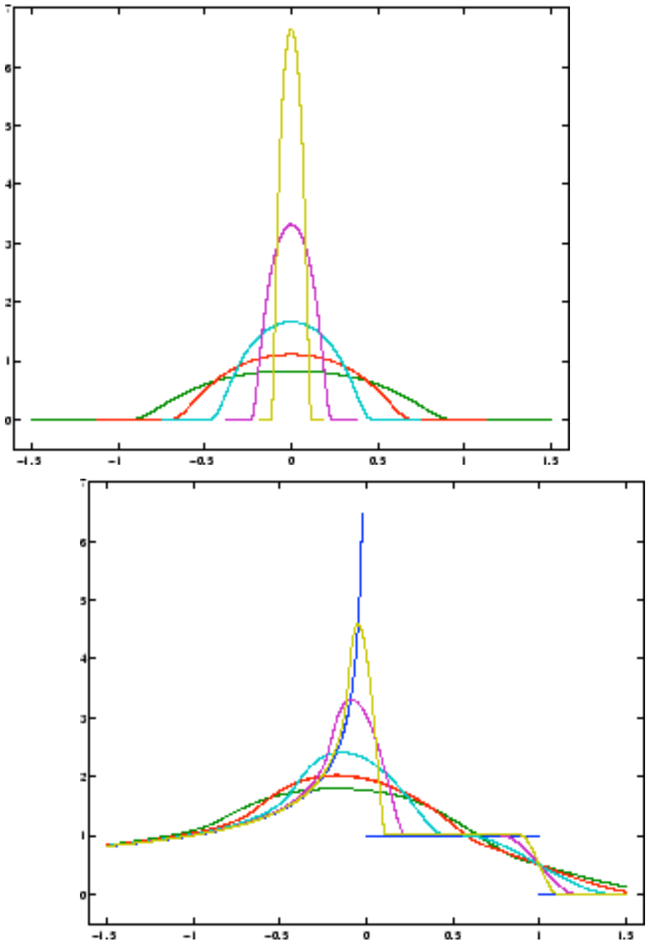
اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$



کینه ځیرونه یاتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1)), x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع یا ځیرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کې چې ښوول شوی دی، کیدی شي قاتونه د توابعو د خویوني لپاره وکارول شي، ځکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty .$$

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کرښيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\exp(\mathrm{i}xy)\,dy$$

ناپرېکيدونکي کرښيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماېښت توابعو په فضا S باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ دی، نو بايد چې د S په توپولوژي کې ناپرېکيدنه وښايو:

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څېر يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسې په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} \underset{=}{} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$\underset{=}{} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوڅیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګرندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري او د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y) = \sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda} = p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial) = \sum a_\alpha (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ توپه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y) = y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبوليف-فضا $H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\,,\ s\in\mathbb{R}$ د ټولو تيمپيری ديستريبيوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda}\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\,,\quad w(y) = \left(1+|y|^2\right)^{1/2}\,.$$

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k\in\mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توټه مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n)=H^s(\mathbb{R}^n)'\ ,\quad s\geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ښووني لپاره د $n=1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څېرني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k\in\mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کتمتوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f,f',\ldots,f^{(k)}\in L^2\Leftrightarrow\hat{f},|y|\hat{f},\ldots,|y|^k\hat{f}\in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j\leq\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\leq c\left(1+|y|^k\right)\ ,\quad y\in\mathbb{R}$$

د $j\leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f}\in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د فوریې ترانسفورمیشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دیاګرام لري

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوخیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي$\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda} WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x) w^s(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس
کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربنيز اوپراتور $L : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = \left(Lf\right)(\cdot - h)\,,$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}\,,$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)|\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب c_α سره یو تیمپریري بنسټیز حل شتون لري، دا په دې معنا، چې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسیشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشیشن مساوات یا –برابرون

$$Lu = f\,,\quad f \in \mathcal{D}\,,$$

یو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اونیوارینت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تیمبیریري بنسټیز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونیا مساوات فوریې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2\Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda}+\hat{\Lambda}=1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda}=\frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u''+u=\sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټيز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د يوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعديز ډکي يا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

يو بنسټيز حل دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ښوونې لپاره سرې د $\Delta\varphi = \Delta|x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغيزه په يوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نيسو:

$$\Lambda f = \int_{R^n} \varphi \Delta f \, .$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ وړانګي ε او دباندنئ وړانګي R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼي له مخې باور لري

$$\int_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \, ,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې $\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سړی پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \, , \, r \in [0, \infty) \, , \, x^\circ \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \; = \qquad - \int_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\mathrm{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+ \int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \qquad -\varepsilon \int_{S_n} (\mathrm{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

$$+(2-n)\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^{\circ})dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\ln r) &= \frac{x^{\circ}}{r}\,, \quad r \neq 0\,,\\ \Delta(\ln r) &= 0\,, \quad r \neq 0\,,\\ \lim_{\varepsilon\to 0} \quad \varepsilon \ln \varepsilon &= 0\,.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتوـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راځخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)